BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ ROUX

Application de la suite spectrale d'Hodgkin au calcul de la K-théorie des variétés de Stiefel

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 345-368
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__345_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 345 à 368.

APPLICATION DE LA SUITE SPECTRALE D'HODGKIN AU CALCUL DE LA K-THÉORIE DES VARIÉTÉS DE STIEFEL

PAR

ANDRÉ ROUX

[Lyon]

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est de montrer que la formule de Kunneth en K-théorie équivariante, donnée par L. HODGKIN, permet de calculer la K-théorie complexe de certains espaces homogènes. En particulier, on calcule la K-théorie complexe des variétés de Stiefel réelles; les résultats étaient déjà connus dans le cas des variétés de Stiefel complexes et quaternioniques.

Dans une première étude, on examine la dégénérescence de la suite spectrale d'Hodgkin, et on exhibe un cas où l'on peut remonter de la graduation à la filtration. Ici, on utilise essentiellement la structure multiplicative de la suite spectrale. Dans une étude plus précise, on donne l'interprétation géométrique des edge-morphismes; pour le premier edge-morphisme, cette interprétation était déjà faite par L. HODGKIN.

Dans une partie algébrique, on explicite, sous certaines conditions, le premier terme de la suite spectrale, qui est une algèbre de la forme $\mathrm{Tor}^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$, où $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des algèbres de polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$ (la structure de $\mathcal{G}$-module de $\mathcal{H}$ étant donnée par un homomorphisme de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$). La méthode, utilisée ici, est proche de celle de L. SMITH; les difficultés proviennent du fait que l'anneau des coefficients n'est pas un corps.

On montre alors que les hypothèses faites précédemment sont vérifiées dans le cas des variétés de Stiefel complexes, quaternioniques et réelles dont on explicite entièrement la K-théorie.

0. Introduction

Lors des journées de topologie algébrique qui ont eu lieu à Lyon en mars 1970, L. HODGKIN avait exposé ses travaux sur « une formule de Künneth en K-théorie équivariante ». M. KAROUBI proposait alors d'utiliser cette formule pour le calcul de la K-théorie des variétes de Stiefel réelles (avec, en vue, le calcul de la KO-théorie de ces variétés). En fait, pour les variétés de Stiefel complexes et quaternioniques, la

K-théorie se calcule très simplement à l'aide du théorème de Leray-Hirsch ([9], p. 398-399); très récemment, S. Gitler et Kee Yuen Lam [5] ont mené à bien le calcul dans le cas des variétés de Stiefel réelles, mais leur démonstration est assez compliquée, et nous était inconnue.

Nous espérons que cet article persuadera le lecteur du très grand intérêt de la suite spectrale d'Hodgkin. A partir de celle-ci, des considérations purement algébriques permettent le calcul de la K-théorie d'un certain nombre de variétés homogènes, en particulier des variétés de Stiefel.

Dans le premier paragraphe, après avoir cité la suite spectrale d'Hodgkin et donné quelques explications, nous dégageons un cas « classique » de dégénérescence et exhibons un cas particulier où nous pouvons remonter de la graduation à la filtration.

Dans le deuxième paragraphe, nous étudions la structure de certains Tor et nous explicitons, à nouveau, un cas particulier où nous pouvons appliquer les résultats du premier paragraphe.

Dans le troisième paragraphe, nous retrouvons, à titre d'exemple, la K-théorie des variétés de Stiefel complexes et quaternioniques; puis, après quelques rappels sur l'anneau des représentations complexes de Spin (n), nous montrons que les résultats des paragraphes précédents peuvent s'appliquer au cas des variétés de Stiefel réelles dont nous déterminons entièrement la K-théorie.

Dans le dernier paragraphe, nous donnons l'interprétation géométrique des edge-morphismes; ici, nous sommes amenés à utiliser le début d'une résolution géométrique servant à la construction de la suite spectrale d'Hodgkin.

Je tiens à remercier MM. Karoubi, Braconnier et Braemer pour leurs encouragements et leurs conseils durant l'élaboration de cet article, ainsi que Mlle Quesada sans laquelle ce papier serait resté un manuscrit illisible.

1. Généralités sur la suite spectrale d'Hodgkin

(1.1) **Énoncé du théorème.** — *Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie G compact, connexe et dont le groupe de Poincaré $\pi_1(G)$ est sans torsion. Il existe une suite spectrale multiplicative fortement convergente telle que*

$$E_2(G/H) = \mathrm{Tor}^*_{R(G)}(R(H), \mathbf{Z})$$

et que $E_\infty(G/H)$ soit l'anneau gradué associé à une filtration négative de $K^*(G/H)$, compatible avec sa multiplication (i. e.

$$F^p K^* \otimes F^q K^* \to F^{p+q} K^*).$$

Cette suite spectrale sera appelée la suite spectrale d'Hodgkin [6].

(1.2) **Notations et explicitations**

(*a*) Soit $\mathcal{G} = R(G)$ l'anneau des représentations complexes de dimension finie du groupe de Lie G. $\{1\} \overset{\subset}{\rightarrow} G$ donne $\varepsilon_G : \mathcal{G} \rightarrow R(\{1\}) = \mathbf{Z}$, définissant $\mathcal{G}$ comme une $\mathbf{Z}$-algèbre supplémentée $\mathcal{G} = \mathbf{Z} \oplus I_G$ et $\mathbf{Z}$ comme un $\mathcal{G}$-module.

$H \overset{\subset}{\rightarrow} G$ donne l'homomorphisme de $\mathbf{Z}$-algèbres supplémentées

$$\varphi : \quad \mathcal{G} = R(G) \rightarrow R(H) = \mathcal{H},$$

définissant $\mathcal{H}$ comme un $\mathcal{G}$-module. On note I l'idéal de $\mathcal{H}$ engendré par $\varphi(I_G)$ $(I \subset I_H)$.

$\operatorname{Tor}^{\mathcal{G}}_{*}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \bigoplus_{n \geq 0} \operatorname{Tor}^{\mathcal{G}}_{n}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ est bien définie comme une algèbre graduée sur $\operatorname{Tor}^{\mathcal{G}}_{0}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{G}} Z = \mathcal{H}/I$, $\mathcal{H}/I$ étant lui-même une $\mathbf{Z}$-algèbre supplémentée.

On note $\operatorname{Tor}^{*}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \bigoplus_{n \leq 0} \operatorname{Tor}^{n}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$, où $\operatorname{Tor}^{n}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \operatorname{Tor}^{\mathcal{G}}_{-n}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$.

(*b*) Dans l'expression $E_2(G/H) = \operatorname{Tor}^{*}_{R(G)}(R(H), \mathbf{Z})$, $R(G)$, $R(H)$ et $R(1)$ sont trivialement $\mathbf{Z}_2$-graduées :

$$R^0(G) = \mathcal{G}, \qquad R^1(G) = 0, \qquad R^0(H) = \mathcal{H}, \qquad R^1(H) = 0,$$
$$R^0(1) = \mathbf{Z}, \qquad R^1(1) = 0.$$

$E_2^{p,q}$ est donc nul pour $p > 0$ et $\mathbf{Z}_2$-périodique en q, la Z_2-graduation totale correspondant à celle de $K^*(G/H)$. Explicitement, on a

$$E_2^{p,q} = \begin{cases} \operatorname{Tor}^{p}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) & \text{pour } q \text{ pair,} \\ 0 & \text{pour } q \text{ impair.} \end{cases}$$

Donc, pour q impair, on a $0 = E_2^{p,q} = \ldots = E_\infty^{p,q} = F^p K^{p+q}/F^{p+1} K^{p+q}$, par conséquent :

1° $F^p K^{p+q} = F^{p+1} K^{p+q}$; en particulier $F^0 K^{-1} = F^1 K^{-1} = 0$.

2° $0 = E_{2r}^{p-2r,q+2r} \overset{d_{2r}}{\rightarrow} E_{2r}^{p,q+1} \overset{d_{2r}}{\rightarrow} E_{2r}^{p+2r,q-2r+2} = 0$; donc $E_{2r}^{p,q+1} = E_{2r+1}^{p,q+1}$, pour q impair; d'où $E_{2r} = E_{2r+1}$.

Remarques :

1° La filtration étant négative, on a un edge-morphisme

$$\theta^0 : \quad E_2^{0,0} \rightarrow E_\infty^{0,0} = F^0 K^0/F^1 K^0 = F^0 K^0 \overset{\subset}{\rightarrow} K^0.$$

2° De plus, comme $F^0 K^{-1} = 0$, on a un quasi-edge-morphisme

$$\theta^{-1} : \quad E_2^{-1,0} \rightarrow E_\infty^{-1,0} = F^{-1} K^{-1}/F^0 K^{-1} = F^{-1} K^{-1} \overset{\subset}{\rightarrow} K^{-1}.$$

(1.3) Cas de dégénérescence de la suite spectrale

Proposition. — *Si* $\mathrm{Tor}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ *est engendrée comme algèbre par ses éléments de degré* ≥ -2, *la suite spectrale d'Hodgkin dégénère* $E_2 \approx \ldots \approx E_\infty$.

On sait déjà que $E_2 = E_3$ (comme algèbres); supposons que $E_2 = \ldots = E_r$ comme algèbres. Alors $E_r = E_2 = \mathrm{Tor}^*_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ est engendrée par $E_r^{-2} \oplus E_r^{-1} \oplus E_r^0$, et on a

$$d_r(E_r^{-2} \oplus E_r^{-1} \oplus E_r^0) \subset E_r^{-2+r} \oplus E_r^{-1+r} \oplus E_r^r = 0,$$

car $r < 2$; comme d_r est une dérivation sur E_r (la suite spectrale étant multiplicative), on a $d_r = 0$, donc $E_r = E_{r+1}$; et le résultat s'en déduit par récurrence.

Remarques :

1° Dans le cas où la suite spectrale dégénère, le edge-morphisme et le quasi-edge-morphisme sont des isomorphismes

$$\theta^0 = \mathcal{H}/I = \mathrm{Tor}^0_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = E_2^\infty \xrightarrow{\sim} E_\infty^{0,0} = F^0 K^0,$$
$$\theta^{-1} = \mathrm{Tor}^{-1}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = E_2^{-1,0} \xrightarrow{\sim} E_\infty^{-1,0} = F^{-1} K^{-1}.$$

2° Dans les cas considérés dans la suite (variétés de Stiefel), $\mathrm{Tor}^*_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ sera engendré par ses éléments de degré ≥ -1, et correspond au cas envisagé ci-dessous.

(1.4) Cas particulier où l'on peut conclure

Théorème. — *On suppose que* $\mathrm{Tor}^*_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$, *où :*

$\Lambda = \Lambda_{\mathbf{Z}}[u_1, \ldots, u_p]$ *est la* $\mathbf{Z}$*-algèbre extérieure sur* p *générateurs* $u_1, \ldots, u_p$, *chacun de degré* -1,

et

$A = \bigoplus_{k \leq 0} A^k$ *est une* $\mathbf{Z}$*-algèbre supplémentée graduée négativement telle que* $A^k = 0$ *pour* $k < -1$.

Alors, comme algèbres $\mathbf{Z}_2$*-graduées, on a*

$$K^*(G/H) \approx \mathrm{Tor}^*_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}).$$

Dans ce cas, $\mathrm{Tor}^*_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ est engendrée, comme algèbre, par la $\mathbf{Z}$-algèbre supplémentée $\mathrm{Tor}^0_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = A^0$ de degré 0, et

$$\mathrm{Tor}^{-1}_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = A^{-1} \oplus A^0 \otimes \Lambda^1[u_1, \ldots, u_p]$$

de degré -1; donc la suite spectrale d'Hodgkin dégénère, et on a des isomorphismes

$$\theta^0 : \quad A^0 \xrightarrow{\sim} F^0 K^0 \xrightarrow{\subset} K^0,$$
$$\theta^{-1} : \quad A^{-1} \oplus A^0 \oplus \Lambda^1 \xrightarrow{\sim} F^{-1} K^{-1} \xrightarrow{\subset} K^{-1}.$$

Alors, pour $0 \leqq k \leqq p+1$, un élément

$$a \in \operatorname{Tor}_{\mathcal{G}}^{-k}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = A^0 \otimes \Lambda^k [u_1, \ldots, u_p] \oplus A^{-1} \otimes \Lambda^{k-1} [u_1, \ldots, u_p]$$

s'écrit d'une façon, et d'une seule, sous la forme

$$a = \sum_{0 \leqq i_1 < \ldots < i_k \leqq p} a^{i_1 \ldots i_k} u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_k}$$
$$+ \sum_{0 \leqq j_1 < \ldots < j_{k-1} \leqq p} b^{j_1 \ldots j_{k-1}} u_{j_1} \wedge \ldots \wedge u_{j_{k-1}},$$

avec $a^{i_1 \ldots i_k} \in A^0$ et $b^{j_1 \ldots j_{k-1}} \in A^{-1}$.

Or, A^0 étant une $\mathbf{Z}$-algèbre supplémentée, on a $\Lambda^1 \subset A^0 \otimes \Lambda^1$, et on pose

$$\theta^{-k}(a) = \sum_{0 \leqq i_j < \ldots < i_k \leqq p} \theta^0 (a^{i_1 \ldots i_k}) \, \theta^{-1}(u_{i_1}) \ldots \theta^{-1}(u_{i_k})$$
$$+ \sum_{0 \leqq j_1 < \ldots < j_{k-1} \leqq p} \theta^0 (b^{j_1 \ldots j_{k-1}}) \, \theta^{-1}(u_{j_1}) \ldots \theta^{-1}(u_{j_{k-1}}),$$

les produits étant effectués dans K^*.

La filtration de K^* étant multiplicative, on a $\theta^{-k}(a) \in F^{-k} K^*$, et en filtrant $\operatorname{Tor}_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ par sa filtration naturelle

$$F^r \operatorname{Tor}_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \bigoplus_{r \leqq s \leqq 0} \operatorname{Tor}_{\mathcal{G}}^s (\mathcal{H}, \mathbf{Z}),$$

$\theta = \sum_{0 \leqq k \leqq p+1} \theta^{-k}$ est un homomorphisme de groupes filtrés de $\operatorname{Tor}_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ dans $K^*(G/H)$, et θ induit un isomorphisme sur les gradués associés. La filtrarion $K^* = F^{-p-1} K^* \supset \ldots \supset F^{-1} K^* \supset F^0 K^* \supset F^1 K^* = 0$ étant finie, il est facile d'en déduire (lemme des cinq) que θ est un isomorphisme :

$$\theta : \quad \operatorname{Tor}_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} K^*(G/H),$$

c'est-à-dire

$$\bigoplus_{k \leqq 0} \operatorname{Tor}_{\mathcal{G}}^{2k}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) \simeq K^0(G/H),$$
$$\bigoplus_{k \leqq 0} \operatorname{Tor}_{\mathcal{G}}^{2k+1}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) \simeq K^{-1}(G/H).$$

Remarques :

1° On notera que $\theta = \sum_{0 \leq k \leq p+1} \theta^{-k}$ n'est, *a priori*, qu'un homomorphisme de groupes (filtrés) et non un homomorphisme d'algèbres. Le fait que θ préserve les structures multiplicatives ne se déduit qu'*in fine*, lorsque l'on sait que θ est un isomorphisme.

2° Cette première étude montre que l'important est d'expliciter la structure d'algèbre de $\mathrm{Tor}^*_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$. On se limitera dans la suite au cas où $\mathcal{G}$ est un anneau de polynômes à coefficients dans $\mathbf{Z}$, ce qui est toujours le cas si $\pi_1(G) = 0$.

2. **Étude de** $\mathrm{Tor}^{\mathcal{G}}_*(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$

(2.1) **Généralités.** — Soit $\varphi : \mathcal{G} = \mathbf{Z}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n] \to \mathcal{H}$ $(\varepsilon_{\mathcal{G}}(\gamma_i) = 0)$ un homomorphisme de $\mathbf{Z}$-algèbres supplémentées.

Le calcul de $\mathrm{Tor}^{\mathcal{G}}_*(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ est théoriquement simple, grâce à la $\mathcal{G}$-résolution libre de $\mathbf{Z}$ due à Koszul. Explicitement, soit $\Lambda_{\mathcal{G}}[u_1, \ldots, u_n]$ la $\mathcal{G}$-algèbre extérieure graduée sur n indéterminées $u_1, \ldots, u_n$ de degré 1, sur laquelle on définit une $\mathcal{G}$-dérivation d, par $du_i = \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. On a alors la $\mathcal{G}$-résolution libre de $\mathbf{Z}$,

$$\begin{aligned} 0 \to \Lambda^n_{\mathcal{G}}[u_1, \ldots, u_n] &\xrightarrow{d} \Lambda^{n-1}_{\mathcal{G}}[u_1, \ldots, u_n] \to \ldots \\ \to \Lambda^1_{\mathcal{G}}[u_1, \ldots, u_n] &\xrightarrow{d} \Lambda^0_{\mathcal{G}}[u_1, \ldots, u_n] = \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0. \end{aligned}$$

Par $\mathcal{G}$-tensorisation par $\mathcal{H}$, on obtient le complexe

$$(1) \qquad \begin{aligned} 0 \to \Lambda^n_{\mathcal{H}}[u_1, \ldots, u_n] &\xrightarrow{d} \Lambda^{n-1}_{\mathcal{H}}[u_1, \ldots, u_n] \to \ldots \\ \to \Lambda^1_{\mathcal{H}}[u_1, \ldots, u_n] &\xrightarrow{d} \Lambda^0_{\mathcal{H}}[u_1, \ldots, u_n] = \mathcal{H}, \end{aligned}$$

où d est alors la $\mathcal{H}$-dérivation définie par $du_i = \varphi(\gamma_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

$\mathrm{Tor}^{\mathcal{G}}_*(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ est l'homologie de ce complexe, mais le calcul en est pratiquement impossible. Deux cas sont cependant simples :

1° $\mathcal{H}$ est un $\mathcal{G}$-module libre; (1) est alors une suite exacte, donc

$$\mathrm{Tor}^{\mathcal{G}}_k(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq 0, \\ \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{G}} \mathbf{Z} = \mathcal{H}/I & \text{pour } k = 0. \end{cases}$$

2° Le complexe (1) est trivial : $du_i = \varphi(\gamma_i) = 0$, c'est-à-dire que $\mathcal{H}$ est un $\mathcal{G}$ module trivial; alors $\mathrm{Tor}^{\mathcal{G}}_*(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ est la $\mathcal{H}$-algèbre extérieure graduée $\Lambda_{\mathcal{H}}[u_1 \ldots u_n]$.

On va pratiquer en « mélangeant » les cas 1° et 2°.

(2.2) **Idéal de Borel** ([10], p. 79-93). **Première étude de** $\mathrm{Tor}^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$. — Soit $\mathcal{H} = \mathbf{Z} \oplus I_{\mathcal{H}}$ une $\mathbf{Z}$-algèbre supplémentée. Pour une suite $h_1, \ldots, h_m$ d'éléments de $I_{\mathcal{H}}$, on définit un homomorphisme de $\mathbf{Z}$-algèbres supplémentées $\varphi' : \mathcal{G}' = \mathbf{Z}[\gamma_1, \ldots, \gamma_m] \to \mathcal{H}$ par $\varphi'(\gamma_i) = h_i$, de sorte que $\mathcal{H}$ devient un $\mathcal{G}'$-module.

On dit que $h_1, \ldots, h_m$ est une *suite de Borel* si $\mathcal{H}$ est $\mathcal{G}'$-module libre; l'idéal J, engendré par les éléments de cette suite, est appelé un *idéal de Borel* de $\mathcal{H}$ et $h_1, \ldots, h_m$ est appelée une *J-suite.*

Remarque. — Sous les hypothèses précédentes, $\mathcal{H}/J$ est alors un groupe abélien libre car, si $(x_l)_{l \in L}$ est une base du $\mathcal{G}'$-module $\mathcal{H}$, $(\bar{x}_l)_{l \in L}$ est une base du groupe abélien $\mathcal{H}/J$.

Proposition. — *Soit* $\mathcal{G} = \mathbf{Z}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n] \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H}$ *un homomorphisme de* $\mathbf{Z}$-*algèbres supplémentées tel que :*

1° *l'idéal* $J = (\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_n))$ *soit un idéal de Borel de* $\mathcal{H}$;

2° $\{\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_m)\}$ *soit une J-suite.*

Alors, l'algèbre $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ *est une* $\mathcal{H}/J$-*algèbre extérieure graduée sur* $n - m$ *indéterminées* $u_{m+1}, \ldots, u_n$, *chacune de degré* 1 :

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \Lambda^*_{\mathcal{H}/J}[u_{m+1}, \ldots, u_n] = \mathcal{H}/J \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda_{\mathbf{Z}}[u_{m+1}, \ldots, u_n].$$

Soient $\mathcal{G}' = \mathbf{Z}[\gamma_1, \ldots, \gamma_m]$, $\mathcal{G}'' = \mathbf{Z}[\gamma_{m+1}, \ldots, \gamma_n]$. $\mathcal{G}$ étant un $\mathcal{G}'$-module libre et $\mathcal{G}'' = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{G}'} \mathbf{Z}$ $(= \mathcal{G}//\mathcal{G}'$ dans la terminologie de [4], chap. XVI-6), on a une suite spectrale régulière

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{\mathcal{G}''}\left(\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{G}'}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}\right) \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}).$$

Or, $\mathcal{H}$ étant par hypothèse un $\mathcal{G}'$-module libre, on a

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{G}'}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0, \\ \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{G}'} \mathbf{Z} = \mathcal{H}/J & \text{si } q = 0. \end{cases}$$

Il en résulte que cette suite spectrale dégénère, et on a

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{G}''}(\mathcal{H}/J, \mathbf{Z}) = E^2_{*,0} = \ldots = E_{*,0} = \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}).$$

D'autre part, $\mathcal{H}/J$ étant un $\mathcal{G}''$-module trivial, on a

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{G}''}(\mathcal{H}/J, \mathbf{Z}) = \Lambda^*_{\mathcal{H}/J}[u_{m+1}, \ldots, u_n];$$

d'où

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \Lambda^*_{\mathcal{H}/J}[u_{m+1}, \ldots, u_n].$$

(2.3) **Deuxième étude de** $\mathrm{Tor}^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$

(2.3.1) Soit $\mathcal{G} = \mathbf{Z}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \Delta] \xrightarrow{\varphi} \mathcal{H}$ un homomorphisme de $\mathbf{Z}$-algèbres supplémentées. $\mathcal{G}$ étant un $\mathcal{G}'$ $(= \mathbf{Z}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n])$-module libre et $\mathbf{Z}[\Delta] = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{G}'} \mathbf{Z} = \mathcal{G}//\mathcal{G}'$, on a une suite spectrale régulière

$$E^2_{p,q} = \mathrm{Tor}_p^{\mathbf{Z}[\Delta]}\left(\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{G}'}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}), \mathbf{Z}\right) \underset{p}{\Rightarrow} \mathrm{Tor}_*^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}).$$

Comme la dimension cohomologique du $\mathbf{Z}[\Delta]$-module $\mathbf{Z}$ est égale à 2, on a $E^2_{p,q} = 0$ pour $p \neq 0, 1$. Donc la suite spectrale dégénère : $E^2_{p,q} = E^\infty_{p,q}$. On a ainsi la suite exacte

$$(2) \qquad 0 \to E^2_{0,q} \to \mathrm{Tor}_q^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) \to E^2_{1,q-1} \to 0,$$

$E^2_{0,q}$ et $E^2_{1,q}$ étant définis [*voir* (2.1)] par la suite exacte

$$(3) \qquad 0 \to E^2_{1,q} \to \mathrm{Tor}_q^{\mathcal{G}'}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) \xrightarrow{d} \mathrm{Tor}_q^{\mathcal{G}'}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) \to E^2_{0,q} \to 0,$$

dans laquelle d est induit par la multiplication par Δ.

Remarque. — Si $\mathrm{Tor}^{\mathcal{G}'}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$ est un groupe (gradué) libre en tout degré, il en est de même du sous-groupe (gradué) $E^2_{1,*}$ [en vertu de (3)]; donc, pour tout q, la suite exacte (2) est fissible, et on a

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = E^2_{0,q} \oplus E^2_{1,q-1}.$$

(2.3.2) *Premier cas particulier.* — On suppose que $\mathcal{H}$ est un $\mathcal{G}'$-module libre. On a alors

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{G}'}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0, \\ \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{G}'} \mathbf{Z} = \mathcal{H}/J, & \\ \text{où } J = (\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_n)) & \text{si } q = 0; \end{cases}$$

la suite exacte (2) donne alors

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0, 1, \\ E^2_{0,0} & \text{si } q = 0, \\ E^2_{1,0} & \text{si } q = 1; \end{cases}$$

donc $\mathrm{Tor}^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = E^2_{*,0}$.

De plus, la suite exacte (3) donne

$$E^2_{0,0} = \mathcal{H}/I = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{G}} \mathbf{Z}, \qquad \text{où } I = (\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_n), \varphi(\Delta)),$$
$$E^2_{1,0} = (\varphi(\Delta) : J)/J, \qquad \text{où } (\varphi(\Delta) : J) = \{x \in \mathcal{H} \mid \varphi(\Delta)\, x \in J\}.$$

En particulier, la structure de $\mathrm{Tor}_0^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \mathcal{H}/I$-module de

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = (\varphi(\Delta) : J)/J$$

est donnée par

$$x.\bar{a} = x.a \qquad \text{pour} \quad x \in (\varphi(\Delta) : J)/J \quad \text{et} \quad a \in \mathcal{H}/J.$$

De façon générale, on note A la $\mathbf{Z}$-algèbre graduée supplémentée, définie par

$$\left\{ \begin{array}{c} A^0 = A_0 = \mathcal{H}/I = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{G}} \mathbf{Z}, \\ A^{-1} = A_1 = (\varphi(\Delta) : J)/J, \\ A^{-k} = A_k = 0 \qquad \text{pour} \quad k \neq 0,\ 1, \qquad k \geq 0, \end{array} \right.$$

avec

$$I = (\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_n), \varphi(\Delta)), \qquad J = (\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_n)).$$

On a donc le résultat suivant :

LEMME. — *Si $\mathcal{H}$ est un $\mathcal{G}'$-module libre, on a*

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = A_* \qquad [\text{ou } \mathrm{Tor}_{\mathcal{G}}^*(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = A^*].$$

(2.3.3) *Deuxième cas particulier.* — On suppose que J est un idéal de Borel de $\mathcal{H}$ dont $(\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_m))$ est une J-suite. D'après (2.2), on a alors

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{G}'}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = \Lambda_{\mathcal{H}/J}[u_{m+1}, \ldots, u_n] = \mathcal{H}/J \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda_{\mathbf{Z}}[u_{m+1}, \ldots, u_n].$$

De plus, d'après la remarque de (2.2), $\mathcal{H}/J$ est un groupe abélien libre; il en est donc de même de $\mathrm{Tor}_*^{\mathcal{G}'}(\mathcal{H}, \mathbf{Z})$. D'après la remarque de (2.3.1), on a alors

$$\mathrm{Tor}_q^{\mathcal{G}}(\mathcal{H}, \mathbf{Z}) = E^2_{0,q} \oplus E^2_{1,q-1}.$$

Or, de la suite exacte

$$0 \to A_1 \to \mathcal{H}/J \xrightarrow{\bar{\varphi}(\Delta)} \mathcal{H}/J \to A_0 \to 0,$$

on obtient, par tensorisation par le groupe abélien libre $\Lambda_{\mathbf{Z}}^q[u_{m+1}, \ldots, u_n]$, la suite exacte

$$\begin{array}{l} 0 \to A_1 \otimes \Lambda_{\mathbf{Z}}^q[u_{m+1}, \ldots, u_n] \to \Lambda_{\mathcal{H}/J}^q[\quad] \xrightarrow{d} \Lambda_{\mathcal{H}/J}^q[\quad] \\ \qquad \to A_0 \otimes \Lambda_{\mathbf{Z}}^q[u_{m+1}, \ldots, u_n] \to 0; \end{array}$$

on a donc

$$E^2_{0,q} = A_0 \otimes \Lambda^q_{\mathbf{Z}}[u_{m+1}, \ldots, u_n],$$
$$E^2_{1,q} = A_1 \otimes \Lambda^q_{\mathbf{Z}}[u_{m+1}, \ldots, u_n],$$

et, par suite,

$$\mathrm{Tor}^{\mathcal{G}}_q(\mathcal{K}, \mathbf{Z}) = E^2_{0,q} \oplus E^2_{1,q-1} = (A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda_{\mathbf{Z}}[u_{m+1}, \ldots, u_n])_q.$$

On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses précédentes :*

1° $\mathcal{G} = \mathbf{Z}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \Delta] \xrightarrow{\varphi} \mathcal{K}$ *homomorphismes de* $\mathbf{Z}$*-algèbres supplémentées;*

2° $J = (\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_n))$ *est un idéal de Borel de* $\mathcal{K}$ *dont* $(\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_m))$ *est une* J*-suite.*

Alors, l'algèbre graduée (négativement) $\mathrm{Tor}^*_{\mathcal{G}}(\mathcal{K}, \mathbf{Z})$ *est égale à l'algèbre graduée produit tensoriel* $A^* \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda_{\mathbf{Z}}[u_{m+1}, \ldots, u_n]$ *sur* $n - m$ *indéterminées* $u_{m+1}, \ldots, u_n$ *de degré* -1, *avec*

$$A^0 = \mathcal{K}/I, \qquad I = (\varphi(\gamma_1), \ldots, \varphi(\gamma_n), \varphi(\Delta)),$$
$$A^{-1} = (\varphi(\Delta) : J)/J.$$

Remarques :

1° Tous les résultats intermédiaires, établis dans ce paragraphe, sont des cas particuliers du théorème ci-dessus. D'autre part, ce théorème admet certaines généralisations, mais sous cette forme, il nous sera très suffisant.

2° Reprenons le cas particulier de (2.3.2), où nous avons la suite exacte

$$0 \to A^{-1} \to \mathcal{K}/J \xrightarrow{\overline{\varphi(\Delta)}} \mathcal{K}/J \to A^0 \to 0.$$

Cette suite exacte est proche de celle donnée par ATIYAH ([1], p. 105).

De façon plus précise, K étant un groupe fini opérant librement et linéairement sur la sphère $\mathbf{S}^{2n+1}$ par $\rho : K \to U(n) = G$, soit H le sous-groupe fermé de $U(n)$ engendré par K et $U(n-1)$. On doit, alors, pouvoir démontrer que l'on se trouve dans le cas de (2.3.2), c'est-à-dire que l'on a $\mathcal{K}/J = R(K)$ et $\overline{\varphi(\Delta)} = \lambda_{-1}(\rho)$, de sorte que

$$A^{-1} = K^{-1}(\mathbf{S}^{2n-1}/K) \qquad \text{et} \qquad A^0 = K^0(\mathbf{S}^{2n-1}/K).$$

3. K-théorie complexe des variétés de Stiefel

(3.1) Variétés de Stiefel complexes $SU(n)/SU(m)$ $(0 < m < n)$. — Soit ρ_n la représentation canonique de dimension complexe n

de $SU(n)$. On définit les représentations virtuelles $\pi_i = \pi^i(\rho_n)$ par

$$\pi_i = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{n-1-j}{i-j} \lambda^j(\rho_n) - 1 \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n-1,$$

$$\pi_i = 0 \qquad \text{pour} \quad i \geqq n;$$

explicitement

$$\pi_i = \sum_{j=1}^{i} \gamma^i(\rho_n - n), \qquad \text{où} \quad \gamma_t = \lambda_{t/(1-t)}.$$

On montre aisément que :

(i) $\pi_i \in I_{SU(n)}$;

(ii) $R(SU(n))$ $(= \mathbf{Z}[\lambda^1(\rho_n), \ldots, \lambda^{n-1}(\rho_n)])$, s'identifie, comme $\mathbf{Z}$-algèbre supplémentée, à la $\mathbf{Z}$-algèbre des polynômes $\mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}]$;

(iii) pour $m \leqq n$, $\varphi : R(SU(n)) \to R(SU(m))$ étant l'homomorphisme induit par inclusion $SU(m) \xrightarrow{\subset} SU(n)$, on a $\varphi(\pi_i) = \pi'_i$, où $\pi'_i = \pi^i(\rho_m)$.

Il résulte de ceci que l'idéal $J = (\varphi(\pi_1), \ldots, \varphi(\pi_{n-1}))$ est un idéal de Borel de $R(SU(m))$ admettant pour J-suite $(\varphi(\pi_1), \ldots, \varphi(\pi_{m-1}))$.

Par application de (2.2), comme $R(SU(m))/J = \mathbf{Z}$, on a

$$\mathrm{Tor}_*^{R(SU(n))}(R(SU(m)), \mathbf{Z}) = \Lambda_{\mathbf{Z}}[\pi_m, \ldots, \pi_{n-1}].$$

Donc, d'après (1.4), on a le théorème ci-dessous.

THÉORÈME (CONNOR-LAZAROV [9], p. 398-399). — *En tant qu'algèbres $\mathbf{Z}_2$-graduées, on a (pour $0 < m < n$) :*

$$K^*(SU(n)/SU(m)) \approx \Lambda^*_{\mathbf{Z}}[\pi^m(\rho_n), \ldots, \pi^{n-1}(\rho_n)],$$

chaque $\pi^i(\rho_n)$ étant de degré -1.

(3.2) **Variétés de Stiefel quaternioniques** $\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(m)$ $(0 < m < n)$. — Soit ρ_{2n} la représentation canonique de dimension complexe de $\mathrm{Sp}(n) \xrightarrow{\subset} U(2n)$.

En notant $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}]$ l'anneau des représentations du tore maximal de $\mathrm{Sp}(n)$, on a

$$\lambda_t(\rho_{2n}) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \alpha_i t)(1 + \alpha_i^{-1} t)$$

$$= (1+t)^{2n} \prod_{i=1}^{n} [1 + (\alpha_i + \alpha_i^{-1} - 2)\, t/(1+t)^2].$$

On définit les représentations virtuelles $\pi_i = \pi^i(\rho_{2n})$ par

$$\sum_{i \geq 0} \pi_i s^i = \pi_s(\rho_{2n}) = \prod_{i=1}^{n} [1 + (\alpha_i + \alpha_i^{-1} - 2) s],$$

d'où

$$\lambda_t(\rho_{2n}) = (1 + t)^{2n} \pi_{t/(1+t)^2}(\rho_{2n}).$$

On montre aisément que :

(i) $\pi_i \in I_{\mathrm{Sp}(n)}$ pour $i > 0$, $\pi_i = 0$ pour $i > n$,

$$\lambda^i(\rho_{2n}) = \sum_{j=0}^{i} \binom{2(n-j)}{i-j} \pi_i;$$

(ii) $R(\mathrm{Sp}(n)) = \mathbf{Z}[\lambda^1(\rho_{2n}), \ldots, \lambda^n(\rho_{2n})]$ s'identifie, comme $\mathbf{Z}$-algèbre supplémentée, à la $\mathbf{Z}$-algèbre des polynômes $\mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_n]$;

(iii) pour $m \leq n$, $\varphi : R(\mathrm{Sp}(n)) \to R(\mathrm{Sp}(m))$ étant l'homomorphisme induit par l'inclusion $\mathrm{Sp}(m) \subsetneq \mathrm{Sp}(n)$, on a $\varphi(\pi_i) = \pi'_i$ où $\pi'_i = \pi^i(\rho_{2m})$.

Il résulte de ceci que l'idéal $J = (\varphi(\pi_1), \ldots, \varphi(\pi_n))$ est un idéal de Borel de $R(\mathrm{Sp}(m))$, admettant pour J-suite $(\varphi(\pi_1), \ldots, \varphi(\pi_m))$.

Par application de (2.2), comme $R(\mathrm{Sp}(m))/J = \mathbf{Z}$, on a

$$\mathrm{Tor}_*^{R(Sp(n))}(R(\mathrm{Sp}(m)), \mathbf{Z}) = \Lambda_{\mathbf{Z}}[\pi_{m+1}, \ldots, \pi_n].$$

Donc, d'après (1.4), on a le théorème suivant :

Théorème (Connor-Lazarov [9], p. 398-399). — *En tant qu'algèbres* $\mathbf{Z}_2$*-graduées, on a (pour* $0 < m < n$*) :*

$$K^*(\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(m) \approx \Lambda_{\mathbf{Z}}^*[\pi^{m+1}(\rho_{2n}), \ldots, \pi^n(\rho_{2n})],$$

chaque $\pi^i(\rho_{2n})$ *étant de degré* -1.

(3.3) **Variétés de Stiefel réelles** $\mathrm{Spin}(n)/\mathrm{Spin}(m)$ $(0 < m < n)$.

(3.3.1) *Notations sur les représentations complexes de* $\mathrm{Spin}(n)$ ([8], p. 184-195). — Pour $\varepsilon = 1$ ou 0, soit $\rho_{2n+\varepsilon}$ la représentation canonique de dimension $2n + \varepsilon$ de $\mathrm{Spin}(2n + \varepsilon)$

$$(\mathrm{Spin}(2n + \varepsilon) \to SO(2n + \varepsilon) \subsetneq SU(2n + \varepsilon)).$$

Comme dans le cas quaternionique, en notant $\mathbf{Z}[\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}]$, l'anneau des représentations du tore maximal de Spin $(2\,n + \varepsilon)$, on a

$$\lambda_t(\rho_{2n+\varepsilon}) = (1+t)^{\varepsilon} \prod_{i=1}^{n} (1 + \alpha_i\, t)(1 + \alpha_i^{-1}\, t)$$
$$= (1+t)^{2n+\varepsilon} \prod_{i=1}^{n} [1 + (\alpha_i + \alpha_i^{-1} - 2)\, t/(1+t)^2].$$

On définit les représentations virtuelles $\pi_i = \pi^i(\rho_{2n+\varepsilon})$ par

$$\sum_{i \geqq 0} \pi_i\, s^i = \pi_s(\rho_{2+n\varepsilon}) = \prod_{i=1}^{n} [1 + (\alpha_i + \alpha_i^{-1} - 2)\, s],$$

d'où

$$\lambda_t(\rho_{2n+\varepsilon}) = (1+t)^{2n+\varepsilon}\, \pi_{t/(1+t)^2}(\rho_{2n+\varepsilon});$$

et on a

$$\pi_i \in I_{\mathrm{Spin}(2n+\varepsilon)} \quad \text{pour } i > 0, \qquad \pi_i = 0 \quad \text{pour } i > n,$$

$$\lambda^i(\rho_{2n+\varepsilon}) = \sum_{j=0}^{i} \binom{2n+\varepsilon-2j}{i-j} \pi_j \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq i \leqq n.$$

Soit $\Delta(2\,n+\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i^{1/2} + \alpha_i^{-1/2})$ la représentation spinorielle canonique de dimension complexe 2^n de Spin $(2\,n + \varepsilon)$.

(*a*) Lorsque $\varepsilon = 1$, $\Delta(2\,n+1)$ est irréductible. On pose

$$\Delta = \Delta_{2n+1} = \Delta(2\,n+1) - 2^n;$$

la relation $\Delta^2(2\,n+1) = \sum_{i=0}^{n} \lambda^i(\rho_{2n+1})$ s'écrit alors

$$\Delta^2(2\,n+1) = \sum_{k=0}^{n} \left[\sum_{i=k}^{n} \binom{2(n-k)+1}{i-k} \right] \pi_k = \sum_{k=0}^{n} 2^{2(n-k)}\, \pi_k.$$

$R(\mathrm{Spin}(2\,n+1)) = \mathbf{Z}[\lambda^1(\rho_{2n+1}), \ldots, \lambda^{n-1}(\rho_{2n+1}), \Delta(2\,n+1)]$ s'identifie, comme $\mathbf{Z}$-algèbre supplémentée, à la $\mathbf{Z}$-algèbre des polynômes

$$\mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}, \Delta].$$

(*b*) Lorsque $\varepsilon = 0$, $\Delta(2n)$ se décompose en deux sous-représentations de même dimension complexe 2^{n-1} : $\Delta(2n) = \Delta^+(2n) + \Delta^-(2n)$. On pose

$$\Delta_+ = \Delta^+_{2n} = \Delta^+(2n) - 2^{n-1},$$
$$\Delta_- = \Delta^-_{2n} = \Delta^-(2n) - 2^{n-1},$$
$$\Delta = \Delta_+ + \Delta_- = \Delta_{2n};$$

les relations

$$(\Delta^+)^2(2n) + (\Delta^-)^2(2n) = \lambda^n(\rho_{2n}) + 2[\lambda^{n-2}(\rho_{2n}) + \lambda^{n-4}(\rho_{2n}) + \ldots],$$
$$\Delta^+(2n).\Delta^-(2n) = \lambda^{n-1}(\rho_{2n}) + \lambda^{n-3}(\rho_{2n}) + \ldots,$$

s'écrivent alors

$$(\Delta^+)^2(2n) + (\Delta^-)^2(2n) = \pi_n + 2[a_{n-2}\pi_{n-2} + a_{n-4}\pi_{n-4} + \ldots],$$
$$\Delta^+(2n).\Delta^-(2n) = \pi_{n-1} + a_{n-3}\pi_{n-3} + \ldots,$$

d'où la relation

$$\Delta^2(2n) = \sum_{k=0}^{n} 2^{2(n-k)}\pi_k.$$

R (Spin $(2n)$) $= \mathbf{Z}[\lambda^1(\rho_{2n}), \ldots, \lambda^{n-2}(\rho_{2n}), \Delta^+(2n), \Delta^-(2n)]$ s'identifie, comme $\mathbf{Z}$-algèbre supplémentée, à la $\mathbf{Z}$-algèbre de polynômes

$$\mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_{n-2}, \Delta_+, \Delta_-] = \mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_{n-2}, \Delta_+ - \Delta_-, \Delta_+].$$

Enfin, $\varphi : R$ (Spin $(2n+\varepsilon)$) $\to R$ (Spin $(2m+\varepsilon')$) étant l'homomorphisme induit par l'inclusion

$$\text{Spin}\,(2m+\varepsilon') \subsetneq \text{Spin}\,(2n+\varepsilon)\ (2m+\varepsilon' \leqq 2n+\varepsilon),$$

on a

$$\varphi(\pi_i) = \pi'_i, \qquad \text{où} \quad \pi'_i = \pi^i(\rho_{2m+\varepsilon'}),$$
$$\varphi(\Delta) = 2^{n-m}\Delta', \qquad \text{où} \quad \Delta' = \Delta_{2m+\varepsilon'} \qquad (= \Delta'_+ + \Delta'_- \quad \text{si} \quad \varepsilon' = 0),$$
$$\varphi(\Delta_+) = \varphi(\Delta_-) = 2^{n-m-1}\Delta' \qquad \text{pour} \quad \varepsilon = 0.$$

(3.3.2) *Lemme préparatoire.*

LEMME. — Spin $(2n+\varepsilon)$ *est un* $\mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_n]$*-module libre de base :*
Soit $\{1, \Delta\}$ *pour* $\varepsilon = 1$;
Soit $\{1, \Delta_+, \Delta_-, \Delta_+^2\}$ *ou* $\{1, \Delta_+, \Delta, \Delta_+^2\}$ *pour* $\varepsilon = 0$.

(*a*) $\varepsilon = 1$. — Il est facile de voir que tout élément de R (Spin $(2n+1)$) s'écrit sous la forme

(4) $$P\,1 + Q\,\Delta, \qquad \text{où} \quad P, Q \in \mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_n].$$

Comme $\pi_n = \Delta^2 (2n+1) - \sum_{i<n} a_i \pi_i$, on peut considérer P et Q comme des polynômes en $\Delta^2 (2n+1)$ à coefficients dans $\mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}]$. En se rappelant $\Delta = \Delta(2n+1) - 2^n$, (4) s'écrit

$$P(\Delta^2(2n+1)) - 2^n Q(\Delta^2(2n+1)) + Q(\Delta^2(2n+1))\,\Delta(2n+1).$$

Si une telle expression est nulle, par raison de parité en $\Delta(2n+1)$, on a $P = Q = 0$; donc, $R(\mathrm{Spin}(2n+1))$ est un $\mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_n]$-module libre de base $\{1, \Delta\}$.

(*b*) $\varepsilon = 0$. — Il est facile de voir que tout élément de $R(\mathrm{Spin}(2n))$ s'écrit sous la forme

(5) $P\,1 + Q\,\Delta_+ + R\,\Delta_- + S\,\Delta_+^2$, où $P, Q, R, S \in \mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_n]$.

Comme

$$\pi_n = (\Delta^+)^2 (2n) + (\Delta^-)^2 (2n) - \sum_{i<n-1} a_i \pi_i$$

$$\text{et} \qquad \pi_{n-1} = \Delta^+(2n).\Delta^-(2n) - \sum_{i<n-1} b_i \pi_i,$$

en posant $X = \Delta^+(2n) = \Delta_+ + 2^{n-1}$, $Y = \Delta^-(2n) = \Delta_- + 2^{n-1}$ pour alléger les notations, on peut considérer P, Q, R, S comme des polynômes en $X^2 + Y^2$ et XY à coefficients dans $\mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_{n-2}]$, et (5) s'écrit

$$P'(X^2+Y^2, XY) + Q'(X^2+Y^2, XY)\,X + R(X^2+Y^2, XY)\,Y + S(X^2+Y^2, XY)\,X^2,$$

avec

$$P' = P - 2^{n-1} Q - 2^{n-1} R + 2^{2(n-1)} S, \qquad Q' = Q - 2^n S.$$

Si une telle expression est nulle, par raison de parité en X, Y, on a

$$P'(X^2+Y^2, XY) + S(X^2+Y^2, XY)\,X^2 = 0,$$
$$Q'(X^2+Y^2, XY)\,X + R(X^2+Y^2, XY)\,Y = 0;$$

et par un raisonnement simple de divisibilité, ceci entraîne la nullité de P', Q', R', S', donc de P, Q, R, S. Il en résulte que $R(\mathrm{Spin}(2n))$ est un $\mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_n]$-module libre de base $\{1, \Delta_+, \Delta_-, \Delta_+^2\}$, donc $\{1, \Delta_+, \Delta, \Delta_+^2\}$.

N. B. — *A fortiori*, $\mathrm{Spin}(2n+\varepsilon)$ est un $\mathbf{Z}[\pi_1, \ldots, \pi_m]$-module libre pour $m \leq n$.

COROLLAIRE.

(i) *Pour* $\varepsilon = 1$, *on a*

$$R(\mathrm{Spin}(2n+1))/J = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\Delta,$$

la multiplication étant donnée par $\Delta.\Delta = -2^{n+1}\Delta$.

(ii) *Pour* $\varepsilon = 0$, *on a*

$$R(\mathrm{Spin}(2n))/J = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\Delta_+ \oplus \mathbf{Z}\Delta \oplus \mathbf{Z}\Delta_+^2,$$

la multiplication étant donnée par la table

	Δ_+	Δ	Δ_+^2
Δ_+	Δ_+^2	$-2^{n-1}\Delta + \Delta_+^2$	$-2^{2(n-1)}\Delta - 3.2^{n-1}\Delta_+^2$
Δ		$-2^{n+1}\Delta$	$-2^{n+1}\Delta_+^2$
Δ_+^2			$2^{3n-1}\Delta + 2^{2n+1}\Delta_+^2$

En particulier, on notera que $\Delta_+^2 = \Delta(\Delta_+ + 2^{n-1})$.

Remarques :

1° Dans le corollaire précédent, les générateurs Δ_+, Δ, Δ_+^2, sont d'augmentation nulle pour l'augmentation canonique de $R(\mathrm{Spin}(2n+\varepsilon))/J$, ($\pi_1, \ldots, \pi_n$ étant d'augmentation nulle). Il est intéressant géométriquement de prendre comme générateurs

$$\Delta^+(2n), \quad \Delta(2n+\varepsilon) \quad \text{ou} \quad \Delta(2n+\varepsilon) - 2^n = \Delta$$

[de sorte que $\Delta_+^2 = \Delta.\Delta_+(2n)$].

$R(\mathrm{Spin}(2n+1))/J$ est l'algèbre unitaire sur un générateur $\Delta(2n+1)$ avec comme multiplication, $\Delta^2(2n+1) = 2^{2n}$.

$R(\mathrm{Spin}(2n))/J$ est l'algèbre unitaire sur deux générateurs $\Delta^+(2n)$, $\Delta = \Delta(2n) - 2^n$, avec comme table de multiplication :

	$\Delta^+(2n)$	Δ
$\Delta^+(2n)$	$\Delta.\Delta^+(2n) + 2^n\Delta^+(2n) - 2^{2(n-1)}$	$\Delta.\Delta^+(2n)$
Δ		$-2^{n+1}\Delta$

2° Il sera aussi utile de remarquer que

(*a*) $$R\,(\mathrm{Spin}\,(2\,n+1))/(\pi_1,\,\ldots,\,\pi_{n-1}) = \mathbf{Z}\,[\Delta],$$

(*b*) $$R\,(\mathrm{Spin}\,(2\,n))/(\pi_1,\,\ldots,\,\pi_{n-1}) = \mathbf{Z}\,[\Delta_+] \oplus \mathbf{Z}\,\Delta,$$

la multiplication étant donnée par la loi $\Delta_+ . \Delta = \Delta_+^2 - 2^{n-1}\,\Delta$.

(3.3.3) *Calcul de* $K^*\,(\mathrm{Spin}\,(2\,n+\varepsilon)/\mathrm{Spin}\,(2\,m+\varepsilon'))$. — Soit

$$\varphi : R\,(\mathrm{Spin}\,(2\,n+\varepsilon)) \to R\,(\mathrm{Spin}\,(2\,m+\varepsilon'))$$

l'homomorphisme induit par l'inclusion $\mathrm{Spin}\,(2\,m+\varepsilon') \hookrightarrow \mathrm{Spin}\,(2\,n+\varepsilon)$, $(\varepsilon,\,\varepsilon' = 0,\,1,\,2\,m+\varepsilon' < 2\,n+\varepsilon)$. Les notations sont celles de la fin de (3.3.1); on pose, de plus :

$$u_i = \pi_i \quad \text{pour } i = 1,\,\ldots,\,n-2 \qquad \text{et} \qquad u_{n-1} = \begin{cases} \pi_{n-1} & \text{pour } \varepsilon = 1, \\ \Delta_+ - \Delta_- & \text{pour } \varepsilon = 0. \end{cases}$$

1° *Cas général :* $n-2+\varepsilon \geqq m$. — Comme $\varphi\,(u_i) = 0$ pour $m < i < n$, l'idéal $J = (\varphi\,(u_1),\,\ldots,\,\varphi\,(u_{n-1}))$ de $R\,(\mathrm{Spin}\,(2\,m+\varepsilon'))$ est engendré par la suite $S = (\varphi\,(u_1) = \pi_1,\,\ldots,\,\varphi\,(u_m) = \pi_m)$ et, d'après le lemme préparatoire, J est un idéal de Borel admettant S comme J-suite. On a donc

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbf{Z}[u_1,\ldots,u_n]}\,(R\,(\mathrm{Spin}\,(2\,m+\varepsilon')),\,\mathbf{Z}) = \Lambda_A^*\,[u_{m+1},\,\ldots,\,u_{n-1}],$$

où $u_{m+1},\,\ldots,\,u_{n-1}$ sont de degré -1, et

$$A = R\,(\mathrm{Spin}\,(2\,m+\varepsilon'))/J.$$

Le théorème de (2.3.3) donne alors :

Théorème :

$$\mathrm{Tor}_*^{R(\mathrm{Spin}\,(2\,n+\varepsilon))}\,(R\,(\mathrm{Spin}\,(2\,m+\varepsilon')),\,\mathbf{Z}) = A^*\,(\varepsilon,\,\varepsilon') \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda_{\mathbf{Z}}\,[u_{m+1},\,\ldots,\,u_{n-1}],$$

où $A^*\,(\varepsilon,\,\varepsilon') = A^0 \oplus A^{-1}$ *est l'algèbre graduée déterminée par la suite exacte*

$$0 \to A^{-1} \to A \to A \to A^0 \to 0,$$

dans laquelle la flèche centrale est la multiplication par

$$2^{n-m-1+\varepsilon}\,\Delta'\,J = \varphi\,(\Delta)\,J = \varphi\,(\Delta^+)\,J$$

suivant que $\varepsilon = 1$ *ou* 0.

Explicitation de $A^*(\varepsilon, \varepsilon')$:

(a) $\varepsilon' = 1$, on a

$$A^0(\varepsilon, 1) = \mathbf{Z}\,1 \oplus \mathbf{Z}_{2^{n-m-1+\varepsilon}}\,\Delta',$$
$$A^{-1}(\varepsilon, 1) = \mathbf{Z}\,(2^{m+1} + \Delta') = \mathbf{Z}\,v,$$

la structure d'algèbre étant donnée par

$$\Delta'^2 = -2^{m+1}\ (\text{modulo } 2^{n-m-1+\varepsilon})\ \Delta',$$
$$\Delta'.v = v.v = 0.$$

(b) $\varepsilon' = 0$, on a

$$A^0(\varepsilon, 0) = \mathbf{Z}\,1 \oplus \mathbf{Z}\,\Delta'_+ \oplus \mathbf{Z}_{2^{n-m-1+\varepsilon}}\,\Delta' \oplus \mathbf{Z}_{2^{n-m-1+\varepsilon}}\,\Delta'^2_+$$
$$(= \Delta'(\Delta'_+ + 2^{m-1})),$$
$$A^{-1}(\varepsilon, 0) = \mathbf{Z}\,(2^{m+1} + \Delta') \oplus \mathbf{Z}\,(2^{m+1} + \Delta')(\Delta'_+ + 2^{m-1}) = \mathbf{Z}\,v \oplus \mathbf{Z}\,w,$$

la structure d'algèbre étant donnée par le tableau de la multiplication donné dans le corollaire de (3.3.2), où l'on remplace Δ_+, Δ, Δ_+^2 et n par, respectivement, Δ'_+, Δ', Δ'^2_+ et m, et où les coefficients des deux dernières colonnes sont pris modulo $2^{n-m-1+\varepsilon}$,

$$\Delta'^2_+.v = \Delta'^2_+.w = \Delta'.v = \Delta'.w = v.v = w.w = v.w = 0,$$
$$\Delta'_+.v = -2^{m-1}\,v + w, \qquad \Delta'_+.w = 2^{m-1}\,\Delta'_+.v = 2^{m-1}\,w - 2^{2(m-1)}\,v.$$

2° *Cas particuliers :* $n - 2 + \varepsilon < m$.

(a) $\varepsilon = 1$, alors $n = m$ et $\varepsilon' = 0$. On se réfère à (3.3.2), remarque 2° (b), ce qui donne

$$\mathrm{Tor}^p_{R(\mathrm{Spin}(2n+1))}(R(\mathrm{Spin}(2n)), \mathbf{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0, \\ \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\,\Delta'_+ & \text{si } p = 0, \end{cases}$$

la multiplication étant $\Delta'^2_+ = 0$.

(b) $\varepsilon = 0$, alors $p - 1 = m$ et $\varepsilon' = 1$. On se réfère à (3.3.2), remarque 2° (a), ce qui donne

$$\mathrm{Tor}^*_{R(\mathrm{Spin}(2n))}(R(\mathrm{Spin}(2n-1)), \mathbf{Z}) = \Lambda_{\mathbf{Z}}[\Delta_+ - \Delta_-]$$

(le cas $\varepsilon' = 0$ n'est pas un cas particulier).

De (1.4), on déduit alors :

THÉORÈME. — *En tant qu'algèbres* $\mathbf{Z}_2$*-graduées, on a dans le cas général :*

$$K^*(\mathrm{Spin}(2n + \varepsilon)/\mathrm{Spin}(2m + \varepsilon'))$$
$$= A^*(2n + \varepsilon, 2m + \varepsilon') \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda_{\mathbf{Z}}[u_{m+1}, \ldots, u_{n-1}],$$

et dans deux cas particuliers :

$$K^* (\text{Spin}\,(2\,n+1)/\text{Spin}\,(2\,n)) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}\,\Delta'_+,$$
$$K^* (\text{Spin}\,(2\,n)/\text{Spin}\,(2\,n-1)) = \Lambda_{\mathbf{Z}}\,[\Delta_+ - \Delta_-].$$

Remarques :

1° On peut donner la formulation suivante du théorème précédent :

$$K^* (\text{Spin}\,(2\,n+\varepsilon)/\text{Spin}\,(2\,m+\varepsilon')) = \Lambda_{A^0}\,[u_{m+1}, \ldots, u_{n-1}, v]/(\Delta' v),$$

avec $A^0 = R\,(\text{Spin}\,(2\,m+\varepsilon')) \underset{R\,(\text{Spin}\,(2\,n+\varepsilon))}{\otimes} \mathbf{Z}$; pour $\varepsilon' = 0$, on a alors $w = \Delta'_+ . v + 2^{m-1}\,v$.

2° Les deux cas particuliers correspondent à la K-théorie de $\mathbf{S}^{2n}$ et $\mathbf{S}^{2n-1}$, respectivement.

3° Soit K_l^* la sous-algèbre de $K^* (\text{Spin}\,(2\,n+\varepsilon)/\text{Spin}\,(2\,m+\varepsilon'))$, engendrée par

$$\begin{array}{lll} 1 \text{ et } v, & u_{m+1}, \ldots, u_{n-1} & \text{pour} \quad \varepsilon' = 1, \\ 1, \Delta'_+ \text{ et } v, & u_{m+1}, \ldots, u_{n-1} & \text{pour} \quad \varepsilon' = 0. \end{array}$$

K_l^* est alors un groupe abélien libre supplémentaire de la sous-algèbre de torsion K_t^* de K^*. De plus, la multiplication par Δ' envoie surjectivement K_l^* sur K_t^*.

4. Interprétation géométrique de la suite spectrale d'Hodgkin

(4.1) **L'application naturelle** α ([2], p. 27-28). — Soit H un sous-groupe fermé d'un groupe compact G; H opérant par translations à droite dans G, $G \to G/H$ est un fibré principal de groupe structural H.

Pour une représentation $\rho : H \to U\,(n)$, soit $\alpha\,(\rho)$ le fibré vectoriel $G \times_\rho \mathbf{C}^n$ sur G/H, obtenu par adjonction à G de la fibre $\mathbf{C}^n$, sur laquelle H opère à gauche par ρ. Il est évident que la classe d'isomorphisme stable de $\alpha\,(\rho)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de ρ dans $R\,(H)$, et que $\rho \mapsto \alpha\,(\rho)$ définit un homomorphisme de $\mathbf{Z}$-algèbres supplémentées $\alpha : R\,(H) \to K^0\,(G/H)$.

Pour une représentation $\sigma : G \to U\,(n)$, l'application

$$(g, z) \mapsto (\bar{g}, \sigma\,(g)\,z)$$

de $G \times \mathbf{C}^n$ dans $(G/H) \times \mathbf{C}^n$ se factorise à travers $G \times_{\varphi(\sigma)} \mathbf{C}^n$ qui est ainsi un fibré trivial sur G/H. De ceci, il résulte facilement que α se factorise à travers $R\,(H) \otimes_{R(G)} \mathbf{Z}$ sous la forme $\alpha = \bar{\alpha}\mu$, avec $\mu : \rho \to \rho \otimes 1$ de $R\,(H)$ dans $R\,(H) \otimes_{R(G)} \mathbf{Z}$ et $\bar{\alpha} : R\,(H) \otimes_{R(G)} \mathbf{Z} \to K^0\,(G/H)$.

Proposition. — *Sous les conditions du théorème* (1.1), $\overline{\alpha}$ *s'identifie au edge-morphisme* $\theta^0 : R(H) \otimes_{R(G)} \mathbf{Z} \to K^0(G/H)$ *de la suite spectrale* $E_r(G/H)$.

Ceci se déduit trivialement du lemme (7.4) de [6], qui assure la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} K_G^0(G/H) \otimes_{R(G)} K_G^0(G) & \xrightarrow{k} & K_G^0(G/H \times G) \\ \big\downarrow \wr & & \big\downarrow \wr \\ R(H) \otimes_{R(G)} \mathbf{Z} & \xrightarrow{\theta^0} & K^0(G/H) \end{array}$$

où k est le produit tensoriel externe et où les isomorphismes verticaux sont bien connus.

Application. — Cette proposition permet de donner une signification géométrique aux générateurs de la $\mathbf{Z}$-algèbre supplémentée $A^0(\varepsilon, \varepsilon')$, obtenue en (3.3).

Par exemple, le générateur $\Delta'_+ \in A^0(\varepsilon, 0) \hookrightarrow K^0(\mathrm{Spin}(2n+\varepsilon)/\mathrm{Spin}(2m))$ est $\alpha(\Delta^+(2m) - 2^{m-1}) = \alpha(\Delta^+(2m)) - 2^{m-1}$. De même, le générateur $\Delta' \in A^0(1, 0)$ est $\alpha(\Delta(2m)) - 2^m$, comme $\varphi(\Delta(2n+1)) = 2^{n-m}\Delta(2m)$, on a $2^{n-m}\alpha(\Delta(2m)) = \alpha(\varphi(\Delta(2n+1))) = 2^n$ (d'après le paragraphe avant la proposition); on a donc $0 = 2^{n-m}[\alpha(\Delta(2m)) - 2^m] = 2^{n-m}\Delta'$, ce qui vérifie bien la 2^{n-m}-torsion de Δ' dans $A^0(1, 0)$. On peut, en fait, vérifier géométriquement (c'est-à-dire avec α) la table de multiplication de $A^0(\varepsilon, 0)$.

(4.2) **L'application naturelle** β ([2], p. 27-28; [3], p. 118-123). — Soient $\sigma, \sigma' : G \to U(n)$ des représentations dont les restrictions à H sont équivalentes par un opérateur d'entrelacement τ. L'application de G dans $U(n)$, $\beta(\sigma', \sigma, \tau) : g \mapsto \sigma'(g)\,\tau\sigma(g^{-1})\,\tau^{-1}$ est invariante par l'action de H dans G, et définit donc une application de G/H dans $U(n) \hookrightarrow U(\infty)$. On montre facilement que la classe d'homotopie (libre) de cette application dans $\mathcal{C}(G/H, U(\infty))$ (*voir* [8], appendice) :

(i) ne dépend pas de l'opérateur d'entrelacement choisi pour la définir [car $U(n)$ est connexe par arc];

(ii) ne dépend que de la différence $\sigma' - \sigma$ dans $R(G)$ [car les applications $g \mapsto \sigma'(g)\,\tau\sigma(g^{-1})\,\tau^{-1}$ et $g \mapsto \sigma'(g) \oplus \tau \oplus \sigma(g^{-1}) \oplus \tau^{-1}$ sont homotopes dans $\mathcal{C}(G/H, U(\infty))$ (*voir* [5], p. 76)).

Il en résulte que β est un homomorphisme de groupes de $\mathrm{Ker}\,\varphi$ dans $[G/H, U(\infty)] = K^{-1}(G/H)$.

D'autre part, de la suite exacte de $R(G)$-modules

$$0 \to I(G) \to R(G) \to \mathbf{Z} \to 0, \tag{6}$$

on déduit, par $R(G)$-tensorisation par $R(H)$, en remarquant que $\operatorname{Tor}_{R(G)}^{-1}(R(H), R(G)) = 0$, la suite exacte

$$(7) \qquad 0 \to \operatorname{Tor}_{R(G)}^{-1}(R(H), \mathbf{Z}) \to R(H) \otimes_{R(G)} I(G) \\ \to R(H) \otimes_{R(G)} R(G) = R(H),$$

dans laquelle la dernière flèche est donnée par $\rho \otimes \sigma \mapsto \rho\varphi(\sigma)$ ($= 0$ si $\sigma \in \operatorname{Ker} \varphi$).

Il en résulte que l'homomorphisme $\sigma \mapsto 1 \otimes \sigma$ de $\operatorname{Ker} \varphi$ dans $R(H) \otimes_{R(G)} I(G)$ est factorisé par un homomorphisme

$$\nu : \quad \operatorname{Ker} \varphi \to \operatorname{Tor}_{R(G)}^{-1}(R(H), \mathbf{Z}).$$

PROPOSITION. — *Sous les conditions du théorème* (1.1), β *s'identifie à* $\theta^{-1}\nu : \operatorname{Ker} \varphi \to K^{-1}(G/H)$, *où* $\theta^{-1} : \operatorname{Tor}_{R(G)}^{-1}(R(H), \mathbf{Z}) \to K^{-1}(G/H)$ *est le quasi-edge-homomorphisme de la suite spectrale* $E_r(G/H)$.

Comme $K_G^{-1}(G) = 0$, la suite exacte de K_G-théorie de la paire (CG, G), où CG est le cône non réduit de G, donne la suite exacte

$$0 \to K_G(CG, G) \to K_G(CG) \to K_G(G) \to 0,$$

qui est la K_G-interprétation de (6), puisque

$$K_G(G) = \mathbf{Z} \qquad \text{et} \qquad K_G(CG) = K_G(pt) = R(G);$$

le « mapping cone » de $G \overset{\subset}{\to} CG$ est la suspension non réduite SG de G et $I(G) = K_G(CG, G) = \tilde{K}_G(SG)$ (SG est connexe).

Par $R(G)$-tensorisation par $K_G(G/H) = R(H)$, on a la K_G-interprétation de (7),

$$0 \to \operatorname{Tor}_{R(G)}^{-1}(K_G(G/H), K_G(G)) \to K_G(G/H) \otimes_{R(G)} K_G(CG, G) \\ \to K_G(G/H) \otimes_{R(G)} K_G(CG) \to K_G(G/H) \otimes_{R(G)} K_G(G) \to 0.$$

D'autre part, CG étant G-contractile en son sommet, est un « basic G-space » ([1], p. 7); donc, le produit tensoriel externe k :

$$K_G^*(G/H) \otimes_{R(G)} K_G^*(CG) \to K_G(G/H \times CG)$$

est un isomorphisme et, comme $K_G^{-1}(G/H) = K_G^{-1}(CG) = 0$, il en résulte que $K_G^{-1}((G/H) \times CG) = 0$. Donc, la suite exacte de K_G-théorie de la paire $((G/H) \times CG, (G/H) \times G)$ donne la suite exacte

$$0 \to K_G^{-1}((G/H) \times G) \to K_G((G/H) \times CG, (G/H) \times G) \\ \to K_G((G/H) \times CG) \to K_G((G/H) \times G).$$

On a alors le diagramme de suites exactes

$$
(8)\qquad
\begin{array}{ccccccc}
0 \to \mathrm{Tor}^{-1}(K_G(G/H), K_G(G)) & \to & K_G(G/H) \otimes_{R(G)} K_G(CG, G) & \to & K_G(G/H) \otimes_{R(G)} K_G(CG) \\
\downarrow{\scriptstyle \theta^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle k} & & \downarrow{\scriptstyle \wr k} \\
0 \longrightarrow K_G^{-1}((G/H)\times G) & \xrightarrow{j} & K_G((G/H)\times CG, (G/H)\times G) & \longrightarrow & K_G((G/H)\times CG),
\end{array}
$$

où k désigne toujours le produit tensoriel externe.

Or, dans la terminologie de ([6], p. 7), $G \overset{\subsetneq}{\to} CG$ est une « basic G-map », c'est-à-dire que $G^+ \to (CG)^+$ est le début d'une résolution de G ([1], p. 11); et la construction de la suite spectrale d'Hodgkin montre que le quasi-edge-homomorphisme θ^{-1} est l'unique homomorphisme fermant commutativement le diagramme (8).

Rappelons que, $\pi : (G/H)\times G \to G/H$ étant le G-fibré principal se déduisant de l'opération diagonale de G dans $(G/H)\times G$, l'identification de $K^*(G/H)$ et $K_G^*((G/H)\times G)$ est donnée par π^*. Donc,

$$j : \quad K_G^{-1}((G/H)\times G) \to K_G((G/H)\times CG, (G/H)\times G)$$

étant un monomorphisme, la proposition sera démontrée si, pour tout $\sigma \in \operatorname{Ker} \varphi$, on a $j\,\pi^*\,\beta(\sigma) = k(1 \otimes \chi(\sigma))$, où χ est l'isomorphisme canonique de $I(G)$ dans $K_G(CG, G)$.

Un élément de $\operatorname{Ker}\varphi$ peut s'écrire sous la forme $\sigma - n$, où σ est une représentation de G dans $U(n)$ telle que $\varphi(\sigma) = n$, $\beta(\sigma - n) \in K^{-1}(G/H)$ est alors représenté par $\bar{g} \mapsto \sigma(\bar{g})$, et $\pi^*(\beta(\sigma - n)$ par le G-automorphisme de G-fibré vectoriel sur $(G/H)\times G$:

$$(\bar{g}, h, z) \mapsto (\bar{g}, h, \sigma(h^{-1}\bar{g})\,z) \quad \text{de } (G/H)\times G \times \mathbf{C}^n$$

(G opérant trivialement sur $\mathbf{C}^n$). Si on note V le G-module $\mathbf{C}^n$ sur lequel G opère par σ, $\pi^*\,\beta(\sigma - n)$ est alors représenté par le G-isomorphisme de G-fibrés vectoriels

$$(G/H)\times\gamma : \ (\bar{g}, h, v) \mapsto (\bar{g}, h, \sigma(h^{-1})\,z) \text{ de } (G/H)\times G\times V \text{ sur } (G/H)\times G\times \mathbf{C}^n.$$

Il en résulte que $j\,\pi^*\,\beta(\sigma - n)$ est représenté par le triplet

$$
\begin{aligned}
d = {} & (G/H)\times CG\times V,\ (G/H)\times CG \times \mathbf{C}^n, \\
& (G/H)\times\gamma : \ (G/H)\times G\times V \to (G/H)\times G\times \mathbf{C}^n.
\end{aligned}
$$

Or, il est facile de voir que $\chi(\sigma - n) \in K(CG, G)$ est donné par le triplet

$$(CG\times V,\ CG\times \mathbf{C}^n,\ \gamma : \ G\times V \to G\times \mathbf{C}^n);$$

donc, $k(1 \otimes \chi(\sigma - n)) = d$.

C. Q. F. D.

Application. — Cette proposition permet de donner une signification géométrique aux éléments $u_{m+1}, \ldots, u_{n-1}, v, w$ dans le cas où G/H est une variété de Stiefel. Nous considérons, par exemple, le cas de Spin $(2n+1)/\mathrm{Spin}(2m)$:

Pour $i = m+1, \ldots, n-1$, u_i s'identifie à $\beta(\pi^i(\rho_{2n+1}))$.

Pour v, on sait que, dans Spin $(2m)$, on a

$$\Delta^2(2m) = \sum_{k=0}^{m} 2^{2(m-k)} \pi^k(\rho_{2m});$$

donc, en posant

$$\sigma = \Delta^2(2n) - \sum_{k=0}^{m} 2^{2(n-k)} \pi^k(\rho_{2n}),$$

on a $\varphi(\sigma) = 0$ et $2^{n-m} v$ s'identifie à $\beta(\sigma)$.

Pour w, on a $w = (\Delta'_+ + 2^{m-1}) v = \alpha(\Delta^+(2m))\,\beta(\sigma)$, la multiplication étant effectuée dans $K^*(\mathrm{Spin}(2n+1)/\mathrm{Spin}(2m))$.

Remarque. — $p : G \to G/H$ étant la projection canonique, du fait de la naturalité de β, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}\,\varphi & \xrightarrow{\subset} & I(G) \\ {\scriptstyle\beta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta_1} \\ K^{-1}(G/H) & \xrightarrow{p^*} & K^{-1}(G) \end{array}$$

D'après [7] (théorème A), β_1 définit un monomorphisme de

$$I(G) \otimes_{R(G)} \mathbf{Z} = I(G)/I^2(G)$$

dans $K^{-1}(G)$, qui est un groupe abélien libre. Il est facile de voir que β se factorise à travers $\mathrm{Ker}\,\varphi \otimes_{R(G)} \mathbf{Z} \approx \mathrm{Tor}^{-1}_{R(G)}(\mathrm{Im}\,\varphi, \mathbf{Z})$; mais

$$\mathrm{Tor}^{-1}_{R(G)}(\mathrm{Im}\,\varphi, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Tor}^{-1}_{R(G)}(R(H), \mathbf{Z}),$$

induit par l'inclusion $\mathrm{Im}\,\varphi \subsetneq R(H)$, n'est en général pas injectif, donc $\bar\beta : \mathrm{Ker}\,\varphi \otimes_{R(G)} \mathbf{Z} \to K^{-1}(G/H)$ n'est pas injectif. D'autre part, dans le cas où G/H est une variété de Stiefel, la restriction de p^* à $K_l^{-1}(G/H)$ est injective. Il serait intéressant de savoir si, dans le cas général, la torsion de $K^{-1}(G/H)$ admet un supplémentaire canonique $K_l^{-1}(G/H)$ comme dans le cas de Spin/Spin, et si la restriction de p^* à $K_I^{-1}(G/H)$ est injective. De même, il serait intéressant de savoir si, dans le cas général,

$$\alpha : \quad R(H) \otimes_{R(G)} \mathbf{Z} \to K^0(G/H)$$

est un monomorphisme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Atiyah (M.). — *K-theory*. — New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1967.

[2] Atiyah (M.) and Hirzebruch (F.). — Vector bundles and homogeneous spaces, *Differential geometry*, p. 7-38. — Providence, American mathematical Society, 1961 (*Proceedings of the Symposia of pure Mathematics*, 3).

[3] Bott (R.). — *Lectures on K (X)*. — New York, Amsterdam, W. A. Benjamin, 1969 (*Mathematics Lecture Note Series*).

[4] Cartan (H.) and Eilenberg (S.). — *Homological algebra*. — Princeton, Princeton University Press, 1956 (*Princeton mathematical Series*, 19).

[5] Gitler (S.) and Kee Yuen Lam. — The K-theory of Stiefel manifolds, *The Steenrod algebra and its applications*, p. 35-66. — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lecture Notes in Mathematics*, 168).

[6] Hodgkin (L.). — *An equivalent formula in K-theory*, Preprint of the University of Warwick.

[7] Hodgkin (L.). — On the K-theory of Lie groups, *Topology*, t. 6, 1967, p. 1-36.

[8] Husemoller (D.). — *Fibre bundles*. — New York, McGraw-Hill Book Company, 1966 (*McGraw-Hill Series in higher Mathematics*).

[9] Lazarov (C.). — Secondary characteristic classes in K-theory, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 136, 1968, p. 391-412.

[10] Smith (L.). — Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 129, 1967, p. 58-93.

(Texte reçu le 7 juillet 1971.)

André Roux,
Département de Mathématiques,
Université Claude Bernard [Lyon-I],
43, boulevard du Onze-Novembre 1918,
69-Villeurbanne.