

BULLETIN DE LA S. M. F.

MARC YOR

Formule de Cauchy relative à certains lacets browniens

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 3-31

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__3_0

© Bulletin de la S. M. F., 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**FORMULE DE CAUCHY
RELATIVE A CERTAINS LACETS BROWNIENS**

PAR

MARC YOR

[Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris]

RÉSUMÉ. — Si Z est une martingale locale conforme (à valeurs complexes) telle que $\mathbb{C} \setminus U$ soit un fermé polaire pour Z , et si f est une fonction holomorphe dans U , l'intégrale stochastique d'Ito $\int_0^t f(Z_u) dZ_u$ et l'intégrale $\int_{Z_{(0,t)}(\omega)} f(z) dz$, définie par prolongement analytique, sont indistingables. Cette identité permet d'obtenir, pour le processus de Wiener à deux paramètres, complexifié, une formule de Cauchy, exprimée à l'aide d'intégrales stochastiques, sur les lacets $Z_\gamma(\omega)$ de ce processus, lorsque γ est par exemple le bord orienté d'un rectangle de côtés parallèles aux axes.

Introduction

Le théorème de P. LÉVY établissant l'invariance conforme du mouvement brownien à valeurs dans \mathbb{C} ([8], page 254) suscite de nombreuses recherches (par exemple, [3], [4], [5], [6], et cette liste est loin d'être exhaustive!) liant fonctions holomorphes et mouvement brownien.

Nous nous sommes posé, à ce sujet, la question suivante : la formule de Cauchy constituant l'un des points cruciaux de la théorie des fonctions holomorphes, peut-on obtenir une formule analogue, relative au mouvement brownien plan, ou à des processus « voisins »?

Une seconde question, très voisine de la première, est à l'origine de ce travail : si $(Z_t, t \geq 0)$ est une martingale continue, à valeurs dans U , ouvert du plan complexe, et $\Lambda = Pdx + Qdy$ une forme différentielle fermée définie sur U , l'intégrale $\int_{Z_{(0,t)}(\omega)} \Lambda$ de Λ sur le chemin continu

$(Z_s(\omega), 0 \leq s \leq t)$ coïncide-t-elle presque sûrement avec l'intégrale stochastique d'Ito $\int_0^t [P(X_s, Y_s) dX_s + Q(X_s, Y_s) dY_s]$ (notée dans tout le travail, pour abrégier, $\int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s)$)?

En général, les deux intégrales ne sont pas égales, et l'on est amené à étudier, au premier chapitre, les expressions

$$(1) \quad \mathbb{R} \int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \mathbb{P}\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \in \tau_n} \int_{[Z_{t_i}, Z_{t_{i+1}}]} \Lambda,$$

où $\mathbb{P}\text{-lim}$ désigne la limite en probabilité, $(\tau_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite de subdivisions de $(0, t)$, de plus en plus fines, dont le pas $\mathcal{O}(\tau_n)$ décroît vers z\u00e9ro, et $\int_{[z, z']} \Lambda = \{z + \lambda(z' - z), 0 \leq \lambda \leq 1\}$. On donne ensuite une formule g\u00e9n\u00e9rale liant $\mathbb{R} \int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s)$ et $\int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s)$ (voir les formules (8) et (9) ci-dessous).

La formule

$$(2) \quad \mathbb{R} \int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s) = \int_{Z(0, t)(\omega)} \Lambda \text{ p. s.}$$

permet alors de r\u00e9pondre \u00e0 la seconde question pos\u00e9e pr\u00e9c\u00e9demment. Un cas particulier fondamental est celui o\u00f9 la martingale $Z = X + iY$ est conforme (d\u00e9finition due \u00e0 R. GETTOOR et M. SHARPE, voir [6]), \u00e0 valeurs dans U . Alors, si $\int \Lambda = f(z) dz$, avec f fonction holomorphe dans U , on a

$$(3) \quad \int_0^t f(Z_s) dZ_s = \int_{Z(0, t)(\omega)} f(z) dz \text{ p. s.}$$

En appliquant cette formule \u00e0 $f(z) = 1/z$ lorsque $P(Z_0 = 0) = 0$, on obtient l'\u00e9galit\u00e9

$$(4) \quad \theta(t) - \theta(s) = \int_s^t \frac{X_u dY_u - Y_u dX_u}{X_u^2 + Y_u^2} \quad (0 \leq s \leq t)$$

explicitant la variation entre s et t d'une d\u00e9termination continue $(\theta(u), u \geq 0)$ de l'angle polaire de la martingale conforme Z . Cette identit\u00e9 nous permet de retrouver la loi de $\theta(t) - \theta(0)$, pour $t > 0$ fix\u00e9, lorsque Z est le mouvement brownien complexe (voir, \u00e0 ce sujet, l'article de F. SPITZER [13] ou le livre de ITO-MCKEAN [7], page 271).

Les r\u00e9sultats d\u00e9crits ci-dessus nous entraînent \u00e0 \u00e9tudier au second chapitre l'indice d'un point a du plan par rapport aux lacets constitu\u00e9s par la trajectoire $Z_\gamma(\omega)$ du processus de Wiener complexe \u00e0 deux para-

mètres, γ étant le bord d'un rectangle de \mathbf{R}_+^2 , de côtés parallèles aux axes, et à formuler le théorème des résidus (et donc la formule de Cauchy) relatifs à de tels lacets en termes d'intégrales stochastiques.

Cette étude est reprise au troisième chapitre, en remplaçant le point (déterministe) a par la variable aléatoire Z_a ($a \in \mathbf{R}_+^2$).

0. Quelques notations

Si $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est une suite finie de points de \mathbf{R} ou \mathbf{C} , on note $\emptyset(X) = \sup_i |x_{i+1} - x_i|$.

– Dans tout le travail, $\tau_n = (0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{\nu_n}^n = t)$ est une suite de subdivisions de $(0, t)$, de plus en plus fines, et dont le pas $\emptyset(\tau_n)$ décroît vers 0. Une telle suite $(\tau_n, n \in \mathbf{N})$ sera appelée suite de subdivisions standard de $(0, t)$.

– $\mathcal{H}(U)$ désigne l'ensemble des fonctions holomorphes sur U , ouvert de \mathbf{C} .

– Si V est un ouvert de \mathbf{R} ou \mathbf{R}^2 , $C^1(V)$ (resp. $C_b^1(V)$) désigne l'ensemble des fonctions continûment différentiables (resp. continûment différentiables bornées ainsi que leurs dérivées premières).

– On appelle chemin toute application continue $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbf{C}$; γ^* désigne le graphe de γ .

Le symbole Δ dans $A =^{\Delta} B$ signifie que A est, par définition, égal à B .

I. Intégrales stochastiques

et intégrales de formes différentielles fermées

sur un ouvert de \mathbf{C}

1. Rappel

On rappelle très succinctement la définition de $\int_{\gamma} \Lambda$ pour $\Lambda =^{\Delta} Pdx + Qdy =^{\Delta} f(z) dz + g(\bar{z}) d\bar{z}$, forme différentielle de degré 1, définie sur U , ouvert de \mathbf{C} , et fermée (i. e. : ses coefficients – complexes – sont continus, et elle admet localement une primitive) et $\gamma : (0, 1) \rightarrow U$ chemin (pour référence, voir par exemple [2], page 58) :

Si $\beta = \bigcup_{i=1}^n B(\gamma(t_i), r_i)$ est une chaîne formée de boules recouvrant γ^* et contenues dans U , avec $\tau_n = (0 = t_0 < \dots < t_n = 1)$ subdivision de $(0, 1)$, on définit F primitive continue de Λ le long de β , et on note

$I_\gamma(\Lambda) = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0))$. $I_\gamma(\Lambda)$ ne dépend alors que de γ^* et Λ . De plus, l'intégrale I possède les propriétés remarquables suivantes :

(i) si γ est de classe C^1 par morceaux, $I_\gamma(\Lambda)$ coïncide avec l'intégrale de Riemann $\int_\gamma \Lambda(dx, dy)$ (d'où la notation, dans tous les cas, $I_\gamma(\Lambda) = \int_\gamma \Lambda$);

(ii) si γ et γ' sont deux chemins U -homotopes à extrémités fixes, alors

$$\int_\gamma \Lambda = \int_{\gamma'} \Lambda;$$

(iii) si $(\gamma_n, n \in \mathbb{N})$ désigne une suite de chemins tels que $\gamma_n^* \subset \gamma^*$, avec $\gamma_n(0) \rightarrow \gamma(0)$ et $\gamma_n(1) \rightarrow \gamma(1)$, alors $\int_{\gamma_n} \Lambda \rightarrow \int_\gamma \Lambda$.

La proposition suivante découle aisément de (ii), et de l'uniforme continuité de γ :

PROPOSITION 1.1. — Soit $\tau_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = 1\}$ une suite de subdivisions standard de $(0, 1)$. On note γ_n la ligne polygonale obtenue en joignant les points de $\gamma_{\tau_n} = \{\gamma(t_0^n), \gamma(t_1^n), \dots, \gamma(t_{p_n}^n)\}$.

Il existe alors $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N$ on ait

$$\gamma_n^* \subset U \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_n} \Lambda = \int_\gamma \Lambda.$$

2. Différentes définitions d'intégrales stochastiques

2.1. Dans toute la suite, on suppose donné un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) muni d'une filtration croissante $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ vérifiant les conditions habituelles : \mathcal{F}_0 est (\mathcal{F}, P) -complète, et la famille $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ est continue à droite. \mathcal{M}_c désigne l'ensemble des (\mathcal{F}_t, P) martingales continues de carré intégrable (i. e. : $\forall t, E(M_t^2) < \infty$), \mathcal{L}_c l'ensemble des (\mathcal{F}_t, P) martingales locales continues. Les éléments de \mathcal{M}_c et \mathcal{L}_c sont à valeurs réelles ou complexes.

Si $X \in \mathcal{L}_c$ est à valeurs réelles, on note $\langle X, X \rangle$ l'unique ⁽¹⁾ processus croissant prévisible (en fait, continu) tel que $X^2 - \langle X, X \rangle$ appartienne

⁽¹⁾ Tous les processus croissants, et plus généralement, les processus à variation bornée, sont ici supposés nuls en 0.

à \mathcal{L}_c . Ainsi, si X et Y sont les parties réelle et imaginaire de $Z \in \mathcal{L}_c$, le processus défini par :

$$(5) \quad \langle Z, Z \rangle = \langle X, X \rangle - \langle Y, Y \rangle + 2i \langle X, Y \rangle$$

est l'unique processus prévisible à variation bornée tel que $Z^2 - \langle Z, Z \rangle \in \mathcal{L}_c$ (signalons que ce processus est noté $\langle Z, \bar{Z} \rangle$ par R. GETTOOR et M. SHARPE en [6], mais notre notation nous semble plus naturelle ⁽²⁾. De toute façon, cette différence ne prête pas à confusion). Si $Z, Z' \in \mathcal{L}_c$, on définit $\langle Z, Z' \rangle$ par polarisation, faisant de $(Z, Z') \rightarrow \langle Z, Z' \rangle$ une application \mathbf{C} -bilineaire définie sur $\mathcal{L}_c \times \mathcal{L}_c$.

2.2. La variante suivante d'un lemme classique (voir, par exemple [10]) nous sera très utile par la suite :

LEMME 2.2. — Soient :

- $0 < \lambda \leq 1$ et $(\tau_n, n \in \mathbf{N})$ une suite de subdivisions standard de $(0, t)$ ($t > 0$) que l'on pointe par $t_i^\lambda = t_i + \lambda(t_{i+1} - t_i)$;
- $M \in \mathcal{M}_c$, uniformément bornée, à valeurs réelles, et $A = \langle M, M \rangle$;
- $(f(u, \omega), u \geq 0)$ un processus \mathcal{F}_u adapté, continu, uniformément borné. Alors :

1° la suite $\sum_{\tau_n} f(t_i) (M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})^2 - \sum_{\tau_n} f(t_i) (A_{t_i^\lambda} - A_{t_i})$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers zéro;

2° si $\lambda = 1$, ou si A , en tant que mesure aléatoire sur \mathbf{R}_+ , est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue ⁽³⁾ et $0 < \lambda < 1$, on a

$$\sum_{\tau_n} f(t_i) (M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})^2 \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} \lambda \int_0^t f(s) dA_s \quad \text{dans } L^2(\Omega, \mathcal{F}, P).$$

Preuve (succincte). — Remarquons tout d'abord que M étant uniformément bornée, A est de puissance p -ième intégrable pour tout $p \in \mathbf{N}$ (d'après les inégalités de Burkholder par exemple) :

1° la partie 1° du lemme est bien connue pour $\lambda = 1$. Une légère modification des arguments utilisés dans ce cas entraîne 1° pour $0 < \lambda \leq 1$;

2° si $\lambda = 1$, 2° est immédiat, f étant un processus continu. Si $0 < \lambda < 1$, et $A \ll \mu$, on déduit 2° des remarques suivantes :

si a est une fonction continue sur $(0, t)$,

$$\left| \sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} a(s) ds - \sum_{\tau_n} a(t_i) \lambda (t_{i+1} - t_i) \right| \leq \sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} |a(s) - a(t_i)| ds \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$$

⁽²⁾ Voir par exemple la formule (9).

⁽³⁾ On notera dans la suite $A \ll \mu$.

et donc

$$\sum_{\tau_n} \int_{t_i}^{t_i^\lambda} a(s) ds \xrightarrow{(n+\infty)} \lambda \int_0^t a(s) ds.$$

Les fonctions continues étant denses dans $L^1((0, t), \mu)$, le même résultat est vrai pour $a \in L^1((0, t), \mu)$.

2.3. On déduit du lemme précédent la proposition suivante :

PROPOSITION 2.3. — Soient

- $f \in C_b^1(\mathbf{R})$;
 - $(\tau_n, n \in \mathbf{N})$ une suite de subdivisions standard de $(0, t)$ pointée par $t_i^\lambda = t_i + \lambda(t_{i+1} - t_i)$ ($t_i \in \tau_n, 0 < \lambda \leq 1$);
 - $M, N \in \mathcal{M}_c$, uniformément bornées, à valeurs réelles et $A = \langle M, N \rangle$:
- 1° on note $M^{(n)}$ le processus défini sur $(0, t) \times \Omega$ par

$$M_u^{(n)}(\omega) = M_{t_i}(\omega) + \frac{u - t_i}{t_{i+1} - t_i} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(\omega) \quad (t_i \leq u \leq t_{i+1}, t_i \in \tau_n).$$

La suite des intégrales de Riemann $\int_0^t f(M_u^{(n)}) dN_u^{(n)}$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers

$$(6) \quad \mathbf{R} \int_0^t f(M_s) dN_s = \int_0^t f(M_s) dN_s + \frac{1}{2} \int_0^t f'(M_s) dA_s;$$

2° si $\lambda = 1$, ou si $A \ll \mu$ et $0 < \lambda < 1$, la suite de variables $(f \cdot N)_{t_n^\lambda}(t) = \sum_{\tau_n} f(M_{t_i^\lambda}) (N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$ converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers ⁽⁴⁾

$$(7) \quad S_\lambda \int_0^t f(M_s) dN_s = \int_0^t f(M_s) dN_s + \lambda \int_0^t f'(M_s) dA_s.$$

Remarque. — Cette proposition et la suivante étendent aux martingales locales continues des résultats connus lorsque $M = N = B$ mouvement brownien réel. En effet, dans ce cas, le résultat 1° de la proposition découle en particulier de ceux de l'article [14] de E. WONG et M. ZAKAÏ, et les intégrales $S_\lambda \int_0^t f(B_s) dB_s$ sont les « intégrales de Stratonovitch d'ordre λ », ce qui justifie notre notation.

(4) On notera $S = S_1$ dans la suite.

Démonstration de la proposition :

1° posons $M_i^s(\omega) = s(M_{t_{i+1}}(\omega) - M_{t_i}(\omega))$.

On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^t f(M_u^{(n)}) dN_u^{(n)} &= \sum_{\tau_n} \int_0^1 f(M_{t_i} + s(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})) ds (N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \\ &= \sum_{\tau_n} f(M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \\ &\quad + \sum_{\tau_n} \int_0^1 ds s \int_0^1 dv f'(M_{t_i} + v M_i^s) \\ &\quad \times (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}). \end{aligned}$$

La première somme converge dans L^2 vers l'intégrale de Ito $\int_0^t f(M_s) dN_s$. La seconde peut être décomposée en

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{\tau_n} f'(M_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \\ &\quad + \sum_{\tau_n} \int_0^1 ds s \int_0^1 dv (f'(M_{t_i} + v M_i^s) - f'(M_{t_i}))(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}). \end{aligned}$$

D'après le lemme, la première somme converge vers $(1/2) \int_0^t f'(M_s) dA_s$ et la seconde vers 0 (grâce à la continuité de f') dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$;

2° décomposons $(f \cdot N)_{\tau_n^\lambda}(t)$ en

$$\begin{aligned} (f \cdot N)_{\tau_n^\lambda}(t) &= \sum_{\tau_n} f(M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \\ &\quad + \sum_{\tau_n} \int_0^1 f'(M_{t_i} + s(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})) ds (M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) \\ &= \sum_{\tau_n} f(M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}) + \sum_{\tau_n} f'(M_{t_i})(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})(N_{t_i^\lambda} - N_{t_i}) \\ &\quad + \sum_{\tau_n} f'(M_{t_i})(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i^\lambda}) \\ &\quad + \sum_{\tau_n} \int_0^1 ds \{f'(M_{t_i} + s(M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})) - f'(M_{t_i})\} \\ &\quad \times (M_{t_i^\lambda} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i}). \end{aligned}$$

La première somme converge, lorsque $(n \rightarrow \infty)$, vers $\int_0^t f(M_s) dN_s$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, la seconde converge, d'après le lemme, vers

$\lambda \int_0^t f'(M_s) dA_s$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. La troisième somme converge dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vers 0 : en effet, on a

$$E \left\{ \sum_{\tau_n} f'(M_{t_i})(M_{t_i'} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i'}) \right\}^2 = E \left\{ \sum_{\tau_n} (f'(M_{t_i})(M_{t_i'} - M_{t_i}))^2 (A'_{t_{i+1}} - A'_{t_i'}) \right\},$$

où $A' = \langle N, N \rangle$, et la continuité de M entraîne le résultat. Enfin, la continuité de f' entraîne la convergence de la dernière somme vers 0 dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

2.4. Les résultats précédents s'étendent bien par « localisation ».

PROPOSITION 2.4. — *L'énoncé de la proposition I.2.3 est toujours valable lorsque $M, N \in \mathcal{L}_c, f \in C^1(\mathbf{R})$, à condition de remplacer « convergence dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ » par « convergence en probabilité ».*

Preuve. — Définissons a priori $R \int_0^t f(M_s) dN_s$ (resp. $S_k \int_0^t f(M_s) dN_s$) à l'aide des formules (6) (resp. (7)). Soit $T_n = \inf(t; |M_t| \wedge |N_t| \geq n)$ et $(f_n, n \in \mathbf{N})$ une suite de fonctions de $C_b^1(\mathbf{R})$, telles que $f_n \equiv f$ sur $(-n-1, n+1)$, pour tout n .

On a alors (en écrivant les inégalités pour S par exemple), pour tout $\alpha > 0$,

$$P \left(\left| S \int_0^t f(M_s) dN_s - (f \cdot N)_{\tau_n}(t) \right| \geq \alpha \right) \leq P(T_p \leq t) + P \left(\left| S \int_0^t f_p(M_s) dN_s - (f_p \cdot N)_{\tau_n}(t) \right| \geq \alpha; T_p > t \right).$$

Or, $T_p \uparrow \infty$ p. s. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe donc p_0 tel que $P(T_{p_0} \leq t) \leq \varepsilon/2$. On majore alors la seconde expression (pour $p = p_0$) par

$$\frac{1}{\alpha} \left(E \left(\left(S \int_0^t f_{p_0}(M_s) dN_s - (f_{p_0} \cdot N)_{\tau_n}(t) \right)^2 \right) \right)^{1/2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour n suffisamment grand, et la proposition est démontrée.

2.5. Nous n'avons énoncé les résultats précédents que pour les martingales (locales) réelles continues. Le passage aux martingales à valeurs dans \mathbf{R}^d est immédiat, et on a donc le théorème suivant :

THÉORÈME 2.5. — *Soit $Z = X + iY \in \mathcal{L}_c$, telle que $\Gamma = \mathbf{C} \setminus U$ soit un fermé de \mathbf{C} , polaire pour Z , i. e. : $P(\exists t \geq 0, Z_t \in \Gamma) = 0$.*

Soit $\Lambda = Pdx + Qdy = f dz + g \bar{d}z$ une forme différentielle fermée, de classe C^1 , définie sur U . Alors, on a l'égalité

$$(8) \quad \int_{Z(0, t) (\omega)} \Lambda = \int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s) + \frac{1}{2} J_t(\Lambda, Z)$$

avec

$$\begin{aligned} \int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s) &= \int_0^t \{ P(X_s, Y_s) dX_s + Q(X_s, Y_s) dY_s \} \\ &= \int_0^t \{ f(Z_s) dZ_s + g(Z_s) \bar{d}Z_s \} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (9) \quad J_t(\Lambda, Z) &= \int_0^t \left\{ \frac{\partial P}{\partial x} (X_s, Y_s) d\langle X, X \rangle_s \right. \\ &\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) (X_s, Y_s) d\langle X, Y \rangle_s \\ &\quad \left. + \frac{\partial Q}{\partial y} (X_s, Y_s) d\langle Y, Y \rangle_s \right\} \\ &= \int_0^t \left\{ \frac{\partial f}{\partial z} (Z_s) d\langle Z, Z \rangle_s \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial g}{\partial z} \right) (Z_s) d\langle \bar{Z}, Z \rangle_s + \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} (Z_s) d\langle \bar{Z}, \bar{Z} \rangle_s \right\}. \end{aligned}$$

De plus, les deux membres de (8) sont indistingables.

Remarque. — Le membre de gauche de (8) n'étant défini que pour Λ forme différentielle fermée, on a, en fait, $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ et $\partial f/\partial \bar{z} = \partial g/\partial z$. Cependant, le membre de droite étant défini pour toute forme différentielle de classe C^1 , nous préférons donner l'expression générale de $J_t(\Lambda, Z)$.

Démonstration du théorème. — D'après la proposition I.2.4, le membre de droite de (8) est égal à $R \int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s)$, qui est la limite en probabilité de la suite $\sum_{\tau_n} \int_{[Z_{t_i}, Z_{t_{i+1}}]} \Lambda$, $\{\tau_n, n \in \mathbf{N}\}$ étant une suite de subdivisions standard de $(0, t)$. C'est donc la limite p. s. d'une sous-suite de ces intégrales de Riemann et, d'après la proposition I.1.1,

$$\int_{Z(0, t) (\omega)} \Lambda = R \int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s).$$

3. Le cas particulier des martingales conformes

3.1. Le théorème I.2.5 prend une forme très simple et intéressante pour une classe particulière de martingales (locales) complexes : les martingales conformes, dont nous rappelons la définition :

Définition 3.1. [6]. — $Z \in \mathcal{L}_c$ est dite martingale (locale) conforme si $\langle Z, Z \rangle = 0$, ou, de façon équivalente, $Z^2 \in \mathcal{L}_c$ (d'après la définition de $\langle Z, Z \rangle$ en I.2.1). L'ensemble des martingales conformes est noté \mathcal{C} par la suite.

Les martingales conformes ont de nombreuses propriétés intéressantes. En particulier, le théorème de P. LÉVY mentionné dans l'introduction s'étend naturellement aux éléments de \mathcal{C} de la façon suivante :

THÉORÈME 3.1. — Soit $Z \in \mathcal{C}$; alors, pour toute fonction f holomorphe (ou anti-holomorphe) sur \mathbf{C} , on a : $f \circ Z \in \mathcal{C}$.

Preuve. — D'après la formule de Ito, on a

$$\begin{aligned} f(Z_t) &= f(Z_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial z}(Z_s) dZ_s \quad \text{si } f \text{ est holomorphe,} \\ &= f(Z_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(Z_s) d\bar{Z}_s \quad \text{si } f \text{ est anti-holomorphe.} \end{aligned}$$

Or, si $Z \in \mathcal{C}$, on a aussi $\bar{Z} \in \mathcal{C}$; de plus, \mathcal{C} est stable par intégration stochastique. En effet, si $Z \in \mathcal{L}_c$, et H est un processus bien mesurable tel que

$$\forall t, \int_0^t |H_s|^2 (d\langle X, X \rangle_s + d\langle Y, Y \rangle_s) < \infty, \text{ p. s.,}$$

alors

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s dZ_s, \int_0^\cdot H_s dZ_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle Z, Z \rangle_s,$$

d'où le résultat.

3.2. Voici une version du théorème I.2.5 appliqué à $Z \in \mathcal{C}$.

THÉORÈME 3.2. — Soit $Z \in \mathcal{C}$, telle que $\Gamma = \mathbf{C} \setminus U$ soit un fermé de \mathbf{C} polaire pour Z . Alors, si $f \in \mathcal{H}(U)$, on a

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{Z(0, t)}^{(\omega)} f(z) dz &= \int_0^t f(Z_s) dZ_s = \mathbf{R} \int_0^t f(Z_s) dZ_s = \mathbf{S} \int_0^t f(Z_s) dZ_s \text{ p. s.} \\ &\left(= \mathbf{S}_\lambda \int_0^t f(Z_s) dZ_s \text{ si } 0 < \lambda < 1 \text{ et } A = \langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle \ll \mu \right). \end{aligned} \right.$$

Preuve. — $\Lambda = f(z) dz$ est une forme différentielle fermée de classe C^∞ sur U .

En particulier, on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.2. — Soit $Z \in \mathcal{C}$, telle que $P(Z_0 = 0) = 0$. $\{0\}$ est alors polaire pour Z , et on peut donc définir presque sûrement $(\theta(t), t \geq 0)$ détermination continue de l'angle polaire de $Z_t(\omega)$. Alors

$$(11) \quad \int_{Z_{(0,t)}(\omega)} \frac{dz}{z} = \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s} \quad \text{et} \quad \theta_t - \theta_0 = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{X_s^2 + Y_s^2} \text{ p. s.}$$

Preuve. — Les conditions $Z \in \mathcal{C}$ et $P(Z_0 = 0) = 0$ entraînent que $\{0\}$ est polaire pour Z , car Z est un mouvement brownien complexe, au changement de temps inverse de $A = \langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle$ près (voir [6]), et la propriété est bien connue pour le mouvement brownien complexe.

La première formule de (11) découle donc du théorème I.3.2; de plus,

par définition de $\int_{Z_{(0,t)}(\omega)} dz/z$, on a

$$\int_{Z_{(0,t)}(\omega)} \frac{dz}{z} = \log_\omega(Z_t(\omega)) - \log_\omega(Z_0(\omega)),$$

où $\log_\omega(z)$ est une primitive de $1/z$ le long de la trajectoire $Z_t(\omega)$ (voir I.1). D'où

$$\int_{Z_{(0,t)}(\omega)} \frac{dz}{z} = \log \left| \frac{Z_t(\omega)}{Z_0(\omega)} \right| + i(\theta_t(\omega) - \theta_0(\omega)),$$

et donc

$$\theta_t(\omega) - \theta_0(\omega) = \text{im} \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s} = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{(X_s^2 + Y_s^2)} \text{ p. s.}$$

Remarque. — En [6], R. GETTOOR et M. SHARPE utilisent la formule de Ito pour obtenir la première partie de (11). En effet, d'après cette formule, on a en posant $W_t = \int_0^t dZ_s/Z_s, (1/Z_t) \exp W_t = 1/Z_0$, d'où $\exp(W_t) = Z_t/Z_0$, ce qui entraîne

$$W_t(\omega) = \log_\omega(Z_t(\omega)) - \log_\omega(Z_0(\omega)) \text{ p. s.,}$$

avec les notations précédentes.

4. Loi de l'angle polaire $(\theta_t - \theta_0)$ du mouvement brownien complexe $(Z_u, u \geq 0)$

Ce paragraphe donne une application de la formule (11) et est indépendant de la suite de l'article.

Cette formule nous permet en effet de retrouver la loi de la variable $(\theta_t - \theta_0)$, $(\theta_u, u \geq 0)$ désignant une détermination continue de l'angle polaire du mouvement brownien complexe.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ espace filtré vérifiant les conditions habituelles, et $Z = (Z_t = X_t + iY_t, t \geq 0)$ une \mathcal{F}_t -martingale conforme issue de $z \neq 0$, et telle que $\langle X, X \rangle_t = \langle Y, Y \rangle_t = t$. On peut dire, de façon équivalente, que le processus (X, Y) est un (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien à deux dimensions. Remarquons que :

le processus $\Gamma(u) = ((\Gamma_1(u), \Gamma_2(u)); u \geq 0)$ défini par

$$\Gamma_1(u) = \int_0^u \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^{1/2}}; \quad \Gamma_2(u) = \int_0^u \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{(X_s^2 + Y_s^2)^{1/2}}$$

est un second (\mathcal{F}_t) -mouvement brownien à deux dimensions, avec $\Gamma(0) = (0, 0)$;

si l'on note $R(u) = |Z_u|$, le processus $(R(u), \theta(u); u \geq 0)$ est solution du système d'équations stochastiques (où l'on considère les processus Γ_1 et Γ_2 comme des données)

$$(e) \quad \begin{cases} (e.1) & R(t) = R(0) + \Gamma_1(t) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{R(s)} ds, \\ (e.2) & \theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \frac{1}{R(s)} d\Gamma_2(s). \end{cases}$$

En étudiant (e), on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 4.1. :

1° $(R(t), t \geq 0)$ est l'unique solution positive de (e.1) pour $R(0) = |z| > 0$ et pour tout $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t^R = \mathcal{F}_t^{\Gamma_1}$, où

$$\mathcal{F}_t^R = \sigma\{R(s), s \leq t\} \vee \mathcal{N}, \quad \mathcal{F}_t^{\Gamma_1} = \sigma\{\Gamma_1(s), s \leq t\} \vee \mathcal{N},$$

et \mathcal{N} désigne la classe des ensembles (\mathcal{F}, P) -négligeables;

2° la fonction caractéristique de $(\theta_t - \theta_0)$ vérifie la formule

$$(12) \quad E[\exp(i\alpha(\theta_t - \theta_0))] = E\left[\exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} \int_0^t \frac{1}{R^2(s)} ds\right)\right].$$

Preuve :

1° soient R_1 et R_2 deux solutions positives de (e.1), avec $R_1(0) = R_2(0)$. Alors, $D = R_1 - R_2$ est un processus dérivable, et

$$D'(t) = -\frac{1}{2} \frac{D(t)}{(R_1 R_2)(t)}.$$

D'où $[D^2]'(t) \leq 0$; or, $D^2(0) = 0 \Rightarrow D \equiv 0$ (cette démonstration, valable pour les processus de Bessel en toute dimension, figure dans MCKEAN [9], page 80). Soit maintenant une suite $\Phi_n \in C_b^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, telle que $\Phi_n(x) = 1/x$ pour $x \geq 1/n$. On note R_n l'unique solution de l'équation

$$R_n(t) = R_n(0) + \Gamma_1(t) + \frac{1}{2} \int_0^t ds \Phi_n(R_n(s)).$$

La régularité de Φ_n entraîne que R_n est un processus adapté aux tribus $\mathcal{F}_t^{\Gamma_1}$. Soit $T_n = \inf(t \geq 0; R(t) \leq 1/n)$. On sait que, pour tout n , $T_n < \infty$ p. s. D'autre part, par unicité, on a $R_n(s \wedge T_n) = R(s \wedge T_n)$, dont on déduit $T_n = \inf(t; R_n(t) \leq 1/n)$; T_n est ainsi un temps d'arrêt des tribus $\mathcal{F}_t^{\Gamma_1}$, et pour $u \leq t$, on a $\forall n, R(u \wedge T_n) \in \mathcal{F}_{t \wedge T_n}^{\Gamma_1} \subseteq \mathcal{F}_t^{\Gamma_1}$, d'où le résultat, en faisant tendre n vers $+\infty$;

2° le résultat cherché ne dépend que de la loi du mouvement brownien complexe. On peut donc supposer $\Omega = C(\mathbf{R}_+, \mathbf{C})$, $Z_t(\omega) = \omega(t)$, et $\mathcal{F} = \sigma\{Z_s, s \in \mathbf{R}_+\}$. Il existe P^ω version régulière de l'espérance conditionnelle de P par rapport à la tribu $\sigma\{\Gamma(u), u \in \mathbf{R}_+\}$. On a alors d'après (e.2), et le résultat 1° :

$$\begin{aligned} E^\omega(\exp(i\alpha(\theta_t - \theta_0))) &= E^\omega\left(\exp\left(i\alpha \int_0^t \frac{1}{R(s)(\omega)} d\Gamma_2(s)\right)\right) \text{ p. s.} \\ &= \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2} \int_0^t \frac{1}{R^2(s)(\omega)} ds\right) \text{ p. s.} \end{aligned}$$

d'où la formule (12), obtenue en prenant l'espérance des deux membres dans l'égalité précédente.

C'est ensuite à partir de la formule (12) que ITO-MCKEAN ([7], page 271) déduisent la loi de $(\theta_t - \theta_0)$, par inversion de la transformation de Fourier.

5. Remarques générales

5.1. Le calcul d'intégrales $\int_\gamma f(z) dz$, pour U ouvert de \mathbf{C} , $f \in \mathcal{H}(U)$, et γ lacet avec $\gamma^* \subset U$, est un des outils importants de l'analyse complexe.

De notre point de vue, si $f \in \mathcal{H}(U)$, et $Z \in \mathcal{L}_c$ est à valeurs dans U , il est naturel de s'intéresser aux lacets $Z_{(0,t)}(\omega) - Z_{(0,t)}(\omega)$, et compte tenu de la définition de l'intégrale stochastique de Ito, de définir

$$\oint_{(0,t)} f(Z_u) dZ_u = \int_0^t f(Z_u) dZ_u - S \int_0^t f(Z_u) dZ_u.$$

Si l'on suppose de plus $Z \in \mathcal{C}$, on a, d'après le théorème I.3.2, $\oint_{(0,t)} f(Z_u) dZ_u = 0$. En particulier, si $P(Z_0 = a) = 0$, et $Z \in \mathcal{C}$, $\{a\}$ est polaire pour Z , et donc $\oint_{(0,t)} dZ_u / (Z_u - a) = 0$. Cette propriété est d'ailleurs caractéristique des éléments de \mathcal{C} , comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1. — Soit $Z \in \mathcal{L}_c$, pour laquelle $\{a\}$ est polaire. Alors,

$$\oint_{(0,t)} \frac{dZ_u}{(Z_u - a)} \in 2i\pi Z \Leftrightarrow \oint_{(0,t)} \frac{dZ_u}{Z_u - a} = 0 \Leftrightarrow Z \in \mathcal{C}.$$

Preuve. — La première équivalence provient de la continuité de $t \rightarrow \oint_{(0,t)} dZ_u / (Z_u - a)$, et la seconde de

$$\oint_0^t \int_{(0,t)} \frac{dZ_u}{(Z_u - a)} = \frac{d\langle Z, Z \rangle_u}{(Z_u - a)^2}.$$

Ainsi, on ne peut poursuivre plus loin, si l'on se limite à ce cadre, une étude, qui ne soit pas triviale, d'une formule de Cauchy stochastique. Ceci est bien sûr lié au fait que les seuls lacets que l'on puisse raisonnablement associer à $Z \in \mathcal{C}$ sont $Z_{(0,t)}(\omega) - Z_{(0,t)}(\omega)$ (voir cependant la remarque II.3.2).

C'est pourquoi, dans la même optique, nous avons été amené à considérer le mouvement brownien à deux paramètres (voir II.1). Alors si $\omega \in \Omega$, et γ est une courbe fermée de \mathbf{C} telle que $a \notin Z_\gamma(\omega)$, il n'est pas trivial de décider si $Z_\gamma(\omega)$ est $\mathbf{C} \setminus \{a\}$ -homotope à 0 ou non.

5.2. Revenons maintenant aux notations du théorème I.2.5 sans supposer Λ fermée. Disons que Λ est (stochastiquement) fermée pour Z si $\mathbf{R} \int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s) \in \mathcal{L}_c$. D'après les formules (8) et (9), on a évidemment : Λ est fermée pour Z

$$\Leftrightarrow \int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s) = (\mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{S}) \int_0^t \Lambda(dX_s, dY_s),$$

Λ est donc fermée pour Z si les différentes définitions de l'intégrale stochastique de Λ par rapport à Z coïncident.

Exemples :

1° $S(t) = \int_0^t (X_s dY_s - Y_s dX_s)$, appelée par P. LÉVY l'aire stochastique de Z entre 0 et t , est définie à l'aide de $\Lambda = xdy - ydx$ forme fermée pour Z , mais non fermée;

2° soit Z le mouvement brownien complexe tué à T_U , temps de sortie de $U \ni 0$, U ouvert de \mathbf{C} , et $\Lambda = Pdx + Qdy$, forme différentielle de classe C^1 sur U . Les propriétés des trajectoires du mouvement brownien entraînent l'équivalence suivante :

$$(\forall K \text{ compact de } U, \Lambda \text{ est fermée pour } Z_{\inf(., \tau_K)}) \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \equiv 0.$$

II. INDICE D'UN POINT ET THÉOREME DES RÉSIDUS RELATIFS A CERTAINS LACETS BROWNIENS

A la suite de I. 5, nous allons appliquer les résultats du chapitre I à certains lacets $Z_\gamma(\omega)$ du processus de Wiener complexe à 2 paramètres. Voici tout d'abord un rappel.

1. Rappel sur le processus de Wiener à deux paramètres ([1] et [12])

On note encore μ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbf{R}_+^2, \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2))$; soit \mathcal{E}_μ la classe des ensembles boréliens μ -intégrables. On appelle mesure brownienne (centrée, réelle) sur $L^2(\mathbf{R}_+^2, \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2), \mu)$ tout processus gaussien centré réel $\bar{B} = (\Omega, \mathcal{M}, P, B(\Gamma), \Gamma \in \mathcal{E}_\mu)$ de covariance μ , i. e. : $E[B(\Gamma)B(\Gamma')] = \mu(\Gamma \cap \Gamma')$. Le noyau $(f, g) \rightarrow \int fg d\mu$, défini sur $(L^2(\mathbf{R}_+^2, \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2), \mu))^2$, est symétrique, de type positif, ce qui assure l'existence de \bar{B} . D'après [19], il existe une réalisation de \bar{B} telle que le processus $B_{(t_1, t_2)} = B(\cdot)0, t_1) \times]0, t_2)$ ($t_1 \geq 0, t_2 \geq 0$) soit presque sûrement à trajectoires continues : on appelle $(B_t, t \in \mathbf{R}_+^2)$ le processus de Wiener (réel) à deux paramètres. En particulier, pour tout $s_0 > 0$, $(1/\sqrt{s_0} B_{s_0, v}, v \geq 0)$ est un mouvement brownien réel. De même, pour tout $v_0 > 0$, $(1/\sqrt{v_0} B_{s, v_0}, s \geq 0)$ est un mouvement brownien réel.

Dans toute la suite, on s'intéresse principalement au processus $(Z_t = X_t + iY_t, t \in \mathbf{R}_+^2)$, où X et Y sont deux processus de Wiener réels, à deux paramètres, et indépendants.

De façon générale, pour toutes les questions concernant les processus à deux paramètres, on se réfère à [1], dont on adopte en particulier les notations suivantes :

Pour $z = (x, y), z' = (x', y')$ points de \mathbf{R}_+^2 , on note

$$(z \leq z') \quad \text{lorsque} \quad \begin{cases} x \leq x' \\ y \leq y' \end{cases}$$

et

$$z \wedge z' \quad \text{si} \quad (x < x') \quad \text{et} \quad (y > y').$$

Si $a \leq b$, on note $(a, b) = \{z; x_a < x \leq x_b; y_a < y \leq y_b\}$; $R_z = \{u \in \mathbf{R}_+^2; u \leq z\}$. Voici quelques tribus intéressantes pour la suite :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_z &= \sigma \{Z_u, u \leq z\} \vee \mathcal{N}, \\ \mathcal{F}_z^1 &= \sigma \{Z_{u,v}; u \leq x\} \vee \mathcal{N}, \\ \mathcal{F}_z^2 &= \sigma \{Z_{u,v}; v \leq y\} \vee \mathcal{N}, \end{aligned}$$

où \mathcal{N} est la classe des ensembles P -négligeables pour

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma \{Z_z; z \in \mathbf{R}_+^2\}.$$

2. Questions de quasi-invariance et de support

Les résultats de ce paragraphe seront utilisés en II.3, et sont obtenus de façon indépendante du reste du travail. En effet, ils découlent principalement de la quasi-invariance des mesures considérées.

Soit, pour fixer les idées, \mathcal{W} espace de Banach séparable, et \mathcal{V} sous-espace dense de \mathcal{W} . \mathcal{W} est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathcal{W}}$. On dit que $\nu \in \mathcal{M}_+(\mathcal{W}, \mathcal{B}_{\mathcal{W}})$ est quasi invariante sous les translations de \mathcal{V} si, notant T_v la translation sur $\mathcal{W} : \omega \rightarrow \omega - v (v \in \mathcal{V})$, on a : $\forall v \in \mathcal{V}, T_v(\nu) \simeq \nu$. Remarquons alors, que, si $\nu \neq 0$, $\text{supp}(\nu)$ contient au moins un point ω_0 , donc $\omega_0 + \mathcal{V}$ par quasi-invariance, donc tout \mathcal{W} , \mathcal{V} étant dense dans \mathcal{W} .

Les mesures considérées ci-dessous sont toutes des mesures de probabilité sur des espaces $E = C(\Gamma; \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C})$ ($\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2)$) munis de la topologie de la convergence compacte, et de leur tribu borélienne. Les projections

habituelles sont notées $(X_u, u \in \Gamma)$ [$X_u(\omega) \equiv \omega(u)$]; \mathcal{A} désigne l'union des axes de coordonnées de \mathbf{R}_+^2 , et \bar{X} le mouvement brownien réel à deux paramètres. Le résultat suivant est dû à J. YEH [16] :

PROPOSITION 2.1. — Soit P la loi de X sur $\Omega = \{f : \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R} \text{ continue, } f|_{\mathcal{A}} = 0\}$. Soit

$$\mathcal{I} = \left\{ u : \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}; \exists \Phi \in C(\mathbf{R}_+^2, \mathbf{R}), u(s, t) = \int_0^s \int_0^t \Phi(x, y) dx dy \right\}.$$

Alors :

$$\forall u \in \mathcal{I}, \quad \forall z = (x, y) \in \mathbf{R}_+^2, \quad T_u(P)|_{\mathcal{I}_z} \simeq P|_{\mathcal{I}_z}$$

et

$$\frac{dT_u(P)}{dP} \Big|_{\mathcal{I}_z} = \exp \left\{ -X(\Phi 1_{R_z}) - \frac{1}{2} \int_{R_z} \Phi^2 d\mu \right\}.$$

On en déduit le théorème suivant :

THÉORÈME 2.2. — Soit Γ compact de \mathbf{R}_+^2 ; on note $\Omega_\Gamma = \{f : \Gamma \rightarrow \mathbf{R}, \text{ continue, } f|_{\Gamma \cap \mathcal{A}} = 0\}$, et P_Γ la loi du processus $\bar{X}|_\Gamma$.

P_Γ est quasi invariante sous les translations de $\mathcal{I}_\Gamma = \{u|_\Gamma; u \in \mathcal{I}\}$, dense dans Ω_Γ , et a donc pour support Ω_Γ .

Preuve. — Soit $z = (x, y) \in \mathbf{R}_+^2$ tel que $\Gamma \subset R_z$, P_{R_z} étant quasi invariante sous les translations de \mathcal{I}_{R_z} (proposition II.2.1), $P_\Gamma = r_\Gamma^z(P_{R_z})$ est donc quasi invariante sous les translations de $r_\Gamma^z(\mathcal{I}_{R_z}) = \mathcal{I}_\Gamma$, où on note r_Γ^z l'application : $f \in \Omega_{R_z} \rightarrow f|_\Gamma \in \Omega_\Gamma$.

Montrons maintenant que \mathcal{I}_{R_z} est dense dans Ω_{R_z} : si $g \in \Omega_{R_z}$, il existe une suite g_n de fonctions continues sur R_z , avec $g = u\text{-}\lim_{(n \rightarrow \infty)} g_n$ et

$$g_n(s, t) = \sum_{i=1}^{k_n} \Phi_i^{(n)}(s) \psi_i^{(n)}(t),$$

avec $\Phi_i^{(n)} \in C((0, x), \mathbf{R})$, $\psi_i^{(n)} \in C((0, y), \mathbf{R})$. Quitte à remplacer $\Phi_i^{(n)}$ (resp. $\psi_i^{(n)}$) par $\Phi_i^{(n)} - \Phi_i^{(n)}(0)$ (resp. $\psi_i^{(n)} - \psi_i^{(n)}(0)$), on peut supposer $\Phi_i^{(n)}(0) = \psi_i^{(n)}(0) = 0$, et il reste ensuite à approcher $\Phi_i^{(n)}$ (resp. $\psi_i^{(n)}$) par des fonctions de classe C^1 nulles en 0.

\mathcal{I}_Γ est dense dans Ω_Γ : en effet, soit $g_\Gamma \in \Omega_\Gamma$. Considérons \tilde{g}_Γ prolongeant g_Γ sur $\Gamma \cup \{\mathcal{A} \cap R_z\}$ par 0 sur $\mathcal{A} \cap R_z$. Par définition de Ω_Γ , \tilde{g}_Γ est continue sur $\Gamma \cup \{\mathcal{A} \cap R_z\}$ et peut donc être prolongée, d'après le théorème de Tietze-Urisohn, en une fonction $g_z \in \Omega_{R_z}$. L'application r_Γ^z étant contractante, et \mathcal{I}_{R_z} dense dans Ω_{R_z} , on a le résultat.

$\text{Supp}(P_\Gamma) = \Omega_\Gamma$ (propriété des mesures quasi invariantes).

COROLLAIRE 2.3 :

1° soit Γ compact de \mathbf{R}_+^2 , $a \in \Gamma$. Soit P_Γ^a la loi de $(\overline{X}_u - \overline{X}_a, u \in \Gamma)$ sur $\Omega_\Gamma^a = \{v \in \Omega_\Gamma; v(a) = 0\}$. On a le même résultat que dans le théorème, pour le triplet

$$(P_\Gamma^a; \mathcal{F}_\Gamma^a = \{u - u(a), u \in \mathcal{F}_\Gamma\}; \Omega_\Gamma^a);$$

2° soit γ chemin, $a \notin \gamma$. Soit P_γ^a la loi de $(\overline{X}_u - \overline{X}_a, u \in \gamma)$ sur Ω_γ . On a le même résultat que dans le théorème pour le triplet

$$(P_\gamma^a, \mathcal{F}_\gamma^a = \{u|_\gamma - u(a), u \in \mathcal{F}\}, \Omega_\gamma).$$

Preuve. 1° La quasi-invariance de P_Γ^a sous \mathcal{F}_Γ^a découle de

$$P_\Gamma^a = s_\Gamma^a(P_\Gamma) \quad \text{avec} \quad s_\Gamma^a(u) = u - u(a), u \in \Omega_\Gamma.$$

De plus, \mathcal{F}_Γ^a est dense dans Ω_Γ^a : en effet, soit $g \in \Omega_\Gamma^a \subseteq \Omega_\Gamma$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $u \in \mathcal{F}_\Gamma$ tel que $\|g - u\|_\Gamma \leq \varepsilon/2$. Ceci entraîne $|u(a)| \leq \varepsilon/2$ et donc $\|g - (u - u(a))\|_\Gamma \leq \varepsilon$, d'où le résultat;

2° posons $\Gamma = \gamma \cup \{a\}$; les espaces Ω_Γ^a et Ω_γ sont en bijection à l'aide de

$$\Omega_\Gamma^a \rightarrow \Omega_\gamma$$

$$v \rightarrow v|_\gamma,$$

ce qui entraîne le résultat d'après 1°.

On a évidemment des résultats analogues pour P^\wedge , loi du processus de Wiener complexe à deux paramètres sur $\Omega^\wedge = \{f : \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{C}; f|_{\mathcal{A}} \equiv 0\}$. En particulier, $\text{supp}(P_\Lambda^\wedge) = \Omega_\Lambda^\wedge$ et $\text{supp}(P_\gamma^\wedge) = \Omega_\gamma^\wedge$, avec les notations du corollaire II.2.3, modifiées de façon évidente.

3. Indice d'un point par rapport à certains lacets browniens

Dans toute la suite, sauf précision contraire, γ désigne le bord orienté d'un rectangle Γ de \mathbf{R}_+^2 , de côtés parallèles aux axes, et ne touchant pas les axes. On parcourt γ dans le sens direct à partir du sommet z_0 de coordonnées minimales. $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 = z_0$ désignent les sommets de γ rencontrés successivement. On pose

$$\gamma_i = [z_i, z_{i+1}] (0 \leq i \leq 3).$$

D'après les propriétés du mouvement brownien complexe, on a $\forall a \in \mathbf{C}, P[\exists u \in \gamma, Z_u = a] = 0$. L'indice $I_\gamma(a) = {}^\Delta I(Z_\gamma(\omega), a)$ du point a

par rapport à $Z_\gamma(\omega)$ est donc presque sûrement défini, ainsi que l'intégrale stochastique $\int_\gamma 1/(Z_u - a) dZ_u$. De plus, d'après la formule (11), on a

$$(13) \quad I_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dZ_u}{Z_u - a} \text{ p. s.}$$

3.1. Vérifions maintenant que les indices $I_\gamma(a)$ ne sont pas p. s. nuls, (auquel cas la formule de Cauchy que l'on se propose d'écrire se réduirait à $0 \equiv 0!$).

THÉORÈME 3.1. — Soit $a \in \mathbf{C}$, et γ chemin fermé, $\gamma^* \subset \mathbf{R}_+^2$ tel que $\{a\}$ soit polaire pour $\{Z_u, u \in \gamma\}$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe un sous-ensemble mesurable de Ω , de probabilité positive, sur lequel l'indice de a par rapport à $Z_\gamma(\omega)$ est égal à n .

Preuve. — Reprenons les notations de II.2, où l'on a démontré que $\text{supp}(P_\gamma^\wedge) = \Omega_\gamma^\wedge$. Soit $(C_u, u \in \gamma)$ un chemin fermé, à valeurs dans \mathbf{C} , tel que l'indice de a par rapport à C soit n ($n \in \mathbf{Z}$, fixé). Soit $\varepsilon = d(C, a) > 0$. On a

$$Z_u(\omega) - a = (Z_u(\omega) - C_u) + C_u - a,$$

et

$$\forall u \in \gamma, \quad |Z_u(\omega) - C_u| < |C_u - a|$$

sur l'ensemble $M = \{\omega; \sup_{u \in \gamma} |Z_u(\omega) - C_u| \leq \varepsilon/2\}$. D'après une propriété classique des indices ([2], page 64), on a donc $I_\gamma(a) = I(C, a) = n$ sur M , et d'après II.2, $P_\gamma^\wedge(M) > 0$, d'où le résultat.

3.2. Voici une application du théorème précédent concernant les trajectoires de Z :

THÉORÈME 3.2. — Soit $a \in \mathbf{C}$, et γ chemin fermé, $\gamma^* \subseteq \mathbf{R}_+^2$, tel que a soit polaire pour $\{Z_u, u \in \gamma^*\}$. On suppose de plus que γ^* est le bord d'un compact Γ de \mathbf{R}_+^2 , et que γ^* est Γ -homotope à 0.

Alors, $P[\exists u \in \Gamma, Z_u = a] > 0$.

Preuve. — D'après le théorème II.3.1 on a $P[I_\gamma(a) \neq 0] > 0$. On aura donc le résultat cherché si l'on montre

$$\{I_\gamma(a) \neq 0\} \subset \{\omega; \exists u \in \Gamma, Z_u(\omega) = a\},$$

ou de façon équivalente

$$A \equiv \{\omega; \forall u \in \Gamma, Z_u(\omega) \neq a\} \subset \{I_\gamma(a) = 0\}.$$

Or, par hypothèse, γ^* est Γ -homotope à $\{z_0\}$ ($z_0 \in \Gamma$), et donc sur A , $Z_\gamma(\omega)$ est $C \setminus \{a\}$ -homotope à $\{Z_{z_0}(\omega)\}$, ce qui entraîne $I_\gamma(a) = 0$ sur A .

On en déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.2. — Soit Γ rectangle de côtés parallèles aux axes, et $a \in C$. Alors, $P[\exists u \in \Gamma, Z_u = a] > 0$.

Il peut être intéressant de remarquer que, par exemple pour $\Gamma = R_z$, le résultat précédent peut aussi être démontré en étendant au cas complexe le calcul stochastique développé en [1], et en particulier la formule de Green : en effet, supposons que

$$(\star) \quad P[\exists u \in R_z, Z_u = a] = 0 \quad (a \neq 0).$$

Notons $H_z = \{(u, y); u \leq x\}$, $V_z = \{(x, v); v \leq y\}$ et $\gamma_z = H_z - V_z$. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{H_z} \frac{1}{(Z_u - a)} dZ_u &= p.s. \int_{V_z} \frac{1}{(Z_u - a)} dZ_u \\ &= p.s. \int_{R_z} \frac{1}{(Z_u - a)} dZ_u - \int_{R_z} \frac{1}{(Z_u - a)^2} dJ_Z(u) \end{aligned}$$

d'après la formule de Green convenablement étendue à la situation (pour la définition de la martingale J_Z , voir [1], paragraphe 6; d'autre part, d'après l'hypothèse (\star) , les intégrales stochastiques écrites sont bien définies à l'aide de [15]).

On a donc

$$I_{\gamma_z}(a) = \frac{1}{2i\pi} \left\{ \int_{H_z} \frac{dZ_u}{(Z_u - a)} - \int_{V_z} \frac{dZ_u}{Z_u - a} \right\} = 0 \text{ p.s.,}$$

ce qui est contraire au résultat du théorème II.3.1, (\star) n'est donc pas vérifiée.

Remarque. — L'analogue du théorème II.3.1 pour le mouvement brownien plan $(Z_t, t \geq 0)$ a été obtenu par P. LÉVY en [8], page 237, les lacets considérés étant constitués par la trajectoire $(Z_u(\omega), s \leq u \leq t)$ ($s < t$), à laquelle on adjoint la corde $[Z_t(\omega), Z_s(\omega)]$. Bien entendu, dans ce cadre, il n'y a pas d'analogue du théorème II.3.2.

4. Théorème des résidus et formule de Cauchy

A l'aide du théorème I.3.2, on peut formuler le théorème des résidus le long de certains lacets browniens en termes d'intégrales stochastiques.

THÉORÈME 4.1 (*théorème des résidus*). — Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus E)$, où E est l'ensemble des points singuliers isolés de f . Alors,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(Z_u) dZ_u = \sum_{(e \in E)} I_{\gamma}(e) \text{Rés}(f, e) \text{ P-p. s.}$$

Remarque. — Les deux membres de l'égalité sont bien définis : le membre de gauche l'est car E est dénombrable, et polaire pour Z , le membre de droite aussi, car $\Omega = \cup_n \Omega_n$, où $\Omega_n = \{\omega ; |Z_{\gamma}(\omega)| \leq n\}$; or, $E_n = \{e \in E; |e| \leq n\}$ est fini, et, pour $\omega \in \Omega, e \in E \setminus E_n, I_{\gamma}(e) = 0$ P-p. s.

COROLLAIRE 4.1 (*formule de Cauchy*). — Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, et $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(a) I_{\gamma}(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(Z_u)}{(Z_u - a)^{n+1}} dZ_u \text{ P-p. s.}$$

III. INDICE D'UN POINT

RELATIVEMENT A CERTAINS LACETS BROWNIENS :

SECONDE DÉFINITION

On s'est intéressé en II à l'indice du point a déterministe par rapport aux lacets $Z_{\gamma}(\omega)$ (on emploie les mêmes notations qu'en II). La formule de Cauchy obtenue en II.4 est

$$\forall f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \forall a \in \mathbb{C}, f(a) I_{\gamma}(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(Z_u) dZ_u}{(Z_u - a)}$$

Cependant, du point de vue probabiliste, il semble aussi intéressant d'obtenir une formule de Cauchy, où le membre de gauche serait $f(Z_a) I(Z_{\gamma}(\omega), Z_a(\omega))$. C'est le but de ce troisième chapitre.

1. Définition d'un second indice

1.1. On utilise toujours les notations de II.3, et l'on suppose maintenant $a \notin \mathcal{A}$. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$. L'existence de l'indice du point aléatoire $Z_a(\omega)$ par rapport à la courbe $Z_{\gamma}(\omega)$ est p. s. assurée par la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1. — Soit I un segment de \mathbb{R}_+^2 parallèle à l'un des axes, et $a \notin I$. Alors, $P[\exists z \in I, Z_z = Z_a] = 0$.

Preuve. — A l'évidence, on peut supposer I parallèle à l'axe des abscisses. Notons $I = [z_0, z_1]$ avec $z_0 = (x_0, y_0)$, $z_1 = (x_1, y_0)$ et $x_0 < x_1$; $a = (x_a, y_a)$. On distingue ensuite dans l'étude les cas suivants :

$$(\alpha) \quad x_a \leq x_0,$$

$$(\beta) \quad x_a \geq x_1, \quad y_a \geq y_0,$$

$$(\gamma) \quad x_a \geq x_1, \quad y_a \leq y_0.$$

(α) Le processus $(\hat{Z}_x^a = Z_{(x, y_0)} - Z_a, x_0 \leq x \leq x_1)$ est une $\mathcal{F}_{(x, y_0)}^1$ -martingale conforme, dont la variable initiale n'est pas nulle, et donc 0 est polaire pour ce processus.

(β) Paramétrons $-I$ par $x_t = x_1 + t(x_0 - x_1)$, $t \in (0, 1)$. Le processus $(\hat{Z}_{z_t} = Z_{(x_t, y_0)} - Z_a, t \in (0, 1))$ est une $\mathcal{F}_{z_t}^+$ -martingale conforme ne partant pas de 0 ($\mathcal{F}_z^+ = \sigma \{ Z(A), A \in \mathcal{B}(\mathbf{R}_+^2), A \subset \mathbf{R}_z^c \}$).

(γ .1) On fait tout d'abord la remarque : soit \mathbf{W} la loi sur $C(\mathbf{R}_+, \mathbf{C})$ du mouvement brownien $(U_t, t \in \mathbf{R}_+)$ partant de 0 en $t = 0$ ou plutôt, pour l'application ci-dessous, de $U_t = \sqrt{y} Z_t$, avec Z_t mouvement brownien complexe, et $Z_0 = 0$. On note $(\mathbf{W}^z, z \in \mathbf{C})$ une version régulière de la loi conditionnelle de \mathbf{W} quand $U_{t_0} (t_0 > 0 \text{ fixé})$. On pose

$$p_z(u) = \mathbf{W}^z [\exists 0 < s \leq t_0, U_s = u].$$

Le résultat de polarité maintes fois employé entraîne

$$(\star\star) \quad \forall u \in \mathbf{C}, \quad p_z(u) = 0 \text{ dx dy p. s.}$$

(γ .2) Revenons à notre problème. On note $D = \{ z \in \mathbf{C}; x \geq 0, y = y_0 \}$.

On décompose Z_a en $Z_a = Z_a^1 + Z_a^2$, Z_a^1 étant la projection orthogonale de Z_a sur \mathcal{G}_D (espace gaussien engendré par les $Z_z, z \in D$). On a

$$Z_a^1 = \frac{y_a}{y_0} Z_{(x_a, y_0)}$$

d'où

$$\begin{aligned} p_a &= {}^A P [\exists s \in I, Z_s - Z_a = 0] \\ &= \int p_2(z) dx dy P [\exists s \in I, Z_s - (Z_a^1 + z) = 0] \\ &= \int p_2(z) dx dy \int p_1(z') dx' dy' p_z \left(\frac{y_a}{y_0} z' + z \right); \end{aligned}$$

où $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$, $p_1(z')$ (resp. $p_2(z)$) est la densité de $Z_{(x_a, y_0)}$ (respectivement Z_a^2).

En faisant le changement de variable (en z), $u = (y_a/y_0) z' + z$, et à l'aide du théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} p_a &= \int p_1(z') dx' dy' \int p_2(z) dx dy p_{z'}\left(\frac{y_a}{y_0} z' + z\right) \\ &= \int p_1(z') dx' dy' \int p_2\left(u - \frac{y_a}{y_0} z'\right) dx_u dy_u p_{z'}(u) \\ &= \int dx_u dy_u \int dx' dy' p_1(z') p_2\left(u - \frac{y_a}{y_0} z'\right) p_{z'}(u) = 0 \quad (\text{d'après } (**)). \end{aligned}$$

1.2. Ainsi, on a donc, si $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$, $P[Z_a \notin Z_\gamma] = 1$. On peut donc définir l'indice

$$J_\gamma(a, \omega) = \Delta \frac{1}{2i\pi} \int_{Z_\gamma(\omega)} \frac{dz}{z - Z_a(\omega)}.$$

De même, qu'en II.3, on a le théorème suivant :

THÉORÈME 1.2. — Soit $a \in \mathbb{C}$ et γ chemin fermé, $\gamma^* \subset \mathbb{R}_+^2$, tel que $P\{Z_a \notin Z_\gamma\} = 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, il existe un sous-ensemble mesurable de Ω , de probabilité positive, sur lequel $J_\gamma(a, \omega) = n$ p. s.

La démonstration est analogue à celle du théorème II.3.1, compte tenu du résultat de II.2 : $\text{supp}(P_\gamma^a) = \hat{\Omega}_\gamma$.

2. Définition d'intégrales stochastiques et seconde formule de l'indice

On veut maintenant, comme pour $I_\gamma(a)$, pouvoir représenter $J_\gamma(a)$ comme intégrale stochastique; pour cela, il s'agit de définir $\int_I f(Z_u - Z_a) dZ_u$ pour $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ dans tous les cas (α), (β), (γ) de III.1.

Cas (α). — Il n'y a aucune difficulté, le processus $(\hat{Z}_x^a, x_0 \leq x \leq x_1)$ étant une \mathcal{F}_x^1 -martingale. De plus, cette martingale est conforme, et on a donc, d'après le théorème I.3.2,

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} f(Z_u, y_0 - Z_a) dZ_u, y_0 &= \text{p. s.} \int_{Z_I(\omega) - Z_a(\omega)} f(z) dz \\ &= \text{p. s.} \int_{Z_I(\omega)} f(z - Z_a(\omega)) dz. \end{aligned}$$

Cas (β). — On fait le même raisonnement en parcourant $(-I)$ (voir (β) en III.1). On a de même

$$\int_I f(Z_u - Z_a) dZ_u = \int_{Z_I(\omega)} f(z - Z_a(\omega)) dz \text{ p. s.}$$

Cas (γ). — C'est le seul cas qui ne soit pas évident *a priori*, car $f(Z_z - Z_a)$ n'est pas adapté aux tribus \mathcal{F}_z (ou \mathcal{F}_z^1).

Avant de continuer, précisons les notations suivantes : si $z \in I$, on note $\hat{z} = (x, y_a)$, $\mathcal{F}_z^- = \sigma \{ Z(\Gamma); \Gamma \in \mathcal{E}_\mu, \Gamma \subset (R_{[z, \infty)})^c \} \vee \mathcal{N}$,

$$\mathcal{F}_z^+ = \sigma \{ Z(\Gamma); \Gamma \in \mathcal{E}_\mu, \Gamma \subset (R_{[0, z]})^c \} \vee \mathcal{N}.$$

On remarque alors que $Z_z - Z_a = {}^aZ_z + {}_aZ_z$, avec ${}^aZ_z = Z_z - Z_z^{\hat{z}}$ et ${}_aZ_z = Z_z^{\hat{z}} - Z_a$ ($z \in I$). (${}^aZ_z, z \in I$) est une \mathcal{F}_z^- -martingale conforme et (${}_aZ_z, z \in (-I)$) une \mathcal{F}_z^+ -martingale conforme.

Donc, si $\{ \Phi(u, \omega) \}$ ($u \in I$) (resp. ($u \in -I$)) est un processus \mathcal{F}_u^- (resp. \mathcal{F}_u^+) bien mesurable vérifiant

$$(\star\star\star) \quad \int_I |\Phi(u, \omega)|^2 du < \infty \text{ p. s.,}$$

l'intégrale stochastique $\int_I \Phi(u, \omega) d^aZ_u(\omega)$ (resp. $\int_{-I} \Phi(u, \omega) d_aZ_u$) est bien définie.

Comme $\sigma \{ Z_z - Z_a \} \subset \mathcal{F}_z^\pm$, on peut donc poser comme définition, pour toute fonction $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, borélienne, telle que $\Phi(u, \omega) = f(Z_u - Z_a)$ vérifie $(\star\star\star)$:

$$\int_I f(Z_z - Z_a) dZ_z = {}^\Delta \int_I f(Z_z - Z_a) d^aZ_z - \int_{(-I)} f(Z_z - Z_a) d_aZ_z.$$

On a ainsi défini l'intégrale stochastique $\int_I f(Z_u - Z_a) dZ_u$, pour toute fonction $f \in C \{ \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \}$ dans tous les cas, et on peut énoncer la proposition suivante :

PROPOSITION 2.1. — Soit $a \notin \gamma^*$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, on a :

$$\int_\gamma f(Z_z - Z_a) dZ_z = \int_{Z_\gamma(\omega)} dz f(z - Z_a(\omega)) \text{ p. s.}$$

En particulier,

$$J_\gamma(a, \omega) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dZ_u}{(Z_u - Z_a)} \text{ p. s.}$$

Preuve. — Avec les notations de III.1, il suffit de démontrer pour $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$,

$$\int_I f(Z_z - Z_a) dZ_z = \int_{Z_I(\omega)} dz f(z - Z_a(\omega)) \text{ p. s.}$$

dans le cas (γ), l'égalité pour les cas (α) et (β) découlant du théorème I.3.2. Il suffit de montrer, que pour $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$,

$$\mathbb{R} \int_I f(Z_z - Z_a) d^a Z_z = \int_I f(Z_z - Z_a) d^a Z_z,$$

[où

$$\begin{aligned} & \mathbb{R} \int_I f(Z_z - Z_a) d^a Z_z \\ &= \stackrel{\Delta}{=} \exists (\text{P-lim})_{n \rightarrow \infty} \sum_{\tau_n} \int_0^1 f\{Z_{t_i} - Z_a + \lambda(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})\} d\lambda(^a Z_{t_{i+1}} - ^a Z_{t_i}), \end{aligned}$$

$\exists(\text{P-lim})$ désignant la limite en probabilité, si elle existe], et la même égalité en remplaçant I par $(-I)$ et $^a Z$ par ${}_a Z$. Ces résultats découlent du lemme suivant :

LEMME 2.2. — On se place dans le cas (γ) de III.1. Soit $f \in C^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{C})$. On a alors

$$\mathbb{R} \int_I f(Z_z - Z_a) d^a Z_z = \int_I f(Z_z - Z_a) d^a Z_z + (y_0 - y_a) \int_I \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(Z_u - Z_a) du.$$

Preuve. — On procède comme en I.2, c'est-à-dire que l'on étudie $\mathbb{R} \int_I f(X_z - X_a) d^a X_z$, pour X processus de Wiener réel, à deux paramètres, et $f \in C_b^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, puis on déduit l'expression de $\mathbb{R} \int_I f(Z_z - Z_a) d^a Z_z$ par complexification pour $f \in C_b^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, puis par limite en probabilité pour $f \in C^1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathbb{C})$.

1° Soit (τ_n) une suite de subdivisions standard de I . On a alors, pour $f \in C_b^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$:

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau_n} \int_0^1 f[X_{t_i} - X_a + \lambda(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})] d\lambda ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i}) \\ &= \sum_{\tau_n} f(X_{t_i} - X_a) ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i}) \\ & \quad + \sum_{\tau_n} \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu f'(X_{t_i} - X_a + \lambda\mu(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) \\ & \quad \times (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i}) \\ &= \sum_{\tau_n} f(X_{t_i} - X_a) ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i}) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{\tau_n} f'(X_{t_i} - X_a) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i}) \\ & \quad + \sum_{\tau_n} \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu [f'(X_{t_i} - X_a + \lambda\mu(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})) - f'(X_{t_i} - X_a)] \\ & \quad \times (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i}). \end{aligned}$$

La première somme converge dans L^2 vers $\int_I f(X_u - X_a) d{}^aX_u$.

Pour la seconde, examinons de façon générale :

$$\begin{aligned} & \sum_{\tau_n} \varphi(X_{t_i} - X_a) (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i}) \quad (\text{pour } \varphi \in C_b(\mathbf{R}, \mathbf{R})) \\ &= \sum_{\tau_n} \varphi(X_{t_i} - X_a) ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i})^2 \\ & \quad + \sum_{\tau_n} \varphi(X_{t_i} - X_a) ({}_aX_{t_{i+1}} - {}_aX_{t_i}) ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i}). \end{aligned}$$

D'après le lemme I.2.2, la première somme converge dans L^2 vers $\int_I \varphi(X_u - X_a) d \langle {}^aX, {}^aX \rangle_u$, où $\langle {}^aX, {}^aX \rangle$ désigne le processus croissant continu associé à la martingale $({}^aX_u, u \in I)$.

Pour la seconde somme, remarquons que les processus $\{{}^aX_t, t \in I\}$ et $\{{}_aX_t, t \in I\}$ sont indépendants. On a alors :

$$\begin{aligned} & E \left[\left\{ \sum_{\tau_n} \varphi(X_{t_i} - X_a) ({}_aX_{t_{i+1}} - {}_aX_{t_i}) ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i}) \right\}^2 \right] \\ &= \sum_{\tau_n} E \left[\varphi^2(X_{t_i} - X_a) ({}_aX_{t_{i+1}} - {}_aX_{t_i})^2 ({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i})^2 \right] \\ &\leq \| \varphi \|^2 \sum_{\tau_n} E [({}_aX_{t_{i+1}} - {}_aX_{t_i})^2] E (({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i})^2). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} E ({}_aX_{t_{i+1}} - {}_aX_{t_i})^2 &= (t_{i+1} - t_i) y_a; \\ E (({}^aX_{t_{i+1}} - {}^aX_{t_i})^2) &= (y_0 - y_a) (t_{i+1} - t_i), \end{aligned}$$

et donc la somme précédente converge vers 0 lorsque $(n \rightarrow \infty)$.

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \int_I f(X_u - X_a) d^a X_u &= \int_I f(X_u - X_a) d^a X_u \\ &+ \frac{1}{2} \int_I f'(X_u - X_a) d \langle {}^a X, {}^a X \rangle_u. \end{aligned}$$

2° Dans le cas complexe, pour $f \in C_b^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, la formule précédente devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \int_I f(Z_z - Z_a) d^a Z_z &= \int_I f(Z_z - Z_a) d^a Z_z \\ &+ \frac{1}{2} \int_I \left\{ \frac{\partial f}{\partial z}(Z_z - Z_a) d \langle {}^a Z, {}^a Z \rangle_z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(Z_z - Z_a) d \langle {}^a \bar{Z}, {}^a Z \rangle_z \right\}. \end{aligned}$$

Mais, $({}^a Z_z, z \in I)$ est une martingale conforme, et donc

$$\langle {}^a Z, {}^a Z \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle {}^a Z, {}^a \bar{Z} \rangle_{s, y_0} = 2 \langle {}^a X, {}^a X \rangle_{s, y_0} = 2(y_0 - y_a) \cdot s.$$

On obtient finalement le résultat cherché par approximation de f , et convergence en probabilité.

Remarque. — Les difficultés apparues dans ce paragraphe sont semblables à celles qu'il y a à définir les intégrales stochastiques linéaires $\int_\gamma \Phi(u, \omega) dX_u$, pour le processus de Wiener à 2 paramètres, réel, le long de γ , courbe, qui n'est ni croissante, ni décroissante pour l'ordre partiel sur \mathbb{R}_+^2 (voir [1], paragraphe 4).

3. Remarque sur la formule de Cauchy

De même qu'en III.2, il faudrait maintenant définir les intégrales stochastiques $\int_I (f(Z_u) dZ_u)/(Z_u - Z_a)$, au moins pour f régulière. Malheureusement, nous ne savons le faire que dans le cas (α) , où l'intégrand est \mathcal{F}_u^1 -adapté. Dans les autres cas, les tribus engendrées par le couple (Z_u, Z_a) (ou $(Z_u, Z_u - Z_a)$!) sont trop « vastes » pour faire les calculs d'orthogonalité permettant la construction d'intégrales stochastiques. Cependant, nous noterons, dans tous les cas (et on vérifie dans le cas (α)) :

$$\int_I \frac{f(Z_u) dZ_u}{(Z_u - Z_a)^p} = \int_{Z_I(\omega)} \frac{f(z) dz}{(z - Z_a(\omega))^p} \quad (p \in \mathbb{Z}).$$

On a alors bien sûr, si $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$, $a \notin \gamma^*$, $n \in \mathbf{N}$,

$$f^{(n)}(Z_a(\omega)) J_\gamma(a) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(Z_u)}{(Z_u - Z_a)^{n+1}} dZ_u \text{ p. s.}$$

4. Remarques finales et questions ouvertes

Nous nous sommes limité en général au cas où γ est le bord d'un rectangle de côtés parallèles aux axes; les résultats de II s'étendent évidemment au cas où γ est une courbe fermée, décomposée en un nombre fini de courbes croissantes ou décroissantes au sens large pour la relation $(z < z') = (x < x', y < y')$. A ce sujet, la première question qui se pose pour étendre les résultats de II à une classe plus vaste de courbes est la suivante : pour quelles courbes γ , et quels points $a \in \mathbf{C}$, $\{a\}$ est-il polaire pour Z_γ ?

D'après le corollaire II.3.2, on a, pour Γ rectangle de côtés parallèles aux axes, et $a \in \mathbf{C}$, $P[\exists u \in \Gamma, Z_u = a] > 0$. Ce résultat a également été obtenu en [10], par PRUITT et OREY, qui ont aussi montré la récurrence du processus de Wiener complexe à deux paramètres, i. e. :

$$\forall a \in \mathbf{C}, P[\exists u \in \mathbf{R}_+^2, Z_u = a] = 1.$$

Sous les hypothèses du théorème 3.1, on a montré que la loi de

$$I_\gamma(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dZ_u}{Z_u - a}$$

charge tous les entiers de \mathbf{Z} . Quelle est cette loi ?

Peut-on localiser le théorème des résidus, ou la formule de Cauchy obtenus en II, c'est-à-dire les énoncer pour $f \in \mathcal{H}(U)$, U ouvert de \mathbf{C} ? Ici encore, c'est la notion de temps (ou d'ensemble) d'arrêt pour les processus à deux paramètres, qui fait défaut. L'article [15] semble pouvoir y remédier en partie.

La remarque III.3 sur la formule de Cauchy semble indiquer que, pour une définition raisonnable de la notion de processus homomorphes, l'ensemble de ces processus (supposés \mathcal{F}_u -adaptés, et en tout état de cause, satisfaisant « la formule de Cauchy ») ne saurait comprendre d'autre processus que $f \circ Z_z$, $f \in \mathcal{H}(\mathbf{C})$. Nous espérons revenir sur cette question.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CAIROLI (R.) and WALSH (J. B.). — Stochastic integrals in the plane, *Acta Math. Uppsala*, t. 134, 1975, fasc. 1-2, p. 111-183.
- [2] CARTAN (H.). — *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Paris, Hermann, 1961 (*Enseignement des Sciences*).
- [3] DAVIS (B.). — On the distribution of conjugate functions of non negative measures, *Duke math. J.*, t. 40, 1973, p. 695-700.
- [4] DAVIS (B.). — On the weak-type (1,1) inequality for conjugate functions, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 44, 1974, p. 307-311.
- [5] FÖLLMER (H.). — Stochastic holomorphy, *Math. Annalen*, t. 207, 1974, p. 245-255.
- [6] GETTOOR (R.) and SHARPE (M.). — Conformal martingales, *Invent. Math.*, t. 16, 1972, p. 271-308.
- [7] ITO (K.) and MCKEAN (H. P.). — *Diffusion processes and their sample paths*, Berlin, Springer-Verlag, 1965 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 125).
- [8] LÉVY (P.). — *Processus stochastiques et mouvement brownien*, 2^e édition, Paris, Gauthier-Villars, 1965.
- [9] MCKEAN (H. P.). — *Stochastic integrals*, New York, Academic Press, 1969 (*Probability and mathematical Statistics*, 5).
- [10] NEVEU (J.). — *Notes sur l'intégrale stochastique*, Cours 3^e cycle, 1972, Lab. Probabilités, Université Paris-VI.
- [11] OREY (S.) and PRUITT (W.). — Sample functions of the N-parameter Wiener process, *Ann. Probability*, t. 1, 1973, p. 138-163.
- [12] PARK (W.). — A multiparameter gaussian process, *Ann. math. Stat.*, t. 41, 1970, p. 1582-1585.
- [13] SPITZER (F.). — Some theorems concerning 2-dimensional brownian motion, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 87, 1958, p. 187-197.
- [14] WONG (E.) and ZAKAI (M.). — Riemann-Stieltjes approximations of stochastic integrals, *Z. Wahrscheinlichk.*, t. 12, 1969, p. 87-97.
- [15] WONG (E.) and ZAKAI (M.). — *An extension of stochastic integrals in the plane* (à paraître).
- [16] YEH (J.). — Cameron-Martin translation theorems in the Wiener space of functions of two variables, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 107, 1963, p. 409-420.

(Texte reçu le 18 décembre 1975.)

Marc YOR,
Laboratoire de Probabilités, Tour 56,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.