BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS PERDRIZET

Topologie et traces sur les C^*-algèbres

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 193-239

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__193_0>

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 193 à 239.

TOPOLOGIE ET TRACES SUR LES C^*-ALGÈBRES

PAR

FRANÇOIS PERDRIZET.

Dans [15], E. EFFROS et F. HAHN ont introduit un nouveau spectre pour les C^*-algèbres unifères. Rappelons brièvement sa construction. Soient A une C^*-algèbre unifère, A' son dual, et C l'ensemble des traces finies de norme 1 sur A, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires f sur A positives, de norme 1, telles que $f(xy) = f(yx)$ pour tous $x, y \in A$.

Munissant l'ensemble C de la topologie faible $\sigma(A', A)$, on démontre que C est un simplexe de Choquet. La théorie élaborée dans [14] permet de considérer sur l'ensemble C^e des points extrémaux de C, une topologie importante dite « faciale », définie de la façon suivante :

Un ensemble X est fermé dans C^e si, et seulement si, il existe une face fermée de C dont l'ensemble des points extrémaux est X.

L'ensemble C^e, muni de cette topologie, est le nouveau spectre de A.

L'hypothèse « unifère » semble gênante; il n'est qu'à penser au cas de la C^*-algèbre des fonctions complexes continues tendant vers zéro à l'infini sur un espace localement compact. D'autre part, l'existence de traces finies non nulles est relativement exceptionnelle.

Notre Mémoire va donc essayer d'étudier dans un cadre général un spectre associé aux traces (finies ou non) d'une C^*-algèbre. Les notations dont nous ferons usage seront autant que possible celles de [9].

Soient A une C^*-algèbre, $K(A)$ l'idéal de Pedersen de A ([21], p. 133) et $T(A)$ l'ensemble des traces semi-continues inférieurement sur A^+ à idéal de définition dense dans A. On sait qu'on peut associer biunivoquement à tout élément de $T(A)$ une forme linéaire φ sur $K(A)$ positive telle que $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ pour tout $x \in K(A)$ et tout $y \in A$.

Le paragraphe 1 consiste essentiellement à mettre en forme des résultats connus ([5], [23]), et à définir notre nouvelle notion de spectre. Plus précisément, après un bref rappel des propriétés de l'idéal de Pedersen, nous remarquons que $T(A)$ muni de la topologie faible $\sigma(T(A), K(A))$ est un cône saillant réticulé faiblement complet. De manière analogue à celle de [15], on peut mettre sur l'ensemble $T^e(A)$ des génératrices extrémales de $T(A)$, une topologie faciale que nous appellerons topologie d'Effros. L'ensemble $T^e(A)$, muni de cette topologie, sera appelé spectre d'Effros de A. Supposons A postliminaire. On montre alors l'existence d'une injection continue Φ du spectre d'Effros de A dans $\hat{A}$ muni de la topologie de Jacobson. L'application Φ est une bijection si, et seulement si, A est une C^*-algèbre liminaire. Dans ce cas, on peut identifier les ensembles $T^e(A)$ et $\hat{A}$. Cependant les topologies d'Effros et de Jacobson ne sont pas identiques en général, comme nous le verrons par la suite (*voir* aussi [15], th. 2.16).

Au paragraphe 2, nous étudions deux classes particulières de C^*-algèbres postliminaires, à savoir les C^*-algèbres U. C. C. R. et les C^*-algèbres postliminaires à spectre séparé. La première notion a été introduite par J. M. G. Fell dans un Mémoire non publié. Nous en donnons ici une nouvelle caractérisation qui permet de répondre à une question de J. Dixmier ([7], p. 260). Nous montrons que, dans ces deux classes, les spectres d'Effros et de Jacobson coïncident. Enfin, nous démontrons que, sur $\hat{A}$, dans le cas liminaire, la topologie du spectre régularisé de A est plus fine que la topologie d'Effros.

Soit I un idéal bilatère fermé de A. Le paragraphe 3 compare les spectres d'Effros de A, A/I et I. Dans l'obligation de reformuler certains résultats de J. Dixmier ([7], § 6), nous en profiterons pour en donner une nouvelle démonstration à l'aide du théorème de décomposition de G. K. Pedersen.

Au paragraphe 4, nous établissons quelques résultats auxiliaires avec deux objectifs principaux. Le premier est de déterminer un procédé pour construire des faces fermées dans les cônes convexes réticulés faiblement complets. Le second est de ramener la convergence simple des traces sur une sous-algèbre involutive B dense dans A, à la convergence simple sur l'idéal de Pedersen $K(A)$, ce que nous pourrons faire quand B^+ est stable par extraction de racine carrée.

Raffinant un exemple de J. M. G. Fell ([9], 10.10.5), nous construisons au paragraphe 5 une infinité de C^*-algèbres liminaires séparables pour lesquelles il est facile de déterminer explicitement les spectres d'Effros et de Jacobson. En particulier, il existe une suite infinie de telles C^*-algèbres, qui ont même spectre de Jacobson, et des spectres d'Effros deux à deux distincts.

Soient G un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe, $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble des fonctions complexes indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur G, et $\mathcal{D}(G)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}(G)$ à support compact. On sait que la C^*-algèbre du groupe G est liminaire. Développant une méthode de J. Dixmier, nous établirons au paragraphe 6 l'existence d'un calcul fonctionnel à valeur dans $\mathcal{S}(G)$ pour les éléments de $\mathcal{D}(G)$. A l'aide des résultats du paragraphe 4, on peut étudier sur $\hat{G}$ les topologies d'Effros et de Jacobson. On peut montrer qu'elles sont identiques pour les groupes de dimension ≤ 4 (nous indiquerons le calcul en dim 3), mais nous verrons qu'il n'en est plus ainsi pour ceux de dimension 5.

L'auteur remercie très vivement J. Dixmier pour son aide et ses encouragements constants. Il se doit aussi de mentionner l'intérêt amical de F. Combes qui lui a été précieux.

1. Spectre et topologie d'Effros.

1.0. Notations générales.

Soient A une C^*-algèbre, et A^+ la partie positive de A. Nous noterons $\hat{A}$ l'ensemble des classes d'équivalence unitaire de représentations irréductibles non nulles de A. L'ensemble $\hat{A}$, muni de la topologie de Jacobson, est appelé *spectre de A* (*voir* [9], 3.1.5). Nous noterons $\tilde{A}$ la C^*-algèbre déduite de A par adjonction d'une unité.

Nous appellerons *idéal d'ordre* de A (*voir* par exemple [3], 1.1), un sous-espace vectoriel J de A tel que : (i) $J^+ = J \cap A^+$ est une face de A^+; (ii) le sous-espace vectoriel lin J^+ de A engendré par J^+ est égal à J. Nous appellerons *idéal bilatère facial* de A ([3], déf. 1.4), un idéal bilatère J de A qui est un idéal d'ordre de A.

Supposons que la C^*-algèbre A soit réalisée sur un espace de Hilbert H. Pour tout élément a de A, nous noterons $[a]$ la projection orthogonale de H sur la fermeture de l'image de a, et $\mathrm{rg}(a)$ la dimension hilbertienne de cette fermeture.

1.1. Rappels sur l'idéal de Pedersen ([21], § 1 et [22]).

1.1.1. — Soient A une C^*-algèbre, et $K_0^+(A)$ l'ensemble des éléments a de A^+ possédant la propriété suivante :

(1) Il existe $b \in A^+$ tel que, pour tout entier $n > 0$, on ait $a^{1/n} \leq \| a \|^{1/n} . b$.

On appelle idéal de Pedersen de A, l'idéal d'ordre $K(A)$ de A engendré par $K_0^+(A)$ ([21], bas de page 133).

1.1.2. — Supposons que la C^*-algèbre A soit réalisée sur un espace de Hilbert H. Alors la condition (1) est équivalente à

1') Il existe $b \in A^+$ tel que l'on ait $[a] \leq b$.

1.1.3. — L'idéal de Pedersen $K(A)$ de A est le plus petit idéal bilatère facial de A dense dans A ([21], th. 1.3). Plus précisément on peut remarquer que, pour tout $x \in A^+$, il existe une suite $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ dans $K_0^+(A)$ telle que $x_n \leqq x$ et $\lim_n x_n = x$.

1.1.4. — Comme il est signalé dans ([22], p. 267), d'après 1.1.3, on peut affirmer que $K(A)$ est l'idéal d'ordre de A engendré par les éléments a de A^+ tels que

(1″) Il existe $b \in K_0^+(A)$ tel que, pour tout entier $n > 0$, on ait $a^{1/n} \leqq \| a \|^{1/n}.b$.

1.1.5. — Soit x un élément de $K(A)$. D'après ([22], prop. 4), la plus petite sous-C^*-algèbre de A contenant $\{x\}$ est contenue dans $K(A)$. En particulier, soit $x \in K(A)^+$, l'élément $x^{1/2}$ appartient à $K(A)^+$.

1.1.6. — Soient A une C^*-algèbre, I un idéal bilatère fermé de A, et θ l'application canonique $A \to A/I$. D'après 1.1.3, il est facile de voir que l'on a $K(I) \subset K(A) \cap I$ et, d'après ([22], cor. 6), on a $\theta(K(A)) = K(A/I)$.

1.1.7. — Soient A une C^*-algèbre, I et J deux idéaux bilatères fermés de A. D'après ([3], prop. 2.12), on a

$$K(I + J) = K(I) + K(J); \qquad K(I + J)^+ = K(I)^+ + K(J)^+.$$

1.1.8. — Soit A une C^*-algèbre avec unité. On a $K(A) = A$.

1.2. Un exemple de détermination de l'idéal de Pedersen.

Soit B l'algèbre des matrices complexes à deux lignes et à deux colonnes que l'on peut supposer réalisée comme algèbre des endomorphismes de $\mathbf{C}^2$. Pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et tout $\varphi \in [0, 2\pi[$, soit $m(\alpha, \varphi)$ l'élément de B défini par

$$m(\alpha, \varphi)_{1,1} = \alpha, \qquad m(\alpha, \varphi)_{2,2} = 1 - \alpha.$$
$$m(\alpha, \varphi)_{1,2} = \overline{m}(\alpha, \varphi)_{2,1} = (\alpha - \alpha^2)^{1/2} e^{i\varphi},$$

Il est immédiat que l'application $(\alpha, \varphi) \mapsto m(\alpha, \varphi)$ est une bijection de $]0, 1[\times [0, 2\pi[$ sur l'ensemble des projecteurs de B différents de 0 et 1.

Pour tout entier $n > 0$, soit B_n une C^*-algèbre isomorphe à B. Soient D la C^*-algèbre produit des B_n, et A la sous-C^*-algèbre de D formé des éléments $x = (x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots)$ de D tels que

$$\lim_n x(n)_{1,2} = \lim_n x(n)_{2,1} = \lim_n x(n)_{2,2} = 0$$

et $\lim_n x(n)_{1,1}$ existe dans $\mathbf{C}$.

La C^*-algèbre est séparable et n'a pas d'unité. Montrons qu'un élément a de A^+ appartient à $K_0^+(A)$ si, et seulement si, il existe une suite $((\alpha_1, \varphi_1), (\alpha_2, \varphi_2), \ldots, (\alpha_k, \varphi_k), \ldots)$ dans $[0, 1] \times [0, 2\pi[$, une suite $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots)$ dans $\mathbf{R}^+$ et un entier $n_0 > 0$ tels que

$$\lim_k \alpha_k = 1 \qquad \text{et} \qquad a(n) = \lambda_{n-n_0} m(\alpha_{n-n_0}, \varphi_{n-n_0}) \qquad \text{si} \quad n > n_0.$$

Soit $x \in K_0^+(A)$. Il existe donc $b \in A^+$ tel que, pour tout entier $n > 0$, l'on ait $[x(n)] \leqq b(n)$. Si l'on avait $\operatorname{rg}(x(n)) = 2$ pour $n = n_1, n_2, \ldots, n_l, \ldots$ on aurait $b(n)_{2,2} \geqq 1$. En conséquence, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que, pour tout $n \geqq n_0$, l'on ait $\operatorname{rg}(x(n)) \leqq 1$. Soit k un entier > 0.

Si $\operatorname{rg} x(n_0 + k) = 1$, il existe $(\alpha_k, \varphi_k) \in [0, 1] \times [0, 2\pi[$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}^+$, tels que

$$x(n_0 + k) = \lambda_k m(\alpha_k, \varphi_k) \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq 1 - \alpha_k \leqq b(n_0 + k)_{2,2}.$$

Si $\operatorname{rg} x(n_0 + k) = 0$, posons

$$\alpha_k = 1, \qquad \varphi_k = \lambda_k = 0.$$

Il est facile de vérifier que les deux suites et l'entier n_0 choisis possèdent les propriétés désirées. La vérification réciproque est laissée au lecteur.

Soient $x \in A^+$ et $t = \|x\| + 3$. Pour tout entier $n > 0$, posons $\psi(n) = (x(n)_{2,2})^{1/2}$. Considérons une suite $(\theta(1), \theta(2), \ldots, \theta(n), \ldots)$ dans $]0 + \infty[$ telle que

$$\lim_n \theta(n) = 0, \qquad \lim_n \frac{\psi(n) + |x(n)_{1,2}|}{\theta(n)} = 0.$$

Pour tout entier $n > 0$, posons

$$y(n) = t.m(\cos^2 \psi(n), 0), \qquad z(n) = m(\cos^2 \theta(n), 0)$$

et

$$a(n) = y(n) + z(n) - x(n).$$

Il existe, dans $[-1, +1]$, trois suites $(k_i(1), k_i(2), \ldots, k_i(n), \ldots)$, $i = 1, 2, 3$, et un entier $n_0 > 0$, tels que, pour tout $n \geqq n_1$, on ait

$$\begin{aligned} a(n)_{1,1} &= t + 3 + \theta(n)^2 k_1(n) - x(n)_{1,1}, \\ a(n)_{2,2} &= \theta(n)^2 + t\psi(n)^2 + \theta(n)^3 k_2(n) - x(n)_{2,2}, \\ a(n)_{1,2} &= \theta(n) + \theta(n)^2 k_3(n) + \psi(n) - x(n)_{1,2}. \end{aligned}$$

Il existe donc un entier $n_1 \geqq n_0$ tel que, pour tout $n \geqq n_1$, on ait

$$a(n)_{1,1} \geqq \frac{5}{2}, \qquad a(n)_{2,2} \geqq \frac{4}{5}\theta(n)^2, \qquad |a(n)_{1,2}| \leqq \sqrt{\frac{3}{2}}\,\theta(n),$$

ce qui implique $a(n)_{1,1}\, a(n)_{2,2} \geqq |a(n)_{1,2}|^2$ et $a(n) \geqq 0$.

Il est alors facile de construire y' et $z' \in K_0^+(A)$ avec $y'(n) = y(n)$ et $z'(n) = z(n)$ pour n suffisamment grand tels que $x \leq y' + z'$. On a donc $K(A) = A$.

1.3. Rappels sur les C^*-intégrales invariantes positives.

Soient A une C^*-algèbre et $K(A)$ l'idéal de Pedersen de A. Nous noterons $T(A)$ l'ensemble des traces φ semi-continues inférieurement sur A^+ telles que $M(\varphi)^+ = \{ x \in A^+ \mid \varphi(x) < +\infty \}$ soit dense dans A^+.

On sait que $M(\varphi)^+$ est la partie positive d'un idéal bilatère facial $M(\varphi)$ de A que l'on appelle idéal de définition de φ.

D'après ([21], p. 139), une C^*-intégrale invariante positive de A est une forme linéaire positive ψ sur $K(A)$ telle que

(2) $\psi(uxu^*) = \psi(u)$ pour tout $x \in K(A)$ et tout u unitaire de $\tilde{A}$.

La condition (2) est équivalente à

(2′) $\psi(xy) = \psi(yx)$ pour tout $x \in K(A)$, tout $y \in A$.

Soient $x \in K(A)^+$ et u un unitaire de $\tilde{A}$. Supposons que la forme linéaire ψ sur $K(A)$ vérifie la condition (2). D'après 1.1.5, $ux (= ux^{1/2} . x^{1/2})$ et xu appartiennent à $K(A)$. On a donc

$$\psi(ux) = \psi(u(xu)\,u^*) = \psi(xu).$$

Comme tout élément de A est combinaison linéaire d'unitaires de $\tilde{A}$ et comme lin $K(A)^+ = K(A)$, ψ vérifie la condition (2′). Réciproquement, supposons que ψ vérifie la condition (2′). Comme $ux^{1/2} \in K(A)$, on a

$$\psi(uxu^*) = \psi\Big(\big(ux^{\frac{1}{2}}\big)\big(x^{\frac{1}{2}}u^*\big)\Big) = \psi\big(x^{\frac{1}{2}}u^*ux^{\frac{1}{2}}\big) = \psi(x).$$

Par linéarité, ψ vérifie la condition (2).

Soient ψ une C^*-intégrale invariante positive de A, et $(u_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une unité approchée filtrante croissante de A formée d'éléments de $K(A)$. Posons, pour $a \in A^+$,

$$E\psi(a) = \sup_\alpha \psi\big(a^{\frac{1}{2}}\, u_\alpha\, a^{\frac{1}{2}}\big).$$

D'après ([21], cor. 3-3), l'application $a \to E\psi(a)$ de A^+ dans $[0, +\infty]$ est un élément de $T(A)$, indépendant du choix de l'unité approchée, dont la restriction à $K(A)^+$ est égale à ψ. De plus, l'application $a \mapsto E\psi(a)$ est une bijection de l'ensemble des C^*-intégrales invariantes positives de A sur $T(A)$. Par la suite, nous identifierons ces deux ensembles.

Enfin, pour tout $\pi \in \hat{A}$, nous noterons $\operatorname{Tr} \pi$ la trace $x \to \operatorname{Tr} \pi(x)$ sur A^+.

1.4. PROPOSITION. — *Soient A une C^*-algèbre, $K(A)$ l'idéal de Pedersen de A, et $T(A)$ l'ensemble des C^*-intégrales invariantes positives de A muni de la topologie faible $\sigma(T(A), K(A))$, Alors $T(A)$ est un cône convexe saillant faiblement complet réticulé pour son ordre propre. Si la C^*-algèbre A est séparable, le cône $T(A)$ est bien coiffé* ([24], § 11).

L'assertion résulte de ([23], th. 3.1), ([5], lemme 3.2) et de considérations triviales.

1.5. COROLLAIRE. — *Soit $T(A)$ le cône des C^*-intégrales invariantes positives de A muni de la topologie $\sigma(T(A), K(A))$. L'intersection d'une famille quelconque de faces fermées de $T(A)$ et la somme d'un nombre fini de faces fermées de $T(A)$ sont des faces fermées de $T(A)$.*

L'assertion relative à l'intersection est immédiate. La seconde résulte de ([18], prop. 2.4 et cor. 3.3).

1.6. Notations et définitions.

Soit F une face fermée de $T(A)$ pour la topologie $\sigma(T(A), K(A))$. Nous noterons $T^e(A)$ (resp. F^e) l'ensemble des génératrices extrémales de $T(A)$ (resp. F).

Nous appellerons topologie faciale d'Effros (nous dirons souvent plus simplement topologie d'Effros), la topologie définie sur $T^e(A)$ de la manière suivante (*voir* 1.5).

Un sous-ensemble X de $T^e(A)$ est fermé si, et seulement si, il existe une face fermée de $T(A)$ telle que $F^e = X$.

L'ensemble $T^e(A)$ muni de cette topologie sera appelé le spectre d'Effros de A.

1.7. *Exemple.* — Soient Y un espace topologique localement compact, et A la C^*-algèbre des fonctions continues sur Y à valeur dans $\mathbf{C}$ s'annulant à l'infini. Alors $K(A)$ est l'idéal des fonctions continues à support compact, $T(A)$ est l'ensemble des mesures de Radon positives sur Y et le spectre d'Effros de A est homéomorphe à Y.

1.8. *Remarque.* — Un élément φ de $T(A)$ appartient à une génératrice extrémale de $T(A)$ si, et seulement si, c'est un caractère de A ([9], 6.7.1) à idéal de définition dense dans A comme le montre une simple vérification.

Faisant le lien avec [15], la proposition qui suit, justifie la terminologie de 1.6.

1.9. Proposition. — *Soient A une C^*-algèbre avec une unité e, et C l'ensemble des traces finies φ de A telles que $\varphi(e) = 1$. Muni de la topologie $\sigma(C, A)$, C est un simplexe de Choquet. Notons C^e l'ensemble des points extrémaux de C et considérons sur C^e la topologie faciale de* ([14], § 4). *Soit φ^e un élément de $T^e(A)$. Désignons par $\Theta(\varphi^e)$ l'élément φ de φ^e tel que $\varphi(e) = 1$. Alors l'application Θ est un homéomorphisme du spectre d'Effros de A sur C^e muni de la topologie faciale.*

D'après 1.1.8, on a $K(A) = A$. L'application Θ est donc bien définie, et l'on a $T(A) \subset A'$. Montrons que Θ est un homéomorphisme pour les topologies considérées (les autres assertions de l'énoncé sont faciles à vérifier). Soit H l'ensemble des $f \in A'$ tel que $f(e) = 1$. Il est classique que les applications $F \mapsto F \cap H$ et $G \mapsto \bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}^+} \lambda G$ sont des bijections réciproques entre l'ensemble des faces coniques $\neq \{ 0 \}$ et non vides de $T(A)$ et l'ensemble des faces non vides de C. Soient G une face de C fermée pour $\sigma(C, A)$ et $F = \bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}^+} \lambda G$. Alors $\mathrm{co}(G \cup \{ 0 \})$ est un ensemble convexe compact égal à l'ensemble des $f \in F$ tels que $\| f \| \leq 1$. D'après le théorème de Krein-Smulian, F est fermée pour $\sigma(T(A), A)$. L'assertion demandée en résulte facilement.

Comparons maintenant le spectre d'Effros de A et le spectre de A. La proposition qui suit généralise ([15], th. 2.15 (*a*) et (*b*)).

1.10. Proposition. — *Soit A une C^*-algèbre postliminaire.*

(i) *Soit φ^e un élément de $T^e(A)$. Il existe un élément unique $\pi(\varphi^e)$ de $\hat{A}$ tel que la trace $x \mapsto \mathrm{Tr}\,\pi(\varphi^e)(x)$, $x \in A^+$ appartienne à φ^e. L'application $\Phi : \varphi^e \mapsto \pi(\varphi^e)$ de $T^e(A)$ dans $\hat{A}$ est une injection.*

(ii) *L'application Φ de* (i) *est une surjection de $T^e(A)$ sur $\hat{A}$ si, et seulement si, A est une C^*-algèbre liminaire.*

(iii) *Enfin Φ est une application continue du spectre d'Effros de A dans le spectre de A.*

(i) résulte de 1.8 et de ([9], 6.7.6).

(ii) Supposons que A soit une C^*-algèbre liminaire. Soit $\pi \in \hat{A}$. D'après ([9], lemme 4.4.3), l'idéal bilatère des éléments x de A tels que $\pi(x)$ soit un opérateur de rang fini, est dense dans A. En conséquence, la trace $x \mapsto \mathrm{Tr}\,\pi(x)$, $x \in A^+$, semi-continue inférieurement d'après ([9], 6.1.4) a un idéal de définition dense dans A. D'après 1.8 et ([9], 6.7.6) cette trace appartient à $T^e(A)$, et donc Φ est une surjection de $T^e(A)$ sur $\hat{A}$. Réciproquement, supposons que Φ soit une surjection de $T^e(A)$

sur $\hat{A}$. Soit $\pi \in \hat{A}$. L'idéal de définition $M(\pi)$ de la trace $x \mapsto \operatorname{Tr} \pi(x)$, $x \in A^+$, est dense dans A. Alors $\pi(x)$ est compact pour tout $x \in M(\pi)$, et par suite pour tout $x \in A$. Ceci montre que A est liminaire.

(iii) Soit X un sous-ensemble fermé de $\hat{A}$. Il existe un idéal bilatère fermé J de A tel que $\pi \in X$ si, et seulement si, $\pi(J) = 0$. D'après 1.1.6, on peut considérer l'ensemble F des éléments $\varphi \in T(A)$ tels que $\varphi(K(J)^+) = 0$. Alors F est une face fermée du cône $T(A)$. Soit $\varphi^e \in T(A)$. On a les équivalences

$$\pi(\varphi^e)(J) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi(\varphi^e)(K(J)^+) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Tr} \pi(\varphi^e)(K(J)^+) = 0.$$

On a donc $F^e = \Phi^{-1}(X)$, d'où (iii).

1.11. *Remarque.* — Dans le cas d'une C^*-algèbre A liminaire, nous identifierons désormais par la bijection Φ les ensembles $T^e(A)$ et $\hat{A}$. Même dans ce cas, Φ n'est pas en général un homéomorphisme (*voir* 5.4.3).

2. Comparaison des topologies d'Effros et de Jacobson pour certaines classes de C^*-algèbres.

2.1. Notations et définitions.

Soit A une C^*-algèbre. Avec ([23], lemme 3.6), nous noterons $J(A)$ l'idéal bilatère facial de A engendré linéairement par les éléments x de A^+ tels que la fonction $\pi \mapsto \operatorname{Tr} \pi(x)$ définie sur $\hat{A}$ soit bornée. Nous noterons $F(A)$ l'idéal bilatère facial des éléments x de A tels qu'il existe $r \in \mathbf{R}^+$ avec $\operatorname{rg}(\pi(x)) \leq r$ pour tout $\pi \in \hat{A}$. Dans un Mémoire non publié, J. M. G. FELL a nommé C^*-algèbre U. C. C. R (nous dirons C^*-algèbre uniformément liminaire) une C^*-algèbre A telle que $F(A)$ soit dense dans A. Une telle C^*-algèbre est évidemment liminaire.

2.2. LEMME. — *Soient A une C^*-algèbre et $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ [resp. $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$] une famille dans $\hat{A}$ (resp. $]0, +\infty[$). Supposons que, pour tout $x \in K(A)^+$, l'on ait $\sup_\alpha a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x) < +\infty$. Alors on a $\sup_\alpha a_\alpha \operatorname{rg} \pi_\alpha(x) < +\infty$ pour tout $x \in K(A)$.*

Soit $x \in A^+$ vérifiant la condition (1″) de 1.1.4. Il existe donc $y \in K(A)^+$ tel que $x^{1/n} \leq \| x \|^{1/n} y$ pour tout entier $n > 0$. Pour tout $\alpha \in \Lambda$, on a donc

$$\pi_\alpha(x)^{1/n} \leq \| x \|^{1/n} \pi_\alpha(y), \qquad \text{d'où} \qquad [\pi_\alpha(x)] \leq \pi_\alpha(y).$$

On en déduit :

$$\operatorname{rg} \pi_\alpha(x) = \operatorname{Tr}[\pi_\alpha(x)] \leq \operatorname{Tr} \pi_\alpha(y)$$

et

$$\sup_\alpha a_\alpha \operatorname{rg} \pi_\alpha(x) \leqq \sup_\alpha a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(y) < +\infty.$$

D'après 1.1.4, on a le résultat par linéarité.

2.3. Proposition. — *Soit A une C^*-algèbre. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est une C^*-algèbre uniformément liminaire.*

(ii) *L'idéal bilatère facial $J(A)$ de A est dense dans A.*

(iii) *Pour toute mesure de Radon positive μ sur $\hat{A}$* ([7], § 3, déf. 5), *la fonction $\varphi(\mu) : a \mapsto \int_{\hat{A}} \operatorname{Tr} \pi(a)\, d\mu(\pi)$, définie sur A^+, est une trace semi-continue inférieurement à idéal de définition dense dans A.*

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Supposons A uniformément liminaire. D'après 1.1.3, comme $F(A)$ est dense dans A, il contient $K(A)$. Soient μ une mesure de Radon positive sur $\hat{A}$, et $a \in A^+$ tel qu'il existe $b \in K(A)^+$ avec, pour tout entier $n > 0$, $a^{1/n} \leqq \| a \|^{1/n} b$ ((1)$''$). Montrons que $a \in M(\varphi_\mu)$ (notations de 1.3). Posons

$$C = \left\{ \pi \in \hat{A} \mid \| \pi(b) \| \geqq \frac{1}{2} \right\} = \bigcap_{n \text{ entier} > 0} \left\{ \pi \in \hat{A} \mid \| \pi(b) \| > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right\}.$$

D'après ([9], prop. 3.3.2 et 3.3.7), c'est un ensemble quasi compact qui est un G_δ du spectre de A. Soit $\pi \in \hat{A}$. On a

$$0 \leqq \pi(a) \leqq \| a \| [\pi(a)] \leqq \| a \| \pi(b). \tag{3}$$

D'après (3), la fonction $\pi \mapsto \operatorname{Tr} \pi(a)$ est bornée sur $\hat{A}$. D'autre part, pour $\pi \notin C$, (3) implique $\pi(a) = 0$. La fonction $\pi \mapsto \operatorname{Tr} \pi(a)$ qui, d'après ([9], prop. 3.5.9), est semi-continue inférieurement, est donc intégrable pour la mesure μ et $a \in M(\varphi_\mu)$. L'assertion résulte alors de 1.1.4 et de ([7], § 3, lemme 17).

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Supposons que $J(A)$ ne soit pas dense dans A. Nous allons en déduire une contradiction avec l'hypothèse (iii); ceci montrera l'assertion. Il existe donc $y \in K(A)^+$ et une suite $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \ldots)$ dans $\hat{A}$ tels que l'on ait $n^2 \leqq \operatorname{Tr} \pi_n(y)$ pour tout entier $n > 0$. Sur $\hat{A}$, considérons la mesure $\mu_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \varepsilon_{\pi_n}$. Il est facile de vérifier que μ_0 est une mesure de Radon positive sur $\hat{A}$ au sens de ([7], § 3, déf. 5), et l'on a

$$\varphi_{\mu_0}(y) = \int_{\hat{A}} \operatorname{Tr} \pi(y)\, d\mu_0(\pi) = +\infty.$$

L'idéal bilatère facial $M(\varphi_{\mu_0})$ ne contient donc pas $K(A)$. D'après 1.1.3, il n'est pas dense dans A, d'où la contradiction voulue.

(iii) $\Rightarrow$ (i) résulte immédiatement du lemme 2.2.

2.4. Corollaire. — *Soit A une C^*-algèbre uniformément liminaire. L'application $\mu \mapsto \varphi_\mu$ est une bijection de l'ensemble des mesures de Radon positives sur $\hat{A}$, sur l'ensemble des traces semi-continues inférieurement sur A^+ à idéal de définition dense dans A.*

L'assertion résulte de la proposition 2.3 et de ([7], § 3, th. 2).

2.5. *Remarque.* — Soit A une C^*-algèbre liminaire non uniformément liminaire (nous en verrons notamment des exemples au paragraphe 5). D'après la proposition 2.3, il existe une mesure de Radon positive μ sur $\hat{A}$ telle que la trace φ_μ n'ait pas un idéal de définition dense dans A. On répond ainsi à une question de J. Dixmier ([7], p. 260, problème).

La proposition qui suit généralise ([15], th. 2.15 (c)). Compte tenu de la remarque 1.11, elle peut s'énoncer :

2.6. Proposition. — *Soit A une C^*-algèbre uniformément liminaire. Alors la topologie d'Effros sur $\hat{A}$ est égale à celle de Jacobson.*

Avec les notations de la proposition 1.10, rappelons que Φ est une bijection continue de $T^e(A)$ sur $\hat{A}$. Soit $X \subset T^e(A)$ un fermé du spectre d'Effros de A. Il existe une face F de $T(A)$ fermée pour $\sigma(T(A), K(A))$ telle que $F^e = X$. Montrons que $\Phi(X)$ est fermé dans $\hat{A}$ pour la topologie de Jacobson. Soit $\pi_0 \in \overline{\Phi(X)}$. Il existe un ultrafiltre $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ à base dans $\Phi(X)$ tel que $\lim_\alpha \pi_\alpha = \pi_0$. Pour tout $x \in K(A)^+$, posons

$$r(x) = \sup_{\pi \in \hat{A}} \operatorname{rg} \pi(x) < +\infty.$$

Considérons l'application ω :

$$\pi \mapsto (\operatorname{Tr} \pi(x))_{x \in K(A)^+} \text{ de } \hat{A} \text{ dans } \prod_{x \in K(A)^+} [0, r(x) \|x\|].$$

Par l'intermédiaire de ω, l'ultrafiltre associé aux sections de Λ définit une application φ de $K(A)^+$ dans $\mathbf{R}^+$ telle que

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \qquad \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x), \qquad \varphi(uxu^*) = \varphi(x).$$
pour tous x, $y \in K(A)$, u unitaire de $\tilde{A}$, et $\lambda \in \mathbf{R}^+$.

Soit ψ le prolongement linéaire de φ à $K(A)$. C'est une C^*-intégrale invariante positive de A. Comme $\sigma(T(A), K(A)) = \sigma(T(A), K(A)^+)$, on a $\psi \in F$. D'après ([9], 3.5.9), on a, pour tout $x \in K(A)^+$,

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{Tr} \pi_0(x) \leqq \liminf_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x) \leqq \psi(x).$$

Comme F est une face de $T(A)$, (4) montre que $\pi_0 \in \Phi(X)$. L'assertion est alors immédiate.

2.7. Corollaire. — *Soit G un groupe de Lie réel connexe semi-simple linéaire. Identifions $\hat{G}$ et $C^*(G)^\wedge$. Alors la topologie d'Effros sur $\hat{G}$ est égale à celle de Jacobson.*

L'assertion résulte de ([16], lemme 3.4) et de la proposition 2.6.

Le lemme suivant est une adaptation de ([9], 4.2.5). Pour être complet, nous en donnerons la démonstration.

2.8. Lemme. — *Soient A une C^*-algèbre liminaire $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ des éléments de $\hat{A}$ deux à deux distincts, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des opérateurs de rang fini dans $H_{\pi_1}, H_{\pi_2}, \ldots, H_{\pi_n}$. Il existe $x \in K(A)$, tel que*

$$\pi_1(x) = a_1, \qquad \pi_2(x) = a_2, \qquad \ldots, \qquad \pi_n(x) = a_n.$$

Supposons $n = 1$. Il est facile de voir que $K(\mathcal{LC}(H_{\pi_1}))$ est l'ensemble des opérateurs de rang fini sur H_{π_1}. D'après 1.1.6, il existe $x \in K(A)$ tels que $\pi(x) = a_1$. On a donc l'assertion pour $n = 1$.

Supposons-la établie pour $n - 1$, et montrons-la pour n. Il existe y, $z \in K(A)$ tels que

$$\pi_1(y) = a_1, \qquad \pi_2(y) = a_2, \qquad \ldots, \qquad \pi_{n-1}(y) = a_{n-1}, \qquad \pi_n(z) = a_n.$$

Soit $I_k = \ker \pi_k$, pour $1 \leqq k \leqq n$. D'après ([9], 4.1.10), on a $I_n \not\supset I_k$ pour $1 \leqq k \leqq n - 1$; donc, d'après ([9], 2.11.4), $I_n \not\supset I = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_{n-1}$. Comme d'après ([9], 4.1.11), I_n est un idéal bilatère fermé maximal de A, on a $I_n + I = A$. Comme $y - z \in K(A)$, d'après 1.1.7, il existe $y' \in K(I)$ et $z' \in K(I_n)$ tels que $y - z = z' - y'$. Posons

$$x = y + y' = z + z' \in K(A).$$

On a

$$\pi_1(x) = a_1, \qquad \pi_2(x) = a_2, \qquad \ldots, \qquad \pi_{n-1}(x) = a_{n-1}, \qquad \pi_n(x) = a_n,$$

ce qui démontre l'assertion.

2.9. Lemme. — *Soient A une C^*-algèbre, $\mathcal{R}$ l'ensemble des représentations de A, Λ un ensemble filtrant, $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille dans $\mathcal{R}$, et π_0 un élément de $\mathcal{R}$. Supposons que, pour tout $x \in A$, on ait* $\lim_\alpha \| \pi_\alpha(x) \| = \| \pi_0(x) \|$.

(i) *Soient a un élément hermitien de A, et ε un nombre réel >0. Notons S le spectre de $\pi_0(a)$. Alors il existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tel que, pour tout $\alpha \geqq \alpha_0$, le spectre de $\pi_\alpha(a)$ soit contenue dans un ε-voisinage de $\{0\} \cup S$.*

(ii) *Supposons π_0 irréductible. Soient $x_1, x_2 \in A$ tels que $\pi_0(x_1)$, $\pi_0(x_2)$ soient deux projecteurs non nuls de même rang fini, et tels que, pour tout $\alpha \in \Lambda$, $\pi_\alpha(x_1)$, $\pi_\alpha(x_2)$ soient des projecteurs. Alors il existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tel que, pour tout $\alpha \geqq \alpha_0$, $\pi_\alpha(x_1)$ et $\pi_\alpha(x_2)$ aient même rang.*

(i) Pour la démonstration, *voir* ([19], lemme 3.3).

(ii) Répétons la démonstration de ([6], lemme 18). Comme $\pi_0(A)$ contient un opérateur compact non nul, d'après ([9], 4.3.7), il contient tous les opérateurs compacts. Il existe donc $y \in \pi_0(A)$, avec

$$y^* y = \pi_0(x_1), \qquad y y^* = \pi_0(x_2).$$

Il suffit d'appliquer ensuite mot à mot le raisonnement de ([17], lemme 3.2).

2.10. LEMME. — *Soient A une C^*-algèbre liminaire, Λ un ensemble filtrant, $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille dans $\hat{A}$, π_0, π_1 deux éléments de $\hat{A}$ distincts, et p_0, p_1 des projecteurs de rang fini dans H_{π_0}, H_{π_1}. Supposons que pour tout $x \in A$, on ait $\lim_\alpha \| \pi_\alpha(x) \| = \| \pi_0(x) \|$. Alors il existe $x \in K(A)^+$ et $\alpha_0 \in \Lambda$ tels que :*

(i) $\pi_0(x) = p_0$, $\pi_1(x) = p_1$.

(ii) *Pour tout $\alpha \geqq \alpha_0$, $\pi_\alpha(x)$ est un projecteur de rang fini.*

Le raisonnement qui suit est très connu ([6], lemme 17). D'après le lemme 2.8, il existe $z \in K(A)$ tel que $\pi_0(z) = p_0$ et $\pi_1(z) = p_1$. Remplaçant z par $z^* z$, on peut supposer $z \geqq 0$. D'après le lemme 2.9 (i), il existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tel que, pour tout $\alpha \geqq \alpha_0$, le spectre de $\pi_\alpha(z)$ soit contenue dans $]-1/4, 1/4[\cup]3/4, 5/4[$. Soit φ une fonction continue $\geqq 0$ de variable réelle égale à 0 sur $]-1/4, 1/4[$, et à 1 sur $]3/4, 5/4[$. D'après 1.1.5, $x = \varphi(z) \in K(A)$. On vérifie facilement que x et α_0 vérifient (i) et (ii).

2.11. PROPOSITION. — *Soient A une C^*-algèbre liminaire, Λ un ensemble filtrant, $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille dans $\hat{A}$, et π_0 un élément de $\hat{A}$. Supposons que, pour tout $x \in A$, on ait $\lim_\alpha \| \pi_\alpha(x) \| = \| \pi_0(x) \|$. Il existe alors une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ dans $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ telle que, pour tout $x \in K(A)$, on ait $\lim_\alpha a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x) = \operatorname{Tr} \pi_0(x)$.*

Cette démonstration est inspirée de ([6], prop. 6).

Soit e un projecteur de dimension 1 dans H_{π_0}. D'après le lemme 2.10, il existe $y \in K(A)^+$ et $\alpha_0 \in \Lambda$ tels que : $\pi_0(y) = e$; pour tout $\alpha \geqq \alpha_0$, $\pi_\alpha(y)$ est un projecteur de rang fini $\neq 0$.

Considérons la famille $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, définie par

$$a_\alpha = 1 \quad \text{pour } \alpha \not\geqq \alpha_0, \qquad a_\alpha = \frac{1}{\operatorname{rg} \pi_\alpha(y)} \quad \text{pour } \alpha \geqq \alpha_0.$$

Montrons que, pour tout $x \in K(A)^+$, on a

$$\limsup_\alpha a_\alpha \operatorname{rg} \pi_\alpha(x) < +\infty. \tag{5}$$

Considérons l'ensemble M des $x \in K(A)^+$ qui satisfont à (5); c'est une face invariante de A^+ ([3], déf. 1.1). Le sous-espace vectoriel lin M de A est donc un idéal bilatère facial de A. Soit I son adhérence dans A. Soient $\pi \in \hat{A}$ avec $\pi \neq \pi_0$, et p, q des projecteurs de dimension 1 sur H_{π_0}, H_π. D'après le lemme 2.10, il existe $t \in K(A)^+$ et $\alpha_1 \in \Lambda$ tels que : $\pi_0(t) = p$, $\pi(t) = q$, et $\pi_\alpha(t)$ est un projecteur de rang fini pour tout $\alpha \geqq \alpha_1$. D'après le lemme 2.9 (ii), il existe $\alpha_2 \geqq \alpha_1$, α_0 tel que, pour tout $\alpha \in \Lambda$ avec $\alpha \geqq \alpha_2$, on ait $\operatorname{rg} \pi_\alpha(t) = \operatorname{rg} \pi_\alpha(y)$. On a donc $t \in I$ et $\pi(t) \neq 0$. Comme I est l'intersection des idéaux primitifs le contenant, on a $A = I$.

Soient $x \in K(A)^+$ et $\varepsilon > 0$. D'après (5), il existe $\alpha_3 \in \Lambda$ et $a \in \mathbf{R}$ tels que

$$\sup_{\alpha \geqq \alpha_3} a_\alpha \operatorname{rg} \pi_\alpha(x) < a. \tag{6}$$

D'après les lemmes 2.10 et 2.9 (ii), il existe $x_1, x_2, \ldots, x_r$ dans $K(A)^+$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{R}^+$, et $\alpha_4 \in \Lambda$, tels que, si $x' = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x_i$, on ait :

(i) Pour $i = 1, 2, \ldots, r$, les $\pi_0(x_i)$ sont des projecteurs de dimension 1 deux à deux orthogonaux, et l'on a $\pi_0(x - x') = 0$.

(ii) Pour $i = 1, 2, \ldots, r$ et $\alpha \geqq \alpha_4$, $\pi_\alpha(x_i)$ est un projecteur tel que $a_\alpha \operatorname{rg} \pi_\alpha(x_i) = 1$.

On a donc, pour tout $\alpha \geqq \alpha_4$,

$$a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x') = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_\alpha \operatorname{rg} \pi_\alpha(x_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = \operatorname{Tr} \pi_0(x). \tag{7}$$

Par hypothèse, il existe $\alpha_5 \in \Lambda$ avec $\alpha_5 \geqq \alpha_4$, α_3 tel que, pour tout $\alpha \geqq \alpha_5$,

$$\| \pi_\alpha(x - x') \| \leqq \varepsilon (a + r)^{-1}.$$

Compte tenu de (6), on a alors, pour tout $\alpha \geqq \alpha_5$,

$$| a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x) - a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x') |$$
$$= | a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x - x') | \leqq a_\alpha \| \pi_\alpha(x - x') \| \left(\operatorname{rg} \pi_\alpha(x) + \sum_{i=1}^{r} \operatorname{rg} \pi_\alpha(x_i) \right) \leqq \varepsilon.$$

Compte tenu de (7), on a, pour tout $\alpha \geqq \alpha_5$,

$$| a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x) - \operatorname{Tr} \pi_0(x) | \leqq \varepsilon.$$

On a donc l'assertion.

Le lemme facile et bien connu qui suit, aide à manipuler les topologies faciales.

2.12. Lemme. — *Soient E un espace vectoriel topologique, C un ensemble convexe fermé de E, et $(c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille d'éléments de C indexée par l'ensemble filtrant Λ. Supposons que $\lim_\alpha c_\alpha = c$. Notons F la plus petite face fermée de C contenant c. Soient d un élément de F, et G une face fermée de C ne contenant pas d. Il existe alors $\alpha_0 \in \Lambda$ tel que, pour tout $\alpha \geqq \alpha_0$, c_α n'appartient pas à G.*

Dans le cas contraire, on a $c \in G$, d'où $F \subset G$ et $d \in G$; la contradiction donne le lemme.

2.13. *Rappel.* — Soit A une C^*-algèbre. Considérons sur $\hat{A}$ la topologie la moins fine rendant, pour tout $x \in A$, les applications $\pi \mapsto \| \pi(x) \|$ continues. Dans [17], cette topologie est appelée par J. M. G. Fell la topologie du spectre régularisé de A. Rappelons qu'elle est séparée, moins fine que la topologie de Jacobson et qu'elle se déduit de celle-ci par un procédé purement topologique ([17], 2.2).

2.14. Proposition. — *Soit A une C^*-algèbre liminaire. Sur $\hat{A}$ la topologie d'Effros est moins fine que la topologie du spectre régularisé de A.*

Soient $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille dans $\hat{A}$ indexée par l'ensemble filtrant Λ, et π_0 un élément de $\hat{A}$. Supposons que $\lim_\alpha \pi_\alpha = \pi_0$ pour la topologie du spectre régularisé. On a donc

$$\lim_\alpha \| \pi_\alpha(x) \| = \| \pi_0(x) \| \quad \text{pour tout } x \in A.$$

D'après la proposition 2.11, il existe une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ dans $]0, +\infty[$ telle que

$$\lim_\alpha a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x) = \operatorname{Tr} \pi_0(x) \quad \text{pour tout } x \in K(A).$$

Soit U un voisinage ouvert de π_0 dans $\hat{A}$ pour la topologie d'Effros. Il existe une face G fermée de $T(A)$ pour $\sigma(T(A), K(A))$ telle que $G^e = \hat{A} - U$. Appliquant le lemme 2.12, avec $C = T(A)$, $c = d = \operatorname{Tr} \pi_0$ et $c_\alpha = a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha$, il existe α_0 tel que, pour tout $\alpha \geqq \alpha_0$, $a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha \notin G$, d'où $\pi_\alpha \in U$ et l'assertion.

2.15. Corollaire. — *Soit A une $C^\star$-algèbre postliminaire à spectre séparé (d'après* [9], 4.7.15, *elle est liminaire). Alors la topologie d'Effros sur $\hat{A}$ est égale à celle de Jacobson.*

L'assertion résulte facilement des propositions 1.10 et 2.14 avec ([9], 3.3.9).

3. Topologie d'Effros et idéaux.

Dans l'obligation de reformuler certains résultats de J. Dixmier, nous en profiterons pour en donner une nouvelle démonstration.

3.1. Lemme. — *Soient A une $C^\star$-algèbre, et φ une $C^\star$-intégrale invariante positive de A. Alors, pour tout $x \in K(A)$, l'application $y \mapsto \varphi(xy)$ de A dans $\mathbf{C}$ est une forme linéaire continue.*

Comme $K(A) = \operatorname{lin} K(A)^+$, il suffit de montrer l'assertion pour $x \in K(A)^+$. Soit $y \in A^+$. D'après (2′) de 1.3, on a $\varphi(xy) = \varphi(y^{1/2} x y^{1/2}) \geqq 0$. La forme linéaire $y \mapsto \varphi(xy)$, étant positive, est continue; d'où l'assertion.

La proposition qui suit est une autre forme de ([7], prop. 5).

3.2. Proposition. — *Soient A une $C^\star$-algèbre, $T(A)$ le cône des $C^\star$-intégrales invariantes positives de A, et I un idéal bilatère fermé de A.*

(i) *Soit $\varphi \in T(A)$. Il existe un élément, et un seul, $R_I\varphi$ de $T(A)$ tel que $(R_I\varphi)(x) = \sup_{0 \leqq i \leqq x,\, i \in I} \varphi(i)$ pour tout $x \in K(A)^+$.*

(ii) *L'application $\varphi \mapsto R_I\varphi$ dans $T(A)$ est un projecteur tel que $0 \leqq R_I\varphi \leqq \varphi$ pour tout $\varphi \in T(A)$.*

(i) Pour tout $x \in K(A)^+$, posons $(R_I\varphi)(x) = \sup_{0 \leqq i \leqq x,\, i \in I} \varphi(i)$. On a

$$0 \leqq (R_I\varphi)(x) \leqq \varphi(x). \tag{8}$$

Montrons que l'application $x \mapsto (R_I\varphi)(x)$ de $K(A)^+$ dans $\mathbf{R}^+$ est additive. Il suffit évidemment de montrer qu'elle est sous-additive. Soient x_1, $x_2 \in K(A)^+$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $i \in I$ tel que

$$0 \leqq i \leqq x_1 + x_2, \qquad (R_I\varphi)(x_1 + x_2) - \varepsilon \leqq \varphi(i).$$

D'après le théorème de décomposition de [22], il existe y_1 et $y_2 \in A$ tels que

$$i = y_1 y_1^\star + y_2 y_2^\star, \qquad 0 \leqq y_1^\star y_1 \leqq x_1, \qquad 0 \leqq y_2^\star y_2 \leqq x_2. \tag{9}$$

Comme I est un idéal bilatère fermé de A, d'après ([3], th. 2.7), on a $y_1^* y_1$, $y_2^* y_2 \in I$. D'après 1.3, on a

$$(10) \qquad \begin{aligned} \varphi(i) &= \varphi(y_1 y_1^*) + \varphi(y_2 y_2^*) \\ &= \varphi(y_1^* y_1) + \varphi(y_2^* y_2) \leqq (R_I \varphi)(x_1) + (R_I \varphi)(x_2). \end{aligned}$$

Comme ε est quelconque, on a l'assertion en comparant (9) et (10). Comme $\operatorname{lin} K(A)^+ = K(A)$, il existe donc un prolongement linéaire de cette application à $K(A)$, noté encore $R_I \varphi$. Montrons qu'il vérifie la condition (2) de 1.3. Pour tout $y \in K(A)^+$, nous poserons

$$J(y) = \{ i \in I \mid 0 \leqq i \leqq y \}.$$

Soient u un unitaire de $\tilde{A}$ et $x \in K(A)^+$. On a

$$\begin{aligned} (R_I \varphi)(u x u^*) &= \sup_{i \in J(u x u^*)} \varphi(i) = \sup_{i \in J(u x u^*)} \varphi(u^* i u) \\ &= \sup_{j \in J(x)} \varphi(j) = (R_I \varphi)(x). \end{aligned}$$

L'assertion est alors immédiate.

(ii) Soient $j \in K(A)^+ \cap I$. On a $(R_I \varphi)(j) = \varphi(j)$. Soit maintenant $x \in K(A)^+$. On a alors

$$R_I(R_I \varphi)(x) = \sup_{j \in J(x)} (R_I \varphi)(j) = \sup_{\in J(x)} \varphi(j) = (R_I \varphi)(x).$$

Compte tenu de (8), l'assertion est immédiate.

3.3. *Notations.* — Soient A une C^*-algèbre, I un idéal bilatère fermé de A, R_I le projecteur de $T(A)$ donné par la proposition 3.2. Nous noterons $T(A)_I$ (resp. $T(A)^I$) l'ensemble des $\varphi \in T(A)$ tels que $R_I \varphi = 0$ (resp. $R_I \varphi = \varphi$). De plus, $T^e(A)_I$ (resp. $T^e(A)^I$) désignera l'ensemble des génératrices extrémales du cône $T(A)_I$ (resp. $T(A)^I$).

3.4. COROLLAIRE. — *Soient A une C^*-algèbre, I un idéal bilatère fermé de A, et $(u_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une unité approchée filtrante de I. Pour tout $\varphi \in T(A)$, et tout $x \in K(A)$, on a $\lim_\alpha \varphi(x u_\alpha) = (R_I \varphi)(x)$.*

Soient $\varphi \in T(A)$ et $x \in K(A)^+$. On a $0 \leqq x^{1/2} u_\alpha x^{1/2} \leqq x$ avec $x^{1/2} u_\alpha x^{1/2} \in I$ pour tout $\alpha \in \Lambda$. Donc d'après (2') de 1.3, on a

$$(11) \qquad 0 \leqq \varphi(x^{1/2} u_\alpha x^{1/2}) = \varphi(x u_\alpha) \leqq (R_I \varphi)(x).$$

D'autre part, soit $m \in \mathbf{R}$ tel que $m < (R_I \varphi)(x)$. Il existe $j \in I$, tel que $0 \leqq j \leqq x$, $m < \varphi(j)$. Comme $\lim_\alpha j^{1/2} u_\alpha = j^{1/2}$, d'après le lemme 3.1, il existe $\alpha_0 \in \Lambda$ tel que

$$m < \varphi(j^{1/2} . j^{1/2} u_\alpha) = \varphi(j u_\alpha) \qquad \text{pour} \quad \alpha \geqq \alpha_0.$$

On a donc

$$(12) \qquad m < \varphi(u_\alpha^{1/2} j u_\alpha^{1/2}) \leqq \varphi(u_\alpha^{1/2} x u_\alpha^{1/2}) = \varphi(x u_\alpha).$$

Compte tenu de (11), on a $\lim_\alpha \varphi(x u_\alpha) = (R_I \varphi)(x)$ et, par linéarité, l'assertion.

3.5. Corollaire. — *Soient A une C^*-algèbre, I un idéal bilatère fermé de A, et $T(A)$ le cône des C^*-algèbres invariantes positives de A muni de la topologie $\sigma(T(A), K(A))$. Reprenons les notations qui précèdent.*

(i) *$T(A)_I$ est l'ensemble des $\varphi \in T(A)$ tels que $\varphi(K(A) \cap I) = 0$. C'est donc un sous-ensemble fermé de $T(A)$.*

(ii) *$T(A)_I$ et $T(A)^I$ sont deux faces directes supplémentaires de $T(A)$* ([4], *déf.* 1.18).

(iii) *$T^e(A)_I$ [resp. $T^e(A)^I$] est un sous-ensemble fermé (resp. ouvert) de $T^e(A)$.*

(i) Soit $\varphi \in T(A)$. D'après 1.1.5, on a $\varphi(K(A) \cap I) = 0$ si, et seulement si, $\varphi(K(A)^+ \cap I) = 0$. La proposition 3.2 (i) donne alors le résultat.

(ii) L'assertion résulte immédiatement de 3.2 (ii) et de ([4], déf. 1.18).

(iii) est une conséquence de (i) et (ii).

La partie (i) de la proposition qui suit prolonge ([7], prop. 3).

3.6. Proposition. — *Soient A une C^*-algèbre, I un idéal bilatère fermé de A, et θ l'application canonique $A \to A/I$.*

(i) *Pour tout $\varphi \in T(A)_I$, il existe un élément, et un seul, $\Theta_I(\varphi)$ de $T(A/I)$ tel que $\Theta_I(\varphi)(\theta(x)) = \varphi(x)$ pour tout $x \in K(A)$. L'application $\varphi \mapsto \Theta_I(\varphi)$ est une bijection de $T(A)_I$ sur $T(A/I)$. Elle définit de façon naturelle une bijection Θ_I^e de $T^e(A)_I$ sur $T^e(A/I)$ qui est un homéomorphisme.*

(ii) *Pour tout $\varphi \in T(A)^I$, nous noterons $\Theta^I(\varphi)$ l'élément de $T(I)$ restriction de φ à $K(I)$. L'application $\varphi \mapsto \Theta^I(\varphi)$ est une injection de $T(A)^I$ dans $T(I)$. Elle définit de façon naturelle une application continue $\Theta^{e,I}$ de $T^e(A)^I$ dans $T^e(I)$. Supposons A liminaire. Alors $\Theta^{e,I}$ est une bijection de $T^e(A)^I$ sur $T^e(I)$.*

(i) Soit $\varphi \in T(A)$. Le corollaire 3.5 et 1.1.6 montrent l'existence et l'unicité de $\Theta_I(\varphi)$. On vérifie aisément que Θ_I est une bijection. Remarquant que Θ_I est un homéomorphisme de $T_I(A)$ sur $T(A/I)$ pour les topologies $\sigma(T(A), K(A))$ et $\sigma(T(A/I), K(A/I))$, la fin de l'assertion découle de vérifications faciles.

(ii) D'après 1.1.6, on a $K(I) \subset K(A)$. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in T(A)^I$ et $\omega \in T(I)$. Supposons $0 \leqq \omega \leqq \Theta^I(\varphi_1)$. Pour tout $x \in K(A)^+$, posons

$$R\omega(x) = \sup_{0 \leqq i \leqq x, i \in K(I)} \omega(i). \tag{13}$$

D'après 3.2 (i), on a $0 \leqq R\omega(x) \leqq \varphi_1(x) < +\infty$. Comme dans la démonstration de 3.2 (i), il existe $\psi \in T(A)$ tel que $\psi(x) = R\omega(x)$ pour tout $x \in K(A)^+$. On a

$$\Theta^I(\psi) = \omega, \qquad 0 \leqq \psi \leqq \varphi_1.$$

En particulier si $\omega = \Theta^I(\varphi_2)$, comme ψ et φ_2 sont semi-continues inférieurement sur $K(A)^+$, on a $\psi \mid K(A)^+ \cap I = \varphi_2 \mid K(A)^+ \cap I$ d'après 1.1.3, d'où $\psi = \varphi_2$ (3.2 (i)). Il est alors immédiat que l'application Θ^I est une injection de $T(A)^I$ dans $T(I)$ qui transforme une génératrice extrémale de $T(A)^I$ en une génératrice extrémale de $T(I)$. Elle définit une application $\Theta^{e,I}$ de $T^e(A)^I$ dans $T^e(I)$. Montrons que $\Theta^{e,I}$ est continue. Soit X un fermé de $T^e(I)$. Il existe une face F de $T(I)$ fermée pour $\sigma(T(I), K(I))$ telle que $F^e = X$. Soit M l'ensemble des $\varphi \in T(A)$ tels que $\varphi \mid K(I) \in F$. Comme $K(I) \subset K(A)$, M est une face fermée de $T(A)$ pour $\sigma(T(A), K(A))$. Soient ψ^e un élément de $T^e(A)$, et ψ un élément non nul de ψ^e. On a les équivalences

$$\psi^e \in M^e \cap T^e(A)^I \iff \psi \mid K(I) \in F - \{0\} \iff \Theta^{e,I}(\psi^e) \in X.$$

On a donc l'assertion.

Supposons A liminaire. Soit $\varphi^e \in T^e(I)$. D'après la proposition 1.10 (i), il existe $\pi(\varphi^e) \in \hat{I}$ tel que $\varphi = \operatorname{Tr} \pi(\varphi^e) \in \varphi^e$. D'après ([9], 2.11.2), il existe $\tilde{\pi} \in A$ tel que $\tilde{\pi} \mid I = \pi(\varphi^e)$. Comme A est liminaire, $\psi = \operatorname{Tr} \tilde{\pi}$ appartient à $T(A)$. On a $\psi \mid K(I) = \varphi$.

Comme ψ appartient à une génératrice extrémale de $T(A)$, on en déduit, d'après 3.5 (ii), que $\psi \in T(A)^I$. L'application $\Theta^{e,I}$ est donc une bijection de $T^e(A)^I$ sur $T^e(I)$.

3.7. *Remarque.* — Au paragraphe 5, nous montrerons que, pour une C^*-algèbre liminaire, $\Theta^{e,I}$ n'est pas en général un homéomorphisme.

3.8. COROLLAIRE. — *Soient A une C^*-algèbre liminaire, et I un idéal bilatère fermé de A. Supposons que, sur $\hat{A}$, la topologie d'Effros soit égale à celle de Jacobson. Alors il en est de même sur $\hat{I}$ et $(A/I)^\wedge$.*

4. Quelques résultats auxiliaires.

4.1. Lemme. — *Soient E un espace localement convexe séparé, C un sous-ensemble convexe complet de E, et Y un sous-ensemble compact de C. Alors l'enveloppe convexe fermée $\overline{\mathrm{co}}(Y)$ de Y est compacte. Si, de plus, 0 n'appartient pas à $\overline{\mathrm{co}}(Y)$, le plus petit cône convexe fermé de sommet 0 contenant Y est égal à* $\bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}^+} \lambda\, \overline{\mathrm{co}}(Y)$.

Pour une démonstration, *voir* ([1], chap. 2, § 4 cor. de la prop. 3, et § 7 prop. 6).

4.2. Proposition. — *Soient E un espace faible séparé* ([1], chap. 2, § 7, p. 91), *et C un cône convexe saillant complet dans E de sommet O et réticulé pour son ordre propre. On considère une face fermée F du cône C, et une suite $(c_1, c_2, \ldots c_n, \ldots)$ de points non nuls de C portés par des génératrices extrémales de C, telles que $\lim_n c_n = c_0$ existe, soit non nul et appartienne à F. Alors le plus petit sous-cône convexe fermé G de C qui contient F et $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ est une face de C. Les génératrices extrémales de G sont celles de la face F et celles du cône C contenant $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$.*

Soient E' le dual topologique de E, et $Y = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$. L'ensemble Y est compact. Soit $\varphi \in E'$ tel que $\varphi(c_0) \geqq 1$. Il existe alors un entier n tel que, pour tout $n \geqq n_0$, on ait $\varphi(c_n) \geqq 1/2$. Posons alors

$$Y_1 = \overline{\mathrm{co}}\{c_0, c_{n_0}, c_{n_0+1}, c_{n_0+2}, \ldots\} \qquad \text{et} \qquad Y_2 = \mathrm{co}\{c_1, c_2, \ldots, c_{n_0-1}\}.$$

L'ensemble convexe Y_2 est compact. D'après le lemme 4.1, Y_1 l'est aussi, et on a $\varphi(Y_1) \subset [1/2, +\infty[$. D'autre part, on a $\overline{\mathrm{co}}(Y) = \mathrm{co}(Y_1 \cup Y_2)$. Comme le cône C est saillant, on en déduit que $O \notin \overline{\mathrm{co}}(Y)$. Soit G_1 le plus petit cône convexe fermé contenant Y. D'après ([24], prop. 1.2) et le lemme 4.1, pour tout $x \in G_1$, il existe une suite $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots)$ de nombres réels $\geqq 0$ tels que

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n c_n \qquad \text{avec} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n < +\infty. \tag{14}$$

Soit $G = G_1 + F$. D'après ([1], chap. 2, § 6 cor. 2), G est un sous-cône convexe fermé de C. Montrons que c'est une face de C. Soient donc $x \in G$, $y \in C$ tels que $0 \leqq y \leqq x$. D'après (14), on a

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n c_n + f, \quad \text{avec } \lambda_n \geqq 0, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n < +\infty \qquad \text{et} \qquad f \in F.$$

Pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, posons $z_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k c_k$. D'après l'axiome de décomposition de Riesz, il existe $y_0 \in C$ et $f_0 \in F$ tels que $y = y_0 + f_0$, $0 \leq y_0 \leq z_0$. Nous allons construire, par récurrence, deux suites $(t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots)$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$ d'éléments de C telles que, pour tout entier n,

(i) $$0 \leq t_n \leq \lambda_n c_n;$$

(ii) $$0 \leq u_n \leq z_n;$$

(iii) $$y_0 = \sum_{k=1}^{n} t_k + u_n.$$

Supposons la construction faite jusqu'au rang n. On a

$$z_n = \lambda_{n+1} c_{n+1} + z_{n+1}.$$

D'après (ii) et l'axiome de décomposition de Riesz, il existe u_{n+1} et $t_{n+1} \in C$ tels que

$$0 \leq t_{n+1} \leq \lambda_{n+1} c_{n+1}, \qquad 0 \leq u_{n+1} \leq z_{n+1}, \qquad u_n = u_{n+1} + t_{n+1}.$$

Ce qui montre que (i), (ii) et (iii) sont vérifiées pour $n+1$. Comme on a $\lim_n z_n = 0$, d'après (ii) et ([1], chap. 2, § 6, n° 8 lemme 1), on a $\lim_n u_n = 0$. Compte tenu de (iii), on en déduit que $y_0 \in G_1$. Donc

$$y = y_0 + f_0 \in G_1 + F = G.$$

L'assertion est alors immédiate.

4.3. Lemme. — *Soient A une C^*-algèbre, D une sous-algèbre involutive de A dense dans A, et φ_1, φ_2 deux traces semi-continues inférieurement sur A^+ à idéaux de définition $M(\varphi_1)$ et $M(\varphi_2)$ denses dans A. On suppose que $D \subset M(\varphi_1) \cap M(\varphi_2)$ et que, pour tout $x \in D$, on a $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$. Alors les traces φ_1 et φ_2 sont égales.*

Soient s_1, s_2 les bitraces maximales associées à φ_1, φ_2 ([9], 6.4). On a $\mathfrak{N}_{s_1} \supset D$, $\mathfrak{N}_{s_2} \supset D$ et $s_1 | D \times D = s_2 | D \times D$. Donc $s_1 = s_2$ d'après ([9], 6.5.3), d'où $\varphi_1 = \varphi_2$ ([9], 6.4.5).

4.4. Lemme. — *Soient A une C^*-algèbre, U l'ensemble des unitaires de $\tilde{A}$, M un idéal bilatère facial de A, et φ une forme linéaire positive sur M telle que $\sup_{u \in U} |\varphi(uxu^*)| < +\infty$ pour tout $x \in M$.*

(i) *Supposons qu'il existe* $a \in M^+$ *tel que* $\varphi(a^2) \neq 0$. *Alors il existe une forme linéaire positive* f *sur* A *telle que* $f(a) \neq 0$ *et* $f(x) \leq \varphi(x)$ *pour tout* $x \in M^+$.

(ii) *Supposons qu'il existe un sous-ensemble* E *de* M^+ *stable par extraction de racine carrée, tel que l'idéal d'ordre de* A *engendré par* E *soit* M. *Alors* φ *est semi-continue inférieurement sur* M^+.

Le lemme résulte d'une lecture attentive de la démonstration de ([21], th. 3.1).

4.5. Proposition. — *Soient* A *une* C^**-algèbre,* C *un sous-ensemble de* A^+ *stable par extraction de racine carrée,* D *la sous-algèbre involutive de* A *engendrée par* C, Λ *un ensemble filtrant, et* $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *une famille d'éléments de* $T(A)$. *Supposons* D *dense dans* A, *et* $D \subset \bigcap_{\alpha\in\Lambda} M(\varphi_\alpha)$; *supposons que* $\lim_\alpha \varphi_\alpha(x) = l(x)$ *existe et soit fini pour tout* $x \in D$. *Alors il existe une* $\psi \in T(A)$, *et une seule, telle que* $D \subset M(\psi)$ et $\psi(x) = l(x)$ *pour tout* $x \in D$. *De plus, on a* $\lim_\alpha \varphi_\alpha(x) = \psi(x)$ *pour tout* $x \in K(A)$.

Soient E l'ensemble des éléments de A de la forme uxu^* avec $x \in C$ et u unitaire de $\tilde{A}$. Il est stable par extraction de racine carrée. Soit M^+ l'ensemble des $x \in A^+$ tels qu'il existe une suite finie $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ dans E avec

$$0 \leq x \leq \sum_{i=1}^{n} e_i. \tag{15}$$

D'après ([3], cor. 1.5), $M = \operatorname{lin} M^+$ est un idéal bilatère facial de A. Comme $D \subset M$, M est dense dans A; d'après 1.1.3, il contient donc $K(A)$. D'après (15) et l'hypothèse, on a

$$M \subset \bigcap_{\alpha\in\Lambda} M(\varphi_\alpha) \quad \text{et} \quad \limsup_\alpha |\varphi_\alpha(x)| < +\infty \quad \text{pour tout } x \in M.$$

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur Λ plus fin que le filtre $\mathcal{F}$ des sections de Λ. Pour tout $x \in M$, posons $l_\mathfrak{U}(x) = \lim_\mathfrak{U} \varphi_\alpha(x)$. Il est clair que $x \mapsto l_\mathfrak{U}(x)$ est une forme linéaire positive sur M telle que $l_\mathfrak{U}(uxu^*) = l_\mathfrak{U}(x)$ pour tout $x \in M$, u unitaire de $\tilde{A}$ et $l_\mathfrak{U}(x) = l(x)$ pour tout $x \in D$. D'après le lemme 4.4, $l_\mathfrak{U}$ est semi-continue inférieurement sur M^+. Soit ψ la C^*-intégrale invariante positive de A obtenue par restriction de $l_\mathfrak{U}$ à $K(A)$. Nous noterons aussi ψ la trace semi-continue sur A^+ à idéal de définition $M(\psi)$ dense dans A qui lui est associée. Soit $x \in M^+$. D'après 1.1.3, il existe $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ dans $K(A)^+$ telle que $x_n \leq x$ et $\lim_n x_n = x$. On a donc

$$\psi(x) = \lim_n \psi(x_n) = \lim_n l_\mathfrak{U}(x_n) = l_\mathfrak{U}(x).$$

Comme $D \subset M \subset M(\psi)$, l'assertion d'existence est alors immédiate. D'après le lemme 4.3, ψ est unique. Pour tout ultrafiltre $\mathcal{V}$, plus fin que $\mathcal{F}$, on a donc

$$\psi(x) = l_{\mathcal{V}}(x) = \lim_{\mathcal{V}} \varphi_\alpha(x), \qquad \text{où} \qquad x \in K(A),$$

d'où la dernière assertion du lemme.

4.6. *Remarque.* — Dans la proposition 4.5, le fait que la sous-algèbre involutive D de A contienne une partie C de A stable par extraction de racine carré, suffisamment grosse, est essentiel comme le montre l'exemple suivant adapté de ([2], exemple 1.13). Soient A la C^*-algèbre des suites de nombres complexes tendant vers zéro à l'infini, et D la sous-algèbre involutive de A des éléments (s_n) de A tels que $\lim_k k s_k$ existe et soit fini. Pour tout entier k, posons $\varphi_k((s_n)) = k s_k$. Alors il n'existe aucune trace ψ semi-continue inférieurement sur A^+ à idéal de définition dense dans A telle qu'on ait $\psi(x) = \lim_k \varphi_k(x)$ pour tout $x \in D^+$.

4.7. Lemme. — *Soient A une C^*-algèbre liminaire, I un idéal bilatère fermé de A tel que A/I soit commutative, et θ l'application $A \to A/I$. Soit B une sous-algèbre involutive de A telle que* $\operatorname{lin} B^+$ *soit dense dans A et telle que $\pi(x)$ soit un opérateur à trace pour tout $\pi \in \hat{A}$ et tout $x \in B$. Soient Λ un ensemble filtrant, et $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ une famille d'éléments de $\hat{I}$ ne possédant de valeur d'adhérence dans $\hat{I}$ pour la topologie de Jacobson. Considérons un élément π_0 de $\hat{A} - \hat{I}$ et une famille $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ d'éléments de $[0, +\infty[$ tels que :*

(i) $\lim_\alpha a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x)$ *existe et est fini pour tout $x \in B$.*

(ii) *Pour tout voisinage V de π_0 relatif à la topologie de Jacobson, il existe $y \in B^+$ tel que $\theta(y)$ ait son support dans $V \cap (\hat{A} - \hat{I})$ et* $\lim_\alpha a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(y^2) \neq 0$.

Alors π_0 est une valeur limite de $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ pour la topologie d'Effros.

Pour la démonstration, on peut supposer que le filtre des sections de Λ est un ultrafiltre. Soit M^+ l'ensemble des $x \in A^+$ tel que $\limsup_\alpha |a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x)| < +\infty$. Alors $M = \operatorname{lin} M^+$ est un idéal bilatère facial de A dense dans A. D'après le lemme 2.2, on a

$$\limsup_\alpha |a_\alpha \operatorname{rg} \pi_\alpha(x)| < +\infty \quad \text{pour tout } x \in K(A).$$

Pour tout $x \in M$, posons $l(x) = \lim_\alpha a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x)$. Il est clair que $x \mapsto l(x)$ est une forme linéaire positive sur M telle que $l(uxu^*) = l(x)$ pour tout $x \in M$ et tout unitaire u de $\tilde{A}$.

D'autre part, on a pour, tout $x \in K(A)$ et $\alpha \in \Lambda$,

$$a_\alpha \operatorname{Tr} \pi_\alpha(x) \leq a_\alpha \operatorname{rg} \pi_\alpha(x) \| \pi_\alpha(x) \|.$$

On en déduit d'après ([16], lemme 2.3) que $l(x) = 0$ pour tout $x \in K(A) \cap I$. Soit ψ la restriction de l à $K(A)$. D'après la proposition 3.6 (i) et le corollaire 3.5 (i), il existe une mesure de Radon positive μ sur $\hat{A} - \hat{I}$ telle que $\mu \circ \theta = \psi$. Soit F la plus petite face fermée de $T(A)$ contenant ψ. Le support $S(\mu) \subset \hat{A} - \hat{I}$ de la mesure μ est égal à F^e. Comme d'après le lemme 2.12, tout point de $S(\mu)$ est un point limite de $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ pour la topologie d'Effros, on peut supposer que $\pi_0 \notin S(\mu)$. Soit V un voisinage de π_0 dans $\hat{A} - S(\mu)$ pour la topologie de Jacobson tel que $V \cap (\hat{A} - \hat{I})$ soit relativement compact. D'après (ii) et le lemme 4.4 (i), il existe $y \in B^+$ et une forme linéaire positive f sur A tels que :

$$(16) \qquad f(y) \neq 0, \qquad f(x) \leq l(x) \quad \text{pour tout } x \in M^+,$$

et $\theta(y)$ a son support dans $V \cap (\hat{A} - \hat{I})$.

D'après ce qui précède, on a $f(I) = 0$ et $\mu \circ \theta(y) = 0$. D'après 1.1.6, il existe $z \in K(A)^+$ tel que $\theta(z) = \theta(y)$. On a donc $y - z \in I$ et $\psi(z) = 0$. On en déduit, grâce à (16),

$$0 \neq f(y) = f(z) \leq \psi(z) = 0.$$

Cette contradiction donne le lemme.

5. Exemples.

5.1. Constructions des C^*-algèbres $D(\mathcal{C})$.

Nous appellerons *subdivision d'ordre m* de $[0, 1]$, une suite de $m + 1$ nombres réels $(s_0, s_1, \ldots, s_m)$ tels que $s_0 = 0$, $s_m = 1$ et $s_k < s_{k+1}$ pour $k = 0, 1, \ldots, m - 1$. Nous noterons $d(I)$ la borne supérieure des nombres $s_{k+1} - s_k$ pour $k = 0, 1, \ldots, m - 1$.

Nous dirons qu'une subdivision $I = (s_0, s_1, \ldots, s_k)$ est plus fine qu'une subdivision $J = (t_0, t_1, \ldots, t_l)$ si l'on a $\{s_0, \ldots, s_k\} \supset \{t_0, \ldots, t_l\}$. Nous appellerons *tamis* de $[0, 1]$ une suite $(I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots)$ de subdivisions de $[0, 1]$ de finesse croissante telle que $\lim_n d(I_n) = 0$. Soient μ la mesure de Lebesgue de $[0, 1]$, et $H = L^2_{\mathbf{C}}([0, 1])$ l'espace hilbertien des fonctions complexes de carré intégrable pour μ. Nous noterons $A(\infty)$ la sous-C^*-algèbre commutative de $\mathcal{L}(H)$ formée des opérateurs de multiplication par les fonctions complexes continues sur $[0, 1]$.

Pour toute subdivision $I = (s_0, s_1, \ldots, s_m)$ de $[0, 1]$ et $j = 0, 1, \ldots, m - 1$, nous noterons $p(I, s_j)$ le projecteur $f \mapsto \chi_{[s_j, s_{j+1}]} f$ de $\mathcal{L}(H)$, et $B(I)$

la $C^{\star}$-algèbre commutative engendrée, dans $\mathcal{L}(H)$, par $p(I, s_0)$, $p(I, s_1), \ldots, p(I, s_{m-1})$.

5.1.1. — Soit $I = (s_0, s_1, \ldots, s_m)$ une subdivision d'ordre m de $[0, 1]$. Nous allons construire une sous-$C^{\star}$-algèbre $A(I)$ de $\mathcal{L}(H)$, contenant $B(I)$ et isomorphe à la $C^{\star}$-algèbre des matrices complexes de type (m, m). Soient $k, l \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, et $f \in H$. Posons $d_k = s_{k+1} - s_k$.

Définissons alors l'élément $Q_{k,l}(f)$ de H par

$$Q_{k,l}(f)(r) = 0 \qquad \text{si} \quad r \in [0, 1] - [s_l, s_{l+1}[,$$

$$Q_{k,l}(f)(r) = \sqrt{\frac{d_k}{d_l}}\, f\left(s_k + u\frac{d_k}{d_l}\right) \qquad \text{si} \quad r \in [s_l, s_{l+1}[\quad \text{et} \quad u = r - s_l.$$

On vérifie facilement que $f \mapsto Q_{k,l}(f)$ est un opérateur partiellement isométrique de H. Plus précisément, on a, pour $i, j, k, l, \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$,

$$Q_{i,j} \cdot Q_{k,l} = \delta_{i,l} Q_{k,j}, \qquad Q^{\star}_{i,j} = Q_{j,i}, \qquad Q_{j,j} = p(I, s_j).$$

Les combinaisons linéaires des $Q_{k,l}$ forment une sous-$C^{\star}$-algèbre $A(I)$ de $\mathcal{L}(H)$ qui convient.

5.1.2. — Soit $\mathfrak{G} = (I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots)$ un tamis de $[0, 1]$. Pour tout entier $k > 0$, notons $A(k)$ la $C^{\star}$-algèbre $A(I_k)$ construite en 5.1.1. Soit $T = \{1, 2, \ldots, k, \ldots, \infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de $\mathbf{N}$. Considérons l'ensemble Θ des applications x normiquement continues de T dans $\bigcup_{t \in T} A(t)$ telles que $x(t) \in A(t)$ pour tout $t \in T$. Alors $(A(t)_{t \in T}, \Theta)$ est un champ continu de $C^{\star}$-algèbres ([9], déf. 10.3.1). En effet, comme $\lim_n d(I_n) = 0$, pour tout $y \in A(\infty)$, il existe une suite $(x(1), x(2), \ldots, x(k), \ldots)$ dans $\mathcal{L}(H)$ avec $x(k) \in B(I_k) \subset A(k)$ et $\lim_k x(k) = y$. Il est ensuite facile de vérifier ([9], 10.1.2 et 10.3). Nous noterons $D(\mathfrak{G})$ la $C^{\star}$-algèbre définie par $(A(t), \Theta)$ ([9], 10.4.1). Elle est séparable d'après ([9], 10.4.7), et possède une unité e.

5.2. Spectre et propriétés de $D(\mathfrak{G})$.

Soit $\mathfrak{G} = (I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots)$ un tamis de $[0, 1]$, et $D(\mathfrak{G})$ la $C^{\star}$-algèbre construite en 5.1. D'après ([9], 10.4.3), $\hat{D}(\mathfrak{G})$ est réunion de deux ensembles disjoints X et Y.

(i) X est l'ensemble des représentations $\rho_k (k \in \mathbf{N})$ définies par $\rho_k(x) = \pi_k(x(k))$ où $x \in D(\mathfrak{G})$ (π_k est la représentation irréductible unique de la $C^{\star}$-algèbre $A(k)$).

(ii) Y est l'ensemble des représentations $\sigma_r (r \in [0, 1])$ définies par $\sigma_r(x) = x(\infty)(r)$ où $x \in D(\mathfrak{G})$.

Par la suite, nous identifierons X (resp. Y) à $\mathbf{N}$ (resp. $[0, 1]$), et munirons $[0, 1]$ de sa topologie usuelle.

Déterminons la topologie de Jacobson de $\hat{D}(\mathfrak{T})$. Nous allons montrer que les ensembles fermés dans $\hat{D}(\mathfrak{T})$, pour cette topologie, sont les ensembles $G_1 \cup H_1$ avec $G_1 \subset \mathbf{N}$ et $H_1 \subset [0, 1]$ tels que :

(*a*) H_1 est un ensemble fermé dans $[0, 1]$.

(*b*) Si G_1 est un ensemble infini, on a $H_1 = [0, 1]$.

Soit $W = G \cup H$, avec $G \subset \mathbf{N}$ et $H \subset [0, 1]$, un sous-ensemble de $\hat{D}(\mathfrak{T})$. Pour tout $t \in T$, soit $E(t) \subset A(t)$ l'intersection des noyaux des représentations π de $\hat{A}(t)$ telles que la représentation irréductible $x \mapsto \pi(x(t))$ de $D(\mathfrak{T})$ appartienne à W. On a :

(i) Pour tout entier $k > 0$, $E(k) = 0$ (resp. $A(k)$) si $k \in G$ (resp. $\notin G$).

(ii) $E(\infty)$ est l'ensemble I des fonctions de $A(\infty)$ qui s'annulent sur l'adhérence $\overline{H}$ de H dans $[0, 1]$.

Soient J l'ensemble des $x \in D(\mathfrak{T})$ tels que $x(t) \in E(t)$, pour tout $t \in T$, et t' un élément de T. Nous noterons $J(t')$ l'image de J par l'application $x \mapsto x(t')$ de $D(\mathfrak{T})$ dans $A(t')$. On a :

(i) Pour tout entier $k > 0$, $J(k) = 0$ (resp. $A(k)$) si $k \in G$ (resp. $\notin G$).

(ii) $J(\infty)$ est égal à I (resp. $\{0\}$) si l'ensemble G est fini (resp. infini).

Soit π une représentation irréductible de $A(t')$. D'après ([17], th. 1.2), la représentation $x \mapsto \pi(x(t'))$ de $D(\mathfrak{T})$ appartient à l'adhérence $\overline{W}$ de W si, et seulement si, $\ker \pi \supset J(t')$. D'après ce qui précède, il est alors facile de voir que $\overline{W}$ est égal à $G \cup \overline{H}$ ou $G \cup [0, 1]$, selon que G est fini ou infini, ce qui donne l'assertion.

Soit e l'unité de $D(\mathfrak{T})$. Comme $\lim_k d(I_k) = 0$, on a $\lim_k \operatorname{rg} \pi_k(e) = +\infty$. La C*-algèbre $D(\mathfrak{T})$ n'est donc pas uniformément liminaire. D'autre part, d'après ([8], prop. 4.4) elle est à trace continue généralisée ([7], § 10, déf. 4). On peut vérifier facilement qu'elle est de hauteur 2.

5.3. **Spectre d'Effros de** $D(\mathfrak{T})$.

Soient $\mathfrak{T} = (I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots)$ un tamis de $[0, 1]$, et $D(\mathfrak{T})$ la C^*-algèbre liminaire associée. Pour tout entier $k > 0$, notons m_k l'ordre de I_k. Nous supposerons, dans 5.3, qu'il existe une mesure de Radon positive ν sur $[0, 1]$ telle que

$$(17) \qquad \lim_k \frac{1}{m_k} \operatorname{Tr} \rho_k(x) = \nu(x(\infty)) \quad \text{pour tout } x \in D(\mathfrak{T}),$$

et noterons ψ la trace finie $x \mapsto \nu(x(\infty))$ de $D(\mathfrak{T})$. Soit S le support de ν. Déterminons la topologie d'Effros de $\hat{D}(\mathfrak{T})$. Nous allons montrer que les ensembles fermés dans $\hat{D}(\mathfrak{T})$ pour cette topologie sont les ensembles $G_2 \cup H_2$ avec $G_2 \subset \mathbf{N}$ et $H_2 \subset [0, 1]$ tels que :

(*a*) H_2 est un ensemble fermé dans $[0, 1]$.

(*b*) Si G_2 est un ensemble infini, on a $H_2 \supset S$.

Soit $W = G \cup H$ avec $G \subset \mathbf{N}$ et $H \subset [0, 1]$ un ensemble fermé dans $\hat{D}(\mathfrak{T})$ pour la topologie d'Effros. Montrons que W vérifie les conditions (*a*) et (*b*). Par définition, il existe une face F de $T(D(\mathfrak{T}))$ fermée pour $\sigma(T(D(\mathfrak{T})), D(\mathfrak{T}))$ telle que $F^e = W$. Soit $r \in [0, 1]$ et $(r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots)$ une suite dans H telle que $\lim_n r_n = r$. On a, pour tout $x \in D(\mathfrak{T})$,

$$\lim_n x(\infty)(r_n) = x(\infty)(r)$$

ou encore,

$$\lim_n \operatorname{Tr} \sigma_{r_n}(x) = \operatorname{Tr} \sigma_r(x).$$

On en déduit que l'on a $\operatorname{Tr} \sigma_r \in F$, d'où $r \in H$. L'ensemble H est donc fermé dans $[0, 1]$. Supposons que G soit un ensemble infini. Soit K la plus petite face fermée de $T(D(\mathfrak{T}))$ contenant ψ. On a $K^e = S$. D'après (17), ψ appartient à F, d'où $K \subset F$ et $S \subset G$. Réciproquement, soit un ensemble $W = G_2 \cup H_2$ avec $G_2 \subset \mathbf{N}$ et $H_2 \subset [0, 1]$ qui vérifie les conditions (*a*) et (*b*). Montrons que W est un ensemble fermé dans $\hat{D}(\mathfrak{T})$ pour la topologie d'Effros. Compte tenu de la proposition 1.10 (iii) et de 5.2, on peut supposer que G_2 est un ensemble infini. D'après (17) et la proposition 4.2, il existe une face fermée F de $T(D(\mathfrak{T}))$ telle que $F^e = W$, d'où l'assertion.

5.4. Cas particuliers.

Dans ce paragraphe, nous allons préciser deux types de tamis. Soient un tamis de $[0, 1]$ composé de subdivisions I_k d'ordre m_k, et $D(\mathfrak{T})$ la C^*-algèbre associée. Pour tout entier $k > 0$, nous noterons $S(k)$ l'ensemble des points de la subdivision I_k différents de 1. Posons

$$\varphi_k(x, s) = \operatorname{Tr} \pi_k(p(I_k, s)\, x(k)\, p(I_k, s))$$

avec

$$k \in \mathbf{N}, \quad s \in S(k) \quad \text{et} \quad x \in D(\mathfrak{T}).$$

On a alors les relations

$$(18) \qquad p(I_k, s)\, x(k)\, p(I_k, s) = \varphi_k(x, s)\, p(I_k, s), \qquad |\varphi_k(x, s)| \leqq \|x\|,$$

$$\operatorname{Tr} \rho_k(x) = \sum_{s \in S(k)} \varphi_k(x, s).$$

5.4.1. — Soient $r_1, r_2, \ldots, r_l$ points distincts de $[0, 1]$. Pour $j = 1, 2, \ldots, l$ et tout $k \in \mathbf{N}$, nous noterons $V(j, k)$ l'ensemble des $s_i \in S(k)$ tels que $[s_i, s_{i+1}[\subset]r_j - 2^{-k}, r_j + 2^{-k}[$, et poserons

$$W(k) = S(k) - \bigcup_{j=1}^{l} V(j, k).$$

Choisissons alors le tamis $\mathfrak{T}$ avec la propriété suivante :

Pour k suffisamment grand, les ensembles $V(j, k)$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ ont même cardinalité n_k et l'on a $\lim_k m_k/n_k = l$.

Nous allons montrer qu'on a, pour tout $x \in D(\mathfrak{T})$,

$$\lim_k \frac{1}{m_k} \operatorname{Tr} \rho_k(x) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \sigma_{r_j}(x). \tag{19}$$

Soient $x \in D(\mathfrak{T})$ et $\varepsilon > 0$. Pour $j = 1, 2, \ldots, l$, posons $t_j = x(\infty)(r_j)$. Il existe un entier $k_0 > 0$ tel que, pour tout $k \geqq k_0$, on ait :

(i) $\| x(k) - x(\infty) \| \leqq \varepsilon$;

(ii) Pour $j = 1, 2, \ldots, l$, les ensembles $V(j, k)$ de cardinal n_k sont disjoints, et l'on a $| x(\infty)(s) - t_j | \leqq \varepsilon$ pour tout $s \in V(j, k)$.

Compte tenu de (18), pour tout $k \geqq k_0$, on a, d'après (i) et (ii),

$$| \varphi_k(x, s) - t_j | \leqq 2\varepsilon \qquad \text{pour} \quad s \in V(j, k),$$

d'où, par sommation,

$$\left| \frac{1}{m_k} \sum_{j=1}^{l} \sum_{s \in V(j,k)} \varphi_k(x, s) - \frac{n_k}{m_k} \sum_{j=1}^{l} t_j \right| \leqq 2 l \varepsilon \frac{n_k}{m_k}.$$

D'autre part, d'après (18), on a

$$\left| \frac{1}{m_k} \sum_{s \in W(k)} \varphi_k(x, s) \right| \leqq \left(1 - l \frac{n_k}{m_k} \right) \| x \|.$$

Il existe donc un entier $k_1 \geqq k_0$ tel que, pour tout $k \geqq k_1$, on ait

$$\left| \frac{1}{m_k} \operatorname{Tr} \rho_k(x) - \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} t_j \right| \leqq 4\varepsilon,$$

d'où l'assertion.

5.4.2. — Soit $r \in [0, 1]$. Notons ν_r la mesure de Radon positive sur $[0, 1]$, définie par $\nu_r(f) = \frac{1}{r} \mu(f . \chi_{[0, r]})$ avec $f \in C([0, 1])$.

Pour tout entier $k > 0$, nous poserons

$$\alpha(k) = r.2^{-2k} \qquad \text{et} \qquad \beta(k) = (1-r).2^{-k}.$$

Nous noterons $R_1(k)$ l'ensemble $\{0, \alpha(k), 2\alpha(k), 3\alpha(k), \ldots, (2^{2k}-1)\alpha(k)\}$, et $R_2(k)$ l'ensemble $\{r, r+\beta(k), \ldots, r+(2^k-1)\beta(k)\}$.

Considérons alors le tamis $\mathcal{C} = (I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots)$ de $[0, 1]$ tel que, pour tout entier $k > 0$, on ait $S(k) = R_1(k) \cup R_2(k)$.

Nous allons montrer qu'on a, pour tout $x \in D(\mathcal{C})$,

$$(20) \qquad \lim_k \frac{1}{m_k} \operatorname{Tr} \rho_k(x) = \nu_r(x(\infty)) \qquad (m_k = 2^{2k} + 2^k).$$

Soient $x \in D(\mathcal{C})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe un entier $k_0 > 0$ tel que :

(i) Pour tout entier $k \geqq k_0$, on a $\| x(k) - x(\infty) \| \leqq \varepsilon$;

(ii) Pour tout $s \in S(k_0)$, il existe $\lambda(s) \in \mathbf{C}$ avec

$$\left\| x(\infty) - \sum_{s \in S(k_0)} \lambda(s)\, p(I_{k_0}, s) \right\| \leqq \varepsilon.$$

On a donc

$$\left| \partial_r(x(\infty)) - \sum_{s \in R_1(k_0)} \lambda(s).2^{-2k_0} \right| \leqq \varepsilon.$$

Soient un entier $k \geqq k_0$ et $s \in S(k_0)$. D'après (i) et (ii), on a, pour tout $s' \in [s + \alpha(k_0)[\cap S(k)$,

$$|\varphi_k(x, s') - \lambda(s)| \leqq 2\varepsilon.$$

Par sommation on en déduit

$$\left| \frac{1}{m_k} \sum_{s' \in R_1(k)} \varphi_k(x, s') - \frac{2^{2k}}{m_k} \sum_{s \in R_1(k_0)} 2^{-2k_0} \lambda(s) \right| \leqq \frac{2^{2k}}{m_k}.2\varepsilon \leqq 2\varepsilon.$$

D'autre part, d'après (18), on a, pour tout entier k,

$$\left| \frac{1}{m_k} \sum_{s' \in R_2(k)} \varphi_k(x, s') \right| \leqq \frac{2^k}{m_k} \| x \|.$$

D'après (18) et ce qui précède, il existe un entier $k_1 \geqq k_0$ tel que, pour tout $k \geqq k_1$, on ait

$$\left| \frac{1}{m_k} \operatorname{Tr} \rho_k(x) - \nu_r(x(\infty)) \right| \leqq 5\varepsilon,$$

d'où l'assertion.

5.5. Proposition.

(i) *Toutes les C^*-algèbres $D(\mathfrak{T})$ ont même spectre de Jacobson deux à deux.*

(ii) *Il existe une infinité de C^*-algèbres $D(\mathfrak{T})$ avec des spectres d'Effros non homéomorphes.*

(iii) *Il existe une C^*-algèbre $D(\mathfrak{T})$ avec un spectre d'Effros séparé.*

(iv) *Il existe une C^*-algèbre $D(\mathfrak{T})$ telle que, sur $\hat{D}(\mathfrak{T})$, la topologie d'Effros soit égale à celle de Jacobson.*

Cette proposition permet d'obtenir notamment ([15], th. 2.16).

(i) Elle résulte de 5.2.

(ii) Reprenant 5.4.1, on voit que, pour tout entier $l \geq 2$, la C^*-algèbre $D(\mathfrak{T})$ a, d'après 5.3, un spectre d'Effros qui contient exactement l points non séparés ([6], p. 116, déf.). Faisons alors varier l dans $\mathbf{N}$, on a l'assertion.

L'assertion (iii) résulte de 5.4.1 avec $l = 1$. Enfin, (iv) découle de 5.4.2 avec $r = 1$.

5.6. Contre-exemple sur la factorisation.

5.6. Proposition. — *Il existe une C^*-algèbre D liminaire séparable, et A un idéal bilatère fermé de D, tels que la restriction de la topologie d'Effros de $\hat{D}$ à $\hat{A}$ soit strictement plus fine que la topologie d'Effros de $\hat{A}$.*

Reprenons les notations de 5.1, 5.2 et 5.4. Soient $\mathfrak{T} = (I_1, I_2, \ldots, I_k, \ldots)$ le tamis construit en 5.4.2 pour $r = 1/2$ et τ la mesure de Radon positive sur $[0, 1]$ définie par $\tau(f) = 2\mu(f.\chi_{[1/2, 1]})$ avec $f \in C([0, 1])$. Posons $D = D(\mathfrak{T})$. Soit A (resp. I) l'ensemble des $x \in D$ tels que $x(\infty)(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1/2]$ (resp. $[0, 1]$). Alors A (resp. I) est un idéal bilatère fermé de D et $\hat{A}$ (resp. $\hat{I}$) s'identifie à $\mathbf{N} \cup]1/2, 1]$ (resp. $\mathbf{N}$). Sur $\hat{A}$, soient Θ_1 la topologie de Jacobson, Θ_2 la topologie d'Effros, et Θ_3 la topologie induite par la topologie d'Effros de $\hat{D}$. D'après 5.2 et ([9], 3.2.1) les ensembles fermés dans $\hat{A}$ pour Θ_1 sont les ensembles $G \cup H$ avec $G \subset \mathbf{N}$ et $H \subset]1/2, 1]$ tels que :

(a) H est fermé dans $]1/2, 1]$.

(b) Si G est infini, on a $H =]1/2, 1]$.

D'après 5.3, les ensembles fermés dans A pour Θ_3 sont les ensembles $G \cup H$ avec $G \subset \mathbf{N}$ et $H \subset]1/2, 1]$ tels que H soit fermé dans $]1/2, 1]$. Reprenons les notations de 5.1 et 5.4.2, et posons $q(k) = \sum_{s \in R_2(k)} p(I_k, s)$.

Soit alors B l'ensemble des $x \in A$ tels qu'il existe un entier $k_0(x) > 0$ avec la propriété suivante : Pour tout entier $k \geqq k_0(x)$, $x(k)$ appartient à $q(k)A(k)q(k)$. On voit facilement que B est une sous-algèbre involutive de A telle que lin B^+ soit dense dans A. Un calcul similaire à celui fait en 5.4.2 montre que l'on a

$$\lim_k \frac{1}{2^k} \operatorname{Tr} \rho_k(x) = \tau(x(\infty)) \quad \text{pour tout } x \in B.$$

Soit $W = G \cup H$ avec $G \subset \mathbf{N}$ et $H \subset]1/2, 1]$, un ensemble fermé dans $\hat{A}$ pour Θ_2. Raisonnant comme en 5.3, il est facile de vérifier que H est fermé dans $]1/2, 1]$. Supposons G infini. Le lemme 4.7, appliqué à A, I, B, $(\rho_k)_{k \in G}$, montre que l'on a $H =]1/2, 1]$. Donc $\Theta_2 = \Theta_1$, d'où la proposition.

6. Groupes de Lie réels nilpotents simplement connexes et spectre d'Effros.

6.1. Calcul fonctionnel dans $\mathcal{S}(G)$.

6.1.1. *Notations et rappels.* — Soient G un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe de dimension m et $\mathcal{G}$ son algèbre de Lie. On sait que l'application exponentielle $l \mapsto \operatorname{Exp} l$ permet d'identifier ces deux espaces topologiques.

Choisissons une base de Jordan-Hölder $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$ de $\mathcal{G}$. Pour tout $x \in \mathcal{G}$, nous noterons $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le système des coordonnées de x pour cette base. Nous appellerons monôme une fonction sur $\mathcal{G}$ de la forme $x \mapsto s.x_{i_1}^{\alpha_1}.x_{i_2}^{\alpha_2}\ldots x_{i_j}^{\alpha_j}$ où $s \in \mathbf{C}$, $i_1, i_2, \ldots, i_j$ sont des entiers positifs distincts $\leqq m$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$ des entiers positifs quelconques (son image par Exp sera appelée monôme sur G). Rappelons (*cf.* par exemple [25], p. 90, ligne 13) que G est un groupe unimodulaire dont une mesure de Haar dg, compte tenu de l'identification naturelle ci-dessus, est égale à la mesure de Lebesgue $dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ de $\mathbf{R}^n$.

Nous noterons $L^p(G)$ l'espace de Banach des fonctions complexes sur G de puissance $p^{\text{ième}}$ intégrables pour cette mesure, et $M^1(G)$ l'algèbre de Banach involutive des mesures complexes bornées sur G. Dans $M^1(G)$ nous représenterons le produit de convolution par $\star$ et l'involution par $*$. Pour tout $f \in L^1(G)$, posons $\overset{p}{\star}f = f \star f \star \ldots \star f$ (p facteurs). Nous noterons $e^{\star f}$ l'élément de $M^1(G)$ égal à $1 + f + 1/2!\, \overset{2}{\star}f + \ldots + 1/p!\, \overset{p}{\star}f + \ldots$ et $u(f)$ l'élément de $L^1(G)$ égal à $e^{\star i f} - 1$. Nous noterons $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur G et $\mathcal{D}(G)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{S}(G)$ à support compact.

Le lemme suivant est adapté de ([13], lemme 6), et la démonstration est analogue.

6.1.2. LEMME. — *Soient G un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe, f un élément de $L^1(G) \cap L^2(G)$, nul en dehors d'un ensemble compact K, tel que $f = f^*$. Soit M un monôme sur G. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors la fonction $x \mapsto M(x)\, u(\lambda f)(x)$ appartient à $L^1(G)$, et il existe un entier k_0 tel que l'on ait dans $L^1(G)$:*

$$\| M.u(\lambda f) \|_1 = O(|\lambda|^{k_0}) \qquad \text{quand} \quad |\lambda| \mapsto +\infty.$$

Nous nous contenterons de montrer la deuxième partie de l'assertion dans le cas où $\lambda \to +\infty$, car la proposition en résulte facilement. On peut supposer que $\|f\|_1 \leq 1$ et que K contient l'unité e de G. Soient $\lambda \in \mathbf{R}^+$ et $n = [\lambda] + 1$. On a

$$\| M.u(\lambda f) \|_1 = \int_{K^{n^3-1}} | M(x)\, u(\lambda f)(x) |\, dx + \int_{G - K^{n^3-1}} | M(x)\, u(\lambda f)(x) |\, dx$$

et

$$\int_{K^{n^3-1}} | M(x)\, u(\lambda f)(x) |\, dx \leq \left(\int_{K^{n^3-1}} | u(\lambda f)(x) |^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{K^{n^3-1}} | M(x) |^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après ([13], lemme 5), on a

$$\left(\int_{K^{n^3-1}} | u(\lambda f)(x) |^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \| u(\lambda f) \|_2 \leq \| \lambda f \|_2.$$

D'après ([13], lemmes 2 et 3), pour n suffisamment grand, il existe un entier k' tel que

$$\left(\int_{K^{n^3-1}} | M(x) |^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} = O(n^{k'}).$$

On en déduit l'existence d'un entier k_0 tel que

$$\int_{K^{n^3-1}} | M(x)\, u(\lambda f)(x) |\, dx = O(\lambda^{k_0}) \qquad \text{quand} \quad \lambda \to +\infty.$$

D'autre part, pour tout entier $p > 0$, $\overset{p}{*}f$ est nulle hors de K^p. Comme $e \in K$, on a $K \subset K^2 \subset \ldots \subset K^p \subset \ldots$. On en déduit

$$\int_{G - K^{n^3-1}} | M(x)\, u(\lambda f)(x) |\, dx \leq \sum_{p=n^3}^{+\infty} \frac{\lambda^p}{p!} \int_{K^p} | (\overset{p}{*}f)(x)\, M(x) |\, dx.$$

Appliquant ([13], lemme 2), il existe un entier l_0 et un entier n_0 tels que si $n \geqq n_0$, on ait pour tout $p \geqq n^3$:

$$\int_{K^p} |M(x)(\overset{p}{*}f)(x)|\,dx \leqq p^{l_0}\,\|f\|_1^p \leqq p^{\circ} \leqq n^p.$$

Pour $n \geqq n_0$, on a donc

$$\int_{G-K^{n^3-1}} |M(x)\,u(\lambda f)(x)|\,dx \leqq \sum_{p=n^3}^{\infty} \frac{n^{2p}}{p!} \leqq \frac{n^{2n^3}}{(n^3)!}\,e^{n^2},$$

soit d'après la formule de Stirling :

$$= O\left(n^{2n^3}\,e^{n^2}\,(n^3)^{-n^3}\,n^{-\frac{3}{2}}\,e^{n^3}\right) = O\left(n^{-n^3-\frac{3}{2}}\,e^{n^3+n^2}\right).$$

Cette dernière expression tend vers zéro quand $n \to +\infty$, d'où l'assertion.

Le lemme suivant a été inspiré par ([13], lemme 7).

6.1.3. LEMME. — *Soient G un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe, $C^*(G)$ la C^*-algèbre du groupe G, f un élément de $\mathcal{D}(G)$ tel que $f = f^*$, et Φ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ telle que $\Phi(0) = 0$. Alors on a $\Phi(f) \in \mathcal{S}(G)$ ($\Phi(f)$ résultant de f par application du calcul fonctionnel au sens de Gelfand dans $C^*(G)$).*

Soit K un ensemble compact dans G contenant le support de f et l'unité e de G. On peut supposer pour la démonstration que $\|f\|_\infty \leqq 1$.

(*a*) *Étude de la fonction $x \mapsto u(\lambda f)(x)$, où $x \in G$ et $\lambda \in [-r, r]$.* — Pour tout entier $n > 0$, $x \in G$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, posons

$$a_n(x, \lambda) = \frac{(i\lambda)^n}{n!}(\overset{n}{*}f)(x).$$

Comme la fonction $x \mapsto (\overset{n}{*}f)(x)$ a son support dans K^n, d'après ([13], lemme 3), il existe deux entiers n_0, et k_0 tels que, pour tout $n \geqq n_0$ et $\lambda \in [-r, r]$, on ait

$$|a_n(x, \lambda)| \leqq \frac{r^n}{n!}\,n^{k_0}, \qquad x \in G.$$

Pour tout $x \in G$, $\lambda \in [-r, r]$, on a donc

$$u(\lambda f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x, \lambda)$$

et la fonction $(\lambda, x) \mapsto u(\lambda f)(x)$ est continue par rapport aux deux variables. Soient D un opérateur différentiel invariant à gauche, et M un monôme sur G. Pour tout entier $n > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a

$$M(x) D(a_n(., \lambda))(x) = \frac{(i\lambda)^n}{n!} \int_G M(x) (\overset{n-1}{\star} f)(y) Df(y^{-1}x)\, dy.$$

D'après ([13], lemmes 2 et 3), il existe deux entiers > 0, n_1 et k_1 tels que, pour tout $n \geqq n_1$ et $\lambda \in [-r, r]$, on ait

$$(21) \qquad |M(x) D(a_n(., \lambda))(x)| \leqq \frac{r^n}{n!} n^{k_1} \quad \text{pour tout } x \in G.$$

Remarquons que l'on a, pour tout entier $n > 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$(22) \qquad M(x) D(a_n(., \lambda))(x) = 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in G - K^n.$$

D'après (21), on peut appliquer l'opérateur différentiel D à la fonction $x \mapsto u(\lambda f)(x)$, où $x \in G$ et $\lambda \in [-r, r]$.

D'autre part, soit $\varepsilon > 0$. Choisissons un entier $n_2 \geqq n_1$ tel que

$$\sum_{n=n_2}^{+\infty} \frac{r^n}{n!} n^{k_1} \leqq \varepsilon.$$

D'après (21) et (22), on a, pour tout $\lambda \in [-r, r]$ et $x \in G - K^{n_2}$

$$|M(x) D(u(\lambda f))(x)| \leqq \sum_{n=n_2}^{\infty} |M(x) D(a_n(., \lambda))(x)| \leqq \sum_{n=n_2}^{+\infty} \frac{r^n}{n!} n^{k_1} \leqq \varepsilon.$$

En résumé, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$ la fonction $x \mapsto u(\lambda f)(x)$ appartient à $\mathcal{S}(G)$ ([11], lemme 2) et la décroissance rapide à l'infini est uniforme sur tout compact de $\mathbf{R}$.

Dans ce qui suit, nous supposerons fréquemment $\lambda \geqq 0$. Il y a évidemment l'assertion pour $\lambda \leqq 0$ qui s'obtient de façon similaire.

(*b*) *Définition de la fonction g.* — Soient $\lambda \in \mathbf{R}$, $[\lambda]$ la partie entière de λ, $\lambda_s = \lambda - [\lambda]$, et h la fonction $u(f) \in \mathcal{S}(G)$ (*cf.* (*a*)). Dans l'algèbre de Banach $M^1(G)$, on a

$$\begin{aligned} u(\lambda f) = e^{\star i\lambda f} - 1 &= e^{\star i(\lambda-1)f} \star (1 + h) - 1 \\ &= e^{\star i(\lambda-1)f} \star h + u((\lambda - 1) f) \\ &= u((\lambda - 1) f) \star h + h + u((\lambda - 1) f). \end{aligned}$$

Par récurrence et sommation, on en déduit l'égalité suivante dans $L^1(G)$:

$$(23)\qquad u(\lambda f) = [\lambda] h + u(\lambda_s f) + \sum_{p=0}^{[\lambda]-1} u((\lambda_s + p) f) \star h.$$

Comme les deux membres de l'égalité (23) représentent des fonctions continues sur G, on a, pour tout $x \in G$,

$$(24)\quad u(\lambda f)(x) = [\lambda] h(x) + u(\lambda_s f)(x) + \sum_{p=0}^{[\lambda]-1} (u((\lambda_s + p) f) \star h)(x).$$

On a donc, pour tout $x \in G$ et $\lambda \in \mathbf{R}^+$,

$$(25)\ |u(\lambda f)(x)| \leq \lambda \|h\|_\infty + \sup_{\mu \in (-1, 1)} \|u(\mu f)\|_\infty + \sum_{p=0}^{[\lambda]-1} \|u((\lambda_s + p) f)\|_1 \|h\|_\infty.$$

Comme l'application $\lambda \mapsto \|u(\lambda f)\|_1$ sur $\mathbf{R}$ est continue, d'après le lemme 6.1.2, il existe $k_2 \in \mathbf{N}$ et $c_0 \in \mathbf{R}^+$ tels que l'on ait $\|u(\lambda f)\|_1 \leq c_0 |\lambda|^{k_2}$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. D'après (25), il existe donc $k_3 \in \mathbf{N}$ et $c_1 \in \mathbf{R}^+$ tels que l'on ait, pour tout $x \in G$ et $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$(26)\qquad |u(\lambda f)(x)| \leq c_1 |\lambda|^{k_3}.$$

Notant $\lambda \mapsto \hat{\Phi}(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} \exp(-i\lambda\mu)\,\Phi(\mu)\,d\mu$ la transformée de Fourier de Φ, on peut, pour tout $x \in G$, définir l'intégrale

$$g(x) = \int_{\mathbf{R}} u(\lambda f)(x)\,\hat{\Phi}(\lambda)\,d\lambda.$$

(*c*) *Propriétés de la fonction* g. — D'après (*a*) et (26), on voit facilement que la fonction $x \mapsto g(x)$ est continue. Soient $\lambda \in \mathbf{R}^+$, D un opérateur différentiel invariant à gauche sur G, et M un monôme sur G. Pour tout entier p tel que $1 \leq p \leq [\lambda]$, posons

$$b_p(x, \lambda) = (u((\lambda_s + p) f) \star h)(x) \quad \text{pour tout } x \in G.$$

On a

$$(27)\qquad D(b_p(., \lambda))(x) = \int_G (Dh)(y^{-1}x)\, u((\lambda_s + p) f)(y)\,dy.$$

D'après la formule de Hausdorff (*cf.* par exemple [25], th. p. 82), il existe $2l$ monômes $P_1, P_2, \ldots, P_l$ et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$ sur G tels que l'on ait, pour tout $x, y \in G$,

$$M(x) = \sum_{j=1}^{l} P_j(y^{-1}x)\, Q_j(y).$$

Posons $d_j = \sup_{z \in G} |P_j(z)(Dh)(z)|$. D'après (27), on a, pour tout $x \in G$,

$$|M(x)D(b_p(.,\lambda))(x)| \leq \sum_{j=1}^{l} \int_G |P_j(y^{-1}x)Dh(y^{-1}x)|.|Q_j(y)\,u((\lambda_s+p)f)(y)|\,dy$$

$$\leq \sum_{j=1}^{l} d_j \,\|Q_j\, u((\lambda_s+p)f)\|_1.$$

Comme l'application $\lambda \mapsto \|Q_j u(\lambda f)\|_1$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ est continue, d'après le lemme 6.1.2 et (24), il existe $k_4 \in \mathbf{N}$ et $c_2 \in \mathbf{R}^+$ tels que l'on ait, pour tout $x \in G$ et $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$|M(x)D(u(\lambda f))(x)| \leq c_2 |\lambda|^{k_4}.$$

Cela permet d'affirmer que l'application $x \mapsto g(x)$ est indéfiniment différentiable. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons r réel > 0 tel que

$$\int_{\complement[-r,r]} c_2 |\lambda|^{k_4} |\hat{\Phi}(\lambda)|\, d\lambda \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $v = \sup_{\lambda \in [-r,r]} \left(|\hat{\Phi}(\lambda)| + 1\right)$. D'après (*a*) il existe un ensemble compact C dans G tel que l'on ait, pour tout $\lambda \in [-r, r]$ et $x \in G - C$,

$$|M(x)D(u(\lambda f))(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4rv}.$$

Alors on a, pour tout $x \in G - C$,

$$|M(x)D(g)(x)| = \left| \int_{\mathbf{R}} M(x)D(u(\lambda f))(x)\,\hat{\Phi}(\lambda)\,d\lambda \right|$$

$$\leq \int_{[-r,r]} |M(x)D(u(\lambda f))(x)\,\hat{\Phi}(\lambda)|\,d\lambda$$

$$+ \int_{\mathbf{R}-[-r,r]} c_2 |\lambda|^{k_4} |\hat{\Phi}(\lambda)|\,d\lambda \leq \varepsilon.$$

La fonction g appartient donc à $\mathcal{S}(G)$. Enfin d'après ([13], lemme 7), g est égal à $\Phi(f)$ au sens du calcul fonctionnel de Gelfand dans $C^*(G)$.

6.1.4. PROPOSITION. — *Soient G un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe, $C^*(G)$ la C^*-algèbre du groupe G, et $\mathcal{S}(G)$ la sous-algèbre involutive de $C^*(G)$ des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur G. Alors il existe un sous-ensemble C de $C^*(G)^+ \cap \mathcal{S}(G)$, stable par extraction de racine carrée, tel que* lin C *soit dense dans $C^*(G)$.*

Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{D}(G)$ de type positif. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions positives Φ de $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ tels que $\Phi^{1/2^n} \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ pour tout entier $n > 0$ et tels que $\Phi(0) = 0$ (remarquons que tous les zéros d'une fonction $\Phi \in \mathcal{F}$ sont d'ordre infini). Il est facile de voir que lin $\mathcal{M}$ est dense dans $C^*(G)$. Compte tenu du lemme 6.1.3, le calcul fonctionnel dans $C^*(G)$ montre que l'ensemble C des $\Phi(f)$, où $f \in \mathcal{M}$ et $\Phi \in \mathcal{F}$, a les propriétés de la proposition.

6.1.5. COROLLAIRE. — *Soient G un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe, $C^*(G)$ la C^*-algèbre du groupe G, et $\mathcal{S}(G)$ la sous-algèbre involutive de $C^*(G)$ des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide. Considérons $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \ldots)$ une suite de traces semi-continues inférieurement sur $C^*(G)$ à idéal de définition $M(\varphi_n)$ dense dans $C^*(G)$. On suppose que $\mathcal{S}(G) \subset \bigcap_{n=0}^{+\infty} M(\varphi_n)$ et que $\lim_n \varphi_n(x) = \varphi_0(x)$ pour tout $x \in \mathcal{S}(G)$. Alors, pour tout élément y de l'idéal de Pedersen $K(C^*(G))$ de $C^*(G)$, on a $\lim_n \varphi_n(y) = \varphi_0(y)$.*

L'assertion résulte de la proposition 6.1.4, du lemme 4.3 et de la proposition 4.5.

6.2. **Notations et rappels.**

Pour tout $z \in \mathbf{C}$, nous noterons $\exp z$ la valeur de la fonction exponentielle en z. Soient n un entier > 0, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur $\mathbf{R}^n$, et f un élément de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$.

Pour toute suite d'entiers $1 \leqq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqq n$, nous noterons $\hat{f}_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ la transformée de Fourier de f par rapport aux variables i_1, $i_2, \ldots, i_p$. Par exemple dans le cas $n = 3$, $\hat{f}_{2,3}$ est égal à

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto \int_{\mathbf{R}^2} f(\xi_1, \eta_2, \eta_3) \exp(-i(\xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3))\, d\eta_2\, d\eta_3.$$

Soient G un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe, $C^*(G)$ la C^*-algèbre du groupe G, et $\mathcal{S}(G)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide sur G. Rappelons ([11], cor. 3) que $C^*(G)$ est une C^*-algèbre liminaire. Pour tout $\pi \in \hat{G}$, nous noterons

$M(\pi)$ l'idéal de définition de la trace $\mathrm{Tr}\,\pi$, semi-continue inférieurement sur $C^*(G)^+$. D'après ([11], cor. 1), on a $\mathcal{S}(G) \subset M(\pi)$ pour tout $\pi \in \hat{G}$. Cela permet d'énoncer un cas particulier du corollaire 6.1.5.

6.2.1. COROLLAIRE. — *Soient G un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe, $C^*(G)$ la C^*-algèbre du groupe G, et $\mathcal{S}(G)$ la sous-algèbre involutive de $C^*(G)$ des fonctions indéfiniment différentiables à décroissance rapide. Soient Λ un ensemble filtrant, $(\pi_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ [resp. $(a_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$] une famille d'éléments de G (resp. $]0, +\infty[$), et φ une trace semi-continue inférieurement sur $C^*(G)^+$ à idéal de définition $M(\varphi)$ tel que $\mathcal{S}(G) \subset M(\varphi)$. On suppose que $\lim_\alpha a_\alpha \mathrm{Tr}\,\pi_\alpha(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{S}(G)$. Alors, pour tout élément y de l'idéal de Pedersen $K(C^*(G))$ de $C^*(G)$, on a*

$$\lim_\alpha a_\alpha \mathrm{Tr}\,\pi_\alpha(y) = \varphi(y).$$

6.3. Spectre d'Effros de Γ_3.

Dans ce paragraphe, nous utiliserons principalement les résultats de ([12], § 3).

6.3.1. — Soit Γ_3 le groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe non commutatif de dimension 3 ([10], [12]). Nous noterons $\mathcal{G}_3$ son algèbre de Lie. Elle est caractérisée par une base $(l_i)_{1 \leq i \leq 3}$ avec la table de multiplication

$$[l_1, l_2] = l_3, \qquad [l_1, l_3] = [l_2, l_3] = 0.$$

On peut donc identifier un élément x de Γ_3 à un point (x_1, x_2, x_3) de $\mathbf{R}^3$. La formule du produit dans Γ_3 s'écrit

$$(x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 - x_1 y_2),$$

et une mesure de Haar de Γ_3 est $dx_1\, dx_2\, dx_3$.

D'après ([10], prop. 3), l'ensemble $\hat{\Gamma}_3$ est réunion de deux sous-ensembles disjoints U et V.

1° U est l'ensemble des représentations π_λ avec $\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}$; chaque représentation π_λ opère dans $L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ et on a, pour tout $g \in L^2_{\mathbf{C}}(\mathbf{R})$ et $t \in \mathbf{R}$,

$$(\pi_\lambda(x_1, x_2, x_3)\, g)(t) = \exp(i\lambda(x_3 - x_2 t))\, g(t + x_1). \tag{28}$$

2° V est l'ensemble des représentations $\rho_{\mu,\nu}$, avec $\mu, \nu \in \mathbf{R}$; chaque représentation $\rho_{\mu,\nu}$ est de dimension 1, et on a

$$\rho_{\mu,\nu}(x_1, x_2, x_3) = \exp(i(\mu x_1 + \nu x_2)). \tag{29}$$

Par la suite, nous identifierons U (resp. V) à $\mathbf{R}-\{0\}$ (resp. $\mathbf{R}^2$) muni de la topologie usuelle.

D'après ([12], prop. 1), les ensembles fermés dans $\hat{\Gamma}_3$ pour la topologie de Jacobson sont les ensembles $U_1 \cup V_1$ avec $U_1 \subset \mathbf{R}-\{0\}$ et $V_1 \subset \mathbf{R}^2$, tels que :

(a) U_1 est fermé dans $\mathbf{R}-\{0\}$.

(b) V_1 est fermé dans $\mathbf{R}^2$.

(c) Si O est adhérent à U_1, on a $V_1 = \mathbf{R}^2$.

Nous noterons A_3 la C^*-algèbre du groupe Γ_3. Soient I l'idéal bilatère fermé de A_3 tel que $\hat{I} = \mathbf{R}-\{0\}$, et θ l'application canonique $A_3 \to A_3/I$. Compte tenu de (29), on vérifie facilement qu'il existe un isomorphisme ω de A_3/I sur $C_0(\mathbf{R}^2)$ tel que

$$\omega(\theta(f))(\mu, \nu) = \rho_{\mu,\nu}(f) = f_{1,2,3}(-\mu, -\nu, 0) \quad \text{pour tout } f \in \mathcal{S}(\Gamma_3).$$

Par la suite, nous identifierons ces deux C^*-algèbres

6.3.2. — Soit $f \in \mathcal{S}(\Gamma_3)$. D'après (28), pour tout $\lambda \in \mathbf{R}-\{0\}$, il est facile de vérifier que $\pi_\lambda(f)$ est défini par le noyau

$$k_\lambda(s, t) = f_{2,3}(s-t, \lambda t, -\lambda), \qquad \text{avec} \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

Pour cet opérateur à trace, on a donc

$$\begin{aligned}(30)\qquad \operatorname{Tr}\pi_\lambda(f) &= \int_{\mathbf{R}} k_\lambda(t, t)\, dt = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}_{2,3}(0, \lambda t, -\lambda)\, dt \\ &= \frac{1}{|\lambda|}\int_{\mathbf{R}} \hat{f}_{2,3}(0, t', -\lambda)\, dt' = \frac{2\pi}{|\lambda|}\hat{f}_3(0, 0, -\lambda).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}(31)\qquad \lim_{\lambda\to 0}|\lambda| \operatorname{Tr}\pi_\lambda(f) &= 2\pi \hat{f}_3(0, 0, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \hat{f}_{1,2,3}(-\mu, -\nu, 0)\, d\mu\, d\nu \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \theta(f)(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu.\end{aligned}$$

Pour tout $a \in A_3^+$, posons

$$\psi(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \theta(a)(\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu.$$

D'après 3.6, ψ est une trace semi-continue inférieurement sur A_3 à idéal de définition $M(\psi)$ dense A_3 et on a $\mathcal{S}(G) \subset M(\psi)$. Soit a un élément de l'idéal de Pedersen $K(A_3)$ de A_3. L'application $\lambda \mapsto \operatorname{Tr}\pi_\lambda(a)$ est une application continue de $\mathbf{R}-\{0\}$ dans $\mathbf{C}$. En effet d'après (30), c'est vrai pour tout $f \in \mathcal{S}(\Gamma_3)$. L'assertion résulte alors du corollaire 6.2. D'autre part, d'après ce même corollaire et (31), on a

$$\lim_{\lambda \to 0} |\lambda| \operatorname{Tr} \pi_\lambda(a) = \psi(a), \qquad a \in K(A_3). \tag{32}$$

6.3.3. Proposition. — *Soit* Γ_3 *le groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe non commutatif de dimension* 3. *Sur* $\hat{\Gamma}_3$, *la topologie d'Effros est égale à celle de Jacobson.*

Notons G la plus petite face de $T(A_3)$, fermée pour $\sigma(T(A_3), K(A_3))$, qui contient ψ. On a $G^e = \mathbf{R}^2$. Soit un ensemble $U_1 \cup V_1$ avec $U_1 \subset \mathbf{R} - \{0\}$ et $V_1 \subset \mathbf{R}^2$, fermé dans $\hat{\Gamma}_3$ pour la topologie d'Effros. Il existe une face fermée F de $T(A_3)$ telle que $F^e = U_1 \cup V_1$. Comme pour tout $a \in K(A_3)$, l'application $\lambda \mapsto \operatorname{Tr} \pi_\lambda(a)$ (resp. $(\mu, \nu) \mapsto \rho_{\mu,\nu}(a)$) est continue, U_1 (resp. V_1) est fermé dans $\mathbf{R} - \{0\}$ (resp. $\mathbf{R}^2$). Supposons O adhérent à U_1. D'après (32), on a $\psi \in F$, d'où $V_1 = \mathbf{R}^2$. L'assertion résulte alors de 6.3.1.

6.3.4. *Remarque.* — La C^*-algèbre A_3 n'est pas uniformément liminaire; cela résulte facilement de la relation (32) et de 2.3 (ii). Ce fait reste valable pour les groupes de Heisenberg. Comme l'a remarqué J. Dixmier, il en résulte que la C^*-algèbre d'un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe non commutatif n'est jamais uniformément liminaire (car son algèbre de Lie possède un quotient qui est une algèbre de Lie de Heisenberg).

6.5. Proposition. — *Soient* G *un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe,* $\mathfrak{g}$ *son algèbre de Lie,* $\mathfrak{g}'$ *le dual de* $\mathfrak{g}$, *et* A *la* C^**-algèbre du groupe* G. *Pour tout* $\omega \in \mathfrak{g}'$, *nous noterons* π_ω *la classe d'équivalence de la représentation irréductible de* A *associée à* ω ([25], partie 2). *Considérons une suite* $(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots)$ *dans* $\mathfrak{g}'$ *telle que* $\lim_n \omega_n = \omega_0$. *Alors on peut choisir* G *et les* ω_n *de manière que l'élément* π_{ω_0} *de* $\hat{A}$ *ne soit pas adhérent à la suite* $(\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}, \ldots, \pi_{\omega_n}, \ldots)$ *pour la topologie d'Effros.*

Dans la démonstration, nous supposerons connue la référence [25].

6.5.1. — *Rappels et notations sur le calcul des traces.* — Reprenons les notations de 6.1, 6.2 et celles de l'énoncé. Soit m la dimension de $\mathfrak{g}$. Pour tout $\omega \in \mathfrak{g}'$, nous noterons O^ω l'orbite de ω pour la représentation coadjointe ρ de G, B^ω la forme bilinéaire antisymétrique $(x, y) \mapsto \omega([x, y])$ sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$, et R^ω le noyau de B^ω. Rappelons les résultats de ([26], p. 271-273, démonstration du théorème). Supposons $\dim O^\omega = 2p$, et notons H^ω une sous-algèbre subordonnée à ω de dimension maximale dans $\mathfrak{g}$. On a

$$R^\omega \subset H^\omega, \qquad \dim H^\omega = m - p = h, \qquad \dim R^\omega = m - 2p = r.$$

On peut construire une suite $(\mathcal{L}_i^{(\omega)})_{1\leq i\leq m}$ de sous-algèbre de $\mathcal{G}$ telles que

$$0=\mathcal{L}_0^{(\omega)}\subset\mathcal{L}_1^{(\omega)}\subset\ldots\subset\mathcal{L}_n^{(\omega)}=\mathcal{G},\qquad \mathcal{L}_r^{(\omega)}=R^{(\omega)}\qquad\text{et}\qquad \mathcal{L}_h^{(\omega)}=H^{(\omega)}$$

avec $\dim \mathcal{L}_i^{(\omega)}/\mathcal{L}_{i-1}^{(\omega)}=1$, pour $i=1, 2, \ldots, m$.

Choisissons un élément $l_i^{(\omega)}$ de $\mathcal{L}_i^{(\omega)}-\mathcal{L}_{i-1}^{(\omega)}$ pour $i=1, 2, \ldots, m$. Tout élément g de G s'écrit sous la forme $g_1^{(\omega)}(t_1)\ldots g_m^{(\omega)}(t_m)$ avec $g_i^{(\omega)}(t_i)=\exp(t_i l_i^{(\omega)})$ et $t_i\in\mathbf{R}$. Considérons l'application $\Phi^{(\omega)}$ de $\mathbf{R}^{2p}$ dans $O^{(\omega)}$ définie par

$$(T=(t_{r+1}, t_{r+2}, \ldots, t_m))\mapsto\rho(g^{(\omega)}(T)^{-1})\omega$$
$$\text{avec}\quad g^{(\omega)}(T)=g_{r+1}^{(\omega)}(t_{r+1}).g_{r+2}^{(\omega)}(t_{r+2})\ldots g_m^{(\omega)}(t_m).$$

Posons alors, pour tout $\omega\in\mathcal{G}'$ et tout $f\in\mathcal{S}(G)$,

$$D(\omega)=|\det(B^{(\omega)}(l_{r+i}^{(\omega)}, l_{h+k}^{(\omega)}))|\qquad(i, k=1, 2, \ldots, p).$$

et

$$\hat{f}(\omega)=\int_{\mathcal{G}}f(\operatorname{Exp}x)\exp(-i\omega(x))\,dx.$$

Pour tout $f\in\mathcal{S}(G)$, on a

$$(33)\qquad \operatorname{Tr}\pi_\omega(f)=(2\pi)^{-p}D(\omega)\int_{\mathbf{R}^{2p}}\hat{f}(-\rho(g^{(\omega)}(T)^{-1})\omega)\,dt_{r+1}\ldots dt_m$$

En effet ([25], th. p. 111 et [26], th. p. 271), c'est vrai pour tout $f\in\mathcal{D}(G)$. Comme on le vérifie facilement ([11], cor. 1 et [25], th. p. 50), chacun des membres est une distribution tempérée sur G. Enfin, $\mathcal{D}(G)$ est dense dans $\mathcal{S}(G)$ ([28], th. 3, p. 237).

Remarquons que les deux membres de (33) dépendent d'une mesure de Haar initialement choisie.

6.5.2. — *Résultats sur le groupe de Lie réel nilpotent* $\Gamma_{5,5}$.

(*a*) D'après ([10], § 1), l'algèbre de Lie $\mathcal{G}_{5,5}$ a une base $(e_i)_{1\leq i\leq 5}$ avec la table de multiplication

$$[e_1, e_2]=e_3,\qquad [e_1, e_3]=e_4,\qquad [e_1, e_4]=e_5,\qquad [e_1, e_5]=\ldots=0.$$

Tout élément x de $\mathcal{G}_{5,5}$ s'écrit $\sum_{i=1}^{5}x_i e_i$ avec $x_i\in\mathbf{R}$. Nous choisirons la mesure de Haar de $\Gamma_{5,5}$ déterminée par la mesure euclidienne $dx_1\,dx_2\ldots dx_5$ de $\mathcal{G}_{5,5}$.

Soit $(e_i^*)_{1\leq i,j\leq 5}$ la base duale de (e_i) dans $\mathcal{G}'_{5,5}$. Il est facile de voir que, dans cette base, on peut représenter $\rho(\operatorname{Exp}x)$ par la matrice $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq 5}$

définie par

$$(34)\qquad a_{i,i}=1 \quad \text{pour } i=1,2,\ldots,5, \qquad a_{2,3}=a_{3,4}=a_{4,5}=-x_1,$$

$$a_{1,3}=x_2, \qquad a_{1,4}=x_3-\frac{x_1x_2}{2}, \qquad a_{1,5}=x_4-\frac{x_1x_3}{2}+\frac{x_1^2x_2}{6},$$

$$a_{2,4}=a_{3,5}=\frac{x_1^2}{2}, \qquad a_{2,5}=-\frac{x_1^3}{6},$$

les autres coefficients étant nuls.

Reprenons, dans un cas particulier, les calculs de 6.5.1. Soit $\omega=\sum_{i=1}^{5}\xi_i e_i^*$, avec $\xi_3\neq 0$. Dans ce cas, $\dim O^{\omega}=2$, et on peut faire le choix suivant

$$l_1^{\omega}=e_5, \qquad l_2^{\omega}=e_4-\frac{\xi_5}{\xi_3}e_2, \qquad l_3^{\omega}=e_3-\frac{\xi_4}{\xi_3}e_2, \qquad l_4^{\omega}=e_2, \qquad l_5^{\omega}=e_1.$$

D'après (34), on a donc

$$-\rho(g^{\omega}(T)^{-1})\,\omega=\sum_{i=1}^{5}P_i^{\omega}(T)\,e_i^*, \qquad T=(t_4,t_5)\in\mathbf{R}^2,$$

avec

$$P_1^{\omega}(T)=t_4\xi_3-\xi_1, \qquad P_2^{\omega}(T)=-\left(\xi_2+t_5\xi_3+\frac{t_5^2}{2}\xi_4+\frac{t_5^3}{6}\xi_5\right),$$

$$P_3^{\omega}(T)=-\left(\xi_3+t_5\xi_4+\frac{t_5^2}{2}\xi_5\right), \qquad P_4^{\omega}(T)=-(\xi_4+t_5\xi_5),$$

$$P_5^{\omega}(T)=-\xi_5$$

et

$$D(\omega)=|\,\omega([l_4^{\omega},l_5^{\omega}])\,|=|\,\xi_3\,|.$$

D'après (33), on en déduit pour tout $f\in\mathcal{S}(\Gamma_{5,5})$,

$$(35)\quad \operatorname{Tr}\pi_{\omega}(f)=\frac{|\,\xi_3\,|}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\hat{f}_{1,2,3,4,5}(P_1^{\omega}(T),P_2^{\omega}(T),\ldots,P_5^{\omega}(T))\,dt_4\,dt_5.$$

(*b*) Soit $A_{5,5}$ la C^*-algèbre du groupe $\Gamma_{5,5}$. Comme $\{e_3,e_4,e_5\}$ est un idéal de $\mathcal{G}_{5,5}$, il existe un idéal bilatère fermé I de $A_{5,5}$ tel que $A_{5,5}/I$ soit isomorphe à $C_0(\mathbf{R}^2)$. Notant θ l'application canonique $A_{5,5}\to A_{5,5}/I$, d'après ([12], p. 342, ligne 7), on a, pour tout $f\in\mathcal{S}(\Gamma_{5,5})$,

$$(36)\qquad \theta(f)(\lambda,\mu)=\hat{f}_{1,2,3,4,5}(-\lambda,-\mu,0,0,0) \text{ avec } (\lambda,\mu)\in\mathbf{R}^2.$$

6.6.3. — *Construction de la suite* $(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n,\ldots)$ *dans* $\mathcal{G}'_{5,5}$ *et propriétés.*

(*a*) Pour tout $n = 1, 2, \ldots$, soient $\omega_n = \sum_{i=1}^{5} \xi_i^n e_i^*$ avec

$$\xi_1^n = \xi_2^n = 0, \qquad \xi_3^n = 1, \qquad \xi_4^n = \frac{-2(2n^3+n)}{n^3(n^3+n)}, \qquad \xi_5^n = \frac{6}{n^3(n^3+n)}$$

et $\omega_0 = e_3^*$. Dans $\mathcal{G}'_{5,5}$, on a $\lim_n \omega_n = \omega_0$.

Soit $f \in \mathcal{S}(\Gamma_{5,5})$. D'après (33), on a, pour $n = 1, 2, \ldots$,

$$\operatorname{Tr} \pi_{\omega_n}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{f}_{2,3,4,5}(0, P_n(t), Q_n(t), R_n(t), S_n(t))\, dt,$$

avec

$$P_n(t) = -t + \frac{2n^3+n}{n^3(n^3+n)} t^2 - \frac{1}{n^3(n^3+n)} t^3,$$

$$Q_n(t) = -1 + \frac{2(2n^3+n)}{n^2(n^3+n)} t - \frac{3}{n^3(n^3+n)} t^2,$$

$$R_n(t) = \frac{2(2n^3+n)}{n^3(n^3+n)} - \frac{6}{n^3(n^3+n)} t, \qquad S_n(t) = \frac{-6}{n^3(n^3+n)}.$$

Faisons le changement de variables $u = \frac{1}{n^{3/2}}(t - n^3)$. On obtient

$$I_n(f) = \frac{2\pi}{n^{\frac{3}{2}}} \operatorname{Tr} \pi_{\omega_n}(f) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}_{2,3,4,5}(0, p_n(u), q_n(u), r_n(u), s_n(u))\, du,$$

avec

(37)
$$p_n(u) = -\frac{1}{n^3+n} u\left(u + n^{\frac{3}{2}}\right)\left(n^{\frac{3}{2}} u - n\right)$$

$$= \frac{n^{\frac{5}{2}}}{n^3+n} u - \frac{(n^3-n)}{n^3+n} u^2 - \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^3+n} u^3,$$

$$q_n(u) = \frac{2n}{n^3+n} - \frac{2(n^3-n)}{n^3(n^3+n)} u - \frac{3}{n^3+n} u^2,$$

$$r_n(u) = \frac{-2(n^3-n)}{n^3(n^3+n)} - \frac{6n^{\frac{3}{2}}}{n^3(n^3+n)} u, \qquad s_n(u) = \frac{-6}{n^3(n^3+n)}.$$

(*b*) Pour tout entier $n > 0$ et toute fonction complexe φ, continue sur $\mathbf{R}^4$, à décroissance rapide à l'infini, posons

$$\mu_n(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(p_n(u), q_n(u), r_n(u), s_n(u))\, du$$

et

$$\mu_0(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(-u^2, 0, 0, 0)\, du.$$

Montrons que l'on a $\lim_n \mu_n(\varphi) = \mu_0(\varphi)$.

(b — 1). Supposons φ à support compact.

Il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = 0$, pour tout $|\xi_1| \geqq r$.

D'après (37), on a, pour tout entier $n > 0$,

$$p_n(\pm 2\sqrt{r}) = \pm \frac{2n^{\frac{5}{2}}}{n^3+n}\sqrt{r} - \frac{4(n^3-n)}{n^3+n}r \mp \frac{8n^{\frac{3}{2}}}{n^3+n}r\sqrt{r},$$

$$p_n\left(-n^{\frac{3}{2}} \pm \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) = \mp n - \frac{2n^3+n}{n(n^3+n)} \mp \frac{1}{n^3+n}.$$

Il existe un entier $n_0 \geqq (2\sqrt{r}+1)^{2/3}$ tel que, pour tout $n \geqq n_0$, on ait

$$\operatorname{Inf}\left(|p_n(2\sqrt{r})|, |p_n(-2\sqrt{r})|, \left|p_n\left(-n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right|, \left|p_n\left(-n^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right|\right) \geqq r.$$

Soit n un entier $\geqq n_0$. D'après la forme du graphe de la fonction $u \mapsto p_n(u)$, on a

$$|p_n(u)|, \quad |u^2| \geqq r$$

$$\text{pour tout } u \notin \left[-n^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}, -n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right] \cup [-2\sqrt{r}, 2\sqrt{r}].$$

On déduit

$$\mu_n(\varphi) = \int_{-n^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}}^{-n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} \varphi(p_n(u), q_n(u), r_n(u), s_n(u))\, du$$

$$+ \int_{-2\sqrt{r}}^{2\sqrt{r}} \varphi(p_n(u), q_n(u), r_n(u), s_n(u))\, du$$

et

$$\mu_0(\varphi) = \int_{-2\sqrt{r}}^{2\sqrt{r}} \varphi(-u^2, 0, 0, 0)\, du.$$

La continuité de φ et le théorème de Lebesgue donnent alors facilement l'assertion.

(b — 2). Supposons φ quelconque.

LEMME. — *Soient s et $t \in \mathbf{R} - \{0\}$. Alors*

$$I(s, t) = \int_{\mathbf{R}} \frac{du}{1 + (u(su - t))^2}$$

est inférieur à $2\pi/|t|$.

Faisons le changement de variables $u \mapsto u - (1/2)(t/s)$; on calcule l'intégrale par le théorème des résidus. L'assertion résulte d'une majoration triviale.

Il existe $k \in \mathbf{R}^+$, tel que, pour tout n, on ait

$$\varphi(p_n(u), q_n(u), r_n(u), s_n(u)) \leqq \frac{k}{1 + (p_n(u))^2}.$$

Montrons que l'on a

$$\sup_n \int_{\mathbf{R}} \frac{du}{1 + (p_n(u))^2} < +\infty.$$

D'après (37),

$$\text{pour } u \geqq 0, \quad |p_n(u)| \geqq \frac{n^3 + n}{n^3} \left| u\left(u - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right|;$$

$$\text{pour } u \leqq 0, \quad |p_n(u)| \geqq \frac{n^3}{n^3 + n} \left| u^2\left(1 + \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} u\right)\right|.$$

Pour n suffisamment grand, on a, donc pour tout $u \leqq -2$,

$$|p_n(u)| \geqq \left| u\left(1 + \frac{u}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right|.$$

Le lemme ci-devant et un calcul facile donnent la conclusion voulue, On en déduit $\sup_n \mu_n(\varphi) < +\infty$.

Soient D la C^*-algèbre $C_0(\mathbf{R}^4)$, et B la sous-algèbre de D des fonctions à décroissance rapide à l'infini. Il est facile de voir que B^+ est stable par extraction de racine carrée et que $\operatorname{lin} B^+ = B$ est dense dans D. Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbf{N}$. D'après la proposition 4.5, il existe un élément $l_{\mathfrak{U}}$ de $T(D)$ tel que l'on ait $B \subset M(l_{\mathfrak{U}})$ et $l_{\mathfrak{U}}(\varphi) = \lim_{\mathfrak{U}} \mu_n(\varphi)$ pour tout $\varphi \in B$. D'après $(b - 1)$, on a $l_{\mathfrak{U}} = \mu_0$. Comme $\mathfrak{U}$ est ultrafiltre quelconque, on a, pour tout $\varphi \in B$,

$$\lim_n \mu_n(\varphi) = \mu_0(\varphi),$$

d'où l'assertion.

(*c*) Soit $f \in \mathcal{S}(\Gamma_{5,5})$. D'après (*a*) et (*b*), on a

$$\lim_n I_n(f) = \int_{\mathbf{R}} \hat{f}_{2,3,4,5}(0, -u^2, 0, 0, 0)\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+} \hat{f}_{1,2,3,4,5}(-\lambda, -\mu, 0, 0, 0) \frac{d\lambda\, d\mu}{\sqrt{\mu}}.$$

D'après (36), on en déduit

$$(38)\qquad \lim_n \frac{4\pi^2}{n^{\frac{3}{2}}} \operatorname{Tr} \pi_{\omega_n}(f) = \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+} \frac{1}{\sqrt{\mu}}\, \theta(f)(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu.$$

D'après le corollaire 6.2, la relation (38) est vraie pour tout $x \in K(A_{5,5})$. Notons ψ l'élément de $T(A_{5,5})$ défini par le second membre de (38), et F la face de $T(A_{5,5})$ fermée pour $\sigma(T(A_{5,5}), K(A_{5,5}))$ associée à la C^*-algèbre $A_{5,5}/I$ (cor. 3.5). On a $\psi \in F$. D'après la proposition 4.2, il existe une face fermée G de $T(A_{5,5})$ telle que

$$G^e = F^e \cup \{\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}, \ldots, \pi_{\omega_n}, \ldots\}.$$

L'élément π_{ω_0} n'est donc pas adhérent à la suite $\{\pi_{\omega_1}, \pi_{\omega_2}, \ldots, \pi_{\omega_n}, \ldots\}$ pour la topologie d'Effros de $\hat{\Gamma}_{5,5}$.

6.7. Corollaire. — *Il existe un groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe G tel que, sur $\hat{G}$, la topologie d'Effros soit distincte de celle de Jacobson.*

Comme la topologie des orbites est plus fine que celle de Jacobson ([20], th. 8-2, et [27], prop. 2), l'assertion résulte immédiatement de la proposition 6.6.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bourbaki (N.). — *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. 1 et 2. 2e édition. — Paris, Hermann, 1966 (*Act. scient. et ind.*, 1189; *Bourbaki*, 15).

[2] Combes (F.). — Poids sur une C^*-algèbre, *J. Math. pures et appl.*, t. 47, 1968, p. 57-100.

[3] Combes (F.). — Sur les faces d'une C^*-algèbre, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 93, 1969, p. 37-62.

[4] Combes (F.) et Perdrizet (F.). — Certains idéaux dans les espaces vectoriels ordonnés, *J. Math. pures et appl.*, t. 49, 1970, p. 29-50.

[5] Davies (E. B.). — Décomposition of traces on separable C^*-algebras, *Quart. J. Math.*, Oxford, Series 2, t. 20, 1969, p. 97-111.

[6] Dixmier (J.). — Points séparés dans le spectre d'une C^*-algèbre, *Acta Sc. Math.*, t. 22, 1961, p. 115-128.

[7] Dixmier (J.). — Traces sur les C^*-algèbres, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 13, 1963, p. 219-262.

[8] Dixmier (J.). — Traces sur les C^*-algèbres, II, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 88, 1964, p. 39-57).

[9] Dixmier (J.). — *Les C^*-algèbres et leurs représentations*. 2e édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1969 (*Cahiers scientifiques*, 29).

[10] Dixmier (J.). — Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, III, *Canad. J. Math.*, t. 10, 1958, p. 321-348.

[11] DIXMIER (J.). — Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, V, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 65-79.
[12] DIXMIER (J.). — Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, VI, *Canad. J. Math.*, t. 12, 1960, p. 324-352.
[13] DIXMIER (J.). — *Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires.* — Paris, Presses universitaires de France, 1960 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 6; p. 13-25).
[14] EFFROS (E. G.). — Structure in simplexes, *Acta Math.*, t. 117, 1967, p. 103-121.
[15] EFFROS (E. G.) et HAHN (F.). — *Locally compact transformation groups and C^*-algebras.* — *Providence, American mathematical Society*, 1967 (*Memoirs of the American mathematical Society*, 75).
[16] FELL (J. M. G.). The dual spaces of C^*-algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 94, 1960, p. 365-403.
[17] FELL (J. M. G.). — The structure of algebras of operator fields, *Acta Math.*, t. 106, 1961, p. 233-280.
[18] GOULLET DE RUGY (A.). — *Géométrie des simplexes.* Paris, Centre de Documentation universitaire, 1968.
[19] KAPLANSKY (I.). — The structure of certain operator algebras, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 70, 1951, p. 219-255.
[20] KIRILLOV (A. A.). — Représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents [en russe], *Uspekhi Mat. Nauk*, t. 17, 1962, n° 4, p. 57-110.
[21] PEDERSEN (G. K.). — Measure theory for C^*-algebras, *Math. Scand.*, t. 19, 1966, p. 131-145.
[22] PEDERSEN (G. K.). — A decomposition theorem for C^*-algebras, *Math. Scand.*, t. 22, 1968, p. 266-268.
[23] PEDERSEN (G. K.). — Measure theory for C^*-algebras, III, *Math. Scand.*, t. 25, 1969, p. 71-93.
[24] PHELPS (R. R.). — *Lectures on Choquet's theorem.* — Princeton, D. Van Nostrand Company, 1966 (*Van Nostrand mathematical Studies*, 7).
[25] PUKANSZKY (L.). — *Leçons sur les représentations des groupes.* — Paris, Dunod, 1967 (*Monographies de la Société mathématique de France*, 2).
[26] PUKANSZKY (L.). — On the characters and the Plancherel formula of nilpotent groupes, *J. funct. Anal.*, t. 1, 1967, p. 255-280.
[27] PUKANSZKY (L.). — On the unitary representations of exponential groups, *J. funct. Anal.*, t. 2, 1968, p. 73-113.
[28] SCHWARTZ (L.). — *Théorie des distributions*, Paris, Hermann, 1966.

(Texte reçu le 27 novembre 1970.)

François PERDRIZET,
17. rue Gabrielle-d'Estrées,
92-Vanves.