BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-JACQUES RISLER

Sur l'idéal jacobien d'une courbe plane

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 305-311
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__305_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 305 à 311.

SUR L'IDÉAL JACOBIEN D'UNE COURBE PLANE

PAR

JEAN-JACQUES RISLER

RÉSUMÉ. — Soit f une courbe algébroïde plane sur un corps de caractéristique 0. On démontre algébriquement un formule (prouvée par MILNOR par voie transcendante). qui relie la multiplicité de l'idéal jacobien à l'ordre du conducteur et au nombre de branches de la courbe f. On montre ensuite, comme application, que deux courbes qui ont même idéal jacobien sont équivalente, au sens de Zariski.

Dans tout ce travail, k sera un corps de caractéristique 0, et nous désignerons par le mot « courbe » (ou courbe algébroïde plane) une équation $f \in k[[X, Y]]$ sans facteurs multiples.

Nous noterons $J(f)$ l'idéal engendré par les dérivées partielles f'_x et f'_y.

LEMME 1. — L'anneau $k[[X, Y]]/J(f) = k[[X, Y]]/(f'_x, f'_y)$ *est de longueur finie.*

Il suffit en effet de montrer que f'_x et f'_y forment une suite régulière, donc qu'ils sont premiers entre eux dans l'anneau $k[[X, Y]]$. S'ils avaient un facteur irréductible commun p, l'image $\bar{f}$ de f dans $B = k[[X, Y]]/(p)$ serait dans le noyau de n'importe quelle k-dérivation de B. Or, comme B est entier et séparable sur un anneau de séries formelles à une variable, et est de caractéristique 0, B admet une k-dérivation de noyau k. D'où, $\bar{f} \in k$, donc $\bar{f} = 0$, soit $f = pq$. Par dérivation, on obtient

$$\overline{p'_x}\,\bar{q} = \overline{p'_y}\,\bar{q} = 0.$$

Comme ni p'_x, ni p'_y n'est multiple de p, on en déduit $\bar{q} = 0$, soit $p \mid q$ et $p^2 \mid f$ contrairement à l'hypothèse que f n'a pas de facteurs multiples.

Remarques.

1° Le lemme 1 est faux en caractéristique p, différente de 0 (*cf.* la courbe $Y^p = X^q$).

2° Une démonstration topologique (valable si $k = \mathbf{C}$) de ce lemme bien connu se trouve dans [1].

THÉORÈME 1. — *Posons* $\mathcal{O} = \bar{k}[[X, Y]]/(f)$, *où* $\bar{k}$ *est la clôture algébrique de* k. *Soient :*

$$\mu = l(k[[X, Y]]/J(f)),$$

$$\delta = l(\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \qquad (\bar{\mathcal{O}} : \text{normalisé de } \mathcal{O}),$$

On a alors l'égalité

$$\boxed{\mu = 2\delta - r + 1}.$$

Remarque. — Compte tenu de l'interprétation du nombre μ par LÊ Dũng Tráng [1], cela répond à une question posée par MILNOR ([2], p. 86). MILNOR démontre, en effet, ce théorème, par voie topologique, si $\bar{k} = \mathbf{C}$.

Démonstration. — On peut supposer $\bar{k} = k$ (i. e. k algébriquement clos), car

$$\mu = \dim_k k[[X, Y]]/(f'_X, f'_Y) = \dim_{\bar{k}} \bar{k}[[X, Y]]/(f'_X, f'_Y).$$

Ceci montre en particulier que si f n'a pas de facteur multiple sur k, elle n'en n'a pas non plus sur $\bar{k}$.

Nous supposerons que X et Y sont des paramètres transversaux (i. e. que les axes $X = 0$ et $Y = 0$ ne sont pas tangents à la courbe). et que f est un polynôme en Y. Nous poserons $A = k[[X, Y]]$. Soit n la multiplicité de f. Nous allons faire éclater l'origine, donc faire le changement de coordonnées

$$X = X', \quad Y = Y'X,$$

et nous poserons

$$\varphi(X, Y') = f(X, XY')/X^n \qquad (\text{« transformée stricte de } f\text{»}).$$

D'une manière générale, soient f_1 et f_2 deux éléments de $k[[X, Y]]$ d'ordre n_1 et n_2, formant une suite régulière; soient φ_1 et φ_2 leurs transformés stricts. On a alors

$$\varphi_1 = \prod_{i=1}^{t_1} \varphi_{1,i}$$

$$\varphi_2 = \prod_{j=1}^{t_2} \varphi_{2,j}$$

chaque indice i, correspondant à une tangente de f_1, $\varphi_{1,i}$, étant l'équation d'une courbe algébroïde en X, Y', ayant pour origine le point (O, p_i) (p_i : pente de la tangente correspondante).

Notons $m(f, g)$ la multiplicité d'intersection de deux courbes f et g. On a alors

$$m(f_1, f_2) = n_1 n_2 + \sum_{i=1}^{t_1} \sum_{j=1}^{t_2} m(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,j}),$$

ce que l'on peut écrire $n_1 n_2 + m(\varphi_1, \varphi_2)$ [la multiplicité $m(\varphi_{1,i}, \varphi_{2,j})$ n'est > 0 que si $p_i = p_j$] (*cf.* [3] ou [5]).

Appliquons ceci aux suites (f'_X, f'_Y) et (f, f'_Y) (la suite f, f'_Y est régulière, car f n'a pas de facteurs multiples). On a, par définition, $X^n \varphi(X, Y') = f(X, X Y')$.

Soit, en dérivant :

$$\begin{cases} X^n \varphi'_{Y'}(X, Y') = X f'_Y(X, X Y'), \\ n X^{n-1} \varphi(X, Y') + X^n \varphi'_X(X, Y') = f'_X(X, X Y') + Y' f'_Y(X, X Y'). \end{cases}$$

Appliquons la formule ci-dessus :

$$\begin{cases} m(f, f'_Y) = n(n-1) + m(\varphi, \varphi'_{Y'}), \\ m(f'_X + Y f'_Y, f'_Y) = (n-1)^2 + m(n\varphi + X\varphi'_X + (X-1) Y' \varphi'_{Y'}, \varphi'_{Y'}). \end{cases}$$

Or, pour deux courbes f_1, f_2 formant une suite régulière, on a

$$m(f_1, f_2) = l(k[[X, Y]]/(f_1, f_2)) \quad (cf. [4]).$$

On trouve donc

$$l(A/(f, f'_X)) = n(n-1) + m(\varphi, \varphi'_{Y'}).$$
$$\mu = l(A/(f'_X + Y f'_Y, f'_Y)) = (n-1)^2 + m(n\varphi + X\varphi'_X, \varphi'_{Y'}).$$

LEMME 2. — *On a* $m(\varphi, \varphi'_{Y'}) = m(n\varphi + X\varphi'_X, \varphi'_{Y'})$, *soit*

$$\sum_i \sum_j m(\varphi_i, (\varphi'_{Y'})_j) = \sum_i \sum_j m((n\varphi + X\varphi'_X)_{i_1}, (\varphi'_{Y'})_j).$$

Supposons ce lemme démontré. Cela implique que

$$\mu - (n-1)^2 = l(A/(f, f'_Y)) - n(n-1).$$

Or $l(A/(f, f'_Y))$ est l'ordre $\Delta(f)$ du discriminant du polynôme (en Y), f. On a

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{r} \Delta(\gamma_i) + 2 \sum_{i<j} m(\gamma_i, \gamma_j),$$

où γ_i sont les branches de la courbe f (les γ_i sont des polynômes en Y) (*cf.*, par exemple, [7], p. 295).

D'autre part, $\Delta(\gamma_i) = 2\,\delta_i + n_i - 1$, n_i étant la multiplicité de γ_i, et $\delta_i = l\,(\bar{\mathcal{O}}_i/\mathcal{O}_i)$ (en notant $\mathcal{O}_i$ l'anneau local de γ_i).

On a aussi

$$\delta = l\,(\bar{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = \sum_{i=1}^{r} \delta_i + \sum_{i<j} m\,(\gamma_i, \gamma_j) \quad ([2], \text{p. } 93).$$

En appliquant la formule déduite du lemme 2, cela donne

$$\begin{aligned}\mu &= 1 - n + \Delta\,(f) = 1 - n + 2\sum_{i=1}^{r} \delta_i + \sum_{i=1}^{r} n_i - r + 2\sum_{i<j} m\,(\gamma_i, \gamma_j) \\ &= 1 - r + 2\,\delta, \quad \text{car} \quad \sum_{i=1}^{r} n_i = n.\end{aligned}$$

Il reste à démontrer le lemme 2.

Démonstration du lemme 2.

1° *Supposons que la courbe f ait une seule tangente.* Il s'agit de montrer que

$$m\,(\varphi, \varphi'_{Y'}) = m\,(n\,\varphi + X\,\varphi'_{X'}, \varphi'_{Y'}).$$

Cela va résulter du lemme ci-dessous.

Lemme 3. — *Soit φ une courbe algébroïde* ($\varphi \in A = k\,[[X, Y]]$), *et soit n un entier. Alors*

$$l\,(A/(\varphi, \varphi'_Y)) = l\,(A/(n\,\varphi + X\,\varphi'_X, \varphi'_Y)).$$

Remarquons qu'il suffit de prouver cette inégalité lorsque φ'_Y est une courbe irréductible. En effet, si, dans A, on a une suite régulière (φ, Ψ), et que $\Psi = \prod_{i=1}^{r} p_i^{n_i}$, alors

$$l\,(A/(\varphi, \Psi)) = \sum_{i=1}^{r} n_i\, l\,(A/(\varphi, p_i)).$$

comme on le voit par un dévissage dans l'anneau $A/(\varphi)$.

Appelons v la valuation canonique du corps des fractions de $A/(\varphi'_Y)$ (la clôture intégrale de $A\ /(\varphi_Y)$ est en effet un anneau de valuation discrète).

On a alors

$$\begin{cases} l\,(A/(\varphi, \varphi'_Y)) = v\,(\varphi) \\ l\,(A/(n\,\varphi + X\,\varphi'_X, \varphi'_Y)) = v\,(n\,\varphi + X\,\varphi'_X) \end{cases} (cf.\ [4]).$$

Soit U une uniformisante de la valuation v :

$$\begin{aligned} d\,(X^n\,\varphi)/d\,U &= (n\,X^{n-1}\,\varphi + X^n\,\varphi'_X)\,dX/dU + (X^n\,\varphi'_Y)\,dY/dU \\ &= (n\,X^{n-1}\,\varphi + X^n\,\varphi'_X)\,dX/dU. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} v\,(d\,(X^n\,\varphi)/dU) &= v\,(X^n\,\varphi) - 1 = nv\,(X) + v\,(\varphi) - 1 \\ &= (n-1)\; v\,(X) + v\,(n\,\varphi + X\,\varphi'_X) + v\,(X) - 1. \end{aligned}$$

Soit

$$v\,(\varphi) = v\,(n\,\varphi + X\,\varphi'_X),$$

ce qui montre le lemme 3.

2° *Supposons que la courbe f ait plusieurs tangentes.* Les tangentes communes à f et f'_Y étant les mêmes que celles communes à f'_x et f'_y, les deux expressions intervenant dans le lemme 2 ont le même nombre de termes non nuls.

Or $m\,((n\,\varphi + X\,\varphi'_X)_1, (\varphi'_Y)_1)$, par exemple, est égal à $m\,((n\,\varphi + X\,\varphi'_X), (\varphi'_{Y'}))$ les équations $n\,\varphi + X\,\varphi'_X$ et $\varphi'_{Y'}$ étant prises dans l'anneau local du point $(0, p_1)$. Le raisonnement est donc le même que pour le 1°.

Remarque. — La démonstration ci-dessus est valable pour tout corps de caractéristique $p \neq 0$, pourvu de la longueur de l'anneau A/J soit *finie.*

Voici un exemple d'application :

Théorème 2. — *Soient f et g deux courbes sur un corps k algébriquement clos, de caractéristique* 0, *telle que* $J\,(f) = J\,(g)$. *Alors f est équivalente à g au sens de* Zariski [5].

En particulier, si f est irréductible, g l'est aussi, et elles ont les mêmes paires caractéristiques de Puiseux.

Nous allons appliquer le critère du discriminant de Zariski ([5], p. 529), qui peut s'exprimer ainsi :

Soit $f\,(X, Y, T) \in k\,[[X, Y, T]]$ une série formelle sans facteurs multiples, qui est un polynôme unitaire en Y; alors f définit deux courbes C_0 et C_T :

— C_0 a pour équation $f\,(X, Y, 0)$ sur le corps k;

— C_T a pour équation $f\,(X, Y, T)$ sur une clôture algébrique du corps $k\,((T))$.

Alors, pour que C_0 et C_T soient équivalentes sur une clôture algébrique de $k((T))$, il suffit que le discriminant $D(X, T)$ du polynôme (en Y), f, soit de la forme $\varepsilon(X, T) X^N$, où $\varepsilon(X, T)$ est inversible dans $k[[X, T]]$.

Nous supposerons que f et g sont des polynômes unitaires en Y (théorème de préparation de Weirstrass), et que l'axe des Y n'est tangent ni à f, ni à g.

LEMME 4. — *Soient n la multiplicité de f, et $\Delta(f)$ l'ordre du discriminant* (par rapport à Y) *de f. Alors $\Delta(f) = \mu + n - 1$.*

En effet, soient $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq r}$ les branches de f : on a

$$\Delta(f) = \sum_{i=1}^{r} \Delta(\gamma_i) + 2 \sum_{i<j} m(\gamma_i, \gamma_j) \quad ([7], \text{p. } 295)$$

et

$$\Delta(\gamma_i) = 2\,\delta_i + n_i - 1 \; \left(\delta_i = l\left(\bar{\mathcal{O}}_i/\mathcal{O}_i\right)\right),$$

($\mathcal{O}_i$, étant l'anneau local de γ_i).

Donc

$$\Delta(f) = 2 \sum \delta_i + \sum n_i - r + 2 \sum_{i<j} m(\gamma_i, \gamma_j) = 2\,\delta + n - r = \mu + n - 1$$

d'après le théorème 1.

LEMME 5. — *Si $J(g) \subset J(f)$, alors l'équation $f + T\,g \in k[[X, Y, T]]$ satisfait au critère du discriminant de Zariski* (*autrement dit, f et $f + Tg$ sont équivalentes sur une clôture algébrique de $k((T))$, par exemple*).

Notons Δ_0 et Δ_T les ordres des discriminants de C_0 et C_T.

Si $D(f)$ est le discriminant de $f \in k[[X, Y, T]]$ ($D \in k[[X, T]]$), le discriminant de C_0 s'obtient en faisant $T = 0$ dans $D(f)$.

On a donc $\Delta_0 \geqq \Delta_T$ et $(\Delta_0 = \Delta_T) \Leftrightarrow (D(f) = \varepsilon(X, T) X^{\Delta_0})$ avec $\varepsilon(X, T)$ inversible. Il suffit donc de montrer que $\Delta_0 = \Delta_T$. Or

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta_0 = \mu_f + n - 1, & \mu_f = l\left(k[[X, Y]]/(f'_x, f'_y)\right) \\ \quad \text{avec} & \\ \Delta_T = \mu_{f+Tg} + n - 1, & \mu_{f+Tg} = l\left(\tilde{k}[[X, Y]]/(f'_x + Tg'_x, f'_y + Tg'_y)\right) \end{array}\right.$$

en notant $\tilde{k}$ une clôture algébrique de $k((T))$ (lemme 4).

L'hypothèse $J(g) \subset J(f)$ implique que, dans l'anneau $\tilde{k}[[X, Y]]$, on a

$$(f'_x + Tg'_x, f'_y + Tg'_y) \subset (f'_x, f'_y),$$

ce qui entraîne

$$\mu_{f+Tg} \geqq \mu_f, \qquad \text{soit} \quad \Delta_T \geqq \Delta_0.$$

Comme on a aussi $\Delta_0 \geqq \Delta_T$, on obtient $\Delta_0 = \Delta_T$, ce qui démontre le lemme 5.

LEMME 6. — *Les courbes $f + Tg$ et $g + Tf$ sont équivalentes sur une clôture algébrique K du corps $k(T)$.*

En effet les anneaux locaux

$$(k(T)[[X, Y]]/(f + Tg)) \quad \text{et} \quad (k(T)[[X, Y]]/(g + Tf))$$

sont isomorphes, puisqu'il existe un automorphisme de $k(T)$ défini par $T \to 1/T$.

Il en est donc de même des anneaux $(K[[X, Y]]/(f + Tg))$ et $[K[[X, Y]]/(Tf + g)]$.

Or deux courbes qui ont des anneaux locaux isomorphes sont équivalentes ([6], p. 985); ZARISKI montre, en effet, que, pour que deux courbes soient équivalentes, il faut et il suffit que leurs anneaux locaux aient des saturés isomorphes, ceci sans référence à un choix particulier d'un corps des représentants. En appliquant les lemmes 5 et 6, on voit que si $J(f) = J(g)$, les courbes f et g sont équivalentes sur une clôture algébrique de $k(T)$, donc sur k lui-même (la définition d'équivalence de Zariski ne fait en effet pas intervenir le corps algébriquement clos choisi). Ceci démontre le théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LÊ Dũng Tráng. — *Singularités isolées des hypersurfaces complexes.* Paris, Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, 1969.

[2] MILNOR (John). — *Singular points of complex hypersurfaces.* — Princeton, Princeton University Press, 1968 (*Annals of Mathematics Studies*, 61).

[3] NORTHCOTT (D. G.). — Abstract dilatations and infinitely near points, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, t. 52, 1956, p. 178-197.

[4] SAMUEL (Pierre). — *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique.* — Berlin, Springer-Verlag, 1955 (*Ergebnisse der Mathematik.* Neue Folge, 4).

[5] ZARISKI (Oscar). — Studies in equisingularity, *Amer. J. of Math.*, t. 87, 1965, I, p. 507-536; II, p. 972-1006.

[6] ZARISKI (Oscar). — Studies in equisingularity, III, *Amer. J. of. Math.*, t. 90, 1968, p. 961-1023.

[7] ZARISKI (Oscar). — Contributions to the problem of equisingularity, *Questions on algebraic varieties*, p. 261-343. — Roma, Cremonese, 1970 (*Centro internazionale Mathematico estivo*, 3e *ciclo*, Varenna, 1969).

(Texte reçu le 26 avril 1971.)

Jean-Jacques RISLER,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75-Paris 05.