

BULLETIN DE LA S. M. F.

S. DELACHE

J. LERAY

**Calcul de la solution élémentaire de l'opérateur
d'Euler-Poisson-Darboux et de l'opérateur de
Tricomi-Clairaut, hyperbolique, d'ordre 2**

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 313-336

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__313_0

© Bulletin de la S. M. F., 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**CALCUL DE LA SOLUTION ÉLÉMENTAIRE
DE L'OPÉRATEUR D'EULER-POISSON-DARBOUX
ET DE L'OPÉRATEUR
DE TRICOMI-CLAIRAUT, HYPERBOLIQUE, D'ORDRE 2**

PAR

SOLANGE DELACHE ET JEAN LERAY

[Nice; Paris]

RÉSUMÉ. — Cet article calcule explicitement la solution élémentaire hyperbolique de l'opérateur d'Euler-Darboux-Poisson (incomplètement explicitée par R. DAVIS en 1956) et de l'opérateur de Tricomi-Clairaut d'ordre 2. Les formules obtenues donnent donc des exemples d'allure de solution élémentaire hyperbolique à la frontière du domaine d'hyperbolicité; elles donnent de nouveaux exemples d'opérateurs hyperboliques d'ordre 2 ayant des lacunes (en dimensions paires ≥ 6). Elles emploient une distribution hypergéométrique, définie par l'équation hypergéométrique, et sa composée avec une fonction régulière, positive dans un demi-cône, nulle hors de ce demi-cône; l'étude de ces distributions est un complément au t. 1 du traité *Distributions* de GEL'FAND et ŠILOV. Signalons, par exemple, que la formule de Kummer s'applique à cette distribution hypergéométrique; elle permet de déduire la solution élémentaire de l'opérateur de Tricomi-Clairaut de celle d'Euler-Poisson-Darboux.

Introduction

Ces solutions élémentaires se calculent au moyen de la fonction hypergéométrique (voir théorèmes 2 et 3, n° 6 et 9).

1. Historique.

R. BADER et P. GERMAIN [1] l'ont établi en 1952 pour l'opérateur de Tricomi $x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, qui équivaut à l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{3x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}$, celui-ci est un cas particulier de l'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{j=2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{2\alpha}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}$$

qui fut étudié par A. WEINSTEIN et son école (Maryland); en particulier, R. M. DAVIS [2] a prouvé en 1956 que la solution élémentaire de cet opérateur s'exprime au moyen de la fonction hypergéométrique.

Nous nous proposons d'expliciter et de compléter ce résultat, puis de l'étendre à certains *opérateurs de Tricomi-Clairaut* d'ordre 2.

Nous complétons ainsi l'article de S. DELACHE [3], qui exprime par des intégrales la solution élémentaire de certains opérateurs de Tricomi-Clairaut.

2. Méthode.

Le chapitre II calcule la solution élémentaire d'un opérateur d'Euler-Poisson-Darboux (1.1) en employant *la théorie des distributions*; il n'a pas besoin de la théorie de M. RIESZ des équations du second ordre [6] qu'emploie R. M. DAVIS. Des changements de variables appropriés permettent les prolongements analytiques qui établissent les théorèmes 2 et 3 (chap. II, n° 6; chap. IV, n° 9).

Le chapitre I définit les distributions nécessaires à l'énoncé des théorèmes 2 et 3; les lemmes 4.1, 4.2 et le théorème 1 (n° 5) résument leurs propriétés. Ces distributions ont été définies par GEL'FAND et ŠILOV [4], qui les ont étudiées par le prolongement analytique qui est à la base de la théorie de M. RIESZ [6]. Mais il nous faut modifier les notations, et compléter les résultats de GEL'FAND et ŠILOV.

Le chapitre III précise les particularités se présentant en dimension 2.

CHAPITRE I

Définition de quelques distributions

3. La distribution $\chi_q(\cdot)$.

Elle est définie sur la droite réelle $T = \mathbb{R}$, de coordonnée t ; elle est fonction holomorphe du paramètre $q \in \mathbb{C}$.

Si $\operatorname{Re} q > -1$, c'est la fonction localement sommable ayant pour valeur

$$(3.1) \quad \chi_q(t) = \frac{t^q}{\Gamma(q+1)} \quad \text{si } t > 0; \quad \chi_q(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0;$$

($t^q = e^{q \log t}$, où $\log t$ est réel, si $t > 0$). Elle est holomorphe en q et elle vérifie

$$\chi_q(t) = \frac{d\chi_{q+1}(t)}{dt};$$

elle se prolonge donc analytiquement en une fonction entière de q .

Ses propriétés sont évidemment les suivantes : $\chi_q(\cdot)$ est une *distribution sur T* , fonction entière de $q \in \mathbf{C}$; on a, en employant la *dérivation généralisée de Riemann-Liouville* (cf. [4], ch. 1, § 5) :

$$(3.2) \quad \chi_{q-p}(t) = \frac{d^p \chi_q(t)}{dt^p} \quad \text{pour tout } p \in \mathbf{C};$$

$\chi_q(\cdot)$ est *positivement homogène* de degré q , c'est-à-dire : $\chi_q(ct) = c^q \chi_q(t)$ pour toute constante $c > 0$; on a donc la formule d'Euler

$$(3.3) \quad t \chi_{q-1}(t) = q \chi_q(t).$$

Note. — GEL'FAND et ŠILOV [4] notent

$$\chi_q = \delta^{(-q-1)} \quad \text{si } q \text{ est entier } < 0, \quad \chi_q(t) = \frac{t_+^q}{\Gamma(q+1)} \quad \text{sinon.}$$

4. Distributions composées.

La distribution composée $\chi_q(t(\cdot))$ peut être définie pour divers types de fonctions $t(\cdot)$ (voir [4]); nous aurons besoin de fonctions $t(\cdot)$ du type très spécial que voici

$$t(x) = f(x) k(x) \geq 0$$

est défini sur un voisinage ouvert X de 0 dans \mathbf{R}^l ; $k(\cdot)$ est égale à une forme quadratique hyperbolique [c'est-à-dire de signature $(1, l-1)$] dans l'un des demi-cônes convexes, C , où cette forme est > 0 ; $k = 0$ hors de ce demi-cône C ; $f(\cdot)$ est une fonction > 0 , définie sur X , indéfiniment différentiable. Nous emploierons dans X des coordonnées telles que

$$k(x) = \begin{cases} x_1^2 - \sum_j^* x_j^2 & \text{si } x_1 > \sqrt{\sum_j^* x_j^2} \\ = 0 & \text{si } x_1 \leq \sqrt{\sum_j^* x_j^2}. \end{cases} \quad \left(\sum_j^* = \sum_{j=2}^l \right),$$

Si $\text{Re } q > -1$, la distribution composée $\chi_q(t(\cdot))$ est la fonction localement sommable sur X , ayant pour valeur en x

$$(4.1) \quad \chi_q(t(x)) = \frac{t^q(x)}{\Gamma(q+1)}.$$

Elle est holomorphe en q , pour $\text{Re } q > -1$; elle vérifie

$$(4.2) \quad \chi_q(t(x)) = f^q(x) \chi_q(k(x));$$

or $f^q(x)$ est indéfiniment différentiable en x et holomorphe en q , quel que soit q ; pour étudier le prolongement analytique de $\chi_q(t(\cdot))$, il suffit donc d'étudier celui de $\chi_q(k(\cdot))$. Or, le dalembertien étant noté

$$\square_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_j^* \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

on a, pour $\operatorname{Re}(q) > 0$,

$$(4.3) \quad 2(l+2q)\chi_q(k(x)) = \square_x \chi_{q+1}(k(x));$$

$\chi_q(k(\cdot))$ se prolonge donc analytiquement en une distribution, fonction méromorphe de q , dont les pôles, tous simples, sont les points $q = -\frac{l}{2} - n$ (n : entier ≥ 0),

$$\begin{aligned} \chi_q(k(x)) &= 0 && \text{hors de } \bar{C}, \\ &= \frac{k^q(x)}{\Gamma(q+1)} && \text{dans } C; \end{aligned}$$

donc $\operatorname{Supp}[\chi_q(k(\cdot))] = \partial C$ (bord de C) si q est entier < 0 , $= \bar{C}$ sinon.

On a

$$(4.4) \quad \frac{\partial k}{\partial x} \chi_q(k(x)) = \frac{\partial}{\partial x} \chi_{q+1}(k(x)),$$

la restriction de $\chi_q(k(\cdot))$ à $\dot{X} = X \setminus 0$ est donc une fonction holomorphe de q .

Le résidu de $\chi_q(k(\cdot))$ en son pôle $-\frac{l}{2} - n$ est donc une distribution homogène en x , de degré $-l - n$, de support 0; en particulier, le résidu de $\chi_q(k(\cdot))$ en son pôle $-\frac{l}{2}$ est donc un multiple de la mesure de Dirac δ . Vu (4.3),

$$(4.5) \quad \operatorname{rés}_{-n-l/2}[\chi_q(k(\cdot))] = \frac{1}{(-4)^n n!} \square^n \operatorname{rés}_{-l/2}[\chi_q(k(\cdot))];$$

$$(4.6) \quad \operatorname{rés}_{-l/2}[\chi_q(k(\cdot))] = \frac{1}{4} \square \chi_{1-l/2}(k(\cdot)) = \frac{1}{4} c_l \delta(\cdot),$$

c_l étant une constante que nous allons calculer : l'intérêt de ce calcul est que, vu (4.6), $\frac{1}{c_l} \chi_{1-l/2}(k(\cdot))$ est la solution élémentaire de \square .

Calcul de c_l . — Notons $X' = \mathbf{R}^{l-1}$, δ' la mesure de Dirac sur X' , $x' = (x_1, \dots, x_{l-1})$,

$$k'(x') = x_1^2 - \sum_{j=2}^{l-1} x_j^2, \quad \square' = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{j=2}^{l-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Un calcul élémentaire donne, pour $\text{Re}(q) > -1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \chi_q(k(x)) dx_l = 2 \frac{\Gamma(q + 3/2)}{\Gamma(q + 1)} \chi_{q+1/2}(k'(x')) \int_0^1 (1-t^2)^q dt,$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_q(k(x)) dx_l = \sqrt{\pi} \chi_{q+1/2}(k'(x')),$$

cette formule vaut pour tout q ; en appliquant $\int_{-\infty}^{+\infty} \circ dx_l$ à (4.6), on obtient donc

$$\sqrt{\pi} \square' \chi_{3/2-l/2}(k'(x')) = c_l \delta'(x'),$$

c'est-à-dire

$$c_l = \sqrt{\pi} c_{l-1};$$

or, vu (4.6),

$$c_1 = \frac{1}{\Gamma(3/2)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$$

Donc

$$(4.7) \quad c_l = 2 \pi^{l/2-1}.$$

Nous avons donc prouvé les deux lemmes suivants :

LEMME 4.1. — La distribution composée $\chi_q(t(\cdot))$ est une *distribution sur X, positivement homogène en t, de degré q*; c'est-à-dire :

$$\chi_q(u(\cdot) t(\cdot)) = u^q(\cdot) \chi_q(t(\cdot))$$

pour toute fonction $u(\cdot) > 0$ indéfiniment dérivable; elle est *fonction méromorphe* de q ; ses pôles sont les points $q = -n - \frac{l}{2}$ (n : entier ≥ 0);

ils sont simples; le résidu de $\chi_q(t(\cdot))$, en le pôle $-n - \frac{l}{2}$, est

$$\text{rés}_{-n-l/2} [\chi_q(t(\cdot))] = \frac{1}{2} \pi^{l/2-1} \frac{f^q(0)}{(-4)^n n!} \square^n \delta(\cdot).$$

LEMME 4.2. — La solution élémentaire du dalembertien \square est

$$\frac{1}{2} \pi^{1-l/2} \chi_{1-l/2}(k(\cdot)).$$

Note. — GEL'FAND et ŠILOV [4] prouvent des propriétés beaucoup plus générales de la composition de χ_q et des fonctions; mais elles

n'impliquent pas le lemme 4.1. Ils prouvent le lemme 4.2 quand l est pair.

Plus généralement, soit $\varphi(\cdot)$ une distribution définie sur T , du type

$$(4.7) \quad \varphi(\cdot) = \sum_{q \in Q} c_q \chi_q(\cdot) + \psi(\cdot),$$

où $c_q \in \mathbf{C}$, Q est un ensemble fini de points sur lequel $q + \frac{l}{2}n$ n'est jamais un entier ≤ 0 , et $\psi(\cdot)$ une fonction localement bornée; la donnée de $\varphi(\cdot)$ définit donc sans ambiguïté le second membre de (4.7). Étant donnée $t(\cdot)$, nous pouvons donc définir sur X la distribution composée $\varphi(t(\cdot))$ comme suit :

$$\varphi(t(\cdot)) = \sum_{q \in Q} c_q \chi_q(t(\cdot)) + \psi(t(\cdot)).$$

5. La distribution hypergéométrique $\Phi(A, B, C; r, t)$.

La distribution hypergéométrique $\Phi(A, B, C; r, t)$, qui est du type (4.7), va être définie au moyen de l'opérateur hypergéométrique

$$(5.1) \quad h\left(A, B, C; t, \frac{d}{dt}\right) = t(1-t) \frac{d^2}{dt^2} + [C - (A+B+1)t] \frac{d}{dt} - AB;$$

elle s'exprimera au moyen de la distribution $\chi_q(t)$ et de la fonction hypergéométrique

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} F(A, B, C; t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A \dots (A+n-1) B \dots (B+n-1)}{n! C \dots (C+n-1)} t^n, \\ (|t| < 1). \end{array} \right.$$

Rappelons que F est défini, sauf quand C est un entier ≤ 0 ; F est la fonction, holomorphe et égale à 1 à l'origine, que h annule; h annule aussi

$$(5.3) \quad t^{-c} F(A-C+1, B-C+1, 2-C; t).$$

Rappelons que, pour tout $p \in \mathbf{C}$, on a (en employant la dérivation de Riemann-Liouville) :

$$(5.4) \quad h\left(A, B, C; t, \frac{d}{dt}\right) \frac{d^p}{dt^p} = \frac{d^p}{dt^p} h\left(A-p, B-p, C-p; t, \frac{d}{dt}\right).$$

Rappelons enfin la formule, due à KUMMER : si $s = 4t(1-t)$ et $C = \frac{A+B+1}{2}$, alors

$$(5.5) \quad h\left(A, B, C; t, \frac{d}{dt}\right) = 4h\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, C; s, \frac{d}{ds}\right).$$

Le chapitre II emploiera la solution du problème de Cauchy suivant :

Définir sur \mathbf{R} , au voisinage de $t = 0$, une distribution φ , dépendant du paramètre $r \in \mathbf{C}$, telle que

$$(5.6) \quad h\left(A, B, C; rt, \frac{1}{r} \frac{d}{dt}\right) \varphi(t) = 0, \quad \varphi = 0 \text{ pour } t < 0.$$

THÉORÈME 1. — *Les solutions de ce problème de Cauchy (5.6) sont $\varphi = c\Phi$, c étant une constante, et Φ étant la distribution, indépendante du choix de $p \in \mathbf{C}$, et holomorphe en r :*

$$(5.7) \quad \Phi(A, B, C; r, t) = \frac{d^p}{dt^p} [\chi_{p+1-C}(t) F(1+A-C, 1+B-C, p+2-C; rt)]$$

Φ est définie sur la demi-droite $t < \frac{1}{r}$ si $r > 0$, sur \mathbf{R} sinon.

Note 5.1. — GEL'FAND et ŠILOV [4] [ch. I, § 5, n° 5, formule (20)] donnent un résultat analogue à ce lemme.

Note 5.2. — On peut définir Φ sans employer la fonction hypergéométrique, puisque

$$F(A, B, A, t) = F(B, A, A, t) = (1-t)^{-B};$$

en choisissant $p = A - 1$ ou $p = B - 1$, on a donc

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \Phi(A, B, C; r, t) &= \frac{d^{A-1}}{dt^{A-1}} [\chi_{A-C}(t) (1-rt)^{1+B-C}], \\ &= \frac{d^{B-1}}{dt^{B-1}} [\chi_{B-C}(t) (1-rt)^{1+A-C}]. \end{aligned}$$

Ces formules équivalent à la représentation classique de F par une intégrale.

Note 5.3. — Pour expliciter Φ , il est cependant commode d'employer la fonction hypergéométrique. Si C n'est pas un entier ≥ 2 , on peut choisir $p = 0$; donc

$$(5.9) \quad \Phi(A, B, C; r, t) = \chi_{1-C}(t) F(1+A-C, 1+B-C, 2-C; rt).$$

Si C est un entier ≥ 2 , on peut choisir $p = C - 1$; donc

$$\begin{aligned}
 (5.10) \quad & \Phi(A, B, C; r, t) \\
 &= \frac{d^{C-1}}{dt^{C-1}} \chi_0 [(t) F(1 + A - C, 1 + B - C, 1; rt)] \\
 &= \chi_{1-C}(t) \\
 &+ \sum_{n=1}^{C-2} \left\{ \frac{(1 + A - C) \dots (n + A - C)}{n!} \times \frac{(1 + B - C) \dots (n + B - C)}{n!} \right\} r^n \chi_{1+n-C}(t) \\
 &+ \chi_0(t) \frac{(1 + A - C) \dots (A - 1) (1 + B - C) \dots (B - 1)}{(C - 1)!} \\
 &\quad \times r^{C-1} F(A, B, C; rt).
 \end{aligned}$$

Les formules (5.8), (5.9), (5.10) supposent Φ défini, c'est-à-dire $r \leq 0$ ou $t < \frac{1}{r}$.

Note 5.4. — On a évidemment, vu le développement de Taylor (5.2) de F ,

$$\begin{aligned}
 (5.11) \quad & \Phi(A, B, C; r, t) = \chi_{1-C}(t) \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(1 + A - C) \dots (n + A - C)}{n!} \times \frac{(1 + B - C) \dots (n + B - C)}{n!} \right\} \\
 &\quad \times r^n \chi_{n+1-C}(t)
 \end{aligned}$$

pour $|rt| < 1$.

Preuve du théorème. — L'ensemble des solutions du problème de Cauchy (5.6) est un espace vectoriel; notons-le $V(A, B, C, r)$; les fonctions continûment dérivables appartenant à V constituent un sous-espace $v(A, B, C, r)$ de V .

Si C n'est pas un entier > 1 , notons

$$(5.12) \quad \Phi(A, B, C; r, t) = \chi_{1-C}(t) F(A + 1 - C, B + 1 - C, 2 - C; rt),$$

$\Phi(A, B, C; r, \cdot) \neq 0$; un calcul aisé, employant la formule d'Euler (3.3), montre que $\Phi(A, B, C; r, \cdot) \in V(A, B, C, r)$; donc

$$\dim V \geq 1.$$

Si C n'est pas un entier, les fonctions $\psi(\cdot)$ continûment dérivables telles que

$$h\left(A, B, C; rt, \frac{1}{r} \frac{d}{dt}\right) \psi(t) = 0$$

sont donc, sur l'intervalle $]0, 1[$, du type

$$\psi(t) = c_1 F(A, B, C; rt) + c_2 t^{1-C} F(A+1-C, B+1-C, 2-C; rt),$$

donc

$$\begin{aligned} \dim v(A, B, C, r) &= 0 \quad (\text{c'est-à-dire } v = \emptyset) && \text{si } \operatorname{Re} C \geq 0, \\ \dim v(A, B, C, r) &= 1 && \text{si } \operatorname{Re} C < 0. \end{aligned}$$

Or (5.4) montre que, pour tout $p \in \mathbf{C}$, $\frac{d^p}{dt^p}$ définit un isomorphisme

$$V(A-p, B-p, C-p, r) \rightarrow V(A, B, C, r);$$

évidemment, tout élément de $V(A, B, C, r)$ appartient, pour p entier assez grand, à

$$\frac{d^p}{dt^p} v(A-p, B-p, C-p, r);$$

donc, puisque $\dim v \leq 1$ et $\dim V \geq 1$:

$$\dim V = 1;$$

$V(A, B, C, r)$ est sous-tendu par le vecteur

$$\frac{d^p}{dt^p} \Phi(A-p, B-p, C-p; r, \cdot),$$

quel que soit p tel que $C-p$ ne soit pas un entier > 1 .

On déduit aisément de (5.12) que la partie principale au point $t = 0$ de la fonction $\frac{d^p}{dt^p} \Phi(A-p, B-p, C-p; r, t)$ est indépendante de p ; nous avons donc

$$(5.13) \quad \Phi(A, B, C; r, \cdot) = \frac{d^p}{dt^p} \Phi(A-p, B-p, C-p; r, \cdot)$$

pour tout p tel que $C-p$ ne soit pas un entier > 1 , si C n'est pas un tel entier; sinon nous pouvons définir, par (5.13), Φ , qui sous-tend V ; (5.13) vaut alors sans restriction.

Preuve de (5.10). — Pour toute fonction $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ holomorphe à l'origine, on a

$$\chi_0(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{p-1} c_n \chi_n(t) + \chi_0(t) \sum_{n=p}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!};$$

donc, si p est un entier ≥ 0 , vu (3.2) :

$$\frac{d^p}{dt^p} \left[\chi_0(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} t^n \right] = \sum_{n=0}^{p-1} c_n \chi_{n-p}(t) + \chi_0(t) \frac{d^p}{dt^p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right);$$

d'où (5.10).

LEMME 5.1 (KUMMER). — Si $C = \frac{A+B+C}{2}$, on a, pour tout t si $r < 0$, pour $t < \frac{1}{2r}$ si $r > 0$:

$$(5.14) \quad \Phi(A, B, C; r, t) = 4^{c-1} \Phi\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, C; r, 4t(1-rt)\right);$$

le second membre représente le composé de l'application croissante

$$t \mapsto 4t(1-rt)$$

et de la distribution $\Phi\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, C; r, \cdot\right)$.

Preuve. — Vu (5.5), on a

$$h\left(A, B, C; rt, \frac{1}{r} \frac{d}{dt}\right) = h\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, C; rs, \frac{1}{r} \frac{d}{ds}\right)$$

si $C = \frac{A+B+1}{2}$ et $s = 4t(1-rt)$; donc

$$\Phi\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, C; r, 4t(1-rt)\right) \in V(A, B, C, r);$$

d'où (5.14), la valeur 4^{c-1} du coefficient résultant de l'allure des deux membres au voisinage de $t = 0$.

L'homogénéité de χ et (5.7) ont pour conséquence évidente le lemme suivant :

LEMME 5.2. — On a, si $u > 0$:

$$\Phi(A, B, C; r, ut) = u^{1-c} \Phi(A, B, C; ru, t).$$

Note 5.5. — Soit $r(\cdot)$ une fonction numérique complexe de $x \in X \subset \mathbf{R}^l$; soit $t(\cdot)$ la fonction de x que définit le n° 4; supposons ceci :

$$r(x) t(x) < 1 \quad \text{pour } x \in X;$$

$$\frac{l}{2} - C \quad \text{n'est pas entier } < 0;$$

alors la distribution $\Phi(A, B, C; r(\cdot), t(\cdot))$ est évidemment définie sur X ; c'est une fonction holomorphe de A, B, C et des paramètres dont r est fonction holomorphe; (5.14) reste valable quand on compose chaque membre avec $(r(\cdot), t(\cdot))$: c'est évident quand (5.14) est une fonction de t , c'est-à-dire quand $\operatorname{Re} C > -2$; or chacun de ces membres est une fonction méromorphe de C .

CHAPITRE II

L'opérateur d'Euler-Poisson-Darboux

6. L'expression de sa solution élémentaire.

Notons X l'espace affine de dimension l , de coordonnées (x_1, \dots, x_l) soit Ξ le dual de l'espace \mathbf{R}^l des vecteurs de X ; soient (ξ_1, \dots, ξ_l) les coordonnées de Ξ , telles que la valeur de $\xi \in \Xi$ en $x \in X$ soit

$$\langle \xi, x \rangle = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_l x_l.$$

Nous étudierons l'opérateur, un peu plus général que l'opérateur (1.1),

$$(6.1) \quad a_\alpha \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = Q \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{2\alpha}{L(x)} Q \left(L_x, \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

où $Q(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \xi_i \xi_j$ ($Q_{ij} = Q_{ji}$) est une forme quadratique réelle sur Ξ , hyperbolique de signature $(1, l-1)$;

$$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \xi_i \eta_j \quad \text{est sa forme polaire;}$$

L est une fonction affine ⁽¹⁾ sur X ; $L_x = \frac{\partial L(x)}{\partial x}$;

$\alpha \in \mathbf{C}$ est un paramètre.

Notations. — Sur l'espace \mathbf{R}^l des vecteurs de X , définissons la forme quadratique $q(\cdot)$ en éliminant ξ des équations

$$(6.2) \quad \langle \xi, x \rangle = q(x), \quad \frac{\partial Q(\xi)}{\partial \xi} = x;$$

⁽¹⁾ Linéaire, homogène ou non, à valeurs complexes.

$q(x)$ est donc définie par l'équation

$$(6.3) \quad \begin{vmatrix} q(x) & x_i & \\ x_j & Q_{ij} & \\ & & \end{vmatrix} = 0$$

et a même signature que Q . Le cône caractéristique de sommet x' a pour équation

$$q(x - x') = 0.$$

Nous notons $k(\cdot)$ la fonction égale à $q(\cdot)$ dans l'un des deux demi-cônes convexes $q(\cdot) \geq 0$ et nulle ailleurs. Notons enfin

$$(6.4) \quad H = (-1)^{l-1} \text{Hess}_x(Q) = (-1)^{l-1} \det(Q_{ij}) > 0.$$

Ce chapitre II va prouver ceci :

THÉORÈME 2. — Soit E_α la solution élémentaire de a_α dont le support appartient à ce demi-cône

$$(6.5) \quad E_\alpha(x, x') = \pi^{1-l/2} H^{-1/2} [L(x')/L(x)]^\alpha \Phi,$$

où

$$\Phi = \Phi\left(\frac{l}{2} - \alpha, \frac{l}{2} - 1 + \alpha, \frac{l}{2}; -\frac{1}{2} \frac{Q(L_x)}{L(x)L(x')}, k(x - x')\right)$$

est la distribution composée définie par la note 5.5.

Bien entendu $[L(x)/L(x')]^\alpha = 1$ pour $x = x'$.

Note 6.1. — Le support singulier de $E_\alpha(x, x')$ appartient donc à la réunion des hypersurfaces suivantes :

le cône $q(x - x') = 0$;

les deux hyperplans $L(x)L(x') = 0$;

le cône, coupant le précédent sur ces hyperplans :

$$(6.6) \quad Q(L_x)q(x - x') + 2L(x)L(x') = 0.$$

Si L est réel et $Q(L_x) > 0$, ce cône (6.6) n'appartient pas au support singulier du prolongement analytique réel de $E_\alpha(\cdot, \cdot)$.

Note 6.2. — Vu (5.9) et (5.10), nous avons dans (6.5), en notant

$$t = k(x - x'), \quad r = -Q(L_x)/2L(x)L(x'),$$

$$\begin{aligned}
 (6.7) \quad \Phi &= \chi_{1-l/2}(t) F\left(\alpha, 1-\alpha, 2-\frac{l}{2}; rt\right) && \text{si } l \text{ est impair;} \\
 &= \chi_0(t) F(\alpha, 1-\alpha, 1; rt) && \text{si } l = 2; \\
 &= \delta(t) + \chi_0(t) \alpha(1-\alpha) r F(1+\alpha, 2-\alpha, 2; rt) && \text{si } l = 4; \\
 &= \chi_{1-l/2}(t) + \sum_{n=1}^{l/2-2} (-1)^n \frac{(\alpha-n)\dots(\alpha+n-1)}{n!} \\
 &\quad \times r^n \chi_{n+1-l/2}(t) + \chi_0(t) (-1)^{l/2-1} \\
 &\quad \times \frac{(\alpha+1-l/2)\dots(\alpha-2+l/2)}{(l/2-1)!} r^{l/2-1} \\
 &\quad \times F\left(\frac{l}{2}-\alpha, \frac{l}{2}+\alpha-1, \frac{l}{2}; rt\right) && \text{si } l \text{ est pair } \geq 6.
 \end{aligned}$$

Note 6.3. — Vu (6.6), les cas où l'opérateur a_α a une lacune, c'est-à-dire où $E_\alpha(x, x') = 0$ hors du cône caractéristique, sont les suivants :

- 1° l est pair et α est un entier tel que $2 - \frac{l}{2} \leq \alpha \leq \frac{l}{2} - 1$;
- 2° l est pair > 2 et $Q(L_x) = 0$.

Note 6.4. — Deux opérateurs $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ et $b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ sont équivalents quand il existe une application $x \mapsto y(x)$ et deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ telles que $b\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ soit le transformé de

$$f(x) a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)[g(x).] \quad \text{par } x \mapsto y(x).$$

Supposons a et b hyperboliques; on vérifie aisément que cette équivalence équivaut à la propriété suivante de leurs solutions élémentaires hyperboliques $E(x, x')$ et $F(y, y') : x \mapsto y(x)$ transforme

$$\frac{1}{g(x)f(x')} E(x, x') dx'_1 \wedge \dots \wedge dx'_l \quad \text{en } F(y, y') dy'_1 \wedge \dots \wedge dy'_l.$$

Vu (6.5), (6.6) et le lemme 4.1 (homogénéité de χ_σ), les cas, où

$a_\alpha\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ équivaut au dalembertien $\frac{\partial^2}{\partial y_1^2} - \sum_{j=2}^l \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}$, sont donc les trois cas suivants :

$$\alpha = 0; \quad \alpha = 1; \quad Q(L_x) = 0.$$

La note 6.3 donne donc de nouveaux exemples d'opérateurs d'ordre 2 non équivalents au dalembertien et ayant une lacune : a_α pour l pair ≥ 6 et α entier tel que $2 - \frac{l}{2} \leq \alpha \leq -1$ ou $2 \leq \alpha \leq \frac{l}{2} - 1$.

Rappelons que N. H. IBRAGIMOV et E. V. MARMONTOV [5] ont récemment trouvé de tels opérateurs en dimension $l = 4$.

7. Calcul de E_α dans un cas particulier.

Pour prouver le théorème 2, étudions d'abord le cas particulier suivant :

$$(7.1) \quad a_\alpha \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \square_x + \frac{\alpha}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \text{où } x_1 > 0;$$

choisissons

$$(7.2) \quad Q(\xi) = \frac{1}{2} \left(\xi_1^2 - \sum_j^* \xi_j^2 \right), \quad L(x) = x_1;$$

nous avons

$$(7.3) \quad q(x) = x_1^2 - \sum_j^* x_j^2.$$

a_α est invariant par le groupe qui laisse x_1 invariant et qui transforme (x_2, \dots, x_l) par déplacement euclidien; a_α est homogène en x de degré -2 . Donc $E_\alpha(x, x')$ doit être la composée de l'application

$$(x, x') \mapsto (x_1^2, x_1'^2, q(x - x'))$$

et d'une distribution homogène de degré $1 - \frac{l}{2}$, en les points où

$$x_1 x_1' dx_1 \wedge dx_1' \wedge dq(x - x') \neq 0,$$

c'est-à-dire où $x_1 \neq 0$, $x_1' \neq 0$, $\sum_j^* (x_j - x_j')^2 \neq 0$.

Nous allons constater, plus précisément, que E_α est une somme de monômes :

$$x_1^{-\alpha-n} x_1'^{\alpha-n} \chi_{n+1-l/2}(k(x - x')).$$

Appliquons a_α à ces monômes : on a

$$\begin{aligned} a_\alpha \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) [x_1^{-\alpha} x_1'^{\alpha} \chi_{l-l/2}(k(x - x'))] \\ = \frac{1}{2} x_1^{-\alpha} x_1'^{\alpha} \square \chi_{l-l/2} + \frac{1}{2} \alpha (1 - \alpha) x_1^{-\alpha-2} x_1'^{\alpha} \chi_{l-l/2} \end{aligned}$$

donc, vu le lemme 4.2,

$$\begin{aligned} a_\alpha \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) [x_1^{-\alpha} x_1'^\alpha \chi_{1-l/2} (k(x-x'))] \\ = \pi^{l/2-1} \delta(x-x') + \frac{1}{2} \alpha (1-\alpha) x_1^{-\alpha-2} x_1'^\alpha \chi_{1-l/2}; \end{aligned}$$

on a de même, vu (4.3) et (4.4), si n n'est pas entier ≤ 0 :

$$\begin{aligned} a_\alpha \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) [x_1^{-\alpha-n} x_1'^{\alpha-n} \chi_{n+1-l/2}] \\ = \frac{1}{2} (n+\alpha) (n+1-\alpha) x_1^{-\alpha-n-2} x_1'^{\alpha-n} \chi_{n+1-l/2} \\ + 2n x_1^{-\alpha-n-1} x_1'^{\alpha-n+1} \chi_{n-l/2}. \end{aligned}$$

Les deux formules précédentes prouvent que

$$E_\alpha(x, x') = \pi^{1-l/2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_1^{-\alpha-n} x_1'^{\alpha-n} \chi_{n+1-l/2} (k(x-x'))$$

si $c_0 = 1, \frac{1}{2}(n-1+\alpha)(n-\alpha)c_{n-1} + 2nc_n = 0$ ($n = 1, 2, \dots$),
c'est-à-dire si

$$c_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{\alpha \dots (n-1+\alpha)(1-\alpha) \dots (n-\alpha)}{n!}.$$

D'où, vu (5.11) :

LEMME 7.1. — La solution élémentaire de l'opérateur (7.1) est

$$(7.4) \quad E_\alpha(x, x') = \pi^{1-l/2} (x'_1/x_1)^\alpha \Phi,$$

où $\Phi = \Phi\left(\frac{l}{2} - \alpha, \frac{l}{2} + \alpha - 1, \frac{l}{2}; -\frac{1}{4x_1x'_1}, k(x-x')\right)$.

Note. — Vu (7.2), le théorème 2 s'applique donc à l'opérateur (7.1).
Évidemment :

LEMME 7.2. — Le support singulier de E_α appartient à la réunion des deux hyperplans $x_1 = 0, x'_1 = 0$ et des deux cônes

$$(x_1 \pm x'_1)^2 = \sum_j^* (x_j - x'_j)^2.$$

Le premier de ces cônes n'appartient évidemment pas au support singulier du prolongement analytique réel de E_α .

8. Preuve du théorème 2.

$E_\alpha(x, x') dx'_1 \wedge \dots \wedge dx'_l$ et $H^{-1/2} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_l$ sont indépendants du choix des coordonnées affines de X ; donc $H^{1/2} E_\alpha(x, x')$ est indépendant de ce choix.

Supposons L réel et l'hyperplan $L(x) = 0$ spatial pour l'opérateur $Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, c'est-à-dire

$$(8.1) \quad Q(L_x) > 0;$$

choisissons alors des coordonnées telles que

$$Q(\xi) = \frac{1}{2} \left(\xi_1^2 - \sum_j^* \xi_j^2 \right), \quad L(x) = cx_1, \quad x_1 > 0.$$

On a

$$q(x) = x_1^2 - \sum_j^* x_j^2, \quad H = 1;$$

a_α a l'expression (7.1); donc, vu le lemme 7.1,

$$H^{1/2} E_\alpha(x, x') = \pi^{1-l/2} [L(x')/L(x)]^\alpha \Phi,$$

$$\text{où } \Phi = \Phi\left(\frac{l}{2} - \alpha, \frac{l}{2} + \alpha - 1, \frac{l}{2}; -\frac{c^2}{4L(x)L(x')}, k(x-x')\right).$$

Il suffit de noter que $\frac{1}{2} c^2 = Q(L_x)$ pour obtenir (6.5).

La relation (6.5) est donc vraie sous l'hypothèse : L est réel et vérifie (8.1); mais les deux membres de (6.5) sont *holomorphes* en L si $L \neq 0$; donc (6.5) vaut sans cette hypothèse.

Le lemme 7.2 prouve la note 6.1.

CHAPITRE III

L'opérateur de Tricomi-Clairaut

Un changement de variables, la formule de Kummer et un prolongement analytique permettent de déduire du théorème 2 le théorème 3, énoncé ci-dessous; il donne, pour le second ordre, la solution élémentaire des équations de Tricomi-Clairaut qu'a étudiées M^{me} S. DELACHE en tout ordre.

9. L'expression de la solution élémentaire de l'opérateur de Tricomi-Clairaut.

Notons $Y = \mathbf{R}^l$; Ξ son dual. Nous étudierons l'opérateur de Tricomi-Clairaut

$$(9.1) \quad b_\beta \left(y, \frac{\partial}{\partial y} \right) = Q \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(\sum_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \beta \right) L \frac{\partial}{\partial y},$$

où :

$$y \in Y;$$

$$Q(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \xi_i \xi_j \text{ est une forme quadratique réelle sur } \Xi,$$

hyperbolique, de signature $(1, l - 1)$;

$$L(\xi) = \langle L, \xi \rangle \text{ est une forme linéaire réelle sur } \Xi;$$

β est un paramètre appartenant à \mathbf{C} .

Notations. — Notons

$$H = (-1)^{l-1} \text{Hess}(Q) = (-1)^{l-1} \det(Q_{ij}) > 0.$$

Sur Y , définissons la forme quadratique $q(\cdot)$ en éliminant ξ des équations

$$(9.2) \quad \langle \xi, y \rangle = q(y), \quad \frac{\partial Q(\xi)}{\partial \xi} = y;$$

$q(y)$ est donc défini par l'équation

$$(9.3) \quad \left| \begin{array}{c|c} q(y) & y_i \\ \hline y_j & Q_{ij} \end{array} \right| = 0;$$

$q(\cdot)$ est hyperbolique de signature $(1, l - 1)$; notons $q(\cdot, \cdot)$ sa forme polaire. Nous verrons que

$$(9.4) \quad \text{Hess}_\xi \left[Q(\xi) + L(\xi) \sum_j y_j \xi_j \right] = \text{Hess}_\xi(Q) f(L, y),$$

où

$$(9.5) \quad f(L, y) = [q(L, y) + 1]^2 - q(L) q(y);$$

si $q(L) \neq 0$, l'hypersurface $f(L, y) = 0$ est un paraboloïde de direction asymptotique L ; il décompose donc Y en deux domaines; b_β est hyperbolique à l'origine, donc dans tout l'ouvert où

$$f(L, y) > 0 \text{ [même si } q(L) = 0].$$

(Ce paraboloïde est une caractéristique singulière : tous ses hyperplans sont caractéristiques; ils constituent une intégrale complète de l'équation caractéristique, qui est du type de Clairaut.)

Nous aurons à employer la fonction $f(L, y, y')$, symétrique en (y, y') , affine en y et en y' , telle que

$$f(L, y, y) = f(L, y);$$

de (9.5) résulte immédiatement que

$$f^2(L, y, y') - f(L, y) f(L, y') \text{ s'annule avec } q(L);$$

ce sera essentiel lors du plongement analytique que nous effectuerons. Plus précisément, on a

$$(9.6) \quad f^2(L, y, y') - f(L, y) f(L, y') = q(L) k_0(L, y, y'),$$

où

$$(9.7) \quad k_0(L, y, y') = - \begin{vmatrix} q(L) & q(L, y) + 1 & q(L, y') + 1 \\ q(L, y) + 1 & q(y) & q(y, y') \\ q(L, y') + 1 & q(y, y') & q(y') \end{vmatrix},$$

car, pour tout $(A, B, C, X, Y, Z) \in \mathbf{C}^6$:

$$X \begin{vmatrix} X & C & B \\ C & Y & A \\ B & A & Z \end{vmatrix} = (XY - C^2)(XZ - B^2) - (AX - BC)^2.$$

Nous verrons que l'équation du cône caractéristique de sommet y' est

$$(9.8) \quad k_0(L, y, y') = 0.$$

[Ce cône est évidemment circonscrit au paraboloïde $f(L, y) = 0$, le long de son intersection par le plan $f(L, y, y') = 0$, si $q(L) \neq 0$; si $q(L) = 0$, ce cône caractéristique contient la quadrique d'équations

$$q(L, y) + 1 = q(y) = 0$$

dont les hyperplans tangents sont caractéristiques.] Si y' est fixe et appartient au domaine d'hyperbolicité $f(L, y') > 0$, alors $k_0(L, y, y') \geq 0$ quand y appartient à la réunion de deux demi-cônes convexes opposés, car $k_0(L, y, 0) = q(y)$, de signature $(1, l-1)$; nous choisissons l'un de ces demi-cônes, variant continûment avec y' , et nous définissons

$$(9.9) \quad \begin{array}{ll} k(L, y, y') = k_0(L, y, y') & \text{dans ce demi-cône,} \\ = 0 & \text{hors de ce demi-cône.} \end{array}$$

Ce chapitre III va prouver ceci :

THÉORÈME 3. — Soit \mathcal{E}_β la solution élémentaire de b_β dont le support appartient à ce demi-cône

$$(9.10) \quad \mathcal{E}_\beta(y, y') = \pi^{1-l/2} H^{-1/2} f(L, y)^{(1-\beta)/2} f(L, y')^{(\beta-l)/2} \Phi,$$

$$\text{où } \Phi = \Phi\left(\frac{\beta-1}{2}, \frac{l-\beta}{2}, \frac{l}{2}; -q(L), \frac{k(L, y, y')}{f(L, y)f(L, y')}\right).$$

Note 9.1. — Le support singulier de $\mathcal{E}_\beta(\cdot, \cdot)$ appartient donc à la réunion des hypersurfaces suivantes :

- le cône $k(L, y, y') = 0$;
- le parabolôïde $f(L, y) = 0$;
- le parabolôïde $f(L, y') = 0$.

Preuve de la note 9.1. — Si

$$(9.11) \quad C = A + B + \frac{1}{2},$$

alors la composée des fonctions

$$t = 1 - \frac{f^2(L, y, y')}{f(L, y)f(L, y')} \text{ de } (y, y') \quad \text{et} \quad F(A, B, C; t) \text{ de } t$$

est une fonction de (y, y') holomorphe pour

$$(9.12) \quad f^2(L, y, y') \neq f(L, y)f(L, y') \neq 0,$$

car si $t \neq 0$ et si (9.11) a lieu, F est une fonction holomorphe et multiforme de $\sqrt{1-t}$. Vu (5.9) et (5.10), $\Phi(A, B, C; r, t)$ est donc une fonction holomorphe de (y, y') quand (9.12) est vérifié.

Note 9.2. — L'opérateur b_β a une lacune dans les cas suivants :

- 1° l est pair, β est un entier tel que $2 \leq \beta \leq l-1$;
- 2° l est pair > 2 et $q(L) = 0$.

Note 9.3. — Les cas où l'opérateur b_β équivaut au dalembertien sont les trois cas :

$$\beta = \frac{l}{2}, \quad \beta = \frac{l}{2} + 1, \quad q(L) = 0.$$

10. Calcul de \mathcal{E}_β dans un cas particulier.

Étudions le cas particulier suivant :

$$(10.1) \quad b_\beta \left(y, \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{c}{2} \square_y + c \left(\sum_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \beta \right) \frac{\partial}{\partial y_1}, \quad \text{où } c > 0.$$

Pour cela il suffit (P. GERMAIN) d'utiliser dans X les coordonnées (y_1, \dots, y_l) définies par

$$(10.2) \quad y_1 = \frac{1}{2} \left(x_1^2 - \sum_j^* x_j^2 - 1 \right), \quad x_j = y_j \quad (j \neq 1);$$

on obtient, en définissant a_α par (7.1), et en posant $\beta = \alpha + \frac{l}{2}$

$$b_\beta \left(y, \frac{\partial}{\partial y} \right) = c a_\alpha \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right),$$

donc

$$\mathcal{E}_\beta (y, y') dy'_1 \wedge \dots \wedge dy'_l = c^{-1} E_\alpha (x, x') dx'_1 \wedge \dots \wedge dx'_l,$$

c'est-à-dire, vu le lemme 7.1, si $x_1 > 0$ et $x'_1 > 0$:

$$(10.3) \quad \mathcal{E}_\beta (y, y') = \pi^{1-l/2} c^{-1} x_1^{\beta-l/2} x'_1{}^{\beta-1-l/2} \Phi,$$

où

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi \left(\beta - 1, l - \beta, \frac{l}{2}; -\frac{1}{4 x_1 x'_1}, \varkappa (x - x') \right), \\ \varkappa (x - x') &= (x_1 - x'_1)^2 - \sum_j^* (x_j - x'_j)^2 \end{aligned}$$

dans un des demi-cônes où le second membre est > 0 , $\varkappa = 0$ hors de ce demi-cône.

Or les définitions (9.3) et (9.5) donnent :

$$q(y) = \frac{1}{c} \left(y_1^2 - \sum_j^* y_j^2 \right), \quad q(L, y) = y_1, \quad q(L) = c,$$

$$f(L, y) = 1 + 2 y_1 + \sum_j^* y_j^2, \quad f(L, y, y') = 1 + y_1 + y'_1 + \sum_j^* y_j y'_j;$$

la vérification de (9.4) est aisée. L'équation caractéristique de b_β est une équation de Clairaut, admettant pour intégrale complète l'hyper-

plan de Y d'équation

$$Q(\xi) + L(\xi) \sum_j \xi_j y_j = 0$$

qui, vu (9.4), enveloppe le paraboloidé d'équation

$$f(L, y) = 0.$$

Le cône caractéristique de sommet y' est le cône circonscrit à ce paraboloidé; son équation est

$$f^2(L, y, y') = f(L, y) f(L, y'), \quad \text{c'est-à-dire } k_0(L, y, y') = 0.$$

b_β est hyperbolique dans le domaine $f(L, y) > 0$, où nous l'étudions.

Vu (10.2), $x_1 = \sqrt{f(L, y)}$, $x'_1 = \sqrt{f(L, y')}$,

$$(10.4) \quad x(x - x') = 2f(L, y, y') - 2\sqrt{f(L, y)f(L, y')} \quad \text{si } x > 0, \\ = 0 \quad \text{sinon.}$$

La formule (10.3) s'écrit donc, vu le lemme 5.2,

$$(10.5) \quad \mathcal{E}_\beta(y, y') = \pi^{1-l/2} c^{-1} f^{(1-\beta)/2}(L, y) f^{(\beta-l)/2}(L, y') \Phi,$$

où

$$\Phi = \Phi\left(\beta - 1, l - \beta, \frac{l}{2}; -\frac{1}{4}, \frac{x(x - x')}{\sqrt{f(L, y)f(L, y')}}\right),$$

c'est-à-dire, vu le lemme 5 (KUMMER),

$$\Phi = 4^{l/2-1} \Phi\left(\frac{\beta-1}{2}, \frac{l-\beta}{2}, \frac{l}{2}; -\frac{1}{4}, \frac{4x[\sqrt{f(L, y)f(L, y')} + x/4]}{f(L, y)f(L, y')}\right);$$

or on a, vu (10.4),

$$4x[\sqrt{f(L, y)f(L, y')} + x/4] = 4[f^2(L, y, y') - f(L, y)f(L, y')]$$

si $x > 0$; = 0 sinon. Donc, vu (9.6), où $q(L) = c$, et (9.8),

$$4x[\sqrt{f(L, y)f(L, y')} + x/4] = 4ck(L, y, y'),$$

l'expression précédente de Φ s'écrit donc :

$$\Phi = 4^{l/2-1} \Phi\left(\frac{\beta-1}{2}, \frac{l-\beta}{2}, \frac{l}{2}; -\frac{1}{4}, 4c \frac{k(L, y, y')}{f(L, y)f(L, y')}\right),$$

c'est-à-dire, vu le lemme 5.2,

$$\Phi = c^{1-l/2} \Phi \left(\frac{\beta-1}{2}, \frac{l-\beta}{2}, \frac{l}{2}; -c, \frac{k(L, y, y')}{f(L, y) f(L, y')} \right).$$

Or $c = q(L)$, $H = c'$; vu (10.5), nous avons donc :

$$H^{1/2} \mathcal{E}_\beta(y, y') = \pi^{1-l/2} f^{(1-\beta)/2}(L, y) f^{(\beta-l)/2}(L, y') \Phi,$$

où

$$\Phi = \Phi \left(\frac{\beta-1}{2}, \frac{l-\beta}{2}, \frac{l}{2}; -q(L), \frac{k(L, y, y')}{f(L, y) f(L, y')} \right).$$

Nous avons donc prouvé que le n° 9 et le théorème 3 s'appliquent à l'opérateur (10.1).

11. Preuve du théorème 3.

$H^{1/2} \mathcal{E}_\beta(y, y')$ est indépendant du choix des coordonnées (*cf.* n° 8). Or si $q(L) > 0$ nous pouvons choisir des coordonnées telles que b_β ait l'expression (10.1). Vu le n° 10, la formule (9.4), l'équation (2.8) du cône caractéristique et le théorème 3 valent donc pour $q(L) > 0$. Un prolongement analytique montre qu'ils valent quel que soit L .

CHAPITRE IV

Le cas particulier de la dimension 2

12. Deux particularités.

Deux particularités se présentent quand $l = 2$:

— L'équation, quand elle est hyperbolique a quatre solutions élémentaires à supports contenus dans des angles : on les obtient en appliquant le théorème 2 à a_α et $-a_\alpha$, le théorème 3 à b_β et $-b_\beta$.

— La distribution Φ , qu'emploient les théorèmes 2 et 3, est une fonction, dont (5.9) donne l'expression.

On obtient ainsi les théorèmes suivants.

13. Opérateur d'Euler-Poisson-Darboux.

Employons les notations du n° 6, en prenant $l = 2$:

THÉORÈME 2 bis. — Soit E_α la solution élémentaire de a_α dont le support appartient à l'un des quatre angles fermés, sur les bords desquels $q(x - x') = 0$;

$$(13.1) \quad E_\alpha(x, x') = (\text{sgn } q) H^{-1/2} [L(x)/L(x')]^\alpha F,$$

où $\text{sgn } q$ est le signe de q et

$$F = F\left(1 - \alpha, \alpha, 1; -\frac{Q(L_x)}{2L(x)L(x')} q(x - x')\right);$$

(13.1) vaut sur la composante connexe, contenant $x = x'$, de la partie de cet angle où

$$(13.2) \quad L(x)L(x') > 0, \quad -Q(L_x)q(x - x') < 2L(x)L(x').$$

14. Opérateur de Tricomi-Clairaut.

Employons les notations du n° 9, en faisant $l = 2$.

THÉORÈME 3 bis. — Supposons y et y' dans le domaine d'hyperbolicité

$$f(L, y) > 0, \quad f(L, y') > 0.$$

Soit \mathcal{E}_β la solution élémentaire de b_β dont le support appartient à l'un des quatre demi-cônes fermés sur le bord desquels

$$f(L, y)f(L, y') = f^2(L, y, y'),$$

$$(14.1) \quad \mathcal{E}_\beta(y, y') = \pm H^{-1/2} [f(L, y)]^{(1-\beta)/2} [f(L, y')]^{(\beta/2)-1} F,$$

où $\pm = \text{sgn } q(L) [f^2(L, y, y') - f(L, y)f(L, y')]$,

$$F = F\left(\frac{\beta - 1}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}, 1; 1 - \frac{f^2(L, y, y')}{f(L, y)f(L, y')}\right);$$

(14.1) vaut sur la composante connexe, contenant $y = y'$, de la partie de ce demi-cône, où

$$(14.2) \quad f(L, y) > 0, \quad f(L, y') > 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BADER (R.) et GERMAIN (P.). — *Sur quelques problèmes relatifs à l'équation du type mixte de Tricomi*, ONERA, Publication n° 54, 1952.
- [2] DAVIS (Ruth M.). — On a regular Cauchy problem for the Euler-Poisson-Darboux equation, *Annali di Mat. pura ed appl.*, t. 42, 1956, p. 205-226.
- [3] DELACHE (S.). — Calcul des solutions élémentaires des opérateurs de Tricomi-Clairaut auto-adjoints, strictement hyperboliques, *Bull. Soc. math. France*, t. 97, 1969, p. 5-79.
- [4] GEL'FAND (I. M.) et ŠILOV (G. E.). — Les distributions, t. 1. Traduit par G. Rideau. — Paris, Dunod, 1962 (Collection universitaire de Mathématiques, 8).
- [5] IBRAGIMOV (N. H.) et MARMONTOV (E. V.). — Sur le problème de J. Hadamard relatif à la diffusion des ondes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, 1970, série A, p. 456-458.
- [6] RIESZ (M.). — L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, *Acta Mathematica*, t. 81, 1948, p. 1-223.

(Texte reçu le 26 mai 1971.)

Solange DELACHE,
42, avenue Jean-de-La-Fontaine,
06-Nice;

Jean LERAY,
Collège de France,
Place Marcelin-Berthelot,
75-Paris 05.
