BULLETIN DE LA S. M. F.

PHILIPPE MICHEL

Condition nécessaire d'optimalité pour un système régi par des équations aux dérivés partielles non linéaires de type parabolique

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 65-88

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__65_0>

Bull. Soc. math. France,
105, 1977, p. 65-88.

CONDITION NÉCESSAIRE D'OPTIMALITÉ POUR UN SYSTÈME RÉGI PAR DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉS PARTIELLES NON LINÉAIRES DE TYPE PARABOLIQUE

par

PHILIPPE MICHEL (*)

Université Paris I

RÉSUMÉ. — On considère un problème d'optimalité avec liaisons et contraintes, pour un système à commande régi par une équation aux dérivées partielles parabolique, non linéaire par rapport à l'état et à la commande. Parallèlement à l'étude générale on considère des données particulières dans le cas d'un contrôle distribué et dans le cas d'un contrôle sur la frontière. On établit une condition nécessaire d'optimalité du type « principe du maximum de Pontrjagin », en définissant l'état adjoint dans le dual de l'espace des valeurs de l'équation linéarisée. On analyse les similitudes et les différences des hypothèses faites ici avec celles que l'on fait usuellement pour les équations différentielles ordinaires. On étudie également les possibilités de la méthode employée dans le cas des équations elliptiques et dans celui des équations hyperboliques.

Introduction

La formulation d'un principe du maximum pour les équations aux dérivées partielles a fait l'objet de tentatives diverses, et à notre connaissance, elle s'est toujours limitée aux cas linéaires et où il était possible de définir *a priori* la solution adjointe ([4], [10] et [1]).

La présence de contraintes sur l'état exclut cette possibilité : il faut prouver l'existence simultanée de certaines constantes (les coefficients multiplicateurs des contraintes) et d'une solution du système différentiel adjoint où figurent ces constantes. A l'aide d'un théorème de condition nécessaire d'optimalité abstrait, avec liaisons dans un espace de dimension infinie [6], on peut résoudre le problème en considérant l'équation comme une telle liaison.

(*) Je remercie I. EKELAND de ses conseils amicaux.

1. Problème et données

1.1. *Données.* — V et H sont deux espaces de Hilbert sur $\mathbf{R}$ tels que V est contenu dans H, l'injection de V dans H est continue, et V est dense dans H. On identifie H à son dual : alors, H s'identifie à un sous-espace du dual V' de V, l'injection de H dans V' est continue, et H est dense dans V'; et le produit scalaire $(.,.)$ entre V' et V coïncide sur $H \times V$ avec le produit scalaire de H.

Soit un nombre $T > 0$; pour $X = V, H, V'$, on définit l'espace $L^2(0, T; X)$ des fonctions mesurables f de $]0, T[$ dans X telles que

$$\int_0^T \|f(t)\|_X^2 \, dt < \infty;$$

ce sont trois espaces de Hilbert qui vérifient les mêmes propriétés d'inclusion, de continuité des injections et de densité.

1.2. *Équation.* — On considère l'équation aux dérivées partielles parabolique abstraite ([5], chap. 3, 4) :

$$\frac{dy}{dt} + f(y, u) = 0; \tag{1.1}$$

$$y(0) \in C. \tag{1.2}$$

y appartient à l'espace W des fonctions y de $L^2(0, T; V)$ telles que

$$\frac{dy}{dt} \in L^2(0, T; V').$$

u appartient à un convexe fermé M d'un espace de Banach (ensemble de commandes).

f est une application de $W \times M$ dans $L^2(0, T; V')$.

C est un convexe fermé de H.

Remarque. — Dans le cas où f est linéaire par rapport à y et à u, et où C est réduit à un point, on obtient l'équation du problème de contrôle de [4] (chap. 3, 2).

1.3. *Problème de contrôle optimal.* — On considère le problème suivant : *minimiser* $f_0(y, u)$ *pour* y *solution de* (1.1) *et* (1.2) *correspondant à une commande* u *de* M *et vérifiant*

$$f_i(y, u) \leqslant 0, \quad \text{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r; \tag{1.3}$$

$$f_i(y, u) = 0, \quad \text{pour} \quad r+1 \leqslant i \leqslant r+q. \tag{1.4}$$

Les fonctions f_i, $0 \leqslant i \leqslant r+q$, sont des fonctions numériques définies dans $W \times M$.

2. Hypothèses de différentiabilité des données

$(\bar{y}, \bar{u})$ est un point fixé de $W \times M$.

2.1. *Définition de la dérivabilité stricte* ([1], 1.2.2). — On dit qu'une fonction h définie dans une partie N d'un espace normé est strictement dérivable en un point x_0 de N s'il existe une fonction linéaire continue l telle que

$$\text{limite}_{(x_1, x_2) \to (x_0, x_0),\, x_1 \neq x_2,\, x_1 \in N,\, x_2 \in N} \frac{h(x_1) - h(x_2) - l(x_1 - x_2)}{\| x_1 - x_2 \|} = 0. \tag{2.1}$$

La dérivabilité stricte est une conséquence de la dérivabilité continue (au sens de Fréchet); on trouve un critère simple dans [7] (1.4.3).

2.2. *Hypothèses sur les fonctions f_i. — Nous supposerons que chacune des fonctions f_i, $0 \leqslant i \leqslant r+q$, est strictement dérivable en $(\bar{y}, \bar{u})$.*

Exemple. — La fonction coût de [4] (chap. 3, 2.1) :

$$\mathcal{J}(y, u) = \| C y - z \|_{\mathcal{H}}^2 + (N u, u)_{\mathcal{U}},$$

pour des espaces de Hilbert $\mathcal{H}$ et $\mathcal{U}$, $C \in \mathcal{L}(W, \mathcal{H})$, $z \in \mathcal{H}$, et $N \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{U})$, est continûment différentiable dans $W \times \mathcal{U}$; donc, si M est convexe fermé de $\mathcal{U}$, elle est strictement dérivable en tout point de $W \times M$.

2.3. *Hypothèses sur la fonction f.* — Nous supposerons que la fonction f de $W \times M$ dans $L^2(0, T; V')$ est strictement dérivable au point $(\bar{y}, \bar{u})$ de $W \times M$.

Remarque. — Pour obtenir une condition nécessaire d'optimalité du type « principe du maximum de Pontrjagin », l'hypothèse de dérivabilité par rapport à la commande est *a priori* trop restrictive; mais on peut s'y ramener par l'intermédiaire de paramètres de commande. C'est ce que nous allons montrer dans un cas où les données sont plus précises.

3. Données particulières

Ω est un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$; k est un entier positif. *On suppose que H est l'espace $L^2(\Omega)^k$ et qu'il existe un nombre $p > 2$ tel que $V \subset L^p(\Omega)^k$, et que l'injection de V dans $L^p(\Omega)^k$ est continue.* C'est le cas par exemple des espaces de Sobolev $H^s(\Omega)^k$, $s > 0$ [9].

Alors il existe un nombre $q > 2$ tel que $W \subset L^q(Q)^k$, $Q =]0, T[\times \Omega$, et que l'injection de W dans $L^q(Q)^k$ est continue.

En effet, on sait que $W \subset L^\infty(0, T; H)$ et que l'injection de W dans $L^\infty(0, T; H)$ est continue; on peut toujours supposer $p \leqslant 4$. Soit $q = (p+2)/2$; on a les relations suivantes, pour toute fonction $y(t, x) \in W$:

$$\int_\Omega |y(t, x)|^q dx \leqslant \left(\int_\Omega |y(t, x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |y(t, x)|^p dx\right)^{1/2};$$

$$\int_\Omega |y(t, x)|^q dx \leqslant \| y(t) \|_{L^2(\Omega)} \| y(t) \|_{L^p(\Omega)}^{p/2};$$

$$\int_0^T \| y(t) \|_{L^p(\Omega)}^{p/2} dt \leqslant K \left(\int_0^T \| y(t) \|_{L^p(\Omega)}^2 dt\right)^{p/4};$$

$$\int_Q |y(t, x)|^q dt\, dx \leqslant K \sup_t \| y(t) \|_{L^2(\Omega)} \left(\int_0^T \| y(t) \|_{L^p(\Omega)}^2 dt\right)^{(q-1)/2};$$

$$\| y \|_{L^q(Q)} \leqslant K^{1/q} \| y \|_1^{1/q} \| y \|_2^{1-(1/q)} \leqslant K^{1/q} \sup(\| y \|_1, \| y \|_2),$$

où $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont les normes de $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^k)$ et $L^2(0, T; L^p(\Omega)^k)$ respectivement, et $K = T^{1-(p/4)}$.

Par conséquent, il existe une constante α telle que

$$\forall y \in W, \qquad \| y \|_{L^q(Q)^k} \leqslant \alpha \| y \|_W. \tag{3.1}$$

On considère d'autre part une fonction $f(y, u)$ qui est somme d'une fonction $d(y)$ et d'une fonction $g(y, u)$.

3.1. *Hypothèses sur la fonction d.* — Nous supposerons que d est strictement dérivable en $\bar{y}$, et que sa dérivée s'écrit :

$$d'(\bar{y})\, y(t) = A(t)\, y(t), \tag{3.2}$$

pour une famille $(A(t) \in \mathscr{L}(V, V'),\ t \in]0, T[)$ qui vérifie les conditions usuelles de continuité et de coercivité uniformes par rapport à t : il existe des constantes a, b et c, $c > 0$, telles que, quels que soient $t \in]0, T[$, $\varphi \in V$ et $\psi \in V$, on a

$$|(A(t)\varphi, \psi)| \leqslant a \| \varphi \|_V \| \psi \|_V, \tag{3.3}$$

$$(A(t)\varphi, \varphi) + b \| \varphi \|_H^2 \geqslant c \| \varphi \|_V^2. \tag{3.4}$$

Le cas particulier, où d est linéaire et vérifie (3.2), (3.3) et (3.4), nous donnera une condition nécessaire d'optimalité pour le cas où la partie non linéaire de f vérifie les hypothèses que nous ferons sur g.

3.2. *Paramétrisation des commandes* (contrôle distribué).

Notation. — On désignera par x les éléments de $Q =]0, T[\times\Omega$, et par $|\ \ |$ une norme de $\mathbf{R}^k$.

On considère un espace topologique U, une multi-application F qui associe à tout élément x de Q une partie non vide $F(x)$ de U, et une application g de $\mathbf{R}^k\times U\times Q$ dans $\mathbf{R}^k$. Nous ferons les hypothèses suivantes :

(3.5) $\quad \forall z\in\mathbf{R}^k, \quad \forall x\in Q, \quad g(z, F(x), x)$ *est convexe fermé*;

(3.6) $\quad \forall v\in U, \quad \forall x\in Q, \quad g(., v, x)$ *est de classe* C^1 *dans* $\mathbf{R}^k$;

(3.7) $\quad \left\{\begin{array}{l} \textit{pour toute fonction mesurable } (z(x), v(x)) \textit{ de } Q \textit{ dans } \mathbf{R}^k\times U, \\ \quad g(z(x), v(x), x) \quad \textit{et} \quad g'_z(z(x), v(x), x) \textit{ sont mesurables}; \end{array}\right.$

(3.8) $\quad \left\{\begin{array}{l} \textit{pour toute fonction mesurable } (y(x), z(x)) \textit{ telle que} \\ \qquad z(x)\in g(y(x), F(x), x)\,\text{p.p.}, \\ \textit{il existe une fonction mesurable } s \textit{ de } Q \textit{ dans } U \textit{ telle que} \\ \qquad s(x)\in F(x) \quad \textit{et} \quad g(y(x), s(x), x) = z(x)\,\text{p.p.} \end{array}\right.$

Les trois dernières hypothèses seront vérifiées si U est un espace métrisable complet, F est une multi-application mesurable à valeurs dans les fermés de U, et g et g'_z sont continues [3].

Remarque. — Pour obtenir une condition nécessaire d'optimalité, il n'est pas nécessaire de considérer toutes les commandes; par exemple, si $F(x) = U$ pour tout x, il suffit de prendre les commandes qui sont constantes sur des ensembles mesurables convenables et qui coïncident ailleurs avec la commande optimale. C'est pourquoi nous introduisons l'ensemble suivant.

Soit p défini par $1/p+1/q = 1/2$. On considère un ensemble S d'applications mesurables s de Q dans U telles que

(3.9) $$s(x)\in F(x)\,\text{p.p.};$$

(3.10) $$g(\bar{y}(x), s(x), x)\in L^2(Q)^k;$$

(3.11) $$\left\{\begin{array}{l} \forall z\in\mathbf{R}^k, \quad \forall x\in Q, \quad |g'_z(z, s(x), x)|\leq C_s(x), \\ \qquad\qquad C_s(x)\in L^p(Q). \end{array}\right.$$

On définit l'espace de Banach E des familles $u = (u_s;\ s\in S)$ de fonctions numériques mesurables dans Q telles que :

(3.12) $$\|u\| = \textstyle\sum_{s\in S}\|C_s(x)\,u_s(x)\|_{L^p(Q)} + \sum_{s\in S}\|u_s(x)\,g(\bar{y}(x), s(x), x)\|_{L^2(Q)} < \infty.$$

Et soit M le sous-ensemble de celles qui vérifient en outre :

$$(3.13)\qquad \begin{cases} \forall s \in S, \quad u_s(x) \geqslant 0 \text{ p. p.} \\ \sum_{s \in S} u_s(x) = 1 \text{ p. p.} \end{cases}$$

M est un convexe fermé de E. On identifie S à un sous-ensemble de M, en associant à $s_0 \in S$ la famille $u_{s_0}(x) = 1$, et $u_s(x) = 0$ pour $s \neq s_0$. Inversement, tout élément u de M définit une commande : d'après les hypothèses (3.5) et (3.8), pour $u \in M$ et $y \in W$ donnés, il existe une application mesurable σ de Q dans U telle que

$$(3.14)\qquad \begin{cases} \sigma(x) \in F(x) \text{ p. p.} \\ \sum_{s \in S} u_s(x) g(y(x), s(x), x) = g(y(x), \sigma(x), x). \end{cases}$$

PROPOSITION 3.1. — *L'application*

$$(3.15)\qquad (y, u) \to g(y, u)(x) = \sum_{s \in S} u_s(x) g(y(x), s(x), x),$$

est définie dans $W \times E$ *et à valeurs dans* $L^2(0, T; H)$.

Et si $\bar{u} \in S$, *alors* $g(y, u)$ *est strictement dérivable en* $(\bar{y}, \bar{u})$ *de dérivée*

$$(3.16)\qquad l(y, u)(x) = g(\bar{y}, u)(x) + g'_z(\bar{y}(x), \bar{u}(x), x)\, y(x).$$

Démonstration. — Soit $(y, u) \in W \times E$. Avec le théorème des accroissements finis, et les relations (3.11), (3.12) et (3.1), on obtient :

$$|g(y(x), s(x), x) - g(\bar{y}(x), s(x), x)| \leqslant C_s(x) |y(x) - \bar{y}(x)|;$$

$$\sum_{s \in S} |u_s(x) g(y(x), s(x), x)| \leqslant \sum_{s \in S} |u_s(x) g(\bar{y}(x), s(x), x)| + \sum_{s \in S} |C_s(x) u_s(x)| |y(x) - \bar{y}(x)|;$$

$$\| g(y, u) \|_{L^2(Q)^k} \leqslant \| u \| + \sum_{s \in S} \| C_s u_s \|_{L^p(Q)} \| y - \bar{y} \|_{L^q(Q)^k};$$

$$\| g(y, u) \|_{L^2(Q)^k} \leqslant \| u \| (1 + \alpha \| y - \bar{y} \|_W) < \infty.$$

Par conséquent, $g(y, u)$ est défini et appartient à $L^2(Q)^k$ qui coïncide avec $L^2(0, T; H)$ par définition de H.

Soit (y', u') un second point de $W \times E$. On pose :

$$\Delta_1 = g(y, u) - g(y, \bar{u}) - (g(y', u) - g(y', \bar{u}));$$

$$\Delta_2 = g(y', u) - g(y', u') - (g(\bar{y}, u) - g(\bar{y}, u'));$$

$$\Delta_3(x) = g(y, \bar{u})(x) - g(y', \bar{u})(x) - g'_z(\bar{y}(x), \bar{u}(x), x)(y(x) - y'(x)).$$

Ce sont les trois termes de la décomposition suivante :

$$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3 = g(y, u)-g(y', u')-l(y-y', u-u').$$

Avec le théorème des accroissements finis, on a

$$|\Delta_1(x)| = |\sum_{s\in S}(u_s(x)-\bar{u}_s(x))(g(y(x), s(x), x)-g(y'(x), s(x), x))|,$$

$$|\Delta_1(x)| \leqslant \sum_{s\in S}|u_s(x)-\bar{u}_s(x)|\, C_s(x)\,|y(x)-y'(x)|;$$

$$(3.17) \qquad \|\Delta_1\|_{L^2(Q)^k} \leqslant \alpha\|u-\bar{u}\|\,\|y-y'\|_W;$$

et de la même manière, on obtient :

$$(3.18) \qquad \|\Delta_2\|_{L^2(Q)^k} \leqslant \alpha\|u-u'\|\,\|y'-\bar{y}\|_W.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $h > 0$ telle que, pour tout partie mesurable P de Q de mesure inférieure à h, on a

$$(3.19) \qquad \left(\int_P |C_{\bar{u}}(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \varepsilon,$$

car $\bar{u}\in S$ et $C_{\bar{u}}\in L^p(Q)$.

Par ailleurs, il existe $h_1 > 0$ et P_1 mesurable contenu dans Q et de mesure inférieure à $h/2$ tels que

$$(3.20) \quad (x\notin P_1 \text{ et } |z-\bar{y}(x)|\leqslant h_1) \;\Rightarrow\; |g'_z(z, \bar{u}(x), x)-g'_z(\bar{y}(x), \bar{u}(x), x)|\leqslant \varepsilon.$$

On peut prendre $h_1 \leqslant h/4$. Pour y_1 et $y_2\in W$ tels que

$$(3.21) \qquad \|y_i-\bar{y}\|_W \leqslant \frac{1}{\alpha}h_1^{1+(1/q)}, \qquad i = 1, 2,$$

l'ensemble P_2 des éléments x de Q, tels que $|y_i(x)-\bar{y}(x)| > h_1$ pour $i = 1$ ou $i = 2$, est de mesure au plus égale à $2\,h_1$.

Pour $x\notin P_1\cup P_2$, on applique le théorème des accroissements finis à la fonction

$$z \to g(z, \bar{u}(x), x)-g'_z(\bar{y}(x), \bar{u}(x), x)\,z,$$

et on obtient avec (3.20) :

$$(3.22) \qquad x\notin P_1\cup P_2 \;\Rightarrow\; |\Delta_3(x)|\leqslant \varepsilon\,|y(x)-y'(x)|.$$

D'autre part, on a, pour tout x de Q,

$$|\Delta_3(x)| \leqslant 2\, C_{\bar{u}}(x)\, |y(x)-y'(x)|.$$

On obtient alors :

$$\left(\int_{P_1\cup P_2} |\Delta_3(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$$
$$\leqslant 2\left(\int_{P_1\cup P_2} |C_{\bar{u}}(x)|^p\, dx\right)^{1/p}\left(\int_{P_1\cup P_2} |y(x)-y'(x)|^q\, dx\right)^{1/q};$$
$$\left(\int_{P_1\cup P_2} |\Delta_3(x)|^2\, dx\right)^{1/2} \leqslant 2\,\varepsilon\, ||y-y'||_{L^q(Q)^k};$$

$$(3.23)\qquad ||\Delta_3||_{L^2(Q)^k} \leqslant 3\,\varepsilon\alpha\, ||y-\bar{y}||_W.$$

Donc sous la condition (3.21), on a (3.23); et la dérivabilité stricte de g en $(\bar{y}, \bar{u})$ résulte de cette propriété et des inégalités (3.17) et (3.18). La proposition est entièrement démontrée.

3.3. *Paramétrisation des commandes (contrôle sur la frontière). — On suppose que la frontière Γ de Ω est une variété C^∞ de dimension $(n-1)$ telle que Ω est localement d'un même côté de Γ et on suppose qu'il existe $q > 2$ tel que la fonction : $y \in W \to y(.)/\Gamma$ est continue de W dans $L^q(]0, T[\times\Gamma)^k$*; on peut remplacer partout dans le paragraphe précédent Q par $]0, T[\times\Gamma$: l'application définie par (3.15) pour $x \in]0, T[\times\Gamma$ est définie dans $W\times E$ et à valeurs dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$, elle est strictement dérivable en $(\bar{y}, \bar{u}) \in E\times S$ et sa dérivée est donnée par (3.16).

3.4. *Hypothèses sur la fonction g.* — Récapitulons les hypothèses faites sur g dans le cas de commandes distribuées (respectivement de commandes sur la frontière) : $Q =]0, T[\times\Omega$ (respectivement $Q =]0, T[\times\Gamma$).

g est une fonction de $\mathbf{R}^k\times U\times Q$ dans $\mathbf{R}^k$, U est un espace topologique, et F est une multi-application de Q dans U qui vérifient (3.5), (3.6), (3.7) *et* (3.8). C'est l'hypothèse de convexité et fermeture (3.5) qui nous a permis de définir des paramètres de commandes dans un convexe fermé, condition à laquelle nous pourrons appliquer la condition nécessaire d'optimalité de [6]. Sans cette hypothèse, les mêmes paramètres de commande définissent des « commandes relaxées » qui sont introduites dans l'étude de l'existence pour le cas non convexe [2]. Cette hypothèse, qui apparaît naturellement dans les conditions suffisantes d'existence d'un contrôle optimal, ne figure pas dans le « principe de Pontrjagin » pour les équations différentielles ordinaires. Si l'on modifie la définition de M en ajoutant à (3.13) la condition : $\forall s \in S$, $u_s(x) \in \{0,1\}$ p. p.,

alors les hypothèses (3.5) et (3.8) sont inutiles, car les éléments de M définissent trivialement des commandes. M n'est alors plus convexe, mais nous espérons pouvoir démontrer dans une étude ultérieure que les résultats de [6] restent valables dans ce cas : il en résulterait que l'on pourrait se limiter aux hypothèses (3.6) et (3.7).

D'autre part, on a supposé que la commande $\bar{u}$ appartient à S, c'est-à-dire qu'elle vérifie (3.9), (3.10) *et* (3.11). Cela suffit pour obtenir la propriété de dérivabilité stricte et, nous le verrons, une condition nécessaire d'optimalité parmi les commandes de S; la condition obtenue sera d'autant plus forte que l'ensemble S sera plus vaste. Nous serons conduit à envisager le cas suivant.

On pose, pour $p(x) \in W$ et $v \in U$,

$$H(p;\, v,\, x) = p(x)\, g(\bar{y}(x),\, v,\, x); \tag{3.24}$$

et on envisagera l'hypothèse suivante :

$$\begin{aligned} &\inf_{v \in F(x)} H(p;\, v,\, x) > -\infty \\ &\qquad \Rightarrow \quad \inf_{v \in F(x)} H(p;\, v,\, x) = \inf_{s \in S} H(p;\, s(x),\, x)\ \text{p. p.} \end{aligned} \tag{3.25}$$

où la borne inférieure sur S est prise au sens de l'ordre sur $L^1(Q)$.

Remarque. — L'ensemble des hypothèses faites est du même ordre que celles que l'on peut faire dans le cas des équations différentielles ordinaires, à l'exception de (3.5) (que l'on peut espérer supprimer, *cf.* ci-dessus) et de (3.11). Cette dernière hypothèse semble spécifique des équations aux dérivées partielles, au moins dans le cas le plus général : si les valeurs prises par les fonctions de W d'un voisinage de $\bar{y}$ ne sont pas bornées, la méthode que nous utilisons nécessite une majoration uniforme de g'_z sur $\mathbf{R}^k$.

Une légère amélioration peut être apportée en choisissant $r > 0$ tel que $r < (q/2)-1$, en définissant p par $1/2 = 1/p+(r+1)/q$ et en remplaçant la condition (3.11) par la suivante :

$$\begin{cases} \forall z \in \mathbf{R}^k, \qquad \forall x \in Q, \quad |g'_z(z,\, s(x),\, x)| \leqslant c_s(x)(1+|z|^r), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad c_s(x) \in L^p(Q); \end{cases}$$

on obtient alors des majorations du type

$$\|\Delta_1\|_{L^2(Q)} \leqslant \|u-\bar{u}\| \ \|1+|y|^r+|y'|^r\|_{L^{q/r}(Q)} \|y-y'\|_{L^q(Q)},$$

qui permettent des conclusions identiques.

Dans le cas très particulier où $q = \infty$, on peut remplacer (3.11) par :

$$\text{(3.26)} \quad \begin{cases} \text{il existe } r > 0 \text{ tel que} \\ (x \in Q \text{ et } |z - \bar{y}(x)| \leqslant r) \quad \Rightarrow \quad |g'_z(z, s(x), x)| \leqslant c_s(x), \\ \qquad\qquad c_s(x) \in L^2(Q). \end{cases}$$

Dans ce cas, on retrouve une hypothèse de l'ordre de celles que l'on fait pour les équations différentielles ordinaires.

3.5. *Hypothèses sur les fonctions* f_i $(0 \leqslant i \leqslant r+q)$. — Le cas général où les fonctions f_i dépendent de y et de u, nécessite pour paramétrer les commandes, des hypothèses de convexité et de fermeture sur l'image de $F(x)$ par la fonction globale

$$(g, f_0, \ldots, f_{r+q}).$$

Nous nous limiterons ici au cas où les fonctions f_i sont indépendantes de la commande. *Nous supposerons que chacune des fonctions* $f_i(y)$ *est strictement dérivable en* $\bar{y}$ *et que sa dérivée s'écrit :*

$$\text{(3.27)} \qquad f'_i(\bar{y})\, y = (m_i, y(0)) + (n_i, y(T)) + \int_0^T (r_i(t), y(t))\, dt,$$

où $m_i \in H$, $n_i \in H$ *et* $r_i \in L^2(0, T; V')$.

Exemple. — Pour des fonctions

$$f_i(y) = \int_0^T dt \int_\Omega g_i(y(t, x), t, x)\, dx + \int_\Omega h_i(y(T, x), x)\, dx,$$

on obtient la dérivabilité stricte avec des hypothèses analogues à celles que nous avons faites sur g dans le paragraphe 3.2 : il suffit que la fonction g_i à valeurs dans $L^1(Q)$ (respectivement h_i à valeurs dans $L^1(\Omega)$) soit strictement dérivable en $\bar{y}$. Il en est de même si l'on remplace Ω par sa frontière Γ avec les hypothèses du paragraphe 3.3.

Cas non différentiable. — Pour appliquer la condition nécessaire d'optimalité de [6], on peut supposer que, pour $0 \leqslant i \leqslant p$, f_i est égale à la somme d'une fonction convexe s. c. i. et d'une fonction strictement dérivable en $\bar{y}$: il suffit donc de modifier la condition que nous allons obtenir en conséquence; par exemple, si la partie convexe de $f_i(y)$ est $g_i(y(T))$, la condition aux limites (5.11) ci-après, est remplacée par la suivante :

$p(T)$ est un sous-gradient de la fonction $-\sum_{i=0}^{r+q} a_i (g_i + n_i)$ au point $\bar{y}(T)$.

4. Hypothèses sur la dérivée de f

4.1. Hypothèse (*cas général*). — *Nous supposerons qu'il existe un voisinage de* 0 *dans*

$$\{y \in W;\ y(0)+\bar{y}(0) \in C\} \times (M-\bar{u}),$$

dont l'image par la dérivée de $((dy/dt)+f)$ *en* $(\bar{y}, \bar{u})$ *est un voisinage de* 0 *dans* $L^2(0, T; V')$.

Cela sera en particulier réalisé si l'application

$$y \to \frac{dy}{dt} + f'(\bar{y}, \bar{u})(y, 0),$$

est surjective de $\{y \in W;\ y(0) = 0\}$ sur $L^2(0, T; V')$.

4.2. *Données particulières* (*contrôle distribué*). — On considère les données particulières précédentes (§ 3, 3.1 et 3.2) :

$$f(y) = d(y)+g(y, u); \tag{4.1}$$

et l'on explicite, en cas de besoin, en notant (t, x) les éléments de $]0, T[\times \Omega$. On a $H = L^2(\Omega)^k$; on désigne par $\mathscr{L}(H)$ l'espace des endomorphismes continus de H.

Proposition 4.1. — *On suppose que l'on a* (3.1), ..., (3.8) *et que* u *vérifie les relations* (3.9), (3.10), (3.11) *et*

$$\left\{\begin{array}{l} l(t)(x) = g'_z(\bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x), t, x) \text{ vérifie} \\ \qquad l \in L^\infty(0, T; \mathscr{L}(H)). \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Alors $f(y, u)$ *est strictement dérivable en* $(\bar{y}, \bar{u})$ *et sa dérivée par rapport à* y *est*

$$f'(\bar{y}, \bar{u})(y, 0)(t) = (A(t)+l(t))\, y(t); \tag{4.3}$$

et, pour tout élément h *de* $L^2(0, T; V')$, *il existe* $y \in W$ *solution du système*

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dt} + (A(t)+l(t))\, y = h, \\ \qquad y(0) = 0. \end{array}\right. \tag{4.4}$$

Il résultera de cette proposition que la dérivée de f vérifie l'hypothèse 4.1.

Démonstration. — On a $\bar{u} \in S$, et l'on peut appliquer la proposition 3.1. D'autre part, d'après l'hypothèse (4.2), il existe une constante b' telle que, pour presque tout t de $]0, T[$, pour tout $\varphi \in H$ et tout $\psi \in H$,

$$\| l(t)\varphi \|_H \leqslant b' \| \varphi \|_H;$$

$$|(l(t)\varphi, \psi)_H| \leqslant b' \| \varphi \|_H \| \psi \|_H.$$

Par conséquent, la famille $A(t)+l(t)$ vérifie les conditions de continuité et de coercivité uniformes, par rapport à t, (3.3) et (3.4) avec les constantes $a+b'$, $b+b'$, c; il en résulte que le système (4.4) admet une solution $y \in W$. La proposition est entièrement démontrée.

Remarque. — On peut remplacer l'hypothèse (4.2) par d'autres conditions. De manière générale, on peut remplacer les trois hypothèses (3.3), (3.4) et (4.2) par les conditions de continuité et de coercivité uniformes par rapport à t de la famille $A(t)+l(t)$. Plus généralement encore, on pourra prendre toute hypothèse qui assure l'existence d'une solution du système linéarisé 4.4 pour tout h de $L^2(0, T; V')$ (l'unicité de la solution n'intervient pas).

4.3. *Données particulières* (*contrôle sur la frontière*). — On considère les données et hypothèses du paragraphe 3.3. La fonction $f(y, u)$ est définie par

$$(f(y, u), h) = (d(y), h) + (g(y, u), h/\Gamma)_{L^2(\Gamma)}, \tag{4.5}$$

pour tout h de $L^2(0, T; V)$.

PROPOSITION 4.2. — *On suppose que l'on a* (3.1), ..., (3.8) *pour* $Q =]0, T[\times\Gamma$, *que la commande* $\bar{u}$ *vérifie* (3.9), (3.10) *et* (3.11), *et que la fonction*

$$m(t, x) = g'_z(\bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x), t, x), \tag{4.6}$$

vérifie

$$|m(t, x)| \in L^\infty(0, T; L^p(\Gamma)); \tag{4.7}$$

$$\forall (t, x) \in]0, T[\times\Gamma, \qquad \forall z \in \mathbf{R}^k, \quad m(t, x)zz \geqslant 0. \tag{4.8}$$

Alors f *vérifie l'hypothèse* 4.1.

Démonstration. — D'après (4.8), on a pour tout $t \in]0, T[$ et tout $\varphi \in L^q(\Gamma)$,

$$\int_\Gamma m(t, x)\varphi(x)\varphi(x)\,d\Gamma \geqslant 0;$$

il en résulte que la relation (3.4) de coercivité uniforme par rapport à t est *a fortiori* vérifiée par $A(t)+m(t, .)$. D'autre part, d'après (4.7), il existe une constante a' telle que, pour presque tout t de $]0, T[$, on a

$$\|m(t, .)\|_{L^p(\Gamma)} \leqslant a';$$

on obtient alors, pour tout couple (φ, ψ) de fonctions de V,

$$\left|\int_\Gamma m(t, x)\varphi(x)\psi(x)\,dx\right| \leqslant \|m(t, .)\varphi\|_{L^2(\Gamma)}\|\psi\|_{L^2(\Gamma)};$$

$$\|m(t, .)\varphi\|_{L^2(\Gamma)} \leqslant \|m(t, .)\|_{L^p(\Gamma)}\|\varphi\|_{L^q(\Gamma)};$$

$$\left|\int_\Gamma m(t, x)\varphi(x)\psi(x)\,dx\right| \leqslant a'c^2\|\varphi\|_V\|\psi\|_V.$$

Par conséquent, $A(t)+m(t, .)$ vérifie la condition (3.3) de continuité uniforme par rapport à t. La conclusion de la proposition en résulte immédiatement. On peut faire la même remarque que pour la proposition 4.1.

5. Condition nécessaire d'optimalité

5.1. *Remarque sur l'existence des solutions de l'équation* (1.1) *et* (1.2). — A l'exception de la solution optimale $(\bar{y}, \bar{u})$, nous ne nous servirons pas explicitement de l'existence des solutions de (1.1) et (1.2). En fait, l'hypothèse de dérivabilité stricte et l'hypothèse d'existence des solutions de l'équation linéarisée impliquent l'existence des solutions de (1.1) et (1.2) au voisinage d'une solution donnée (d'après le théorème des fonctions implicites).

5.2. *Vérification de l'hypothèse de régularité de* [6]. — Soit D l'ensemble des points (z^1, z^2, h) de $\mathbf{R}^{r+1}\times\mathbf{R}^q\times L^2(0, T; V')$ tels qu'il existe $y\in W$ et $u\in M$ qui vérifient :

(5.1) $$y(0)\in C;$$

(5.2) $$\|y-\bar{y}\| \leqslant 1;$$

(5.3) $$\|u-\bar{u}\| \leqslant 1;$$

(5.4) $$f_0'(\bar{y}, \bar{u})(y-\bar{y}, u-\bar{u}) \leqslant z_0^1;$$

(5.5) $$f_i'(\bar{y}, \bar{u})(y-\bar{y}, u-\bar{u})+f_i(\bar{y}, \bar{u}) \leqslant z_i^1, \qquad (1 \leqslant i \leqslant r);$$

(5.6) $$f_i'(\bar{y}, \bar{u})(y-\bar{y}, u-\bar{u}) = z_{i-r}^2, \qquad (r+1 \leqslant i \leqslant r+q);$$

(5.7) $$\frac{dy}{dt}-\frac{d\bar{y}}{dt}+f'(\bar{y}, \bar{u})(y-\bar{y}, u-\bar{u}) = h.$$

PROPOSITION 5.1. — *On suppose que la dérivée de f vérifie l'hypothèse* 4.1 *et que l'on a*

$$f_i(\bar{y}, \bar{u}) \leqslant 0 \qquad \textit{pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Alors le convexe D vérifie l'hypothèse de régularité ([6], 3.4) *: si l'intérieur de D est vide, alors D admet un hyperplan fermé d'appui en* 0.

Démonstration. — Soit D_1 la projection de D sur $\mathbf{R}^q \times L^2(0, T; V')$: c'est l'ensemble des (z^2, h) tels qu'il existe $y \in W$ et $u \in M$ qui vérifient (5.1), (5.2), (5.3), (5.6) et (5.7); D_1 est un convexe borné et sa projection sur $L^2(0, T; V')$ est un voisinage de 0 d'après l'hypothèse 4.1; et il en est de même de l'adhérence $\bar{D}_1$ de D_1.

D'après le lemme ([6] 4.6.3) :

Si C est un convexe fermé de $\mathbf{R}^m \times F$ pour un espace de Banach F, si C contient (0, 0), si la projection de C sur $\mathbf{R}^m$ est bornée, et si sa projection sur F est dense dans un voisinage de 0, alors C vérifie l'hypothèse de régularité ([6], 3.4).

$\bar{D}_1$ vérifie cette hypothèse de régularité.

Dans le cas où $\bar{D}_1$ admet un hyperplan fermé d'appui en 0, défini par une forme linéaire continue p, alors $(0, p)$ définit un hyperplan fermé qui est un hyperplan d'appui de D en 0; par conséquent, D vérifie l'hypothèse de régularité.

Dans le cas où l'intérieur de $\bar{D}_1$ est non vide, il en est de même pour D_1 ([6] théorème 2.5); alors l'intérieur de D est non vide, et D vérifie l'hypothèse de régularité.

La proposition est démontrée.

5.3. *Condition nécessaire d'optimalité.*

THÉORÈME 5.1. — *On suppose que* $(\bar{y}, \bar{u})$ *est une solution optimale du problème* 1.3, *que les fonctions* f *et* f_i $(0 \leqslant i \leqslant r+q)$ *sont strictement dérivables en* $(\bar{y}, \bar{u})$ *et que la dérivée* $dy/dt + f'(\bar{y}, \bar{u})$ *vérifie l'hypothèse de surjectivité locale* 4.1. *Alors il existe des nombres* a_i, $0 \leqslant i \leqslant r+q$, *et une fonction* $p \in L^2(0, T; V)$ *tels que*

1° p *et les* a_i $(0 \leqslant i \leqslant r+q)$ *ne sont pas tous nuls;*

2° *pour* $0 \leqslant i \leqslant r$, a_i *est positif ou nul;*

3° *pour* $1 \leqslant i \leqslant r$, $a_i f_i(\bar{y}, \bar{u})$ *est nul;*

4° *pour toute fonction* y *de* W *telle que* $y(0) \in C - \bar{y}(0)$, *on a*

$$(5.8) \qquad \textstyle\sum_{i=0}^{r+q} a_i f_i'(\bar{y}, \bar{u})(y, 0) + \left(p, \dfrac{dy}{dt} + f'(\bar{y}, \bar{u})(y, 0)\right) \geqslant 0;$$

5° *pour toute commande* $u \in M$, *on a*

$$\sum_{i=0}^{r+q} a_i f_i'(\bar{y}, \bar{u})(0, u-\bar{u}) + (p, f'(\bar{y}, \bar{u})(0, u-\bar{u})) \geq 0. \tag{5.9}$$

Démonstration. — Les hypothèses de la proposition 5.1 sont satisfaites : on peut appliquer le théorème 3.5 de [6].

Il existe des formes linéaires continues $a_0, \ldots, a_{r+q}$ sur $\mathbf{R}$ et p sur $L^2(0, T; V')$ qui vérifient les conclusions 1°, 2° et 3° du théorème et tels que, pour $y \in W$ et $u \in M$ qui vérifient (5.1), (5.2) et (5.3), on a

$$\sum_{i=0}^{r+q} a_i f_i'(\bar{y}, \bar{u})(y-\bar{y}, u-\bar{u}) + p\left(\frac{dy}{dt} - \frac{d\bar{y}}{dt}\right) + pf'(\bar{y}, \bar{u})(y-\bar{y}, u-\bar{u}) \geq 0.$$

p s'identifie à une fonction de $L^2(0, T; V)$. Pour $u = \bar{u}$, $y_1 = y - \bar{y}$ vérifie (5.8) sous la réserve : $\| y_1 \| \leq 1$ et $y_1(0) \in C - \bar{y}(0)$; mais la fonction de y définie par (5.8) est linéaire et $C - \bar{y}(0)$ est un convexe qui contient 0; il en résulte que (5.8) est vérifiée sous la seule réserve : $y_1(0) \in C - \bar{y}(0)$. Pour $y = \bar{y}$, toute commande u de M vérifie (5 9) sous la réserve $\| u - \bar{u} \| \leq 1$, que l'on peut lever comme ci-dessus.

Le théorème est démontré.

Nous allons expliciter dans les cas où les données sont plus précises.

THÉORÈME 5.2. — *On suppose :*

— *que* $(\bar{y}, \bar{u})$ *est une solution optimale du problème* 1.3 *pour des espaces* $V \subset L^q(\Omega)^k$ $(q > 2)$, $H = L^2(\Omega)^k$ *vérifiant* (3.1) *et* $f(y, u) = d(y) + g(y, u)$;

— *que* $d(y)$ *est strictement dérivable en* $\bar{y}$ *et vérifie les relations* (3.2), (3.3) *et* (3.4);

— *que* $g(y(t, x), v, t, x)$, $v \in F(t, x)$, $(t, x) \in Q =]0, T[\times \Omega$, *vérifie* (3.5), (3.6), (3.7) *et* (3.8);

— *que les fonctions* $f_i(y)$, $0 \leq i \leq r+q$, *sont strictement dérivables en* $\bar{y}$ *et vérifient* (3.27);

— *que* $(\bar{y}, \bar{u})$ *vérifie* (3.9), (3.10), (3.11) *et* (4.2).

Alors il existe des nombres a_i $(0 \leq i \leq r+q)$ *et une fonction* p *de* W *tels que*

1° p *et les* a_i $(0 \leq i \leq r+q)$ *ne sont pas tous nuls;*

2° *pour* $0 \leq i \leq r$, a_i *est positif ou nul;*

3° *pour* $1 \leq i \leq r$, $a_i f_i(\bar{y})$ *est nul;*

4° p *est solution de* (5.10), (5.11) *et* (5.12) :

(5.10) $$-\frac{dp}{dt}+A(t)^* p+p(t, x) g_z'(\bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x), t, x)+\sum_{i=0}^{r+q} a_i r_i(t)=0;$$

(5.11) $$p(T)+\sum_{i=0}^{r+q} a_i n_i=0;$$

(5.12) $$\forall \varphi \in C, \quad (\sum_i a_i m_i-p(0), \varphi-\bar{y}(0))_{L^2(\Omega)^k} \geqslant 0;$$

5° *pour toute commande u de S, i. e. vérifiant* (3.9), (3.10) *et* (3.11), *la fonction*

(5.13) $$H(p; v, t, x)=p(t, x) g(\bar{y}(t, x), v, t, x),$$

vérifie (5.14) *:*

(5.14) $$H(p; \bar{u}(t, x), t, x) \leqslant H(p; u(t, x), t, x) \text{ p.p.}$$

6° *si, de plus, l'ensemble S vérifie* (3.24) *et* (3.25), *alors la fonction* (5.13) *vérifie* (5.15) *:*

(5.15) $$H(p; \bar{u}(t, x), t, x)=\inf_{v \in F(t, x)} H(p; v, t, x) \text{ p.p.}$$

Démonstration. — D'après les propositions 3.1 et 4.1, les hypothèses du théorème 5.1 sont satisfaites pour l'ensemble M des paramètres de commandes définis par (3.12) et (3.13).

On a dans le cas présent :

$$f_i'(\bar{y}) y=(m_i, y(0))+(n_i, y(T))+\int_0^T(r_i(t), y(t)) dt;$$

$$f'(\bar{y}, \bar{u})(y, 0)(t, x)=A(t) y(t)(x)+g_z'(\bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x), t, x) y(t, x);$$

$$f'(\bar{y}, \bar{u})(0, u)(t, x)=\sum_{s \in S} u_s(t, x) g(\bar{y}(t, x), s(t, x), t, x).$$

On notera :

$$f'(\bar{y}, \bar{u})(y, 0)(t, .)=\mathrm{B}(t) y(t).$$

Pour tout $h \in V$ et tout $\varphi \in \mathscr{D}(]0, T[)$, la fonction $y=\varphi h$ appartient à W et vérifie $y(0)=0=y(T)$; alors (5.8) s'écrit :

$$\sum_i a_i \int_0^T(r_i(t), \varphi(t) h) dt + \int_0^T\left(p(t), \frac{d \varphi(t)}{d t} h\right) dt+\int_0^T(p(t), \mathrm{B}(t) \varphi(t) h) dt \geqslant 0.$$

Par symétrie, le premier terme de l'inégalité est nul, ceci pour tout h de V; on obtient donc, au sens des intégrales dans V' :

$$\sum_i a_i \int_0^T \varphi(t) r_i(t)\, dt + \int_0^T \frac{d\varphi(t)}{dt} p(t)\, dt + \int_0^T \varphi(t) \mathrm{B}(t)^* p(t)\, dt = 0,$$

où $B(t)^*$ est l'adjoint de $B(t)$.

Par définition de la distribution vectorielle dp/dt, on a

$$\int_0^T \frac{d\varphi(t)}{dt} p(t)\, dt = \frac{dp}{dt}\varphi;$$

on obtient donc (au sens des distributions) :

$$-\frac{dp}{dt} + \mathrm{B}(t)^* p + \sum_i a_i r_i = 0.$$

Il en résulte que $dp/dt \in L^2(0, T; V')$ et $p \in W$: on peut identifier p à une fonction continue de $[0, T]$ dans H ([5], chap. 1, 3). On a les relations suivantes, pour tout y de W :

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(p(t), \frac{dy}{dt}(t) \right) dt \\
&\quad = (p(T), y(T)) - (p(0), y(0)) - \int_0^T \left(\frac{dp}{dt}, y(t) \right) dt \\
&\quad = (p(T), y(T)) - (p(0), y(0)) - \int_0^T \left(\mathrm{B}(t)^* p(t) + \sum_i a_i r_i(t), y(t) \right) dt;
\end{aligned}$$

et pour tout y de W tel que $y(0) \in C - \bar{y}(0)$, l'inégalité (5.8) donne la relation suivante :

$$\sum_i a_i (m_i, y(0)) + \sum_i a_i (n_i, y(T)) + (p(T), y(T)) - (p(0), y(0)) \geqslant 0.$$

Et l'application $y \to y(T)$ étant surjective de $\{ y \in W; y(0) = 0 \}$ sur V qui est dense dans H, on obtient les relations (5.11) et (5.12). Les quatre premières conclusions du théorème sont démontrées.

Soit $s \in S$. Pour toute partie mesurable P contenue dans $]0, T[\times \Omega$, les relations

$$u_s(t, x) = 1 \qquad \text{pour} \quad (t, x) \in P,$$

$$u_{\bar{s}}(t, x) = 1 \qquad \text{pour} \quad (t, x) \notin P,$$

$$\forall \sigma \neq s, \bar{s}, \quad u_\sigma(t, x) = 0 \text{ p. p.},$$

définissent une commande $u \in M$: u vérifie (3.12) et (3.13). Et (5.9) implique que l'on a

$$\int_P H(p; \bar{u}(t, x), t, x)\, dt\, dx \leqslant \int_P H(p; s(t, x), t, x)\, dt\, dx.$$

Donc la cinquième conclusion du théorème est vérifiée, et la sixième en est une conséquence immédiate.

Le théorème est démontré.

Remarque. — Le théorème 5.2 donne une condition nécessaire du type « principe du maximum de Pontrjagin » [8]. La conclusion (5.12) signifie que $\sum_i a_i m_i - p(0)$ est normale à C en $\bar{y}(0)$ au sens de l'analyse convexe. La première conclusion du théorème s'exprime plus usuellement sous l'une des formes suivantes : *dans le cas où C est réduit à un point et où les n_i sont tous nuls* : cas de critère, contraintes et liaisons sous forme intégrale (*respectivement, où les r_i sont tous nuls* : cas de critère, contraintes et liaisons sur l'état final), *on suppose que les fonctions $r_i(t)$* (*respectivement n_i*) *sont linéairement indépendantes dans* $L^2(0, T; V')$ (*respectivement dans H*), *alors le théorème* 5.2 *est vérifié avec la conclusion* (5.2, 1°) :

p n'est pas identiquement nul.

En effet, si p est identiquement nul, alors les a_i ne sont pas tous nuls, et l'on a $\sum_i a_i r_i(t) = 0$ (respectivement $\sum_i a_i n_i = 0$) ce qui est impossible.

Exemple (problème mixte de Dirichlet non linéaire). — Soit $V = H_0^1(\Omega)$ espace de Sobolev des fonctions de $H^1(\Omega)$ nulles sur la frontière Γ de Ω; $V' = H^{-1}(\Omega)$. Soient $a_{ij}(t, x)$ des fonctions de $L^\infty(Q)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $Q =]0, T[\times \Omega$, telles qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle on a

$$\forall z \in \mathbf{R}^n, \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(t, x) z_i z_j \geqslant C \sum_{i=1}^n z_i^2 \text{ p.p. dans } Q.$$

Alors la famille d'opérateurs $A(t) \in \mathscr{L}(V, V')$, définie par, $\forall \varphi$ et $\psi \in H_0^1(\Omega)$,

$$(A(t)\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_\Omega a_{ij}(t, x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)\, dx,$$

vérifie les hypothèses (3.3) et (3.4). Et, pour $d(y) = A(t)y$, l'équation (1.1) s'écrit (au sens des distributions) :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, x) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t, x) \frac{\partial y}{\partial x_j}(t, x)\right)$$
$$+ g(y(t, x), u(t, x), t, x) = 0 \quad \text{dans } Q.$$
$$y(t, .)/\Gamma = 0 \quad \text{dans }]0, T[.$$

Et l'équation (5.10) s'interprète de même

$$-\frac{\partial p}{\partial t}(t, x)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(t, x)\frac{\partial p}{\partial x_i}(t, x)\right)$$
$$+\sum_{k=0}^{r+q} a_k r_k(t, x)+g'_z(\bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x), t, x)\, p(t, x) = 0.$$
$$p(t, .)/\Gamma = 0 \quad \text{dans }]0, T[.$$

On a des interprétations analogues pour les systèmes différentiels avec $V = H_0^1(\Omega)^k$. Sous des hypothèses de régularité de la frontière Γ et des fonctions a_{ij}, les dérivées partielles qui figurent dans ces équations appartiennent à $L^2(Q)$ ([5], chap. 4).

THÉORÈME 5.3. — *On suppose que* $(\bar{y}, \bar{u})$ *est une solution optimale du problème* 1.3 *pour des espaces* $H = L^2(\Omega)^k$, Ω *ouvert borné de frontière* Γ, *et* V *vérifiant les conditions du paragraphe* 3.3, *et pour* $f(y, u) = d(y)+g(y, u)$; *on suppose :*

— *que* $d(y)$ *est strictement dérivable en* $\bar{y}$, *et vérifie les relations* (3.2), (3.3) *et* (3.4);

— *que* $g(y(t, x), v, t, x)$, $v \in F(t, x)$, $(t, x) \in Q =]0, T[\times\Gamma$, *vérifie* (3.5), (3.6), (3.7) *et* (3.8);

— *que les fonctions* $f_i(y)$, $0 \leqslant i \leqslant r+q$, *sont strictement dérivables en* $\bar{y}$ *et vérifient* (3.27);

— *que* $(\bar{y}, \bar{u})$ *vérifie* (3.9), (3.10), (3.11), (4.7) *et* (4.8).

Alors, il existe des nombres a_i $(0 \leqslant i \leqslant r+q)$ *et une fonction* p *de* W *tels que :*

1° p *et les* a_i $(0 \leqslant i \leqslant r+q)$ *ne sont pas tous nuls;*

2° *pour* $(0 \leqslant i \leqslant r)$, a_i *est positif ou nul;*

3° *pour* $(1 \leqslant i \leqslant r)$, $a_i f_i(\bar{y})$ *est nul;*

4° p *est solution de* (5.16), (5.18) *et* (5.19) :

$$(5.16) \qquad -\frac{dp}{dt}+A(t)^* p+M(t)^* p+\sum_{i=0}^{r+q} a_i r_i(t) = 0,$$

où $M(t)$ *est la famille de* $\mathcal{L}(V, V')$, *définie par*

$$(5.17) \qquad \left\{\begin{array}{l} \forall \varphi \in V, \qquad \forall \psi \in V, \\ (M(t)\varphi, \psi) = \displaystyle\int_\Gamma g'_z(\bar{y}(t, x), \bar{u}(t, x), t, x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,d\Gamma; \end{array}\right.$$

$$(5.18) \qquad p(T)+\sum_{i=0}^{r+q} a_i n_i = 0;$$

$$(5.19) \qquad \forall \varphi \in C, \qquad \left(\sum_i a_i m_i - p(0), \varphi-\bar{y}(0)\right)_{L^2(\Omega)^k} \geqslant 0;$$

5° *pour tout commande u de S, i. e. vérifiant* (3.9), (3.10) *et* (3.11), *la fonction*

(5.20) $H(p; v, t, x) = p(t, x) g(\bar{y}(t, x), v, t, x)$ sur $]0, T[\times\Gamma$,

vérifie (5.21) *:*

(5.21) $H(p; \bar{u}(t, x), t, x) \leqslant H(p; u(t, x), t, x)$ p.p. dans $]0, T[\times\Gamma$.

6° *si de plus l'ensemble S vérifie* (3.24) *et* (3.25), *alors la fonction* (5.20) *vérifie* (5.22) :

$$(5.22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} H(p, \bar{u}(t, x), t, x) = \inf_{v \in F(t, x)} H(p; v, t, x) \\ \qquad \text{p.p. dans }]0, T[\times\Gamma. \end{array} \right.$$

Démonstration. — La démonstration du théorème 5.2 s'applique avec les modifications suivantes. La fonction $f(y, u)$ et sa dérivée sont définies par, $\forall t \in]0, T[$, $\forall \varphi \in V$,

$$(f(y, u)(t), \varphi) = (d(y)(t), \varphi) + (g(y, u)(t), \varphi/\Gamma)_{L^2(\Gamma)},$$

$$(f'(\bar{y}, \bar{u})(y, 0)(t), \varphi) = (A(t) y(t), \varphi) + (M(t) y(t), \varphi),$$

$$(f'(\bar{y}, \bar{u})(0, u)(t), \varphi) = \textstyle\sum_{s \in S} \displaystyle\int_\Gamma u_s(t, x) g(\bar{y}(t, x), s(t, x), t, x) \varphi(x) d\Gamma;$$

alors pour $B(t) = A(t) + M(t)$, et en prenant les parties mesurables P de $]0, T[\times\Gamma$, le reste de la démonstration est inchangé.

Exemple (problème mixte de Neumann non linéaire). — Soient $V = H^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$, des fonctions numériques définies sur $[0, T] \times \bar{\Omega}$: $a(t, x)$ continue et $a_{ij}(t, x)$ de classe C^1; on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que l'on a

$$\forall z \in \mathbf{R}^n, \qquad \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(t, x) z_i z_j \geqslant C \sum_{i=1}^n z_i^2 \text{ p.p. dans }]0, T[\times\Omega.$$

Alors la famille d'opérateurs $A(t) \in \mathscr{L}(V, V')$, définie par, $\forall \varphi$ et $\psi \in H^1(\Omega)$,

$$(A(t)\varphi, \psi) = \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \displaystyle\int_\Omega a_{ij}(t, x) \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}(x) \frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x) dx + \int_\Omega a(t, x) \varphi(x) \psi(x) dx,$$

vérifie les hypothèses (3.3) et (3.4).

Pour $d(y) = A(t)\,y$, l'équation (1.1) s'écrit, $\forall\, t \in \,]0, T[$ et $\forall\, \varphi \in H^1(\Omega)$,

$$\left(\frac{dy}{dt}, \varphi\right) + (A(t)\,y(t), \varphi) + \int_\Gamma g(y, u)(t, x)\,\varphi(x)\,d\Gamma = 0;$$

et la formule de Green s'écrit formellement ([5], chap. 2) :

$$(A(t)\,y(t), \varphi) = -\sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t, x)\frac{\partial y}{\partial x_j}(t, x)\right)\varphi(x)\,dx$$
$$+ \int_\Omega a(t, x)\,y(t, x)\,\varphi(x)\,dx + \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \nu_A}(t, x)\,\varphi(x)\,d\Gamma.$$

Donc l'équation (1.1) s'écrit :

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t, x) - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t, x)\frac{\partial y}{\partial x_j}(t, x)\right) + a(t, x)\,y(t, x) = 0$$

$$\text{dans }]0, T[\times\Omega,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu_A}(t, x) + g(y(t, x), u(t, x), t, x) = 0 \quad \text{dans }]0, T[\times\Gamma.$$

Et l'équation (5.16) s'interprète de même :

$$-\frac{\partial p}{\partial t} - \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial p}{\partial x_i}\right) + ap + \sum_k a_k r_k = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} + g'_z(\bar{y}, \bar{u})\,p = 0.$$

Remarque. — Pour $V = H^1(\Omega)^k$, il existe $q > 2$ tel que la fonction

$$y(t) \in W \to z(t) = y(t)/\Gamma \in L^q(]0, T[\times\Gamma)^k, \tag{5.23}$$

est définie et continue.

En effet, la fonction (5.23) est définie et continue pour les espaces d'arrivée $L^2(0, T; H^{1/2}(\Gamma)^k)$ et $L^\infty(0, T; H^{-1/2}(\Gamma)^k)$; il existe $p > 2$ tel que $H^{1/2}(\Gamma)^k \subset L^p(\Gamma)^k$ avec injection continue; d'autre part, on a

$$\|z(t)\|^2_{L^2(\Gamma)} = \|z(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\,\|z(t)\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \quad \in L^2(]0, T[),$$

et par conséquent (5.23) est définie et continue pour les espaces d'arrivée $L^4(0, T; L^2(\Gamma)^k)$ et $L^2(0, T; L^p(\Gamma)^k)$.

On se ramène à $p \leqslant 3$, et on pose $q = (p+2)/2$. On a les relations suivantes :

$$\int_\Gamma |z(t, x)|^q dx \leqslant \| z(t) \|_{L^2(\Gamma)} \| z(t) \|_{L^p(\Gamma)}^{p/2}$$

$$\int_Q |z(t, x)|^q dt\, dx \leqslant \left(\int_0^T \| z(t) \|_{L^2(\Gamma)}^4 dt\right)^{1/4} \left(\int_0^T \| z(t) \|_{L^p(\Gamma)}^{2p/3} dt\right)^{3/4}$$

$$\int_0^T \| z(t) \|_{L^p(\Gamma)}^{2p/3} dt \leqslant K\left(\int_0^T \| z(t) \|_{L^p(\Gamma)}^2 dt\right)^{p/3}$$

$$\| z \|_{L^q(Q)} \leqslant K^{3/4q} \| z \|_1^{1/q} \| z \|_2^{1-(1/q)},$$

où $K = T^{1-(p/3)}$, $\| z \|_1$ et $\| z \|_2$ sont les normes respectives de $L^4(0, T; L^2(\Gamma)^k)$ et $L^2(0, T; L^p(\Gamma)^k)$.

6. Équations elliptiques et hyperboliques

6.1. *Le cas des équations elliptiques* ne semble pas poser de problème particulier : dans les données particulières que nous avons envisagées, nous avons traité le couple (t, x) comme une seule variable et la paramétrisation des commandes que nous avons faite imposait la condition $W \subset L^q(Q)^k$, $q > 2$; pour les équations elliptiques, cette condition devient

$$W \subset L^q(\Omega)^k, \qquad q > 2,$$

qui est vérifiée par les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)^k$, $s > 0$. Et l'hypothèse essentielle de surjectivité du type de (4.1) est satisfaite sous les conditions usuelles de coercivité. La formulation détaillée de ce cas fera l'objet d'une étude ultérieure.

6.2. *Le cas des équations hyperboliques.* — Dans ce cas, il n'y a pas surjectivité sur $L^2(0, T; V')$. On peut alors procéder comme suit.

Il y a surjectivité de l'espace :

$$W_1 = \left\{ y \in L^2(0, T; V); \right.$$
$$\left. \frac{d^2 y}{dt^2} \in L^2(0, T; V') \text{ et } \frac{d^2 y}{dt^2} + A(t) y \in L^2(0, T; H) \right\},$$

sur $L^2(0, T; H)$. La condition nécessaire d'optimalité définit un état adjoint $p \in L^2(0, T; H)$.

On définit :

$$V_1 = \{\varphi \in V;\ A(t)\varphi \in L^2(0,\ T;\ H)\};$$

V_1 est un espace de Hilbert dense dans V; on peut aussi définir la famille $A(t)^* \in \mathscr{L}(H,\ V_1')$ par

$$\forall \varphi \in V_1 \quad \text{et} \quad \forall \psi \in H, \quad (A(t)^* \psi,\ \varphi) = (\psi,\ A(t)\varphi)_H.$$

Reprenons la démonstration du théorème 5.2; pour tout $h \in V_1$ et tout $k \in \mathscr{D}(]0,\ T[)$, kh appartient à W_1; il en résulte que l'on a, au sens des distributions (comme dans le théorème 5.2),

$$-\frac{d^2 p}{dt^2} + A(t)^* p + \sum_i a_i r_i(t) = 0.$$

Alors $d^2 p/dt^2$ appartient à V_1', et on peut identifier p à une fonction continue de $[0, T]$ dans $[H,\ V_1']_{1/4}$, et dont la dérivée dp/dt est continue de $[0, T]$ dans $[H,\ V_1']_{3/4}$; ce sont les espaces intermédiaires introduits dans le théorème des traces ([5], chap. 1, 3). On peut donc définir les conditions aux limites de p, et le problème se résout formellement de la même manière. Il restera les problèmes d'interprétation des équations obtenues.

6.3. *Conclusion.* — Notons que nous avons dès à présent surmonté la difficulté technique soulignée par J. L. LIONS ([4], chap. 3, remarque 16.1); et il est agréable de voir apparaître l'état adjoint « naturellement » comme une forme linéaire sur l'espace des valeurs de l'équation. Mais cette résolution soulève de nouvelles questions : la formulation abstraite générale qui est proposée, à quels problèmes s'applique-t-elle? Quelles sont les hypothèses qui assurent l'existence d'un contrôle optimal?

Sans répondre à ces questions, soulignons simplement une application évidente à un problème qui n'avait pas été résolu : celui d'un système différentiel linéaire avec liaisons et contraintes sur l'état final.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AHMED (N. U.) and TEO (K. L.). — Necessary conditions for optimality of Cauchy problems for parabolic partial differential systems, *Siam J. Control*, t. 13, 1975, p. 981-993.

[2] EKELAND (I.) et TEMAM (R.). — *Analyse convexe et problèmes variationnels.* — Paris, Dunod et Gauthier-Villars, 1974.

[3] KURATOWSKI (K.) and RYLL-NARDZEWSKI (C.). — A general theorem on selectors, *Bull. Acad. Polon. Sc.*, t. 13, 1965, p. 397-403.

[4] LIONS (J. L.). — *Contrôle optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles.* — Paris, Dunod et Gauthier-Villars, 1968 (*Études mathématiques*).

[5] LIONS (J. L.) et MAGENES (E.). — *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* 3 volumes. — Paris, Dunod, 1968-1970 (*Travaux et Recherches mathématiques*, 17, 18 et 20).

[6] MICHEL (P.). — Problème des inégalités. Applications à la programmation et au contrôle optimal, *Bull. Soc. math. France*, t. 101, 1973, p. 413-439.

[7] MICHEL (P.). — Problèmes d'optimisation définis par des fonctions qui sont sommes de fonctions convexes et de fonctions dérivables, *J. Math. pures et appl.*, t. 53, 1974, p. 321-330.

[8] PONTRJAGIN (L. S.), BOLTYANSKII (V. G.), GAMKRELIDZE (R. V.) and MISCHENKO (E. F.). — *The mathematical theory of optimal processes.* Translation from Russian. New York, Interscience Publishers, 1962.

[9] SOBOLEV (S. L.). — *Applications de l'analyse fonctionnelle aux équations de la Physique mathématique* [en russe]. — Léningrad, 1950; et [en anglais] Providence, American mathematical Society, 1963 (*Translations of mathematical Monographs*, 7).

[10] ZOLEZZI (T.). — Necessary conditions for optimal controls of elliptic or parabolic problems, *Siam J. Control*, t. 10, 1972, p. 594-607.

(Texte reçu le 26 février 1976,
remanié le 29 octobre 1976.)

Philippe MICHEL,
C.M.E. (Panthéon 219)
Université de Paris I
12, place du Panthéon,
75231 Paris Cedex 05.