BULLETIN DE LA S. M. F.

GÉRARD SCHIFFMANN

Intégrales d'entrelacement et fonctions de Whittaker

Bulletin de la S. M. F., tome 99 (1971), p. 3-72

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1971__99__3_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
99, 1971, p. 3 à 72.
(*Thèse Sc. math.,* Paris, 1969.)

INTÉGRALES D'ENTRELACEMENT ET FONCTIONS DE WHITTAKER

PAR

GÉRARD SCHIFFMANN (*).

§ 0. Introduction.

Soit G un groupe de Lie réel, connexe, semi-simple et à centre fini. Choisissons une décomposition d'Iwasawa $G = KAU$ de G avec K compact, A abélien et U nilpotent. Soit M le centralisateur de A dans K. Si λ est une forme linéaire, à valeurs complexes sur l'algèbre de Lie de A, on lui associe le caractère $\exp(H) \mapsto e^{\lambda(H)}$ de A, et on note $\langle \lambda, a \rangle$ la valeur de ce caractère au point a de A. Ce caractère est unitaire si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. Soit alors f une fonction, définie et continue sur G et telle que

$$(0.1) \qquad f(gau) = \langle -\lambda - \rho, a \rangle f(g) \qquad \text{pour} \quad a \in A \quad \text{et} \quad u \in U$$

(ρ, demi-somme des racines positives). Soit M' le normalisateur de A dans K et soit $W = M'/M$ le groupe de Weyl. Si $w \in W$ et si $\overline{w}$ est l'un de ses représentants dans M', on considère l'intégrale

$$(0.2) \qquad A(\lambda, \overline{w}) f(g) = \int_{U \cap \overline{w}\, U \overline{w}^{-1}} f(gu\overline{w})\, du,$$

intégrale qui peut encore s'écrire

$$(0.3) \qquad A(\lambda, \overline{w}) f(g) = \int_{V \cap \overline{w}^{-1} U \overline{w}} f(g\overline{w}v)\, dv,$$

où V est le sous-groupe nilpotent opposé à U. La fonction $A(\lambda, \overline{w}) f$ vérifie (0.1) où on a remplacé λ par $w(\lambda)$. Dans le cas où $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$,

(*) *Thèse Sc. math.,* Paris, 1969.

ces intégrales fournissent, au moins formellement, des opérateurs d'entrelacement des représentations de la série principale. Elles ont été introduites par R. A. KUNZE et E. M. STEIN [12], et sont également considérées dans [5]. Ces intégrales divergent pour $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, aussi, pour leur donner un sens, doit-on procéder par prolongement analytique. Soit $S(w)$ le domaine de convergence des intégrales d'entrelacement relatives à w. Au paragraphe 1, en généralisant une méthode de KARPELEVIČ et GINDIKIN [6], on montre que, si $\overline{w} = \overline{w}'\overline{w}''$ et si la longueur de w est la somme des longueurs de w' et de w'', alors

$$S(w) = S(w'') \cap w''^{-1} S(w') \tag{0.4}$$

et

$$A(\lambda, \overline{w}) = A(w''(\lambda), \overline{w}') A(\lambda, \overline{w}''). \tag{0.5}$$

Ceci permet de se réduire au cas où w est de longueur 1, c'est-à-dire au cas où w est la symétrie par rapport à une racine simple, ou encore au cas où G est de rang réel 1. Au paragraphe 2, on détermine $S(w)$, et on montre que les intégrales d'entrelacement se prolongent en des fonctions méromorphes de λ. Les démonstrations s'appuient sur deux formules qui, dans le cas où G est de rang 1, permettent de calculer explicitement la composante suivant A de la décomposition de Bruhat ou d'Iwasawa d'un élément de V. Certains résultats de ce paragraphe, et notamment ces deux formules, ont été obtenus de façon indépendante par S. HELGASON [8] ainsi que par A. W. KNAPP et E. M. STEIN [11].

Il apparaît effectivement des pôles pour $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. Si on désire construire des opérateurs d'entrelacement dans ce cas, il convient donc de normaliser les intégrales. De plus, on désire choisir cette normalisation telle que (0.5) soit valable sans condition sur les longueurs. Ce choix ne nous semble pouvoir être fait qu'en liaison avec l'étude des séries principales normalisées au sens de R. A. KUNZE et E. M. STEIN. De toutes façons, le choix d'une telle normalisation suppose au minimum qu'on sache calculer le facteur qui apparaît dans (0.5) non normalisé, et nous n'avons pu faire ce calcul que dans des cas particuliers (fonctions invariantes à droite par M ou groupes déployés sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$).

Soit $\mathfrak{d}$ une représentation unitaire irréductible de K. Reprenons la formule (0.3) en supposant que f soit à valeurs dans l'espace des applications linéaires de l'espace de $\mathfrak{d}$ dans lui-même et qu'elle vérifie la condition $f(gm) = f(g)\,\mathfrak{d}(m)$ pour $m \in M$. On peut prouver que, pour presque tout élément v de $V \cap \overline{w}^{-1} U \overline{w}$, on a $v \in VMAU$; posons $v = v'^{-1} mau$. L'intégrale (0.3) s'écrit

$$\int_{V \cap \overline{w}^{-1} U \overline{w}} f(gv'^{-1})\,\mathfrak{d}(m) \langle -\lambda - \rho, a \rangle \, dv.$$

Si $\lambda \in S(w)$, on en déduit qu'il existe une mesure $\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}}$ sur V telle que

$$A(\lambda, \bar{w}) f = f \star \Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}},$$

L'intérêt porté dans ce travail aux mesures $\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}}$ est dû à leur intervention dans l'équation fonctionnelle des intégrales de Whittaker :

$$W(\lambda, \pi) = \int_V \mathfrak{d}(k_v) \otimes \pi(v) \langle -\lambda - \rho, a_v \rangle \, dv,$$

où π est une représentation unitaire irréductible de V et $v = k_v a_v u_v$ la décomposition d'Iwasawa de v. Ces intégrales convergent pour $\lambda \in S(w)$, et on prouve formellement que

$$W(w(\lambda), \pi)\, T(\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}) = W(\lambda, \pi)\, \pi(\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}}),$$

avec

$$T(\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}) = \mathfrak{d}(\bar{w}) \int_V \mathfrak{d}(k_v) \langle -\lambda - \rho, a_v \rangle \, dv,$$

En fait, *a priori*, aucun des deux membres n'a de sens. Au paragraphe 3, et en supposant G de rang 1, on prouve que $W(\lambda, \pi)$ se prolonge en une fonction entière de λ, pourvu que π soit non triviale, on donne un sens, et on justifie, l'équation fonctionnelle précédente.

Pour terminer cette introduction, il me reste à remercier R. GODEMENT qui a bien voulu diriger ce travail et qui y a apporté de nombreuses améliorations. Je remercie également H. CARTAN qui m'a donné un second sujet de thèse, ainsi que F. BRUHAT qui a accepté de faire partie de mon Jury.

§ 1. Définition des intégrales d'entrelacement et réduction aux groupes de rang 1.

1.1. Notations.

Soient G un groupe de Lie réel, connexe, semi-simple et à centre fini et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soient $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{a}$ une sous-algèbre de Cartan de la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$, c'est-à-dire une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$, maximale parmi celles contenues dans $\mathfrak{p}$. Si α est une racine de $\mathfrak{a}$, on note $\mathfrak{g}^\alpha$ le sous-espace radiciel correspondant. Fixons un ordre sur les racines, et posons

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^\alpha \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{v} = \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}^{-\alpha}.$$

Soit $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ le dual complexe de $\mathfrak{a}$. Un élément λ de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ définit un caractère χ_λ de $A = \exp \mathfrak{a}$ par la formule $\chi_\lambda(\exp. H) = e^{\lambda(H)}$; on note encore $\langle \lambda, a \rangle$ la valeur de χ_λ au point a de A. Soit ρ la demi-somme des racines positives.

Soient K le sous-groupe compact maximal d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, et U et V les sous-groupes analytiques d'algèbres de Lie respectives $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$. On sait que $G = KAU$ est une décomposition d'Iwasawa de G; si g est un élément de G, on note $g = k_g a_g u_g$ sa décomposition. Soit M (resp. M') le centralisateur (resp. le normalisateur) de A dans K; on note $W = M'/M$ le groupe de Weyl.

1.2. **Les représentations** π_λ.

Soient $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ et $\mathcal{D}_\lambda$ l'espace vectoriel des applications f de G dans $\mathbf{C}$, indéfiniment différentiables et telles que

$$(1.2.1) \quad f(gau) = \langle -\lambda - \rho, a \rangle f(g) \qquad \text{pour} \quad g \in G, \quad a \in A \quad \text{et} \quad u \in U.$$

On munit $\mathcal{D}_\lambda$ de la topologie définie par les semi-normes

$$(1.2.2) \qquad \nu_{\Omega, X}(f) = \sup_{g \in \Omega} | X \star f(g) |,$$

où Ω est une partie compacte de G, et X une distribution sur G de support l'origine. Muni de cette topologie, $\mathcal{D}_\lambda$ est un espace de Fréchet.

Soit $\mathcal{D}$ l'espace vectoriel des applications de G dans $\mathbf{C}$, indéfiniment différentiables et à support compact; on munit $\mathcal{D}$ de sa topologie usuelle. Choisissons une mesure de Haar da de A et une mesure de Haar du de U. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, on pose

$$\varphi_\lambda(g) = \int_{A \times U} \varphi(gau) \langle \lambda + \rho, a \rangle \, da \, du.$$

La fonction $\varphi_\lambda \in \mathcal{D}_\lambda$, et l'application $\varphi \mapsto \varphi_\lambda$ est un homomorphisme surjectif de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}_\lambda$. Choisissons une mesure de Haar dg de G. On peut munir canoniquement $\mathcal{D}_\rho$ d'une forme linéaire μ, relativement bornée, en posant

$$\mu(\varphi_\rho) = \int_G \varphi(g) \, dg$$

(Bourbaki, *Intégration* [2], chap. 7, § 2, prop. 3). Dans la suite, il sera commode de noter

$$\mu(f) = \oint_G f(g) \, d\mu(g) \qquad \text{pour} \quad f \in \mathcal{D}_\rho.$$

Remarquons que μ est invariante par translations à gauche. Cette forme linéaire permet de mettre en dualité (hermitienne) $\mathcal{D}_\lambda$ et $\mathcal{D}_{-\bar{\lambda}}$, en posant

(1.2.3) $\langle f \mid f' \rangle = \oint_G f(g)\overline{f'(g)}\, d\mu(g)$ pour $f \in \mathcal{D}_\lambda$ et $f' \in \mathcal{D}_{-\bar{\lambda}}$.

Il est clair que $\langle \mid \rangle$ est sesquilinéaire; de plus, elle est non dégénérée. En effet, si, par exemple, $\langle f \mid f' \rangle = 0$ quelle que soit f', alors quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}$, on aurait $\langle f \mid \varphi_{-\bar{\lambda}} \rangle = 0$ ou encore

$$\oint_G \int_{A\times U} f(g)\,\overline{\varphi(gau)}\langle -\lambda+\rho, a\rangle\, da\, du\, d\mu(g) = 0.$$

Comme $f \in \mathcal{D}_\lambda$, ceci s'écrit

$$\oint_G \int_{A\times U} f(gau)\,\overline{\varphi(gau)}\langle 2\rho, a\rangle\, da\, du\, d\mu(g) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\oint_G (f\bar{\varphi})_\rho(g)\, d\mu(g) = \int_G f(g)\,\overline{\varphi(g)}\, dg = 0.$$

Or φ est quelconque, donc $f = 0$.

En particulier, si $\lambda = -\bar{\lambda}$, c'est-à-dire si $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, alors $\mathcal{D}_\lambda$ est ainsi muni d'une structure d'espace préhilbertien séparé. Soit $\mathcal{H}_\lambda$ son complété.

Pour λ quelconque, on obtient une représentation continue (et même différentiable) π_λ de G dans $\mathcal{D}_\lambda$, en posant

(1.2.4) $$\pi_\lambda(x) f(g) = f(x^{-1} g).$$

La forme linéaire μ étant invariante par translations à gauche, on a

(1.2.5) $$\langle \pi_\lambda(x) f \mid f' \rangle = \langle f \mid \pi_{-\bar{\lambda}}(x^{-1}) f' \rangle.$$

Si $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, cette égalité montre que π_λ se prolonge en une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}_\lambda$.

En utilisant le compact maximal K, on peut décrire la situation d'une manière légèrement différente. Tout d'abord, choisissons les mesures de Haar dg, dk, da, du de G, K, A, U respectivement, telles que

$$dg = \langle 2\rho, a\rangle\, dk\, da\, du.$$

On a alors, pour $\varphi \in \mathcal{D}$ et $f = \varphi_\rho$,

$$\begin{aligned}\mu(f) = \int_G \varphi(g)\, dg &= \int_{K\times A\times U} \varphi(kau)\langle 2\rho, a\rangle\, dk\, da\, du \\ &= \int_K f(k)\, dk.\end{aligned}$$

La dualité entre $\mathcal{D}_\lambda$ et $\mathcal{D}_{-\bar\lambda}$ se met sous la forme

$$(1.2.6)\qquad \langle f \mid f' \rangle = \int_K f(k)\overline{f'(k)}\,dk \qquad \text{pour}\quad f\in\mathcal{D}_\lambda \quad\text{et}\quad f'\in\mathcal{D}_{-\bar\lambda}.$$

En particulier, pour $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, ceci nous permet d'identifier $\mathcal{H}_\lambda$ à l'espace des applications de G dans $\mathbf{C}$ qui vérifient (1.2.1), et dont la restriction à K est de carré intégrable. La représentation π_λ s'obtient simplement en faisant opérer G par translations à gauche. Rappelons, qu'en général, π_λ n'est pas irréductible. En effet, le centralisateur M de A dans K normalise U, donc opère par translations à droite dans $\mathcal{H}_\lambda$, et ces translations sont dans le commutant de π_λ. Les représentations de la série principale s'obtiennent en « diagonalisant » ces translations à droite; on les explicitera ultérieurement.

On fait opérer le groupe de Weyl W de G dans $\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}$, en posant

$$(1.2.7)\qquad \langle w(\lambda), a\rangle = \langle \lambda, \bar w^{-1} a \bar w\rangle,$$

où $\bar w$ est un représentant dans M' de l'élément w de W. Pour $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, on sait que les représentations π_λ et $\pi_{w(\lambda)}$ de G dans $\mathcal{H}_\lambda$ et $\mathcal{H}_{w(\lambda)}$ sont équivalentes, et on désire construire explicitement un opérateur d'entrelacement.

1.3. Les intégrales d'entrelacement.

Soient $w\in W$, et $\bar w$ l'un de ses représentants dans M'. Soit

$$(1.3.1)\qquad U'_w = U \cap \bar w U \bar w^{-1}.$$

Comme M normalise U, le sous-groupe U'_w ne dépend pas du choix de $\bar w$. Son algèbre de Lie $\mathfrak{u}'_w$ est donnée par

$$(1.3.2)\qquad \mathfrak{u}'_w = \bigoplus \mathfrak{g}^\alpha \qquad \text{pour}\quad \alpha > 0 \quad\text{et}\quad w^{-1}(\alpha) > 0.$$

Soit $d\dot u$ une mesure invariante sur U/U'_w. On considère les intégrales

$$(1.3.3)\qquad A(\lambda, \bar w) f(g) = \int_{U/U'_w} f(gu\bar w)\,d\dot u \qquad \text{pour}\quad f\in\mathcal{D}_\lambda.$$

Ce sont ces intégrales qu'on appelle *intégrales d'entrelacement*.

Remarquons d'abord que la fonction $u\mapsto f(gu\bar w)$ est bien invariante à droite par U'_w. En effet, soit u' un élément de ce groupe; on a

$$f(guu'\bar w) = f(gu\bar w\,\bar w^{-1}u'\bar w) = f(gu\bar w)$$

puisque $\bar w^{-1} U'_w \bar w$ est contenu dans U et que f est invariante à droite par U. Les intégrales considérées ont donc un sens.

Soit $S(w)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^{*}$ tels que

$$\int_{U/U'_w} |f(gu\bar{w})| \, d\dot{u} < +\infty$$

quels que soient $g \in G$ et $f \in \mathcal{O}_\lambda$. Comme M normalise U, il est clair que $S(w)$ ne dépend pas du choix de $\bar{w}$.

Proposition 1.1. — *Soit $\lambda \in S(w)$. Si $f \in \mathcal{O}_\lambda$, alors $A(\lambda, \bar{w}) f \in \mathcal{O}_{w(\lambda)}$, et $A(\lambda, \bar{w})$ est une application linéaire continue de $\mathcal{O}_\lambda$ dans $\mathcal{O}_{w(\lambda)}$.*

En effet, comme $d\dot{u}$ est invariante par U, on a tout d'abord $A(\lambda, \bar{w}) f(gu) = A(\lambda, \bar{w}) f(g)$ pour $u \in U$. Ensuite, si $a \in A$, alors

$$\begin{aligned} A(\lambda, \bar{w}) f(ga) &= \int_{U/U'_w} f(gau\bar{w}) \, d\dot{u} \\ &= \int_{U/U'_w} f(gaua^{-1} \bar{w}\bar{w}^{-1} a\bar{w}) \, d\dot{u}. \end{aligned}$$

Or A normalise U et U'_w, donc opère sur U/U'_w, et une variante d'un résultat classique montre que

$$(1.3.4) \qquad d(a^{-1} \dot{u} a) = \langle -2\rho_{w^{-1}}, a \rangle \, d\dot{u},$$

où on a posé

$$(1.3.5) \qquad 2\rho_{w^{-1}} = \Sigma \alpha \qquad \text{pour} \quad \alpha > 0 \qquad \text{et} \qquad w^{-1}(\alpha) < 0.$$

Il vient

$$\begin{aligned} A(\lambda, \bar{w}) f(ga) &= \int_{U/U'_w} f(gu\bar{w}) \langle -2\rho_{w^{-1}}, a \rangle \langle -\lambda - \rho, \bar{w}^{-1} a\bar{w} \rangle \, d\dot{u} \\ &= \langle -2\rho_{w^{-1}} - w(\lambda) - w(\rho), a \rangle A(\lambda, \bar{w}) f(g), \end{aligned}$$

et il nous suffit de noter que

$$(1.3.6) \qquad w(\rho) + 2\rho_{w^{-1}} = \rho.$$

La fonction $A(\lambda, \bar{w}) f$ vérifie donc (1.2.1). D'autre part, soit f_λ définie par

$$(1.3.7) \quad f_\lambda(kau) = \langle -\lambda - \rho, a \rangle \qquad \text{pour} \quad k \in K, \quad a \in A \quad \text{et} \quad u \in U.$$

Elle appartient à $\mathcal{O}_\lambda$. Si $f \in \mathcal{O}_\lambda$ alors

$$|f(g)| \leq \nu_{K,1}(f) \, |f_\lambda(g)|,$$

d'où

$$\int_{U/U'_w} |f(gu\bar{w})| \, d\dot{u} \leq \nu_{K,1}(f) \int_{U/U'_w} |f_\lambda(gu\bar{w})| \, d\dot{u}.$$

Mais

$$\int_{U/U'_w} |f_\lambda(gu\overline{w})|\, d\dot{u} = f_{\mathrm{Re}(w(\lambda))}(g) \int_{U/U'_w} \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho,\, a_{u\overline{w}} \rangle\, d\dot{u}.$$

La dernière inégalité ci-dessus montre donc que les intégrales d'entrelacement relatives à f convergent uniformément sur tout compact de G, et donc que $A(\lambda, \overline{w})f$ est continue. Soit X une distribution sur G de support l'origine; la fonction $X \star f \in \mathcal{D}_\lambda$, donc l'intégrale

$$\int_{U/U'_w} X \star f(gu\overline{w})\, d\dot{u},$$

converge uniformément pour g variant dans un compact et par suite $A(\lambda, \overline{w})f$ est indéfiniment différentiable, et

$$X \star A(\lambda, \overline{w}) f(g) = \int_{U/U'_w} X \star f(gu\overline{w})\, d\dot{u}.$$

Enfin prouvons que $A(\lambda, \overline{w})$ est continue. On a

$$|X \star f(g)| \leqq \nu_{K,X}(f)\, |f_\lambda(g)|,$$

d'où, pour toute partie compacte Ω de G,

$$\begin{aligned}\nu_{\Omega,X}(A(\lambda, \overline{w})f) &\leqq \sup_{g\in\Omega} \int_{U/U'_w} |X \star f(gu\overline{w})|\, d\dot{u} \\ &\leqq \nu_{K,X}(f) \sup_{g\in\Omega} \int_{U/U'_w} f_{\mathrm{Re}(\lambda)}(gu\overline{w})\, d\dot{u},\end{aligned}$$

ce qui prouve la continuité.

Notons qu'à l'aide des fonctions f_λ, on voit de suite que $\lambda \in S(w)$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\lambda) \in S(w)$ ou encore si, et seulement si,

$$(1.3.8) \qquad \int_{U/U'_w} \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho,\, a_{u\overline{w}} \rangle\, d\dot{u} < +\infty.$$

1.4. La réduction au rang 1.

Pour déterminer $S(w)$, on va utiliser une méthode de réduction aux groupes de rang réel 1 (c'est-à-dire $\dim A = 1$). Cette méthode est due à Karpelevič et Gindikin [6], et a déjà été utilisée dans [10]. Il sera commode d'écrire les intégrales d'entrelacement sous une forme un peu différente. Soit

$$(1.4.1) \qquad U_w = U \cap \overline{w}\, V \overline{w}^{-1}.$$

Son algèbre de Lie $\mathfrak{u}_w$ est

$$(1.4.2) \qquad \mathfrak{u}_w = \bigoplus \mathfrak{g}^\alpha \quad \text{pour } \alpha > 0 \quad \text{et} \quad w^{-1}(\alpha) < 0.$$

LEMME 1.1. — *L'application* $(u, u') \mapsto uu'$ *est un isomorphisme de la variété analytique* $U_w \times U'_w$ *sur la variété analytique* U.

La démonstration est classique.

D'autre part, soit $V_w = \bar{w}^{-1} U_w \bar{w}$. Pour un choix convenable de la mesure de Haar de V_w, on a

$$A(\lambda, \bar{w}) f(g) = \int_{V_w} f(g\bar{w}v)\, dv. \tag{1.4.3}$$

Notons que

$$V_w = V \cap \bar{w}^{-1} U \bar{w}, \tag{1.4.4}$$

et que l'algèbre de Lie $\mathfrak{v}_w$ de V_w est

$$\mathfrak{v}_w = \bigoplus \mathfrak{g}^{-\alpha} \qquad \text{pour} \quad \alpha > 0 \quad \text{et} \quad w(\alpha) < 0. \tag{1.4.5}$$

Une racine α est dite indivisible si $\alpha/2$ n'est pas racine. Si $w \in W$, on note $\Delta(w)$ l'ensemble des racines positives α, indivisibles et telles que $w(\alpha) < 0$.

Rappelons que w se décompose en un produit de symétries par rapport à des racines simples. Le plus petit entier q, tel qu'il existe q racines simples, distinctes ou non, $\beta_1, \ldots, \beta_q$ avec

$$w = s_{\beta_1} \ldots s_{\beta_q} \tag{1.4.6}$$

(s_{β_j}, symétrie par rapport à β_j) est, par définition, la longueur $l(w)$ de w. Une décomposition de la forme (1.4.6) avec $q = l(w)$ s'appelle une décomposition réduite de w. Notons que les éléments de longueur 1 sont les symétries par rapport aux racines simples.

PROPOSITION 1.2. — *Soient* $w \in W$ *et* $w = s_1 \ldots s_{l(w)}$ *une décomposition réduite de* w. *Les racines*

$$\alpha_j = s_{\beta_{l(w)}} \ldots s_{\beta_{j+1}}(\beta_j) \qquad [j = 1, \ldots, l(w)]$$

sont positives, deux à deux distinctes et

$$\Delta(w) = \{ \alpha_1, \ldots, \alpha_{l(w)} \}.$$

En particulier, $\operatorname{Card} \Delta(w) = l(w)$.

(BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie* [3], chap. 6, § 1, prop. 17, cor. 2.)

COROLLAIRE. — *Soient* w, w', w'' *trois éléments de* W *tels que* $w = w'w''$ *avec* $l(w) = l(w') + l(w'')$. *On a*

$$\Delta(w) = \Delta(w'') \cup w''^{-1} \Delta(w'). \tag{1.4.7}$$

En effet, en juxtaposant une décomposition réduite de w' et une décomposition réduite de w'', on obtient une décomposition réduite de w, et il suffit d'appliquer la construction de $\Delta(w)$ donnée par la proposition. Remarquons en particulier que $w''^{-1}\Delta(w')$ est un ensemble de racines positives.

Conservons les notations du corollaire. Comme

$$\mathfrak{v}_w = \bigoplus \mathfrak{g}^{-\alpha} \quad \text{pour} \quad \alpha > 0 \quad \text{et} \quad w(\alpha) < 0$$

et de même pour w' et w'', on a

$$\mathfrak{v}_w = \mathfrak{v}_{w''} \oplus ad w''^{-1}(\mathfrak{v}_{w'}). \tag{1.4.8}$$

Proposition 1.3. — *L'application* $(v', v'') \mapsto (\bar{w}''^{-1} v' \bar{w}'') v''$ *de* $V_{w'} \times V_{w''}$ *dans* V_w *est un isomorphisme de variétés analytiques.*

Dans cet énoncé, $\bar{w}''$ est évidemment un représentant de w'' dans M'.

Supposons d'abord que $l(w') = 1$, et soit β une racine simple telle que $w' = s_\beta$. Dans ce cas, on a

$$[ad \bar{w}''^{-1}(\mathfrak{v}_{s_\beta}), \mathfrak{v}_{w''}] \subset \mathfrak{v}_{w''}. \tag{1.4.9}$$

En effet, on a $\Delta(s_\beta) = \{\beta\}$; on doit montrer que si $\alpha'' \in \Delta(w'')$, et si $w''^{-1}(\beta) + \alpha''$ est racine, alors $w''^{-1}(\beta) + \alpha'' \in \Delta(w'')$. Or $\Delta(w)$ est un système clos de racines, donc si $w''^{-1}(\beta) + \alpha''$ est racine et n'appartient pas à $\Delta(w'')$, alors, d'après (1.4.7), on aurait

$$w''^{-1}(\beta) + \alpha'' \in w''^{-1}\Delta(s_\beta),$$

c'est-à-dire $\beta + w''(\alpha'') = \beta$, d'où $\alpha'' = 0$, ce qui est impossible. On a donc (1.4.9). L'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{v}_w$ est somme directe de deux sous-algèbres, et l'une d'entre elles normalise l'autre. Comme V_w est connexe, simplement connexe, la proposition est, dans ce cas, réduite à un lemme classique sur les décompositions de groupes de Lie nilpotents. Dans le cas général, procédons par récurrence sur $l(w')$; supposons la proposition établie lorsque $l(w') \leq p - 1$, et soit w' de longueur p. Soit β une racine simple telle que $w' = s_\beta w_1$ avec $l(w_1) = p - 1$, et soit $w_2 = w_1 w''$. On a donc

$$w = w' w'' = s_\beta w_1 w'' = s_\beta w_2$$

et

$$l(w) = 1 + l(w_2); \qquad l(w_1 w'') = l(w_1) + l(w'') \qquad \text{et} \qquad l(s_\beta w_1) = 1 + l(w_1).$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
V_{s_\beta} \times V_{w_1} \times V_{w''} \arrow[r] \arrow[d] & V_{s_\beta} \times V_{w_2} \arrow[d] \\
V_{w'} \times V_{w''} \arrow[r] & V_w
\end{tikzcd}$$

Les flèches sont définies à l'aide des décompositions $w' = s_\beta w_1$, $w_2 = w_1 w''$, $w = s_\beta w_2$ et $w = w'w''$. D'après l'hypothèse de récurrence, trois de ces flèches sont des isomorphismes de variétés analytiques; il en est donc de même de la dernière.

Dans la suite, on suppose les mesures de Haar des sous-groupes V_w normalisées de telle sorte que

$$\int_{V_w} f(v)\, dv = \int_{V_{w'} \times V_{w''}} f(\bar{w}''^{-1} v' \bar{w}'' v'')\, dv'\, dv'' \tag{1.4.10}$$

chaque fois que $w = w'w''$ avec $l(w) = l(w') + l(w'')$. On notera que si (1.4.10) est vraie pour un représentant $\bar{w}''$ de w'', alors elle est vraie pour tout représentant. On choisira ultérieurement une telle normalisation.

THÉORÈME 1.1. — *Soient w, w', w'' trois éléments de W, et $\bar{w}$, $\bar{w}'$, $\bar{w}''$ des représentants respectifs. On suppose que $\bar{w} = \bar{w}'\bar{w}''$ et que*

$$l(w) = l(w') + l(w'').$$

Dans ces conditions, on a :

(*a*) $S(w) = S(w'') \cap w''^{-1} S(w')$;

(*b*) *si* $\lambda \in S(w)$, *alors*

$$A(\lambda, \bar{w}) = A(w''(\lambda), \bar{w}') A(\lambda, \bar{w}''). \tag{1.4.11}$$

Soit $f \in \mathcal{D}_\lambda$. D'après (1.4.10), on a

$$\int_{V_w} f(g\bar{w}v)\, dv = \int_{V_{w'} \times V_{w''}} f(g\bar{w}\bar{w}''^{-1} v' \bar{w}'' v'')\, dv'\, dv'',$$

ou encore

$$\int_{V_w} f(g\bar{w}v)\, dv = \int_{V_{w'} \times V_{w''}} f(g\bar{w}' v' \bar{w}'' v'')\, dv'\, dv''. \tag{1.4.12}$$

Supposons que $\lambda \in S(w'') \cap w''^{-1} S(w')$. L'intégrale

$$\int_{V_{w''}} f(x\bar{w}w'' v'')\, dv''$$

converge absolument quel que soit x, et sa somme $A(\lambda, \bar{w}'') f$ appartient à $\mathcal{D}_{w''(\lambda)}$. Or $w''(\lambda) \in S(w')$, donc l'intégrale

$$\int_{V_{w'}} A(\lambda, \bar{w}'') f(g\bar{w}' v')\, dv'$$

converge absolument quel que soit g. Dans (1.4.12), l'intégrale de droite est donc absolument convergente, donc l'intégrale de gauche l'est aussi et $\lambda \in S(w)$. Réciproquement, supposons que $\lambda \in S(w)$. On a $\mathrm{Re}(\lambda) \in S(w)$. Considérons l'intégrale d'entrelacement relative à la fonction $f_{\mathrm{Re}(\lambda)}$, définie par (1.3.7),

$$\int_{V_w} f_{\mathrm{Re}(\lambda)}(g\bar{w}v)\,dv.$$

Cette intégrale converge. Si, dans (1.4.12), on remplace f par $f_{\mathrm{Re}(\lambda)}$, on voit que, g étant fixé, l'intégrale

$$\int_{V_{w''}} f_{\mathrm{Re}(\lambda)}(g\bar{w}'\,v'\,\bar{w}''\,v'')\,dv''$$

converge pour presque tout v'. Donc l'intégrale

$$(1.4.13) \qquad A(\lambda, \bar{w}'')\,f_{\mathrm{Re}(\lambda)}(x) = \int_{V_{w''}} f_{\mathrm{Re}(\lambda)}(x\bar{w}''\,v'')\,dv''$$

converge pour au moins un x. Or, formellement, on a

$$(1.4.14) \quad A(\lambda, \bar{w}'')\,f_{\mathrm{Re}(\lambda)}(kau) = \langle -w''(\lambda) - \rho, a \rangle A(\lambda, \bar{w}'')\,f_{\mathrm{Re}(\lambda)}(e).$$

Il en résulte que (1.4.13) converge pour tout x et, en particulier, pour $x = e$, ce qui donne

$$\int_{V_{w''}} \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_{v''} \rangle\,dv'' < +\infty.$$

Ceci montre que $\lambda \in S(w'')$ [*cf.* (1.3.8)]. De plus, l'intégrale

$$\int_{V_{w'}} A(\lambda, \bar{w}'')\,f_{\mathrm{Re}(\lambda)}(g\bar{w}'\,v')\,dv'$$

converge. D'après (1.4.14), ceci s'écrit

$$\int_{V_{w'}} \left[\int_{V_{w''}} \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_{v''} \rangle\,dv'' \right] f_{\mathrm{Re}(w''(\lambda))}(g\bar{w}'\,v')\,dv' < +\infty.$$

Mais

$$\int_{V_{w''}} \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_{v''} \rangle\,dv'' \neq 0,$$

donc, en prenant $g = e$, on a

$$\int_{V_{w'}} \langle -\mathrm{Re}(w''(\lambda)) - \rho, a_{v'} \rangle\,dv' < +\infty$$

et $\lambda \in w''^{-1}\,S(w')$. On a ainsi prouvé (*a*). L'assertion (*b*) résulte de (1.4.12).

Indiquons comment on peut construire des systèmes de parties de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^{*}$ vérifiant la condition (*a*) du théorème. Soit B la forme de Killing de $\mathfrak{g}$ et, pour toute racine α, soit H'_α l'unique élément de $\mathfrak{a}$ tel que $\alpha(H) = B(H, H'_\alpha)$ pour $H \in \mathfrak{a}$; posons

$$H_\alpha = 2H'_\alpha / B(H'_\alpha, H'_\alpha).$$

Soit $c > 0$ et, pour tout w, soit $S_c(w)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^{*}$ tels que

$$\operatorname{Re}(\lambda(H_\alpha)) > c \qquad \text{pour} \quad \alpha \in \Delta(w).$$

L'égalité (1.4.7) montre que si $w = w'w''$ avec $l(w) = l(w') + l(w'')$, alors

$$S_c(w) = S_c(w'') \cap w''^{-1} S_c(w').$$

Au paragraphe 2, on prouvera que $S(w) = S_0(w)$. Le théorème précédent permet de se réduire au cas où $l(w) = 1$.

1.5. L'adjoint des opérateurs d'entrelacement.

Soit β une racine simple. Pour que $\lambda \in S(s_\beta)$, il faut et il suffit que

$$\int_{V_{s_\beta}} \langle -\operatorname{Re}(\lambda) - \rho, a_v \rangle \, dv < +\infty.$$

Or si $v \in V_{s_\beta}$, alors $a_v \in \exp \mathbf{R} H_\beta$, et par suite la condition $\lambda \in S(s_\beta)$ porte uniquement sur la coordonnée $\lambda_\beta = \lambda(H_\beta)$ de λ. Mais

$$s_\beta(\lambda)(H_\beta) = -\lambda(H_\beta)$$

et $s_\beta^{-1} = s_\beta$, d'où

$$S(s_\beta^{-1}) = -s_\beta S(s_\beta).$$

A l'aide de l'assertion (*a*) du théorème 1.1, on montre alors aisément, par récurrence sur $l(w)$, que

$$(1.4.15) \qquad S(w^{-1}) = -w S(w).$$

Rappelons que les espaces $\mathcal{D}_\lambda$ et $\mathcal{D}_{-\bar{\lambda}}$ sont en dualité hermitienne.

PROPOSITION 1.4. — *Si* $\lambda \in S(w)$, *alors* $-w(\bar{\lambda}) \in S(w^{-1})$ *et l'adjoint de l'opérateur*

$$A(\lambda, \bar{w}) : \mathcal{D}_\lambda \to \mathcal{D}_{w(\lambda)}$$

est l'opérateur

$$A(-w(\bar{\lambda}), w^{-1}) : \mathcal{D}_{-w(\bar{\lambda})} \to \mathcal{D}_{-\bar{\lambda}}.$$

La première assertion résulte de (1.4.15). Pour la deuxième, soit $f \in \mathcal{D}_\lambda$ et $f' \in \mathcal{D}_{-w(\bar{\lambda})}$; on doit prouver que

$$(1.5.1) \qquad \langle A(\lambda, \bar{w}) f \mid f' \rangle = \langle f \mid A(-w(\bar{\lambda}), \bar{w}^{-1}) f' \rangle.$$

Soit $\psi' \in \mathcal{D}$ telle que $f' = \psi'_{-w(\bar{\lambda})}$. On a

$$\langle A(\lambda, \bar{w}) f \mid f' \rangle = \oint_G \int_{A \times U} A(\lambda, \bar{w}) f(g) \bar{\psi}'(gau) \langle -w(\lambda) + \rho, a \rangle \, da \, du \, d\mu(g).$$

Comme $A(\lambda, \bar{w}) f \in \mathcal{D}_{w(\lambda)}$, ceci peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\langle A(\lambda, \bar{w}) f \mid f' \rangle &= \oint_G \int_{A \times U} A(\lambda, \bar{w}) f(gau) \bar{\psi}'(gau) \langle 2\rho, a \rangle \, da \, du \, d\mu(g) \\
&= \int_G A(\lambda, \bar{w}) f(g) \bar{\psi}'(g) \, dg \\
&= \int_{G \times V_w} f(g\bar{w}v) \bar{\psi}'(g) \, dv \, dg \\
&= \int_{G \times V_w} f(g) \bar{\psi}'(gv^{-1} \bar{w}^{-1}) \, dv \, dg \\
&= \oint_G \int_{A \times U \times V_w} f(gau) \bar{\psi}'(gauv^{-1} \bar{w}^{-1}) \langle 2\rho, a \rangle \, da \, du \, dv \, d\mu(g) \\
&= \oint_G \int_{A \times U \times V_w} f(g) \bar{\psi}'(gauv^{-1} \bar{w}^{-1}) \langle -\lambda + \rho, a \rangle \, da \, du \, dv \, d\mu(g)
\end{aligned}$$

et tout revient à prouver que

$$(1.5.2) \qquad \begin{aligned} &\int_{A \times U \times V_w} \psi'(gauv^{-1} \bar{w}^{-1}) \langle -\bar{\lambda} + \rho, a \rangle \, da \, du \, dv \\ &\qquad = A(-w(\bar{\lambda}), \bar{w}^{-1}) f'(g). \end{aligned}$$

Faisons quelques conventions relatives aux mesures de Haar. Les mesures de Haar dv_w des groupes V_w satisfont la condition (1.4.10). On a $U_w = \mathrm{ad}(\bar{w}) V_w$; on prend pour mesure de Haar du_w de U_w la mesure $du_w = \mathrm{ad}(\bar{w}) dv_w$. En particulier, si on considère l'unique élément de W qui transforme la chambre de Weyl positive en la chambre négative, alors cette convention précise le choix de la mesure de Haar du de U. La mesure de Haar da de A est choisie arbitrairement. D'autre part, on a vu que $U = U_w U'_w$; soit du'_w l'unique mesure de Haar de U'_w telle que $du = du_w du'_w$. Cela étant, le premier membre de (1.5.2) s'écrit

$$\int_{A \times U \times U_w} \psi'(ga\bar{w}^{-1} \bar{w} u \bar{w}^{-1} u_w) \langle -\bar{\lambda} + \rho, a \rangle \, da \, du \, du_w$$

ou encore

$$(1.5.3)\qquad \int_{A\times U_{w^{-1}}\times U'_{w^{-1}}\times U_w} \psi'(ga\bar{w}^{-1}\bar{w}u_{w^{-1}}\bar{w}^{-1}\bar{w}u'_{w^{-1}}\bar{w}^{-1}u_w)$$
$$\times\langle -\bar{\lambda}+\rho,\, a\rangle\, da\, du_{w^{-1}}\, du'_{w^{-1}}\, du_w.$$

Or

$$\mathrm{ad}(\bar{w})\, U_{w^{-1}} = V_{w^{-1}},\qquad \text{avec}\quad dv_{w^{-1}} = \mathrm{ad}(\bar{w})\, du_{w^{-1}}$$

et

$$\mathrm{ad}(\bar{w})\, U'_{w^{-1}} = U'_w.$$

Posons

$$\mathrm{ad}(\bar{w})\, du'_{w^{-1}} = c\,du'_w,\qquad \text{avec}\quad c\in \mathbf{R}^+_*.$$

L'intégrale (1.5.3) devient

$$c\int_{A\times V_{w^{-1}}\times U'_w\times U_w} \psi'(ga\bar{w}^{-1}v_{w^{-1}}u'_w u_w)\langle -\bar{\lambda}+\rho,\, a\rangle\, da\, dv_{w^{-1}}\, du_w\, du'_w$$
$$= c\int_{A\times V_{w^{-1}}\times U} \psi'(ga\bar{w}^{-1}v_{w^{-1}}u)\langle -\bar{\lambda}+\rho,\, a\rangle\, da\, dv_{w^{-1}}\, du$$
$$= c\int_{V_{w^{-1}}\times A\times U} \psi'(g\bar{w}^{-1}v_{w^{-1}}au)\langle -w(\bar{\lambda})+\rho,\, a\rangle\, dv_{w^{-1}}\, da\, du$$
$$= c\int_{V_{w^{-1}}} f'(g\bar{w}^{-1}v_{w^{-1}})\, dv_{w^{-1}}$$
$$= cA(-w(\bar{\lambda}),\, \bar{w}^{-1})\, f'(g),$$

et il reste à prouver que $c=1$. Pour cela, le plus rapide est de noter que si $w=w^{-1}$, donc en particulier si $l(w)=1$, alors, par définition même de du'_w et de $du'_{w^{-1}}$, on a $du'_w = du'_{w^{-1}}$. De plus $\bar{w}^2\in M$, donc

$$\mathrm{ad}(\bar{w})^2\, du'_w = du'_w,$$

d'où l'on tire $c^2=1$, donc $c=1$. Ceci suffit pour prouver la proposition dans le cas où $l(w)=1$, et le cas général s'en déduit sans peine à l'aide du théorème 1.1. *A posteriori*, on a donc toujours $c=1$; c'est une conséquence de (1.4.10).

1.6. Le cas des fonctions K-finies.

Soit ω une classe de représentations unitaires irréductibles du sous-groupe compact maximal K. Le sous-groupe K opère dans $\mathcal{D}_\lambda$ par translations à gauche. Une fonction $f\in\mathcal{D}_\lambda$ est K-finie si le sous-espace vectoriel E_f de $\mathcal{D}_\lambda$ engendré par les translatées à gauche de f par les éléments de K est de dimension finie. Comme les éléments de $\mathcal{D}_\lambda$ se transforment à droite par un caractère de AU, ils sont entièrement définis par leurs restrictions à K. En particulier, si f est K-finie, on peut considérer E_f comme un sous-espace fermé de $L^2(K)$. On dit que f est de type ω si la représentation évidente de K dans E_f est isotypique de type ω. Soit $\mathcal{D}_{\lambda,\omega}$ l'ensemble des $f\in\mathcal{D}_\lambda$ de type ω. D'après le théorème de Peter-Weyl, $\mathcal{D}_{\lambda,\omega}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}_\lambda$, de dimension $\dim(\omega)^2$. Soit $\mathfrak{d}$ un élément de la classe ω, d'espace $F_\mathfrak{d}$. Les éléments de $\mathcal{D}_{\lambda,\omega}$ sont les fonctions $f_{e,e',\lambda}$ définies par

$$(1.6.1)\quad f_{e,e',\lambda}(kau) = \langle -\lambda-\rho, a\rangle (e \mid \mathfrak{d}(k)e'), \qquad \text{avec} \quad e, e' \in F_\mathfrak{d}.$$

Par abus de langage, on dira de type $\mathfrak{d}$ pour de type ω et, par abus de notation, on note $\mathcal{D}_{\lambda,\mathfrak{d}}$ pour $\mathcal{D}_{\lambda,\omega}$.

Pour les fonctions $f_{e,e',\lambda}$, l'intégrale d'entrelacement, calculée pour $g = k\in K$, s'écrit

$$\int_{V_w} (e \mid \mathfrak{d}(k\bar{w}k_v)\, e') \langle -\lambda-\rho, a_v\rangle\, dv$$

de sorte qu'on voit apparaître les intégrales

$$(1.6.2)\qquad T(\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}) = \mathfrak{d}(\bar{w}) \int_{V_w} \mathfrak{d}(k_v) \langle -\lambda-\rho, a_v\rangle\, dv.$$

On a

$$A(\lambda, \bar{w}) f_{e,e',\lambda} = f_{e,\, T(\bar{\lambda}, \mathfrak{d}, \bar{w})\, e',\, w(\lambda)}.$$

Le théorème 1.1 implique le résultat suivant :

THÉORÈME 1.2 :

(*a*) *L'intégrale* (1.6.2) *converge absolument pour* $\lambda\in S(w)$.

(*b*) *Si* $w = w'w''$ *avec* $l(w) = l(w') + l(w'')$, *et si* $\bar{w}$, $\bar{w}'$, $\bar{w}''$ *sont trois représentants respectifs de* w, w', w'' *tels que* $\bar{w} = \bar{w}'\bar{w}''$, *alors*

$$(1.6.3)\qquad T(\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}) = T(w''(\lambda), \mathfrak{d}, \bar{w}')\, T(\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}'').$$

1.7. La décomposition suivant M.

Soit τ une représentation unitaire irréductible de M, d'espace F_τ. Soit $\mathcal{D}_\tau$ l'espace des applications indéfiniment différentiables à support compact de G dans F_τ. Soit $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$ l'espace des applications f de G dans F_τ, indéfiniment différentiables et telles que

$$(1.7.1)\qquad \left\{ \begin{array}{l} f(gmau) = \langle -\lambda-\rho, a\rangle \tau(m^{-1}) f(g) \\ \quad \text{pour} \quad m\in M, \quad a\in A, \quad u\in U. \end{array} \right.$$

On munit $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$ de la topologie définie par les semi-normes

$$(1.7.2) \qquad \nu_{\Omega,X}(f) = \sup_{g\in\Omega} \| X\star f(g) \|,$$

où X est une distribution sur G, de support l'origine, et Ω une partie compacte de G. Muni de cette topologie, $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$ est un espace de Fréchet. On munit $\mathcal{D}_\tau$ de sa topologie usuelle.

Si $\varphi\in\mathcal{D}_\tau$, alors la fonction $\varphi_{\lambda,\tau}$ définie par

$$(1.7.3) \qquad \varphi_{\lambda,\tau}(g) = \int_{M\times A\times U} \tau(m)\,\varphi(gmau)\langle \lambda+\rho, a\rangle\, dm\, da\, du$$

appartient à $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$, et l'application ainsi obtenue de $\mathcal{D}_\tau$ dans $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$ est un homomorphisme surjectif.

On définit une dualité hermitienne entre $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$ et $\mathcal{D}_{-\bar\lambda,\tau}$ en posant

$$(1.7.4) \qquad \langle f\,|\,f'\rangle = \oint_G (f(g)\,|\,f'(g))\, d\mu(g) \qquad \text{pour } f\in\mathcal{D}_{\lambda,\tau} \text{ et } f'\in\mathcal{D}_{-\bar\lambda,\tau}$$

et, à nouveau, $\langle\,|\,\rangle$ est non dégénérée. Si $\mathrm{Re}(\lambda)=0$, on peut ainsi munir $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$ d'une structure d'espace préhilbertien séparé; soit $\mathcal{H}_{\lambda,\tau}$ son complété. On peut encore décrire $\mathcal{H}_{\lambda,\tau}$ comme l'espace des applications f de G dans F_τ qui vérifient (1.7.1) et dont la restriction à K est de carré intégrable. Par translations à gauche, on définit une représentation différentiable $\pi_{\lambda,\tau}$ de G dans $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$; si $\mathrm{Re}(\lambda)=0$, alors $\pi_{\lambda,\tau}$ se prolonge en une représentation unitaire de G dans $\mathcal{H}_{\lambda,\tau}$. Par définition, ces représentations unitaires constituent la série principale de représentations de G.

Pour λ quelconque, soit $\dot\gamma$ une forme linéaire sur F_τ. Si $f\in\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$ alors $h=\dot\gamma\circ f$ appartient à $\mathcal{D}_\lambda$ et satisfait à la condition

$$(1.7.5) \qquad h\star\bar\xi_\tau = h,$$

où ξ_τ est le caractère de τ. Soit $\mathcal{D}_\lambda^\tau$ le sous-espace de $\mathcal{D}_\lambda$ formé des fonctions qui vérifient (1.7.5). On voit facilement que tout $h\in\mathcal{D}_\lambda^\tau$ est de la forme $\dot\gamma\circ f$ pour un $\dot\gamma$ et un f convenable. En particulier, si $\mathrm{Re}(\lambda)=0$, soit $\mathcal{H}_\lambda^\tau=\overline{\mathcal{D}_\lambda^\tau}$. Le sous-espace $\mathcal{H}_\lambda^\tau$ est invariant par π_λ, et la restriction de π_λ à $\mathcal{H}_\lambda^\tau$ se décompose en la somme de $\dim(\tau)$ représentations unitairement équivalentes à $\pi_{\lambda,\tau}$.

Si $w\in W$, et si $\bar w$ est l'un de ses représentants, on définit $\bar w(\tau)$ par

$$(1.7.6) \qquad F_{\bar w(\tau)} = F_\tau \qquad \text{et} \qquad \bar w(\tau)(m) = \tau(\bar w^{-1} m \bar w).$$

De même que pour les représentations π_λ, on a des intégrales d'entrelacement

$$(1.7.7) \qquad A(\lambda,\tau,\bar w)f(g) = \int_{V_w} f(g\bar w v)\, dv \qquad \text{pour } f\in\mathcal{D}_{\lambda,\tau}.$$

Comme, à l'aide des formes linéaires sur F_τ, on peut se ramener aux opérateurs $A(\lambda, \bar{w})$, ces intégrales ont les propriétés suivantes :

(*a*) Le domaine de convergence de (1.7.7) est $S(w)$.

(*b*) Si $\lambda \in S(w)$ et si $f \in \mathcal{D}_{\lambda,\tau}$, alors $A(\lambda, \tau, \bar{w}) f \in \mathcal{D}_{w(\lambda), \bar{w}(\tau)}$.

(*c*) L'opérateur $A(\lambda, \tau, \bar{w})$ est continu, et commute aux translations à gauche, c'est-à-dire entrelace les représentations $\pi_{\lambda,\tau}$ et $\pi_{w(\lambda), \bar{w}(\tau)}$ de G dans $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$ et $\mathcal{D}_{w(\lambda), \bar{w}(\tau)}$ respectivement.

(*d*) Sous les hypothèses du théorème 1.1, on a

$$(1.7.8) \qquad A(\lambda, \tau, \bar{w}) = A(w''(\lambda), \bar{w}''(\tau), \bar{w}') A(\lambda, \tau, \bar{w}'').$$

(*e*) Si $\lambda \in S(w)$, l'adjoint de l'opérateur

$$A(\lambda, \tau, \bar{w}) : \quad \mathcal{D}_{\lambda,\tau} \to \mathcal{D}_{w(\lambda), \bar{w}(\tau)}$$

est l'opérateur

$$A\left(-w(\bar{\lambda}), \bar{w}(\tau), \bar{w}^{-1}\right) : \quad \mathcal{D}_{-w(\bar{\lambda}), \bar{w}(\tau)} \to \mathcal{D}_{-\bar{\lambda},\tau}.$$

1.8. Les distributions coniques généralisées.

Pour terminer ce paragraphe, on va montrer comment on peut réaliser les opérateurs d'entrelacement comme des convolutions à droite, et faire la liaison avec [4].

On sait que

$$G = \bigcup_{w \in W} U_w \bar{w} MAU \qquad \text{(décomposition de Bruhat).}$$

Si w_0 désigne l'unique élément de W qui transforme toutes les racines positives en racines négatives, alors $U_{w_0} = U$, et $U\bar{w}_0 MAU$ est un ouvert de G dont le complémentaire est de mesure nulle. Il en est donc de même de son translaté $VMAU$. Rappelons comment on peut caractériser les éléments de $U\bar{w}_0 MAU$. Soit π une représentation irréductible de G, de dimension finie, non triviale, d'espace F. Soient F' le dual de F, et π' la représentation contragrédiente de π. Si $\mu \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$, on note F_μ (resp. F'_μ) le sous-espace des vecteurs de poids (réel) μ dans F (resp. F').

Il est clair que μ est poids de π (c'est-à-dire $F_\mu \neq 0$) si, et seulement si, $-\mu$ est poids de π'. De plus $\langle F_\mu, F'_\nu \rangle = 0$ si $\mu + \nu \neq 0$. Soit Λ le plus haut poids de π; le plus haut poids de π' est $-w_0(\Lambda)$. Soit e_Λ un vecteur dominant de π. Si $g \in G$, alors

$$\langle \pi(g) e_\Lambda, F'_{-w_0(\Lambda)} \rangle \neq 0$$

si, et seulement si, $g \in U\overline{w}_0 MAU$. En effet, si $g \in G$, il s'écrit de façon unique $g = u\overline{w}mau'$ (décomposition de Bruhat) et

$$\langle \pi(g)\, e_\Lambda,\ F'_{-w_0(\Lambda)} \rangle = \langle \pi(\overline{w}mau')\, e_\Lambda,\ \pi'(u^{-1}) F'_{-w_0(\Lambda)} \rangle$$
$$= \langle \pi(\overline{w}mau')\, e_\Lambda,\ F'_{-w_0(\Lambda)} \rangle.$$

Or $\pi(\overline{w}mau')\, e_\Lambda \in F_{w(\Lambda)}$ donc si $w \neq w_0$, alors

$$\langle \pi(g)\, e_\Lambda,\ F'_{-w_0(\Lambda)} \rangle \subset \langle F_{w(\Lambda)},\ F'_{-w_0(\Lambda)} \rangle = 0.$$

Si $w = w_0$, alors $\pi(g)\, e_\Lambda$ est un élément non nul de $F_{w_0(\Lambda)}$ donc

$$\langle \pi(g)\, e_\Lambda,\ F'_{-w_0(\Lambda)} \rangle \neq 0.$$

On en déduit que g appartient à $VMAU$ si, et seulement si

$$\langle \pi(g)\, e_\Lambda,\ F'_{-\Lambda} \rangle \neq 0. \tag{1.8.1}$$

LEMME 1.2. — *L'ensemble O_w des éléments v de V_w, tels que $\overline{w}v \in VMAU$, est ouvert dans V_w, et son complémentaire est de mesure nulle.*

D'après (1.8.1), O_w est l'ensemble des $v \in V_w$ tels que

$$\langle \pi(\overline{w}v)\, e_\Lambda,\ F'_{-\Lambda} \rangle \neq 0$$

et par suite, O_w est un ouvert de Zariski de V_w (pour prouver ce lemme on peut, sans diminuer la généralité, supposer que G est algébrique). Il nous suffit donc de prouver qu'il est non vide. Par l'absurde, supposons que

$$\langle \pi(\overline{w}\, V_w)\, e_\Lambda,\ F'_{-\Lambda} \rangle = 0.$$

Ceci s'écrit

$$\langle \pi(U_w \overline{w})\, e_\Lambda,\ F'_{-\Lambda} \rangle = 0$$

ou encore

$$\langle \pi(U \overline{w})\, e_\Lambda,\ F'_{-\Lambda} \rangle = 0$$

puisque $U = U_w U'_w$ et que $\overline{w}^{-1} U'_w \overline{w} \subset U$. Mais $-\Lambda$ est le plus bas poids de π', donc, π' étant irréductible, F' est engendré par les éléments de $\pi'(U) F'_{-\Lambda}$. Or notre hypothèse s'écrit

$$\langle \pi(\overline{w})\, e_\Lambda,\ \pi'(U) F'_{-\Lambda} \rangle = 0,$$

donc implique

$$\langle \pi(\overline{w})\, e_\Lambda,\ F' \rangle = 0,$$

c'est-à-dire $\pi(\overline{w}) e = 0$, ce qui est absurde.

Pour $v \in O_w$, posons

$$\overline{w}v = z^{-1} mau, \qquad \text{avec} \quad z \in V, \quad m \in M, \quad a \in A \quad \text{et} \quad u \in U. \tag{1.8.2}$$

PROPOSITION 1.5. — *Soit $\lambda \in S(w)$. L'application $v \mapsto z$ de O_w dans V est propre pour la mesure $\tau(m^{-1})\langle -\lambda-\rho, a\rangle dv$.*

Dans cet énoncé, z, a et m sont définis par (1.8.2), et dv désigne la restriction à O_w de la mesure de Haar de V_w.

Soit ψ une application indéfiniment différentiable à support compact de V dans F_τ; il suffit de vérifier que l'intégrale

$$\int_{O_w} \tau(m^{-1})\,\psi(z^{-1})\langle -\lambda-\rho, a\rangle dv \tag{1.8.3}$$

est absolument convergente. Or si l'on pose

$$\psi_{\lambda,\tau}(v'm'a'u') = \tau(m'^{-1})\langle -\lambda-\rho, a'\rangle\psi(v') \qquad \text{pour } v' \in V,\ m' \in M,\ \ldots,$$
$$\psi_{\lambda,\tau}(g) = 0 \qquad \text{si } g \notin VMAU,$$

alors $\psi_{\lambda,\tau} \in \mathcal{D}_{\lambda,\tau}$, et (1.8.3) s'écrit

$$\int_{O_w} \psi_{\lambda,\tau}(z^{-1}ma)\,dv$$

ou encore

$$\int_{V_w} \psi_{\lambda,\tau}(\overline{w}v)\,dv,$$

et cette dernière intégrale est absolument convergente puisque $\lambda \in S(w)$.

Soit $\Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}}$ l'image de $\tau(m^{-1})\langle -\lambda-\rho, a\rangle dv$ par l'application $v \mapsto z$. Dans la suite, on considère $\Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}}$ comme une mesure sur G. Le théorème 1.1 se reformule comme suit :

THÉORÈME 1.3. — *Soient $\lambda \in S(w)$ et τ une représentation unitaire irréductible de M. Si $f \in \mathcal{D}_{\lambda,\tau}$, alors f et $\Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}}$ sont convolables et*

$$A(\lambda, \tau, \overline{w}) = f \star \Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}}. \tag{1.8.4}$$

De plus, si $w = w'w''$ avec $l(w) = l(w') + l(w'')$, et si les représentants $\overline{w}$, $\overline{w}'$ et $\overline{w}''$ sont tels que $\overline{w} = \overline{w}'\overline{w}''$, alors $\Phi_{w''(\lambda), \overline{w}''(\tau), \overline{w}'}$ et $\Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}''}$ sont convolables et

$$\Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}} = \Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}''} \star \Phi_{w''(\lambda), \overline{w}''(\tau), \overline{w}'}. \tag{1.8.5}$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}_\tau$, considérons l'intégrale

$$\varphi_{\lambda,\tau} \star \Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}}(e) = \int_{M\times A\times U\times V_w} \tau(m)\,\varphi(\overline{w}vmau)\langle \lambda+\rho, a\rangle\, dm\,da\,du\,dv,$$

où $\varphi_{\lambda,\tau}$ est définie par (1.7.3). Par un calcul analogue à celui fait au paragraphe 1.5, on montre que

$$\varphi_{\lambda,\tau}\star\Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}}(e)=\int_{M\times A\times U\times V_{w^{-1}}}\overline{w}(\tau)(m)\varphi(amuv\overline{w})\langle w(\lambda)+\rho,a\rangle dm\,da\,du\,dv$$

Considérons la distribution

$$(1.8.6)\qquad S_{\lambda,\tau,\overline{w}}:\quad \varphi\mapsto\varphi_{\lambda,\tau}\star\Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}}(e).$$

Pour tout $g\in G$, notons ε_g la masse $+1$ au point g. Il résulte des formules précédentes que si $m\in M$, $a\in A$ et $u\in U$, alors

$$(1.8.7)\qquad \varepsilon_{(mau)^{-1}}\star S_{\lambda,\tau,\overline{w}}=\langle w(\lambda)+\rho,a\rangle\,\overline{w}(\tau)(m)\,S_{\lambda,\tau,\overline{w}},$$

$$(1.8.8)\qquad S_{\lambda,\tau,\overline{w}}\star\varepsilon_{mau}=\langle-\lambda+\rho,a\rangle\,S_{\lambda,\tau,\overline{w}}\,\tau(m^{-1}).$$

Les distributions $S_{\lambda,\tau,\overline{w}}$ sont donc du type de celles introduites par F. BRUHAT [4].

D'autre part, soit $\mathfrak{U}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire l'algèbre de convolution des distributions de support l'origine sur G, et soit $\mathfrak{Z}$ le centre de $\mathfrak{U}$.

L'algèbre $\mathfrak{U}$ opère dans $\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$ par convolution à gauche et, en particulier, on sait que $\mathfrak{Z}$ opère scalairement. Posons, pour $Z\in\mathfrak{Z}$ et $f\in\mathcal{D}_{\lambda,\tau}$,

$$Z\star f=\chi(Z)f.$$

Si $\varphi\in\mathcal{D}_\tau$, on a

$$(Z\star\varphi)_{\lambda,\tau}=Z\star(\varphi_{\lambda,\tau}),$$

d'où

$$(Z\star\varphi)_{\lambda,\tau}\star\Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}}(e)=\chi(Z)\,\varphi_{\lambda,\tau}\star\Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}}(e).$$

On a donc

$$(1.8.9)\qquad \check{Z}\star S_{\lambda,\tau,\overline{w}}=\chi(Z)\,S_{\lambda,\tau,\overline{w}},$$

où $\check{Z}$ est l'image de Z par l'application $g\mapsto g^{-1}$. Lorsque τ est la représentation triviale de M, ces distributions sont des distributions coniques au sens de S. HELGASON [8].

§ 2. Le prolongement analytique.

2.1. Préliminaires sur les groupes de rang 1.

Dans tout ce numéro, on suppose que G est de rang 1, c'est-à-dire que A est de dimension 1. Soit β une racine positive indivisible. On sait que ou bien β est la seule racine positive, ou bien β et 2β sont les seules racines positives. Soit $\mathfrak{v}_1$ (resp. $\mathfrak{v}_2$) le sous-espace propre pour la racine $-\beta$ (resp. -2β). Soit p (resp. q) la dimension de $\mathfrak{v}_1$ (resp. de $\mathfrak{v}_2$). Soit H

l'unique élément de $\mathfrak{a}$ tel que $\beta(H) = 2$; on a donc $\mathfrak{a} = \mathbf{R}H$. On identifie le dual complexe $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^{*}$ de $\mathfrak{a}$ à $\mathbf{C}$, en faisant correspondre au nombre complexe λ la forme linéaire $tH \mapsto \lambda t$; en particulier, la demi-somme des racines positives vaut $\rho = p + 2q$. Soit θ l'involution de Cartan associée à la sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$. Si B est la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, la forme quadratique Q, définie par

$$Q(X) = 4B(X, \theta(X))/B(H, \theta(H)), \tag{2.1.1}$$

est positive non dégénérée. Remarquons que Q est invariante par $\mathrm{Ad}(K)$. Rappelons enfin que V étant connexe simplement connexe, l'application exponentielle est un isomorphisme de $\mathfrak{v}$ sur V.

Soit $\bar{w}$ un représentant du seul élément non trivial du groupe de Weyl W.

Proposition 2.1. — *Soit Y (resp. Z) un élément de $\mathfrak{v}_1$ (resp. de $\mathfrak{v}_2$). Posons*

$$v = \exp(Y + Z).$$

(*a*) *Soit $v = k_v a_v u_v$ la décomposition d'Iwasawa de v; on a*

$$a_v = \exp(xH/2), \qquad \textit{avec} \quad e^{2x} = (1 + Q(Y)/2)^2 + 2Q(Z). \tag{2.1.2}$$

(*b*) *Si $v \neq e$, il existe un et un seul élément a de A tel que $\bar{w}v \in VMaU$, et on a*

$$a = \exp(x'H/2), \qquad \textit{avec} \quad e^{2x'} = Q(Y)^2/4 + 2Q(Z). \tag{2.1.3}$$

Pour (*b*), rappelons que

$$G = U\bar{w}MAU \cup MAU \qquad \text{(décomposition de Bruhat)},$$

ce qui s'écrit encore

$$G = VMAU \cup \bar{w}MAU.$$

Comme $V \cap MAU = e$, l'existence et l'unicité de a sont évidentes.

Ce résultat a été obtenu de façon indépendante par S. Helgason [8]. Notre démonstration initiale consistait en une vérification cas par cas. La démonstration qui suit nous a été suggérée par R. Godement.

Pour simplifier, posons

$$\theta(X) = X'. \tag{2.1.4}$$

Lemme 2.1. — *Si $X \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, on a $[X, X'] = t(X)H$ avec*

$$4t(X) = -\alpha(H)\,Q(X). \tag{2.1.5}$$

En effet, on a

$$[X, X'] = -[X, X']'$$

et, par suite $[X, X'] \in \mathfrak{p}$. De plus $[X, X'] \in [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}] \subset \mathfrak{g}^0$. On en déduit que $[X, X']$ appartient à $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}^0 = \mathfrak{a}$. Comme $\mathfrak{a}$ est de dimension 1, on peut poser $[X, X'] = t(X) H$. Par invariance de la forme de Killing, on a

$$B([X, H], X') + B(H, [X, X']) = 0,$$

d'où

$$-\alpha(H) B(X, X') = t(X) B(H, H'),$$

ce qui donne (2.1.5).

LEMME 2.2. — *Soit* $\alpha = \pm \beta$ *et* $Y \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $Z \in \mathfrak{g}^{2\alpha}$. *On a* $\operatorname{ad}(Y)^2 Z' \in \mathfrak{m}$.

En effet, $(\mathfrak{g}^{2\alpha})' = \mathfrak{g}^{-2\alpha}$, donc $\operatorname{ad}(Y)^2 Z' \in \mathfrak{g}^0$. Or dans $\mathfrak{g}^0$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ pour la forme de Killing est $\mathfrak{m}$. Il suffit donc de prouver que $B(H, \operatorname{ad}(Y)^2 Z') = 0$. En utilisant à nouveau l'invariance de B, on obtient

$$B(H, \operatorname{ad}(Y)^2 Z') = B(\operatorname{ad}(Y)^2 H, Z') = 0$$

puisque $\operatorname{ad}(Y)^2 H = 0$.

On a $(\operatorname{ad}(Y)^2 Z')' = \operatorname{ad}(Y)^2 Z'$ ce qui, en calculant le premier membre donne

$$\operatorname{ad}(Y)^2 Z' = \operatorname{ad}(Y')^2 Z. \tag{2.1.6}$$

LEMME 2.3. — *Soit* $Y \in \mathfrak{g}^{-\beta}$ *et* $Z \in \mathfrak{g}^{-2\beta}$. *On a*

$$\operatorname{ad}(Y') \operatorname{ad}(Y) Z' = -4 t(Y) Z', \tag{2.1.7}$$

$$\operatorname{ad}(Y')^2 \operatorname{ad}(Y)^2 Z' = 24\, t(Y)^2 Z', \tag{2.1.8}$$

$$\operatorname{ad}(Y)^4 Z' = 24\, t(Y)^2 Z, \tag{2.1.9}$$

$$\operatorname{ad}(Y)^3 Z' = -6\, t(Y) [Y', Z], \tag{2.1.10}$$

$$Q(\operatorname{ad}(Y)^2 Z') = 24\, t(Y)^2 Q(Z), \tag{2.1.11}$$

$$Q(\operatorname{ad}(Y)^4 Z') = (24)^2 t(Y)^4 Q(Z), \tag{2.1.12}$$

$$Q(\operatorname{ad}(Y) Z') = 4\, t(Y)\, Q(Z). \tag{2.1.13}$$

Prouvons (2.1.7). On a

$$\operatorname{ad}(Y') \operatorname{ad}(Y) Z' = \operatorname{ad}(Y') [Y, Z'] = [[Y', Y], Z'] + [Y, [Y', Z']].$$

Or, $[Y', Z'] \in \mathfrak{g}^{3\beta} = (0)$ et, d'après le lemme 2.1, on a $[Y, Y'] = t(Y) H$. Il vient

$$\operatorname{ad}(Y') \operatorname{ad}(Y) Z' = -t(Y) [H, Z'] = -4\, t(Y) Z'.$$

Prouvons (2.1.8). On a tout d'abord

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}(Y')^2 \operatorname{ad}(Y)^2 Z' &= \operatorname{ad}(Y')^2 [Y, \operatorname{ad}(Y) Z'] \\ &= \operatorname{ad}(Y') ([\operatorname{ad}(Y') Y, \operatorname{ad}(Y) Z'] + [Y, \operatorname{ad}(Y') \operatorname{ad}(Y) Z']). \end{aligned}$$

En appliquant (2.1.7) et le lemme 2.1, il vient

$$\mathrm{ad}(Y')^2\,\mathrm{ad}(Y)^2 Z' = \mathrm{ad}(Y')(-t(Y)[H, \mathrm{ad}(Y)Z'] - 4\,t(Y)[Y, Z']).$$

Or $\mathrm{ad}(Y)Z' \in \mathfrak{g}^{\beta}$ donc $[H, \mathrm{ad}(Y)Z'] = 2\,\mathrm{ad}(Y)Z' = 2[Y, Z']$, d'où

$$\mathrm{ad}(Y')^2\,\mathrm{ad}(Y)^2 Z' = -6\,t(Y)\,\mathrm{ad}(Y')\,\mathrm{ad}(Y)Z' = 24\,t(Y)^2 Z',$$

en utilisant à nouveau (2.1.7).

Prouvons (2.1.9). On a

$$\mathrm{ad}(Y)^4 Z' = \mathrm{ad}(Y)^2\,\mathrm{ad}(Y)^2 Z'.$$

Appliquons (2.1.6) :

$$\mathrm{ad}(Y)^4 Z' = \mathrm{ad}(Y)^2\,\mathrm{ad}(Y')^2 Z.$$

Or, en transformant par l'involution de Cartan l'égalité (2.1.8), on obtient

$$\mathrm{ad}(Y)^2\,\mathrm{ad}(Y')^2 Z = 24\,t(Y)^2 Z,$$

d'où

$$\mathrm{ad}(Y)^4 Z' = 24\,t(Y)^2 Z.$$

Prouvons (2.1.10). En utilisant (2.1.6), on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(Y)^3 Z' &= \mathrm{ad}(Y)\,\mathrm{ad}(Y)^2 Z' = \mathrm{ad}(Y)\,\mathrm{ad}(Y')^2 Z = \mathrm{ad}(Y)[Y', [Y', Z]]\\ &= [\mathrm{ad}(Y)Y', \mathrm{ad}(Y')Z] + [Y', \mathrm{ad}(Y)\,\mathrm{ad}(Y')Z].\end{aligned}$$

A l'aide du lemme 2.1 et de l'égalité (2.1.7), transformée par l'involution de Cartan, on obtient

$$\mathrm{ad}(Y)^3 Z' = t(Y)[H, [Y', Z]] - 4\,t(Y)[Y', Z].$$

Comme $[Y', Z] \in \mathfrak{g}^{-\beta}$, on a $[H, [Y', Z]] = -2[Y', Z]$, d'où

$$\mathrm{ad}(Y)^3 Z' = -6\,t(Y)[Y', Z].$$

Prouvons (2.1.11). Comme $\mathrm{ad}(Y)^2 Z' \in \mathfrak{m}$, on a

$$(\mathrm{ad}(Y)^2 Z')' = \mathrm{ad}(Y)^2 Z',$$

d'où

$$B(\mathrm{ad}(Y)^2 Z', (\mathrm{ad}(Y)^2 Z')') = B(\mathrm{ad}(Y)^2 Z', \mathrm{ad}(Y)^2 Z') = B(\mathrm{ad}(Y)^4 Z', Z').$$

En appliquant la formule (2.1.9), il vient

$$B(\mathrm{ad}(Y)^2 Z', (\mathrm{ad}(Y)^2 Z')') = 24\,t(Y)^2 B(Z, Z')$$

ce qui, d'après la définition de Q, équivaut à (2.1.11).

La formule (2.1.12) est une conséquence triviale de (2.1.9). Prouvons (2.1.13). On a

$$\begin{aligned} B(\mathrm{ad}(Y)Z', (\mathrm{ad}(Y)Z')') &= B(\mathrm{ad}(Y)Z', \mathrm{ad}(Y')Z) \\ &= -B(\mathrm{ad}(Y')\,\mathrm{ad}(Y)Z', Z). \end{aligned}$$

En appliquant (2.1.7), il vient

$$B(\mathrm{ad}(Y)Z', (\mathrm{ad}(Y)Z')') = 4\,t(Y)\,B(Z', Z)$$

et cette dernière égalité équivaut à (2.1.13).

Pour prouver la proposition 2.1, on peut, sans restreindre la généralité, supposer que G est le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$. Supposons d'abord que 2β soit racine, et soit $v = \exp(Y+Z)$ avec $Y \in \mathfrak{g}^{-\beta}$ et $Z \in \mathfrak{g}^{-2\beta}$. Si Z est non nul, alors Z' est vecteur dominant pour la représentation adjointe, et on a

$$v(Z') = \langle 2\beta, a_v \rangle k_v(Z'),$$

d'où

$$Q(v(Z')) = \langle 4\beta, a_v \rangle Q(Z').$$

Pour la forme quadratique Q, les sous-espaces $\mathfrak{g}^{\alpha}$ sont deux à deux orthogonaux et les composantes de $v(Z')$ sont

$\mathfrak{g}^{2\beta}$: Z',

$\mathfrak{g}^{\beta}$: $\mathrm{ad}(Y)Z'$,

$\mathfrak{g}^{0}$: $\frac{1}{2}\mathrm{ad}(Y)^2Z' + \mathrm{ad}(Z)Z' = \frac{1}{2}\mathrm{ad}(Y)^2Z' + t(Z)H$,

$\mathfrak{g}^{-\beta}$: $\frac{1}{6}\mathrm{ad}(Y)^3Z' + \mathrm{ad}(Y)\,\mathrm{ad}(Z)Z' = -t(Y)\,\mathrm{ad}(Y')Z + 2\,t(Z)\,Y$,

$\mathfrak{g}^{-2\beta}$: $\frac{1}{24}\mathrm{ad}(Y)^4Z' + \frac{1}{2}\mathrm{ad}(Y)^2\mathrm{ad}(Z)Z' + \frac{1}{2}\mathrm{ad}(Z)^2Z' = t(Y)^2Z + 2t(Z)Z$.

On a donc

$$\begin{aligned} Q(v(Z')) &= Q(Z') + Q(\mathrm{ad}(Y)Z') + Q\left(\frac{1}{2}\mathrm{ad}(Y)^2Z' + t(Z)H\right) \\ &\quad + Q(2\,t(Z)Y - t(Y)\,\mathrm{ad}(Y')Z) + (t(Y)^2 + 2\,t(Z))^2\,Q(Z). \end{aligned}$$

Évaluons les différents termes de cette somme. D'après (2.1.13), on a

$$Q(\mathrm{ad}(Y)Z') = 4\,t(Y)\,Q(Z).$$

On sait que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{m}$ sont orthogonaux et, d'après le lemme 2.2, $\mathrm{ad}(Y)^2Z' \in \mathfrak{m}$, d'où

$$Q\left(\frac{1}{2}\mathrm{ad}(Y)^2Z' + t(Z)H\right) = \frac{1}{4}Q(\mathrm{ad}(Y)^2Z') + t(Z)^2\,Q(H).$$

En utilisant (2.1.11), et en notant que $Q(H) = 4$, on a donc

$$Q\left(\frac{1}{2}\operatorname{ad}(Y)^2 Z' + t(Z)H\right) = 6\,t(Y)^2\,Q(Z) + 4\,t(Z)^2.$$

Enfin, par polarisation,

$$\begin{aligned} Q(2\,t(Z)Y - t(Y)\operatorname{ad}(Y')Z) &= 4\,t(Z)^2\,Q(Y) + t(Y)^2\,Q(\operatorname{ad}(Y')Z) \\ &\quad + 8\,B(2\,t(Z)Y, -t(Y)\operatorname{ad}(Y)Z')/B(H, H). \end{aligned}$$

Dans cette somme, le troisième terme est nul car il est proportionnel à

$$B(Y, \operatorname{ad}(Y)Z') = -B(\operatorname{ad}(Y)Y, Z') = 0.$$

On a donc, en utilisant (2.1.13) transformée par l'involution de Cartan,

$$Q(2\,t(Z)Y - t(Y)\operatorname{ad}(Y')Z) = 4\,t(Z)^2\,Q(Y) + 4\,t(Y)^3\,Q(Z).$$

Comme

$$t(Y) = \frac{1}{2}\,Q(Y) \qquad \text{et} \qquad t(Z) = Q(Z),$$

il vient finalement

$$\begin{aligned} Q(v(Z'))/Q(Z) &= 1 + 2\,Q(Y) + \left(\frac{3}{2}\,Q(Y)^2 + 4\,Q(Z)\right) \\ &\quad + \left(4\,Q(Y)\,Q(Z) + \frac{1}{2}\,Q(Y)^3\right) + \left(\frac{1}{4}\,Q(Y)^2 + 2\,Q(Z)\right)^2 \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{2}\,Q(Y)\right)^2 + 2\,Q(Z)\right]^2. \end{aligned}$$

Avec les notations de l'énoncé, on a donc

$$e^{4x} = \langle 4\beta, a_v \rangle = Q(v(Z'))/Q(Z) = \left[\left(1 + \frac{1}{2}\,Q(Y)\right)^2 + 2\,Q(Z)\right]^2,$$

ce qui est bien le résultat cherché. Les calculs précédents supposent Z non nul, mais l'application $v \mapsto a_v$ est continue de sorte que la formule obtenue reste valable pour $Z = 0$. Si 2β n'est pas racine, alors $v = \exp(Y)$ avec $Y \in \mathfrak{g}^{-\beta}$, et si Y est non nul, alors Y' est un vecteur dominant pour la représentation adjointe. On a

$$\langle 2\beta, a_v \rangle = Q(v(Y'))/Q(Y).$$

Or

$$v(Y') = Y' + [Y, Y'] + \frac{1}{2}[Y, [Y, Y']] = Y' + t(Y)H + t(Y)\,Y.$$

On a donc

$$Q(v(Y')) = Q(Y')\,(1 + 4t(Y)/Q(Y) + t(Y)^2).$$

En remplaçant $t(Y)$ par $\frac{1}{2} Q(Y)$, il vient

$$Q(v(Y')) = Q(Y')\left(1 + \frac{1}{2} Q(Y)\right)^2.$$

Comme précédemment, on en déduit la formule cherchée.

Prouvons (*b*). Rappelons que, pour $v \neq e$, on a posé $\bar{w}v = v'mau$. Si 2β est racine, on a

$$\bar{w}v(Z') = \langle 2\beta, a\rangle v'm(Z').$$

La composante suivant $\mathfrak{g}^{-2\beta}$ de $\bar{w}v(Z')$ est

$$\bar{w}\left[\frac{1}{4!}\operatorname{ad}(Y)^4 Z' + \frac{1}{2}\operatorname{ad}(Y)^2\operatorname{ad}(Z)Z' + \frac{1}{2}\operatorname{ad}(Z)^2 Z'\right]$$

et celle de $\langle 2\beta, a\rangle v'm(Z')$ est $\langle 2\beta, a\rangle m(Z')$. En égalant les normes de ces composantes, il vient

$$(t(Y)^2 + 2t(Z))\, Q(Z)^{\frac{1}{2}} = \langle 2\beta, a\rangle Q(Z)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$e^{2x'} = \langle 2\beta, a\rangle = \frac{1}{4} Q(Y)^2 + 2Q(Z).$$

Ces calculs supposent Z non nul, mais, par continuité, la formule reste valable pour $Z = 0$. Si 2β n'est pas racine, on a cette fois

$$\bar{w}v(Y') = \langle \beta, a\rangle v'm(Y')$$

et, en prenant les composantes suivant $\mathfrak{g}^{-\beta}$, il vient

$$t(Y)Q(Y)^{\frac{1}{2}} = \langle \beta, a\rangle Q(Y)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$e^{x'} = \langle \beta, a\rangle = \frac{1}{2} Q(Y).$$

La démonstration de la proposition 2.1 est ainsi terminée. Dans la suite, il sera commode d'identifier $\mathfrak{v}_1$ à $\mathbf{R}^p$ de sorte que

$$\| Y \|^2 = \frac{1}{2} Q(Y)$$

et $\mathfrak{v}_2$ à $\mathbf{R}^q$ de sorte que

$$\| Z \|^2 = 2Q(Z),$$

les $\| \ \|$ étant ici les normes euclidiennes dans $\mathbf{R}^p$ ou $\mathbf{R}^q$. Les formules (2.1.2) et et (2.1.3) deviennent

(2.1.14) $$e^{2x} = (1 + \| Y \|^2)^2 + \| Z \|^2,$$

(2.1.15) $$e^{2x'} = \| Y \|^4 + \| Z \|^2.$$

Ces formules joueront un rôle essentiel par la suite. On aura également besoin de quelques résultats élémentaires qu'on va maintenant établir.

PROPOSITION 2.2. — *Soit* $v \in V$. *Supposons* $v \neq e$ *et posons*

$$\bar{w}v = v'mau, \qquad \textit{avec} \quad v' \in V, \quad \textit{etc.}$$

L'application $j : v \mapsto v'$ *est un isomorphisme de la variété analytique* $V - \{ e \}$ *sur elle-même, et l'image par* j *de la restriction à* $V - \{ e \}$ *de la mesure* dv *est la restriction à* $V - \{ e \}$ *de la mesure* $\langle -2\rho, a \rangle dv$.

En effet, considérons l'espace homogène $X = G/MAU$ et soit $\sigma : G \to X$ la surjection canonique. D'après la décomposition de Bruhat, $\sigma_{|V}$ est un isomorphisme de la variété analytique V sur la sous-variété ouverte $X - \{ \sigma(\bar{w}) \}$ de X. Le groupe G opère analytiquement dans X par translations à gauche. Cela étant, si $v \neq e$, on a $\sigma(v') = \bar{w}\sigma(v)$, et la première assertion de la proposition est évidente. Remarquons que si v tend vers e, alors $j(v) = v'$ tend vers l'infini [i. e. $\sigma(v')$ tend vers $\sigma(\bar{w})$]. D'autre part, si f est une fonction définie sur V, continue et à support compact, la fonction $\tilde{f}$, définie sur G par

$$\tilde{f}(vm_1a_1u_1) = \langle -2\rho, a_1 \rangle f(v) \qquad \text{pour} \quad v \in V, \quad \text{etc.},$$
$$\tilde{f}(g) = 0 \qquad \text{si} \quad g \notin VMAU$$

est continue et vérifie

$$\tilde{f}(ga_1u_1) = \langle -2\rho, a_1 \rangle \tilde{f}(g) \qquad \text{pour} \quad a_1 \in A \quad \text{et} \quad u_1 \in U.$$

En étendant de façon évidente aux fonctions continues les considérations du paragraphe 1, n° 2, on voit que la forme linéaire

$$f \mapsto \oint_G f(g)\, d\mu(g)$$

définit une mesure sur V. Comme μ est invariante à gauche par G, cette mesure est invariante à gauche par V, donc est une mesure de Haar de V. Comme il suffit de prouver la deuxième assertion de la proposition pour un choix particulier de dv, on suppose que

$$\int_V f(v)\, dv = \oint_G \tilde{f}(g)\, d\mu(g).$$

Si le support de f est contenu dans $V - \{ e \}$, il en est de même de celui de $f \circ j$. Soit f' définie par

$$f'(v) = f(v') \langle -2\rho, a \rangle,$$

et considérons la fonction $\tilde{f}'$. On a

$$\tilde{f}(\bar{w}v) = \tilde{f}'(v).$$

Comme les fonctions $\tilde{f}$ et $\tilde{f}'$ sont toutes deux à support compact dans $VMAU$ et se transforment à droite par le même caractère de MAU, on a donc

$$\tilde{f}(\bar{w}g) = \tilde{f}'(g)$$

quel que soit $g \in G$. Par suite,

$$\oint_G \tilde{f}(g)\, d\mu(g) = \oint_G \tilde{f}'(g)\, d\mu(g),$$

ce qui s'écrit

$$\int_V f(v)\, dv = \int_V f(v') \langle -2\rho, a \rangle\, dv.$$

En remplaçant la fonction f par la fonction $v \mapsto f(v) \langle -2\rho, a \rangle$, on obtient

$$(2.1.16) \qquad \int_V f(v) \langle -2\rho, a \rangle\, dv = \int_V f(v')\, dv$$

(noter que $\bar{w}v' \in VMa^{-1}U$), ce qui achève la démonstration.

Si τ est une représentation unitaire irréductible de M, alors, par définition, $\Phi_{\lambda,\tau,\bar{w}}$ est, pour $\lambda \in S(w)$, l'image par l'application $v \mapsto v'^{-1}$ de la mesure $\tau(m^{-1}) \langle -\lambda - \rho, a \rangle\, dv$. Pour $v \neq e$, posons

$$\bar{w}^{-1} v = v'_1 m_1 a_1 u_1, \qquad \text{avec} \quad v'_1 \in V, \quad \text{etc.}$$

Comme $\bar{w}^{-1} \in \bar{w}M$, on a $a = a_1$. En particulier,

$$(2.1.17) \qquad \bar{w}^{-1} v' = v(mau)^{-1} \in vm^{-1}a^{-1}U.$$

Dans (2.1.16) remplaçons f par la fonction

$$\varphi: \quad v \mapsto \langle \lambda + \rho, a_1 \rangle \tau(m_1) f(v).$$

D'après (2.1.17), on a

$$\varphi(v') = \langle -\lambda - \rho, a \rangle \tau(m^{-1}) f(v').$$

Il vient donc

$$\int_V \tau(m^{-1}) \langle -\lambda - \rho, a \rangle f(v')\, dv = \int_V \tau(m_1) \langle \lambda - \rho, a_1 \rangle f(v)\, dv.$$

En modifiant les notations, on a donc prouvé le résultat suivant :

PROPOSITION 2.3. — *Pour* $v \neq e$, *posons*

(2.1.18) $\quad \overline{w}^{-1} v \in V m_v h_v U, \qquad$ *avec* $m_v \in M$ *et* $h_v \in A$.

Si $\lambda \in S(w)$, *alors, pour toute fonction* f, *définie sur* V, *et* $\Phi_{\lambda, \tau, \overline{w}}$ *intégrable, on a*

$$\int_V f(v)\, d\Phi_{\lambda,\tau,\overline{w}}(v) = \int_V \tau(m_v) f(v^{-1}) \langle \lambda - \rho, h_v \rangle\, dv.$$

Remarque. — D'après (2.1.15), la fonction $\langle \lambda - \rho, h_v \rangle$ est localement intégrable sur V si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. On en déduirait facilement que $S(w)$ est défini par $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. On établira complètement ce résultat au numéro suivant.

Si $v = e$, posons $h_v = e$. Il résulte de (2.1.15) que l'application $v \mapsto \langle 1, h_v \rangle$ de V dans A est analytique. Soit

(2.1.19) $$N(v) = \langle 1, h_v \rangle.$$

La fonction N va jouer sur V le rôle d'une norme. En particulier soit Σ la « sphère unité » définie par $N(v) = 1$. C'est une sous-variété compacte de codimension 1. Si $a \in A$, alors $\mathrm{ad}(a^{-1})$ stabilise V et

$$\overline{w}^{-1} a^{-1} v a = a \overline{w}^{-1} v a \in V m_v a^2 h_v U.$$

On a donc

(2.1.20) $$m_{a^{-1}va} = m_v \qquad \text{et} \qquad h_{a^{-1}va} = a^2 h_v,$$

d'où

(2.1.21) $$N(a^{-1}va) = \langle 2, a \rangle N(v).$$

On dira que $\mathrm{ad}(a^{-1})_{|V}$ est l'homothétie positive de rapport $\langle 2, a \rangle$. Si $v \neq e$, l'ensemble des $a^{-1}va$ pour $a \in A$ est, par définition, la demi-droite issue de l'origine et passant par v. Une telle demi-droite rencontre toujours Σ en un point et un seul. Si on identifie V à son algèbre de Lie $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 \oplus \mathfrak{v}_2$, alors

$$N(\exp(Y + Z)) = N(Y + Z) = [\| Y \|^4 + \| Z \|^2]^{\frac{1}{4}},$$

où $\mathfrak{v}_1$ (resp. $\mathfrak{v}_2$) a été identifié à $\mathbf{R}^p$ (resp. à $\mathbf{R}^q$) comme il a été indiqué plus haut. La sphère Σ est donc définie par

$$\| Y \|^4 + \| Z \|^2 = 1$$

et la demi-droite issue de l'origine, passant par $Y + Z$, est l'ensemble des points $tY + t^2 Z$ pour $t > 0$. Si $\sigma \in \Sigma$, on pose

$$\sigma = Y_\sigma + Z_\sigma, \qquad \text{avec} \quad Y_\sigma \in \mathfrak{v}_1 \quad \text{et} \quad Z_\sigma \in \mathfrak{v}_2$$

puis, pour $t > 0$,

(2.1.22) $$s(t, \sigma) = t Y_\sigma + t^2 Z_\sigma.$$

L'application s est un difféomorphisme de $\mathbf{R}_+^* \times \Sigma$ sur $\mathfrak{v} - \{0\}$; remarquons que s se prolonge en une application différentiable de $\mathbf{R} \times \Sigma$ sur $\mathfrak{v}$. Si on considère σ et $s(t, \sigma)$ comme des éléments de V, on a encore, pour $t > 0$,

(2.1.23) $$s(t, \sigma) = a^{-1} \sigma a, \qquad \text{avec} \quad t = \left\langle \frac{1}{2}, a \right\rangle.$$

On établit aisément une formule de passage en « coordonnées sphériques »; plus précisément, si dv est une mesure de Haar de V, il existe une mesure positive $d\sigma$ sur Σ telle que, pour toute fonction f définie et intégrable sur V, on ait

(2.1.24) $$\int_V f(v)\, dv = \int_0^{+\infty} \int_\Sigma f(s(t, \sigma))\, t^{\rho-1}\, dt\, d\sigma.$$

En utilisant (2.1.23), ceci peut encore s'écrire

(2.1.25) $$\int_V f(v)\, dv = \int_{A \times \Sigma} f(a^{-1} \sigma a) \langle \rho/2, a \rangle\, da\, d\sigma$$

pour un choix convenable de da. De plus, on vérifie sans peine que si f est, par exemple, indéfiniment différentiable et à support compact, alors la fonction φ définie pour $t \in \mathbf{R}$, par

$$\varphi(t) = \int_\Sigma f(s(t, \sigma))\, d\sigma$$

est une fonction indéfiniment différentiable.

2.2. Convergence des intégrales d'entrelacement.

On suppose désormais que G est de rang quelconque. Soient β une racine simple et s_β la symétrie correspondante. Comme $\Delta(s_\beta) = \{\beta\}$, on a

(2.2.1) $$\mathfrak{u}_{s_\beta} = \mathfrak{g}^\beta \oplus \mathfrak{g}^{2\beta} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{v}_{s_\beta} = \mathfrak{g}^{-\beta} \oplus \mathfrak{g}^{-2\beta}.$$

Pour simplifier, on note $\mathfrak{u}_\beta$, $\mathfrak{v}_\beta$, V_β, etc. au lieu de $\mathfrak{u}_{s_\beta}$, $\mathfrak{v}_{s_\beta}$, V_{s_β}, etc. Soit

(2.2.2) $$\mathfrak{g}_\beta = \mathfrak{u}_\beta + \mathfrak{v}_\beta + [\mathfrak{u}_\beta, \mathfrak{v}_\beta].$$

La sous-algèbre $\mathfrak{g}_\beta$ est semi-simple. Le sous-groupe analytique G_β d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\beta$ est semi-simple à centre fini et si l'on pose

(2.2.3) $$K_\beta = G_\beta \cap K \qquad \text{et} \qquad A_\beta = G_\beta \cap A,$$

alors $G_\beta = K_\beta A_\beta U_\beta$ est une décomposition d'Iwasawa de G_β. De plus, $A_\beta = \exp \mathbf{R} H_\beta$, et G_β est de rang 1. Enfin on peut noter le résultat élémentaire suivant :

PROPOSITION 2.4. — *Le centralisateur M_β de A_β dans K_β est $M \cap G_\beta$ et la symétrie s_β possède un représentant dans K_β.*

En effet, soient $\mathfrak{a}_\beta = \mathbf{R} H_\beta$, et $\mathfrak{b}_\beta$ le noyau de β. On a donc $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\beta + \mathfrak{b}_\beta$. D'après la définition de $\mathfrak{g}_\beta$, il est clair que $[\mathfrak{g}_\beta, \mathfrak{b}_\beta] = 0$, donc G_β centralise $\mathfrak{a}_\beta$. Soit alors $m \in K_\beta$; si m centralise $\mathfrak{a}_\beta$, il centralise $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\beta \oplus \mathfrak{b}_\beta$, donc il appartient à M ce qui prouve que $M_\beta \subset M \cap K_\beta$. L'inclusion en sens contraire étant évidente, on a bien $M_\beta = M \cap K_\beta$. D'autre part, soit m' un représentant dans K_β du seul élément non trivial du groupe de Weyl de G_β. Comme m' normalise $\mathfrak{a}_\beta$ et centralise $\mathfrak{b}_\beta$, il normalise $\mathfrak{a}$ donc il appartient à M'. De plus, $\mathrm{Ad}(m')$ induit l'identité sur $\mathfrak{b}_\beta$ et l'homothétie de rapport -1 sur $\mathfrak{a}_\beta$. On a donc $\mathrm{Ad}(m')_{|\mathfrak{a}} = s_\beta$ et m' représente s_β.

THÉORÈME 2.1. — *Le domaine de convergence des intégrales d'entrelacement est l'ensemble $S(w)$ des $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ tels que $\mathrm{Re}(\lambda(H_\alpha)) > 0$ pour toute racine $\alpha \in \Delta(w)$.*

D'après le théorème 1.1, il suffit de le prouver lorsque $l(w) = 1$ c'est-à-dire lorsque w est la symétrie s_β par rapport à une racine simple β. Dans ce cas, $S(s_\beta)$ est le domaine de convergence de l'intégrale

$$(2.2.4) \qquad \int_{V_\beta} \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_v \rangle \, dv.$$

Soit p (resp. q) la multiplicité de β (resp. 2β); on a

$$\rho_{s_\beta} = \frac{1}{2}(p + 2q)\beta$$

et comme s_β permute entre elles les racines positives autres que β et 2β, il est clair que $\rho(H_\beta) = \rho_{s_\beta}(H_\beta)$ d'où, pour $v \in V_\beta$,

$$\langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_v \rangle = \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho_{s_\beta}, a_v \rangle$$

et (2.2.4) s'écrit

$$\int_{V_\beta} \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho_{s_\beta}, a_v \rangle \, dv.$$

On est ainsi réduit au cas du groupe G_β qui est de rang 1. Utilisons pour G_β les notations du numéro précédent. A un facteur constant près, qui ne dépend que du choix de dv, l'intégrale étudiée s'écrit

$$\int_{\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q} [(1 + \| Y \|^2)^2 + \| Z \|^2]^{-(\mathrm{Re}(\lambda_\beta) + p + 2q)/4} \, dY \, dZ$$

et on vérifie de suite que cette intégrale converge si, et seulement si, $\mathrm{Re}(\lambda_\beta) > 0$ ce qui prouve le théorème. De plus, en achevant le calcul, on obtient la formule

$$(2.2.5)\quad \int_V \langle -\lambda-\rho, a_v\rangle\, dv = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(p+q)\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\lambda_\beta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(\lambda_\beta+p)\right)} \times \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}(\lambda_\beta+p)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}(\lambda_\beta+p)+\frac{1}{2}q\right)} \int_V \langle -2\rho, a_v\rangle\, dv.$$

Cette formule a été obtenue indirectement par HARISCH-CHANDRA [7]. Pour toute racine positive indivisible α, soit toujours $\lambda_\alpha = \lambda(H_\alpha)$, et soit p_α (resp. q_α) la multiplicité de α (resp. 2α). Posons

$$(2.2.6)\quad c_\alpha(\lambda) = \frac{\Gamma(p_\alpha+q_\alpha)}{\Gamma((p_\alpha+q_\alpha)/2)} \frac{\Gamma((\lambda_\alpha)/2)}{\Gamma((\lambda_\alpha+p_\alpha)/2)} \frac{\Gamma((\lambda_\alpha+p_\alpha)/4)}{\Gamma((\lambda_\alpha+p_\alpha)/4+(q_\alpha)/2)}.$$

Soit

$$(2.2.7)\quad c_w(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Delta(w)} c_\alpha(\lambda).$$

PROPOSITION 2.5. — *Soit* $\lambda \in S(w)$; *on a*

$$(2.2.8)\quad \int_{V_w} \langle -\lambda-\rho, a_v\rangle\, dv = c_w(\lambda) \int_{V_w} \langle -2\rho, a_v\rangle\, dv.$$

La démonstration est immédiate par récurrence sur $l(w)$.

On peut maintenant normaliser les mesures de Haar des groupes V_w. Dans toute la suite, on les choisit telles que

$$(2.2.9)\quad \int_{V_w} \langle -2\rho, a_v\rangle\, dv = 1.$$

On doit vérifier la condition (1.4.10). Soit donc $w = w'w''$ avec $l(w) = l(w') + l(w'')$. Considérons les fonctions f définies par

$$f_\lambda(kau) = \langle -\lambda-\rho, a\rangle.$$

La fonction f_λ est invariante à gauche par K et appartient à $\mathcal{D}_\lambda$. La fonction $A(\lambda, \bar{w}) f_\lambda$ est proportionnelle à $f_{w(\lambda)}$ et, en calculant sa valeur à l'origine, on voit que, pour la normalisation choisie,

$$A(\lambda, \bar{w}) f = c_w(\lambda) f_{w(\lambda)}.$$

D'où aussi

$$A(w''(\lambda), \bar{w}') A(\lambda, \bar{w}'') f_\lambda = c_{w''}(\lambda)\, c_{w'}(w''(\lambda))\, f_{w(\lambda)}.$$

Comme $\Delta(w) = \Delta(w'') \cup w''^{-1}\Delta(w')$, il résulte de la définition de $c_w(\lambda)$ que

$$c_w(\lambda) = c_{w''}(\lambda)\, c_{w'}(w''(\lambda)) \tag{2.2.10}$$

et par suite

$$A(\lambda, \bar{w}) f_\lambda = A(w''(\lambda), \bar{w}')\, A(\lambda, \bar{w}'') f_\lambda.$$

En prenant les valeurs à l'origine, et en utilisant l'invariance à gauche par K, on obtient

$$\int_{V_w} f_\lambda(v)\, dv = \int_{V_{w'} \times V_{w''}} f_\lambda(\bar{w}''^{-1} v' \bar{w}'' v'')\, dv'\, dv''.$$

Comme la fonction f_λ n'est jamais nulle, et cette égalité implique (1.4.10).

2.3. Le prolongement analytique.

Soit τ une représentation unitaire irréductible de M d'espace F_τ. Soit $\mathfrak{A}_\tau$ l'espace vectoriel des applications $(\lambda, g) \mapsto f_\lambda(g)$ de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^\star \times G$ dans F_τ qui possèdent les propriétés suivantes :

(*a*) quel que soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^\star$, la fonction $f_\lambda \in \mathcal{D}_{\lambda,\tau}$;

(*b*) quelle que soit la distribution X sur G, de support l'origine, l'application $(\lambda, g) \mapsto X \star f_\lambda(g)$ est continue et analytique par rapport à λ.

On munit $\mathfrak{A}_\tau$ de la topologie définie par les semi-normes

$$\nu_{\Omega, \Omega', X}((f)) = \sup_{\substack{g \in \Omega \\ \lambda \in \Omega'}} \| X \star f_\lambda(g) \|, \tag{2.3.1}$$

où Ω est une partie compacte de G et Ω' une partie compacte de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^\star$. D'autre part, si $w \in W$, posons

$$\Gamma_w(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta(w)} \Gamma(\lambda_\alpha), \tag{2.3.2}$$

où, à droite, Γ désigne la fonction gamma usuelle.

Théorème 2.2. — *Soit $(f_\lambda) \in \mathfrak{A}_\tau$. Soient $w \in W$, et $\bar{w}$ l'un des ses représentants dans M'. Pour $\lambda \in S(w)$, posons*

$$\Phi_{w(\lambda)}(g) = \frac{1}{\Gamma_w(\lambda)} \int_{V_w} f_\lambda(g \bar{w} v)\, dv. \tag{2.3.3}$$

Dans ces conditions, pour tout $g \in G$, l'application $\lambda \mapsto \Phi_{w(\lambda)}(g)$ de $S(w)$ dans F_τ est analytique, et se prolonge en une application entière de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^\star$ dans F_τ. De plus, $(\Phi_\lambda) \in \mathfrak{A}_{\bar{w}(\tau)}$, et l'application $(f_\lambda) \mapsto (\Phi_\lambda)$ est continue. Enfin, si pour un $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^\star$, on a $f_\lambda = 0$, alors $\Phi_{w(\lambda)} = 0$.

Par récurrence sur $l(w)$, on se réduit aisément au cas où $l(w) = 1$. Soit alors β une racine simple telle que $w = s_\beta$. On peut sans inconvénient supposer que $\bar{w} \in M_\beta$ (proposition 2.4). Si pour $v \in V_\beta - \{e\}$, on pose

$$\bar{w}^{-1} v \in V m_v h_v U, \qquad \text{avec} \quad m_v \in M_\beta \quad \text{et} \quad h_v \in A_\beta,$$

alors, d'après le théorème 1.3 et la proposition 2.3, on a

$$\Gamma_w(\lambda)\, \Phi_{w(\lambda)}(g) = \int_{V_w} \tau(m_v)\, f_\lambda(gv^{-1}) \langle \lambda - \rho, h_v \rangle \, dv.$$

Utilisons pour G_β et V_β les notations du paragraphe 2, nº 1. D'après (2.1.24), on a

$$(2.3.4) \qquad \Gamma_w(\lambda)\, \Phi_{w(\lambda)}(g) = \int_0^{+\infty} \int_\Sigma \tau(m_\sigma)\, f_\lambda(gs(t, \sigma)^{-1})\, t^{\lambda_\beta - 1} \, dt \, d\sigma.$$

Posons, pour t de signe quelconque,

$$(2.3.5) \qquad \varphi_\lambda(g, t) = \int_\Sigma \tau(m_\sigma)\, f_\lambda(gs(t, \sigma)^{-1})\, d\sigma.$$

Lemme 2.1. — *La fonction φ_λ a les propriétés suivantes :*

(*a*) *elle est indéfiniment différentiable;*

(*b*) *quel que soit l'entier $n \geqq 0$, la fonction $(\partial^n/\partial t^n)\, \varphi_\lambda(g, t)$ des trois variables (λ, g, t) est continue et elle est analytique par rapport à λ;*

(*c*) *si Ω est une partie compacte de G et Ω' une partie compacte de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$, alors il existe une semi-norme continue ν sur $\mathcal{A}_\tau$, ne dépendant que de Ω et de Ω', telle que*

$$(2.3.6) \qquad \| \varphi_\lambda(g, t) \| \leqq \nu((f_\lambda))\, |t|^{-\mathrm{Re}(\lambda_\beta) - \rho_\beta}$$

pour $|t| \geqq 1$, $g \in \Omega$ et $\lambda \in \Omega'$;

(*d*) *si Ω est une partie compacte de G, Ω' une partie compacte de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ et n un entier positif ou nul, alors il existe une semi-norme continue ν_n sur $\mathcal{A}_\tau$, ne dépendant que de Ω, Ω' et de n, telle que*

$$(2.3.7) \qquad \| (\partial^n/\partial t^n)\, \varphi_\lambda(g, t) \| \leqq \nu_n((f_\lambda))$$

pour $|t| \leqq 1$, $g \in \Omega$ et $\lambda \in \Omega'$.

Rappelons que

$$s(t, \sigma) = \exp(tY_\sigma + t^2 Z_\sigma),$$

d'où

$$\varphi_\lambda(g, t) = \int_\Sigma \tau(m_\sigma) f_\lambda(g \exp(-tY_\sigma + t^2 Z_\sigma))\, d\sigma.$$

Le point (a) est évident (*cf.* la fin du n° 1). Calculons les dérivées de φ_λ par rapport à t. Soit

$$\psi_\lambda(g, t, \sigma) = f_\lambda(g \exp(-t Y_\sigma + t^2 Z_\sigma)).$$

On a

$$(\partial/\partial t)\,\psi_\lambda(g, t, \sigma) = (\mathrm{Ad}(g)\, Y_\sigma + 2t\,\mathrm{Ad}(g) Z_\sigma) \star f_\lambda(g \exp(-t Y_\sigma - t^2 Z_\sigma))$$

et, en itérant, on voit que $(\partial^n/\partial t^n)\,\psi_\lambda(g, t, \sigma)$ est de la forme

$$(2.3.8) \qquad (\partial^n/\partial t^n)\,\psi_\lambda(g, t, \sigma) = \sum_i t^{r_i} \alpha_i(g, \sigma)\, X_i \star f_\lambda(g \exp(-t Y_\sigma - t^2 Z_\sigma)).$$

Dans cette formule, la somme est finie, les r_i sont des entiers positifs ou nuls, les α_i des fonctions analytiques sur $G \times \Sigma$ et les X_i des distributions sur G de support l'origine. Le second membre de (2.3.8) est une fonction continue des quatre variables (λ, g, t, σ), analytique par rapport à λ. Comme

$$(2.3.9) \qquad (\partial^n/\partial t^n)\,\varphi_\lambda(g, t) = \int_\Sigma \tau(m_\sigma)\,(\partial^n/\partial t^n)\,\psi_\lambda(g, t, \sigma)\, d\sigma,$$

le point (b) est maintenant évident. Prouvons (c). Soit $v = s(t, \sigma)^{-1}$. On a, pour $g \in \Omega$ et $\lambda \in \Omega'$, la majoration

$$\| f_\lambda(gv) \| = \| f_\lambda(gk_v) \| \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_v \rangle \leq \nu_{\Omega K, \Omega', 1}((f_\lambda)) \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_v \rangle.$$

Or

$$\begin{aligned} \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_v \rangle &= [(1 + t^2 \| Y \|^2)^2 + t^4 \| Z \|^2]^{-\mathrm{Re}(\lambda_\beta) + \rho_\beta)/4}. \\ &= | t |^{-\mathrm{Re}(\lambda_\beta) - \rho_\beta} [(t^{-2} + \| Y_\sigma \|^2)^2 + \| Z_\sigma \|^2]^{-(\mathrm{Re}(\lambda_\beta) + \rho_\beta)/4}. \end{aligned}$$

Posons

$$C = \sup_{\substack{\lambda \in \Omega' \\ |t| \geq 1 \\ \sigma \in \Sigma}} [(t^{-2} + \| Y_\sigma \|^2)^2 + \| Z_\sigma \|^2]^{-(\mathrm{Re}(\lambda_\beta) + \rho_\beta)/4}.$$

On a alors, pour $g \in \Omega$, $\lambda \in \Omega'$ et $|t| \geq 1$,

$$\| f_\lambda(gv) \| \leq C \nu_{\Omega K, \Omega', 1}((f_\lambda))\, | t |^{-\mathrm{Re}(\lambda_\rho) - \rho_\beta}.$$

Comme

$$\| \varphi_\lambda(g, t) \| \leq \int_\Sigma \| f_\lambda(gs(t, \sigma)^{-1}) \|\, d\sigma,$$

il vient

$$\| \varphi_\lambda(g, t) \| \leq C \nu_{\Omega K, \Omega', 1}((f_\lambda))\, | t |^{-\mathrm{Re}(\lambda_\beta) - \rho_\beta} \int_\Sigma d\sigma,$$

ce qui prouve (*c*). Prouvons (*d*). D'après (2.3.8) et (2.3.9), on a

$$\|(\partial^n/\partial t^n)\varphi_\lambda(g,t)\| \leqq \sum |t|^{r_i} \int_\Sigma |\alpha_i(g,\sigma)| . \|X_i \star f_\lambda(g\exp(-tY_\sigma - t^2 Z_\sigma))\| d\sigma.$$

En majorant comme précédemment $\|X_i \star f_\lambda(gv)\|$, on voit que, pour $g \in \Omega$ et $\lambda \in \Omega'$, on a une majoration de la forme

$$\|(\partial^n/\partial t^n)\varphi_\lambda(g,t)\| \leqq C\langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_v\rangle \sum |t|^{r_i} \nu_{\Omega K, \Omega', X_i}((f_\lambda))\text{.}$$

Or si $|t| \leqq 1$, alors a_v reste dans une partie compacte de A et, par suite, $\langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_v\rangle$ reste borné lorsque λ varie dans Ω'. L'inégalité précédente implique donc la dernière assertion du lemme.

Prouvons le théorème. On a

$$\Gamma(\lambda_\beta)\Phi_{w(\lambda)}(g) = \int_0^{+\infty} \varphi_\lambda(g,t)\, t^{\lambda_\beta}\, dt/t. \tag{2.3.10}$$

D'après le point (*c*) du lemme 2.1, on a, pour $|t| \geqq 1$, $g \in \Omega$ et $\lambda \in \Omega'$, la majoration

$$\|\varphi_\lambda(g,t)\| . |t|^{\mathrm{Re}(\lambda_\beta)} \leqq \nu((f_\lambda))\, |t|^{-\rho_\beta}.$$

L'intégrale

$$J'_\lambda(g) = \int_1^{+\infty} \varphi_\lambda(g,t)\, t^{\lambda_\beta}\, dt/t \tag{2.3.11}$$

est donc convergente, uniformément pour $g \in \Omega$ et $\lambda \in \Omega'$. Il en résulte que $J'_\lambda(g)$ est une fonction continue de (g, λ) et une fonction entière de λ. De plus,

$$\|J'_\lambda(g)\| \leqq \nu((f_\lambda)) \int_1^{+\infty} t^{-\rho_\beta}\, dt/t \tag{2.3.12}$$

pour $g \in \Omega$ et $\lambda \in \Omega'$.

Soit maintenant

$$J''_\lambda(g) = \int_0^1 \varphi_\lambda(g,t)\, t^{\lambda_\beta}\, dt/t.$$

Cette intégrale converge pour $\mathrm{Re}(\lambda_\beta) > 0$, et sa somme $J''_\lambda(g)$ est une fonction continue de (g, λ), analytique par rapport à λ. Le prolongement analytique de cette intégrale n'offre aucune difficulté. En effet, soit n un entier positif. La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit

$$\varphi_\lambda(g,t) = \sum_0^{m-1} (t^r/r!)(\partial^r/\partial t^r)\varphi_\lambda(g,0)$$
$$+ 1/(n-1)! \int_0^t (t-u)^{n-1}(\partial^n/\partial t^n)\varphi_\lambda(g,u)\, du.$$

Pour $\mathrm{Re}(\lambda_\beta) > 0$, on a donc

$$(2.3.13)\quad J''_\lambda(g) = \sum_0^{m-1} \frac{1}{r!\,(r+\lambda_\beta)} (\partial^r/\partial t^r)\,\varphi_\lambda(g, 0)$$
$$+ 1/(n-1)! \int_0^1 dt \int_0^t (t-u)^{n-1} t^{\lambda_\beta - 1} (\partial^n/\partial t^n)\,\varphi_\lambda(g, u)\,du.$$

Dans cette formule, l'intégrale restante peut encore s'écrire

$$\int_0^1 \int_0^1 (1-u)^{n-1} t^{\lambda_\beta + n} (\partial^n/\partial t^n)\,\varphi_\lambda(g, ut)\,du\,dt/t.$$

Elle converge pour $\mathrm{R}(\lambda_\beta) > -n$ et sa somme est une fonction continue de (g, λ), analytique par rapport à λ. Par suite $J''_\lambda(g)/\Gamma(\lambda_\beta)$ se prolonge en une fonction entière de λ, continue par rapport à (λ, g). Dans (2.3.13) prenons n assez grand pour que $\Omega' \subset \{\lambda \mid \mathrm{Re}(\lambda_\beta) > -n\}$. En utilisant le lemme 2.1 (*d*), il vient, pour $g \in \Omega$ et $\lambda \in \Omega'$,

$$(2.3.14)\quad \| J''_\lambda(g)/\Gamma(\lambda_\beta) \| \leq \sum_0^{(m-1)} \frac{1}{(r)!} \nu_r((f_\lambda)) \sup_{\lambda \in \Omega'} (1/|(r+\lambda_\beta)\,\Gamma(\lambda_\beta)|)$$
$$+ (1/n!)\,\nu_n((f)) \sup_{\lambda \in \Omega'} (1/|\lambda_\beta + n|).$$

Comme

$$\Phi_{w(\lambda)}(g) = (J'_\lambda(g) + J''_\lambda(g))/\Gamma(\lambda_\beta),$$

on a prouvé que, pour tout g, l'application $\lambda \mapsto \Phi_{w(\lambda)}(g)$ était analytique pour $\lambda \in S(w)$, qu'elle se prolongeait en une fonction entière de λ, et que $\Phi_{w(\lambda)}(g)$ était une fonction continue de (λ, g). De plus, les inégalités (2.3.13) et (2.3.14) montrent que si Ω est une partie compacte de G et Ω' une partie compacte de $\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}$, alors il existe une semi-norme continue ν' sur $\mathcal{A}_\tau$ telle que

$$(2.3.15)\qquad \sup_{\substack{g \in \Omega \\ \lambda \in \Omega'}} \| \Phi_{w(\lambda)}(g) \| \leq \nu'((f_\lambda)).$$

Remarquons que, dans les calculs précédents, on peut remplacer (f_λ) par $(X \star f_\lambda)$ où X est une distribution de support l'origine. On montre ainsi aisément que $\Phi_{w)\lambda)}$ a les propriétés requises de régularité et que

$$(2.3.16)\qquad \sup_{\substack{g \in \Omega \\ \lambda \in \Omega'}} \| X \star \Phi_{w(\lambda)}(g) \| \leq \nu'((X \star f_\lambda)).$$

Si $\lambda \in S(w)$, alors on sait que $\Phi_{w(\lambda)} \in \mathfrak{d}_{w(\lambda), \overline{w}(\tau)}$, c'est-à-dire que

$$\Phi_{w(\lambda)}(gmau) = \langle -w(\lambda) - \rho, a \rangle\, \overline{w}(\tau)\,(m)^{-1}\,\Phi_{w(\lambda)}(g).$$

Dans cette égalité les deux membres sont des fonctions entières de λ, donc sont égaux quel que soit λ et par suite $(\Phi_\lambda) \in \mathcal{A}_{\overline{w}(\tau)}$. La continuité de l'application $(f_\lambda) \mapsto (\Phi_\lambda)$ résulte de (2.3.16) et, enfin, si pour un $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$, on a $f_\lambda = 0$, alors les formules explicites, données pour le prolongement analytique, montrent que $\Phi_{w(\lambda)} = 0$.

On donnera au paragraphe suivant une autre méthode pour faire le prolongement analytique. Pour l'instant, on va tirer quelques conséquences du théorème.

Si $\lambda \in S(w)$, les intégrales d'entrelacement convergent et définissent l'opérateur d'entrelacement $A(\lambda, \tau, \overline{w})$. Soit

$$(2.3.17) \qquad A'(\lambda, \tau, \overline{w}) = A(\lambda, \tau, \overline{w})/\Gamma_w(\lambda).$$

On peut maintenant définir $A'(\lambda, \tau, \overline{w})$ pour tout λ. En effet, soit $\lambda_0 \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ et $\psi \in \mathcal{O}_{\lambda_0, \tau}$. On peut trouver $(f_\lambda) \in \mathcal{A}_r$ tel que $f_{\lambda_0} = \psi$. Posons

$$A'(\lambda_0, \tau, \overline{w}) = \Phi_{w(\lambda_0)},$$

où (Φ_λ) est défini comme dans le théorème. Il résulte de la dernière assertion de ce théorème que $\Phi_{w(\lambda_0)}$ ne dépend pas du choix de (f_λ). De plus, $A'(\lambda_0, \tau, \overline{w})$ ainsi défini est une application linéaire continue de $\mathcal{O}_{\lambda_0, \tau}$ dans $\mathcal{O}_{w(\lambda_0), \overline{w}}$. Enfin, pour $\lambda \in S(w)$, on a

$$A'(\lambda, \tau, \overline{w})\, \pi_{\lambda,\tau}(g) f_\lambda = \pi_{w(\lambda), \overline{w}(\tau)} A'(\lambda, \tau, \overline{w}) f_\lambda.$$

Dans cette égalité, les deux membres sont des fonctions entières de λ, donc, par unicité du prolongement analytique, cette égalité subsiste quel que soit λ. Autrement dit, $A'(\lambda, \tau, \overline{w})$ entrelace $\pi_{\lambda,\tau}$ et $\pi_{w(\lambda), \overline{w}(\tau)}$. Si λ n'est pas pôle de $\Gamma_w(\lambda)$, alors (2.3.17) permet de définir $A(\lambda, \tau, \overline{w})$.

Examinons deux cas particuliers du théorème.

Corollaire 1. — *Soit $\mathfrak{d}$ une représentation unitaire irréductible de K. L'intégrale*

$$T(\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}) = \mathfrak{d}(\overline{w}) \int_{V_w} \mathfrak{d}(k_v) \langle -\lambda - \rho, a_v \rangle \, dv$$

converge pour $\lambda \in S(w)$, et est une fonction analytique de λ. L'application $\lambda \mapsto T(\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w})/\Gamma_w(\lambda)$ se prolonge en une fonction entière de λ.

Notons d'abord que le théorème précédent reste valable pour toute représentation unitaire τ de M, irréductible ou non. Prenons $\tau = \mathfrak{d}_{|M}$ et, pour tout élément ε de l'espace $F_{\mathfrak{d}}$ de $\mathfrak{d}$, posons

$$f_\lambda(g) = \langle -\lambda - \rho, a_g \rangle \, \mathfrak{d}(k_g)^{-1} \varepsilon.$$

Pour $m \in M$, $a \in A$ et $u \in U$, on a

$$\begin{aligned} f_\lambda(gmau) &= f_\lambda(k_g a_g u_g mau) = f_\lambda(k_g m a_g a) \\ &= \langle -\lambda - \rho, a a_g \rangle \mathfrak{d}(k_g)^{-1} \varepsilon \\ &= \langle -\lambda - \rho, a \rangle \mathfrak{d}(m^{-1}) f_\lambda(g). \end{aligned}$$

De plus, l'application $(\lambda, g) \mapsto f_\lambda(g)$ de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^\star \times G$ dans $F_\mathfrak{d}$ est analytique de sorte que $(f_\lambda) \in \mathcal{A}_\tau$. Mais pour $\lambda \in S(w)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{V_w} f_\lambda(\bar{w}v)\, dv &= \int_{V_w} f_\lambda(\bar{w} k_v a_v)\, dv \\ &= \int_{V_w} \mathfrak{d}(k_v)^{-1} \mathfrak{d}(\bar{w})^{-1} \langle -\lambda - \rho, a_v \rangle \varepsilon\, dv = T(\bar{\lambda}, \mathfrak{d}, \bar{w})^\star \varepsilon. \end{aligned}$$

L'application $\lambda \mapsto T(\bar{\lambda}, \mathfrak{d}, \bar{w})^\star \varepsilon$ de $S(w)$ dans $F_\mathfrak{d}$ est donc analytique et $T(\bar{\lambda}, \mathfrak{d}, \bar{w})^\star \varepsilon / \Gamma_w(\lambda)$ se prolonge en une fonction entière de λ. Comme ε est arbitraire, il en est de même de $T(\bar{\lambda}, \mathfrak{d}, \bar{w})^\star / \Gamma_w(\lambda)$ donc aussi de $T(\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}) / \Gamma_w(\lambda)$.

Soit à nouveau τ une représentation unitaire irréductible de M, d'espace F_τ. Rappelons qu'on note $\mathcal{D}_\tau$ l'espace des applications indéfiniment différentiables et à support compact de G dans F_τ et que, pour $\varphi \in \mathcal{D}_\tau$, on pose

$$\varphi_{\lambda,\tau}(g) = \int_{M \times A \times U} \tau(m)\, \varphi(gmau) \langle \lambda + \rho, a \rangle\, dm\, da\, du.$$

La fonction $\varphi_{\lambda,\tau} \in \mathcal{D}_{\lambda,\tau}$ et il est facile de voir que $(\varphi_{\lambda,\tau}) \in \mathcal{A}_\tau$. Par suite, on a le résultat suivant :

Corollaire 2. — *L'application $\lambda \mapsto A(\lambda, \tau, \bar{w}) \varphi_{\lambda,\tau}(g)$ de $S(w)$ dans F_τ est analytique et $A(\lambda, \tau, \bar{w})\, \varphi_{\lambda,\tau}(g)/\Gamma_w(\lambda)$ se prolonge en une application entière de $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^\star$ dans F_τ.*

Rappelons que, pour $\lambda \in S(w)$, on a défini les distributions coniques $S_{\lambda,\tau,\bar{w}}$ par

$$S_{\lambda,\tau,\bar{w}}(\varphi) = A(\lambda, \tau, \bar{w})\, \varphi_{\lambda,\tau}(e).$$

Cette définition conserve un sens chaque fois que λ n'est pas pôle de $\Gamma_w(\lambda)$. On peut donc prolonger analytiquement les distributions coniques.

Jusqu'à présent, on a considéré des fonctions qui se transforment à droite suivant une représentation de M. En fait cette hypothèse n'est pas essentielle. Plus précisément, soit $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des applications $(\lambda, g) \mapsto f_\lambda(g)$ de $\mathfrak{v}_{\mathbf{C}}^* \times G$ dans $\mathbf{C}$ qui possèdent les propriétés suivantes :

(*a*) quel que soit λ, la fonction $f_\lambda \in \mathcal{D}_\lambda$;

(*b*) quelle que soit la distribution X sur G, de support l'origine, l'application $(\lambda, g) \mapsto X \star f_\lambda(g)$ est continue et analytique par rapport à λ.

On munit $\mathcal{A}$ de la topologie définie par les semi-normes (2.3.1).

Théorème 2.3. — *Soit $(f_\lambda) \in \mathcal{A}$. Soient $w \in W$, et $\bar{w}$ l'un de ses représentants dans M'. Pour $\lambda \in S(w)$, posons*

$$\Phi_{w(\lambda)}(g) = 1/\Gamma_w(\lambda) \int_{V_w} f_\lambda(g\bar{w}v)\, dv.$$

Dans ces conditions, pour tout $g \in G$, l'application $\lambda \mapsto \Phi_{w(\lambda)}(g)$ de $S(w)$ dans $\mathbf{C}$ est analytique et se prolonge en une application entière de $\mathfrak{v}_{\mathbf{C}}^*$ dans $\mathbf{C}$. De plus, $(\Phi_\lambda) \in \mathcal{A}$, et l'application $(f_\lambda) \mapsto (\Phi_\lambda)$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ est continue. Enfin, si pour un λ, on a $f_\lambda = 0$, alors $\Phi_{w(\lambda)} = 0$.

La démonstration est entièrement analogue à celle du théorème 2.2. Signalons le corollaire le plus important.

Corollaire. — *Soit $\varphi \in \mathcal{D}(G/U)$. L'intégrale*

$$1/\Gamma_w(\lambda) \int_{V_w \times A} \varphi(g\bar{w}va) \langle \lambda + \rho, a \rangle\, da\, dv$$

converge pour $\lambda \in S(w)$, et sa somme se prolonge en une fonction entière de λ.

2.4. **Relations entre les opérateurs d'entrelacement.**

Soient $\lambda \in \mathfrak{v}_{\mathbf{C}}^*$, et τ une représentation unitaire irréductible de M, d'espace F_τ.

Considérons les opérateurs d'entrelacement $A'(\lambda, \tau, \bar{w})$ définis au numéro précédent.

Pour simplifier les notations, on pose

$$\sigma = (\lambda, \tau) \qquad \text{et} \qquad \bar{w}(\sigma) = (w(\lambda), \bar{w}(\tau)),$$

puis

$$A'_\sigma(\bar{w}) = A'(\lambda, \tau, \bar{w}).$$

On a vu que si w' et w'' sont deux éléments de W tels que

$$l(w'w'') = l(w') + l(w''), \tag{2.4.1}$$

alors

$$A'_\sigma(\bar{w}'\bar{w}'') = A'_{\bar{w}''(\sigma)}(\bar{w}')A'_\sigma(\bar{w}''). \tag{2.4.2}$$

Si (2.4.1) n'est plus satisfaite, il apparaît dans (2.4.2) un certain facteur fonction de σ; on va préciser ce point. Commençons par une remarque.

LEMME 2.2. — *Si λ n'est pas pôle de $\Gamma_w(\lambda)$, alors* $A'_\sigma(\bar{w}) \neq 0$.

En effet, soit φ une application indéfiniment différentiable et à support compact de V dans F_τ. Définissons φ_σ par

$$(2.4.3)\quad \begin{cases} \varphi_\sigma(vmau) = \langle -\lambda - \rho, a \rangle \tau(m^{-1})\, \varphi(v) & \text{pour } v \in V, \text{ etc.,} \\ \varphi_\sigma(g) = 0 \quad \text{si} \quad g \notin VMAU. \end{cases}$$

La fonction φ_σ appartient à $\mathcal{O}_{\lambda,\tau}$ et on a *a priori*, pour $\lambda \in S(w)$, l'égalité

$$A'_\sigma(\bar{w})\varphi_\sigma(\bar{w}^{-1}) = 1/\Gamma_w(\lambda) \int_{V_w} \varphi(v)\, dv.$$

Dans cette formule, les deux membres sont des fonctions entières de λ et sont donc égaux quel que soit λ. Comme on peut choisir φ telle que son intégrale sur V_w soit non nulle, cette égalité implique le lemme.

Soient $w \in W$, et $\bar{w}$ l'un de ses représentants. Considérons les représentations $\pi_{\lambda,\tau}$ et $\pi_{w(\lambda),\bar{w}(\tau)}$ de G dans $\mathcal{O}_{\lambda,\tau}$ et $\mathcal{O}_{w(\lambda),\bar{w}(\tau)}$ respectivement. Supposons $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$.

La représentation $\pi_{\lambda,\tau}$ se prolonge en une représentation unitaire dans le complété $\mathcal{H}_{\lambda,\tau}$ de $\mathcal{O}_{\lambda,\tau}$. Soit $\mathcal{H}^0_{\lambda,\tau}$ le sous-espace des vecteurs K-finis; il est contenu dans $\mathcal{O}_{\lambda,\tau}$ et l'algèbre de lie $\mathfrak{g}$ de G opère dans $\mathcal{H}^0_{\lambda,\tau}$ par convolution à gauche.

On a une situation analogue pour $\bar{w}(\sigma)$. Si σ est régulier, on sait que les représentations de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{H}^0_{\lambda,\tau}$ et $\mathcal{H}^0_{w(\lambda),\bar{w}(\tau)}$ sont irréductibles. La restriction à $\mathcal{H}^0_{\lambda,\tau}$ de $A'_\sigma(\bar{w})$ entrelace ces deux représentations. Supposons que $w = w'w''$ et que l'on choisisse des représentants tels que $\bar{w} = \bar{w}'\bar{w}''$. La restriction à $\mathcal{H}^0_{\lambda,\tau}$ de $A'_{\bar{w}''(\sigma)}(\bar{w}')A'_\sigma(\bar{w}'')$ est un deuxième opérateur d'entrelacement des représentations de $\mathfrak{g}$. Ces deux opérateurs sont donc proportionnels. Comme les opérateurs d'entrelacement sont continus et que $\mathcal{H}^0_{\lambda,\tau}$ est dense dans $\mathcal{O}_{\lambda,\tau}$, on voit ainsi que, pour $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ et σ régulier, les opérateurs $A'_\sigma(\bar{w})$ et $A'_{\bar{w}''(\sigma)}(\bar{w}')A'_\sigma(\bar{w}'')$ sont proportionnels. Compte tenu du lemme, on peut donc poser

$$(2.4.4)\qquad A'_{\bar{w}''(\sigma)}(\bar{w}')A'_\sigma(\bar{w}'') = j'_\sigma(\bar{w}', \bar{w}'')\, A'_\sigma(\bar{w})$$

pour $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$, et $\lambda_\alpha \neq 0$ pour toute racine α (ces conditions entraînent que σ soit régulier). Dans cette formule, $j'_\sigma(\bar{w}', \bar{w}'')$ est un nombre complexe.

Soient m' et m'' deux éléments de M. On a

$$\begin{aligned}(2.4.5)\qquad A'_\sigma(\bar{w}'m'\bar{w}''m'') &= A'_\sigma(\bar{w}'\bar{w}''\bar{w}''^{-1}m'\bar{w}''m'') \\ &= \tau(m''^{-1})\,\bar{w}''(\tau)\,(m'^{-1})\, A'_\sigma(\bar{w}'\bar{w}'')\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A'_{\bar{w}''m''(\sigma)}(\bar{w}'m')A'_\sigma(\bar{w}''m'') &= ((\bar{w}''m'')(\tau))(m'^{-1})A'_{\bar{w}''m''(\sigma)}(\bar{w}')\tau(m''^{-1})A'_\sigma(\bar{w}'') \\ &= ((\bar{w}''m'')(\tau))(m'^{-1})\tau(m''^{-1})A'_{\bar{w}(\sigma)}(\bar{w}')A'_\sigma(\bar{w}'') \\ &= \tau(m''^{-1})\bar{w}''(\tau)(m'^{-1})A'_{\bar{w}''(\sigma)}(\bar{w}')A'_\sigma(\bar{w}''). \end{aligned}$$

En comparant ce dernier résultat avec (2.4.5), on voit que

$$j'_\sigma(\bar{w}'m', \bar{w}''m'') = j'_\sigma(\bar{w}'\bar{w}'').$$

La fonction j'_σ peut donc être considérée comme définie sur $W \times W$. Un calcul analogue montre que j'_σ ne dépend que de la classe d'équivalence de la représentation τ de M.

PROPOSITION 2.6. — *L'application $\lambda \mapsto j'_\sigma(w', w'')$ se prolonge en une fonction entière de λ et (2.4.4) reste valable quel que soit λ. De plus, on a les égalités suivantes :*

(2.4.6) $\quad j'_\sigma(w', w'') = 1 \quad$ si $\quad l(w'w'') = l(w') + l(w'')$,

(2.4.7) $\quad j'_\sigma(w_1, w_2w_3)j'_\sigma(w_2, w_3) = j'_\sigma(w_1w_2, w_3)j'_{w_3(\sigma)}(w_1, w_2)$,

(2.4.8) $\quad \overline{j'_{\sigma^*}(w', w'')} = j'_{w'w''(\sigma)}(w''^{-1}, w'^{-1}) \qquad$ *avec* $\quad \sigma^* = (-\bar{\lambda}, \tau)$.

Considérons, pour commencer, le cas où $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ et $\lambda_\alpha \neq 0$ pour toute racine α. La relation (2.4.5) résulte de (2.4.2), et la relation (2.4.7) s'obtient en calculant de deux façons différentes $A'_\sigma(\bar{w}_1\bar{w}_2\bar{w}_3)$. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_p$ les racines simples et $s_1, \ldots, s_p$ les symétries correspondantes. Soit

$$w' = s_{i_1} \ldots s_{i_q}$$

une décomposition réduite de w'. En appliquant (2.4.6) et (2.4.7), on voit que

$$(2.4.9)\quad j'_\sigma(w', w'') = j'_\sigma(s_{i_1} \ldots s_{i_q}, w'') = \prod_{k=1}^{q} j'_\sigma(s_{i_k}, s_{i_{k+1}} \ldots s_{i_q}w'').$$

La fonction j'_σ est donc complètement définie par ses valeurs $j'_\sigma(s, w)$ avec $l(s) = 1$. Si $l(sw) = 1 + l(w)$, alors $j'_\sigma(s, w) = 1$. Sinon, on sait que $l(sw) = -1 + l(w)$, ce qui peut s'écrire $l(s^{-1}sw) = 1 + l(sw)$, d'où $j'(s, sw) = 1$. Appliquons (2.4.7) avec $w_3 = w$ et $w_1 = w_2 = s$. Il vient

$$j'_\sigma(s, sw)j'_\sigma(s, w) = j'_\sigma(1, w)j'_{w(\sigma)}(s, s),$$

d'où

$$(2.4.10)\quad j'_\sigma(s, w) = j'_{w(\sigma)}(s, s) \qquad \text{pour} \quad l(s) = 1 \quad \text{et} \quad l(sw) = -1 + l(w).$$

Le calcul de j'_σ est ainsi réduit au calcul de $j'_\sigma(s, s)$ c'est-à-dire au cas où G est de rang 1. Cela étant, on a

$$A'_{\bar{s}(\sigma)}(\bar{s}^{-1})\,A'_\sigma(\bar{s}) = j'_\sigma(s, s)\,\mathrm{Id}. \tag{2.4.11}$$

Si $(f_\lambda) \in \mathcal{A}_\tau$, on a donc

$$A'_{\bar{s}(\sigma)}(\bar{s}^{-1})\,A'_\sigma(\bar{\ })\,f_\lambda(g) = j'_\sigma(s, s)\,f_\lambda(g)$$

pour $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$ et $\lambda_\alpha = 0$ pour toute racine α. Choisissons (f_λ) et g tels que $f_\lambda(g)$ ne soit jamais nul. Dans l'égalité précédente, le membre de gauche est une fonction entière de λ et par suite $j'_\sigma(s, s)$ se prolonge en une fonction entière de λ. Les formules (2.4.9) et (2.4.10) montrent que, plus généralement, $j'_\sigma(w', w'')$ se prolonge en une fonction entière de λ. Par unicité du prolongement analytique, toutes les formules précédentes restent valables quel que soit λ. La formule (2.4.8) résulte de la proposition 1.4. Remarquons que si l'on pose

$$A_{\overline{w''}(\sigma)}(\bar{w}')\,A_\sigma(\bar{w}'') = j_\sigma(w', w'')\,A_\sigma(\bar{w}'\bar{w}''), \tag{2.4.12}$$

alors

$$j_\sigma(w', w'') = \frac{\Gamma_{w'}(w''(\lambda))\,\Gamma_{w''}(\lambda)}{\Gamma_w(\lambda)}\,j'_\sigma(w', w''). \tag{2.4.13}$$

Faute de pouvoir faire mieux, on suppose désormais que τ est la représentation triviale de M, et on note τ_0 cette représentation. Considérons les fonctions f_λ définies par

$$f_\lambda(kau) = \langle -\lambda - \rho, a\rangle \qquad \text{pour} \quad k \in K, \quad \text{etc.}$$

On a $f_\lambda \in \mathcal{D}_{\lambda, \tau_0}$ et, de plus,

$$A_{(\lambda, \tau_0)}(\bar{w})\,f = c_w(\lambda)\,f_{w(\lambda)},$$

avec

$$c_w(\lambda) = \int_{V_w} \langle -\lambda - \rho, a_v\rangle\,dv.$$

Notons que, dans ce cas, les opérateurs d'entrelacement sont indépendants du choix du représentant w. On a, pour $\sigma = (\lambda, \tau_0)$,

$$A_{w''(\sigma)}(w')\,A'_\sigma(w'')\,f_\lambda = c_{w''}(\lambda)\,c_{w'}(w''(\lambda))\,f_{w'w''(\lambda)}$$

d'où, par définition de $j_\sigma(w', w'')$,

$$j_{(\lambda, \tau_0)}(w', w'') = \frac{c_{w''}(\lambda)\,c_{w'}(w''(\lambda))}{c_{w'w''}(\lambda)}. \tag{2.4.14}$$

La fonction $c_w(\lambda)$ est donnée par (2.2.7). Introduisons les opérateurs

$$B_\lambda(w) = A_{(\lambda, \tau_0)}(w)/c_w(\lambda).$$

Comme $\Gamma_w(\lambda)/(c_w(\lambda)$ est une fonction entière de λ, l'opérateur $B_\lambda(w)$ est défini pour tout λ, et dépend « holomorphiquement » de λ.

THÉORÈME 2.4. — *Si* $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, *alors* $B_\lambda(w)$ *se prolonge en une isométrie de* $\mathcal{H}_{\lambda,\tau_0}$ *sur* $\mathcal{H}_{w(\lambda),\tau_0}$. *Cette isométrie entrelace les représentations unitaires* π_{λ,τ_0} *et* $\pi_{w(\lambda),\tau_0}$. *De plus,*

$$B_\lambda(w'\,w'') = B_{w''(\lambda)}(w')\,B_\lambda(w'') \tag{2.4.15}$$

quels que soient w' *et* w''.

La relation (2.4.15) est évidente. De plus, on a $\Delta(w^{-1}) = -w\Delta(w)$ et

$$c_w(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Delta(w)} c_\alpha(\lambda),$$

d'où on déduit aisément que

$$c_{w^{-1}}(w(-\bar\lambda)) = \overline{c_w(\lambda)}.$$

Par conséquent, l'adjoint de l'opérateur

$$B_\lambda(w) : \quad \mathcal{D}_{\lambda,\tau_0} \mapsto \mathcal{D}_{w(\lambda),\tau_0}$$

est l'opérateur

$$B_{-w(\bar\lambda)}(w^{-1}) : \quad \mathcal{D}_{-w(\bar\lambda),\tau_0} \mapsto \mathcal{D}_{-\bar\lambda,\tau_0}.$$

En particulier, si $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$, alors

$$B_{w(\lambda)}(w^{-1})\,B_\lambda(w) = \mathrm{Id} \qquad \text{et} \qquad B_{w(\lambda)}(w^{-1}) = B_\lambda(w)^*.$$

L'opérateur $B_\lambda(w)$ est donc une isométrie du sous-espace $\mathcal{D}_{\lambda,\tau_0}$ de $\mathcal{H}_{\lambda,\tau_0}$ sur le sous-espace $\mathcal{D}_{w(\lambda),\tau_0}$ de $\mathcal{H}_{w(\lambda),\tau_0}$. Il se prolonge donc en une isométrie de $\mathcal{H}_{\lambda,\tau_0}$ sur $\mathcal{H}_{w(\lambda),\tau_0}$, isométrie qui entrelace les représentations unitaires π_{λ,τ_0} et $\pi_{w(\lambda),\tau_0}$.

§ 3. Intégrales de Whittaker.

3.1. Introduction.

On conserve les notations des paragraphes précédents. Soient F un espace de Hilbert de dimension finie et φ une application de classe C^∞ de G/U dans $\mathcal{L}(F)$, à support compact. On considère φ comme définie sur G, invariante à droite par U. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$, soit

$$\varphi_\lambda(g) = \int_A \langle \lambda + \rho, a\rangle\, \varphi(ga)\, da. \tag{3.1.1}$$

Soit π une représentation unitaire irréductible de V, d'espace F_π et

$$W_\varphi(g, \lambda, \pi) = \int_V \varphi_\lambda(gv) \otimes \pi(v)\, dv. \tag{3.1.2}$$

L'application $g \mapsto W_\varphi(g, \lambda, \pi)$ est donc à valeurs dans $\mathcal{L}(F \otimes F_\pi)$. Dans le cas des groupes de Chevalley, ces intégrales, appelées intégrales de Whittaker, ont été étudiées par H. Jacquet [10]. On renvoie à son travail pour la justification de cette étude.

Proposition 3.1. — *Si* $\operatorname{Re}(\lambda_\alpha) > 0$, *pour toute racine positive* α, *alors* (3.1.2) *est absolument convergente.*

En effet, quitte à remplacer φ par l'une de ses translatées à gauche, on peut supposer que $g = \bar{w}_0$ est un représentant de l'unique élément w_0 du groupe de Weyl qui transforme U en V. Il suffit alors d'étudier l'intégrale

$$\int_V \| \varphi_\lambda(\bar{w}_0 v) \|\, dv. \tag{3.1.3}$$

Or $V = V_{w_0}$ et

$$\varphi_\lambda(gau) = \langle -\lambda - \rho, a \rangle \varphi_\lambda(g).$$

Le domaine de convergence de (3.1.3) est donc $S(w_0)$, ce qui est le résultat annoncé. La convergence est d'ailleurs uniforme sur toute partie compacte de $S(w_0)$ et, par suite, $W_\varphi(g, \lambda, \pi)$ est une fonction analytique de λ. Cela étant, on peut conjecturer que si π est « non dégénérée », alors $W_\varphi(g, \lambda, \pi)$ se prolonge en une fonction entière de λ. Nous montrerons que tel est le cas si G est de rang 1 et π non triviale.

Le groupe G étant de rang quelconque, soit $\mathfrak{d}$ une représentation unitaire irréductible de K, d'espace $F_\mathfrak{d}$. Prenons $F = F_\mathfrak{d}$ et supposons que

$$\varphi(kg) = \mathfrak{d}(k)\, \varphi(g).$$

On a alors

$$\varphi_\lambda(kau) = \mathfrak{d}(k) \langle -\lambda - \rho, a \rangle \varphi_\lambda(e). \tag{3.1.4}$$

Posons

$$f_{\lambda, \mathfrak{d}}(kau) = \mathfrak{d}(k) \langle -\lambda - \rho, a \rangle. \tag{3.1.5}$$

Il suffit d'étudier les intégrales

$$W_\mathfrak{d}(g, \lambda, \pi) = \int_V f_{\lambda, \mathfrak{d}}(v) \otimes \pi(v)\, dv. \tag{3.1.6}$$

Ces intégrales seront aussi appelées intégrales de Whittaker (de type $\mathfrak{d}$). Notons que

$$W_\mathfrak{d}(kav, \lambda, \pi) = \langle \rho - \lambda, a \rangle \mathfrak{d}(k) \otimes \pi(v^{-1})\, W_\mathfrak{d}(e, \lambda, \pi^a), \tag{3.1.7}$$

où

$$\pi^a(v) = \pi(a^{-1} va). \tag{3.1.8}$$

On va montrer comment on peut obtenir des équations fonctionnelles pour $W_{\mathfrak{d}}$. Soient w un élément du groupe de Weyl, et $\bar{w}$ l'un de ses représentants dans M'. Calculons

$$A(\lambda, \bar{w}) f_{\lambda, \mathfrak{d}}(g) = \int_{V_w} f_{\lambda, \mathfrak{d}}(g\bar{w}v)\, dv.$$

Cette intégrale converge lorsque $\lambda \in S(w)$, et on a

$$\begin{aligned} A(\lambda, \bar{w}) f_{\lambda, \mathfrak{d}}(g) &= f_{w(\lambda), \mathfrak{d}}(g) \int_{V_w} f_{\lambda, \mathfrak{d}}(\bar{w}v)\, dv \\ &= f_{w(\lambda), \mathfrak{d}}(g) \int_{V_w} \mathfrak{d}(\bar{w}k_v) \langle -\lambda - \rho, a_v \rangle\, dv \\ &= f_{w(\lambda), \mathfrak{d}}(g)\, T(\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}). \end{aligned}$$

D'autre part, si $m \in M$, alors

$$f_{\lambda, \mathfrak{d}}(gm) = f_{\lambda, \mathfrak{d}}(g)\, \mathfrak{d}(m).$$

On sait (lemme 1.2) que, pour presque tout élément v de V_w, on peut poser

$$\bar{w}v = z^{-1} m_v h_v u, \qquad \text{avec} \quad z \in V, \quad m_v \in M, \quad h_v \in A \quad \text{et} \quad u \in U.$$

Une variante évidente de la proposition 1.5 montre que si $\lambda \in S(w)$, alors l'application $v \mapsto z$ est propre pour la mesure

$$\mathfrak{d}(m_v) \langle -\lambda - \rho, h_v \rangle\, dv.$$

Soit $\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}}$ l'image de cette mesure. On a

$$A(\lambda, \bar{w}) f_{\lambda, \mathfrak{d}} = f_{\lambda, \mathfrak{d}} \star \Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}}.$$

En résumé, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3.2. — *Si* $\lambda \in S(w)$, *alors*

$$f_{w(\lambda), \mathfrak{d}}\, T(\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}) = f_{\lambda, \mathfrak{d}} \star \Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}}. \tag{3.1.9}$$

En interprétant $W_{\mathfrak{d}}(g, \lambda, \pi)$ comme la valeur au point π de la transformée de Fourier de la fonction $v \mapsto f_{\lambda, \mathfrak{d}}(gv)$, on en déduit d'une manière purement formelle que

$$W_{\mathfrak{d}}(g, w(\lambda), \pi)\, T(\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}) = W_{\mathfrak{d}}(g, \lambda, \pi)\, \pi(\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}}). \tag{3.1.10}$$

Remarquons que dans cette égalité aucun des deux membres n'a de sens *a priori*. En effet, si $\lambda \in S(w_0) \subset S(w)$, alors $w(\lambda) \notin S(w_0)$, et le premier membre ne peut être défini que par prolongement analytique. Au second membre, il faut définir $\pi(\Phi_{\lambda, \mathfrak{b}, \overline{w}})$ et enfin, il faut justifier le passage de (3.1.9) à (3.1.10). On établira cette équation fonctionnelle lorsque G est de rang 1 (et π non triviale).

3.2. Préliminaires sur les groupes de rang 1.

On suppose désormais que G est linéaire algébrique, défini sur $\mathbf{R}$, de rang réel 1. On utilise les notations du n° 2.1; en particulier β est l'unique racine simple, p (resp. q) la multiplicité de β (resp. 2β), et on identifie $\mathfrak{a}_{\mathbf{C}}^*$ à $\mathbf{C}$ de telle sorte que $\rho = p + 2q$.

Comme U est un $\mathbf{R}$-sous-groupe, Zariski fermé, on sait ([1], théorème 5.1) qu'il existe une représentation immersive ν de G, définie sur $\mathbf{R}$, d'espace F et une droite réelle D contenue dans F telle que

$$U = \{ g \in G \mid \nu(g) D = D \}.$$

Comme U est unipotent, il ne possède aucun caractère défini sur $\mathbf{R}$ et donc, si $\xi \in D - \{ 0 \}$, on a

$$U = \{ g \in G \mid \nu(g) \xi = \xi \}.$$

Lemme 3.1. — *Quelle que soit la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(G/U)$, il existe une fonction $\psi \in \mathcal{D}(F - \{ 0 \})$ telle que, quel que soit $g \in G$, on ait*

$$\varphi(g) = \psi(\nu(g) \xi).$$

En effet, examinons la structure de $\overline{G\xi}$. Décomposons ξ en une somme $\xi = \sum \xi_i$ de vecteurs ξ_i propres pour $\nu(A)$; soit λ_i le poids de ξ_i, et supposons ces poids deux à deux distincts. Comme A normalise U, les vecteurs ξ_i sont invariants par U, donc de poids positifs. On a alors

$$\nu(a) \xi = \sum_i \langle \lambda_i, a \rangle \xi_i$$

et par suite,

$$\overline{\nu(A) \xi} = \nu(A) \xi \cup \{ 0 \}.$$

Comme $G = KAU$ et que K est compact, il en résulte que

$$\overline{\nu(G) \xi} = \nu(G) \xi \cup \{ 0 \}.$$

$G\xi$ est donc une sous-variété analytique fermée de $F - \{ 0 \}$, d'où le lemme. Conservons les notations précédentes.

LEMME 3.2. — *Il existe des applications polynomiales η_i de G dans F et des nombres entiers positifs μ_i tels que*

$$\nu(aga)\xi = \sum_i \langle 2\mu_i, a\rangle \eta_i(g).$$

En effet, on a

$$\nu(au)\xi_i = \langle \lambda_i, a\rangle \xi_i$$

et, par suite, les poids du sous-G-module engendré par ξ_i sont compris entre $-\lambda_i$ et λ_i. Or

$$\nu(aga)\xi_i = \langle \lambda_i, a\rangle \nu(a)\nu(g)\xi_i.$$

Décomposons $\nu(g)\xi_i$ en une somme de vecteurs poids

$$\nu(g)\xi_i = \sum \alpha_{i,j}(g)\xi_{i,j}, \qquad (\xi_{i,j} \text{ de poids } \lambda_{i,j}).$$

Les fonctions $\alpha_{i,j}$ sont des fonctions rationnelles partout définies et

$$\nu(aga)\xi = \sum_{i,j} \langle \lambda_i + \lambda_{i,j}, a\rangle \alpha_{i,j}(g)\xi_{i,j}.$$

Comme $\lambda_{i,j}$ est un poids du sous-G-module engendré par ξ_i, il est de la forme $\lambda_i - k\beta$, et il est plus grand que $-\lambda_i$; par suite $\lambda_i + \lambda_{i,j}$ est positif et pair puisque $\beta = 2$. Aux notations près, le lemme est donc démontré.

LEMME 3.3 (R. GODEMENT). — *Soit Ω une partie compacte de G. Il existe une partie compacte Ω' de V et une constante positive C telle que*

$$a \in A, \quad v \in V \quad \textit{et} \quad ava \in \Omega U \qquad \textit{impliquent} \quad v \in \Omega' \quad \textit{et} \quad \langle 1, a\rangle \leqq C.$$

Soit π une représentation de G, non triviale, irréductible de dimension finie.

Munissons l'espace E de π d'une norme invariante par le centralisateur M de A dans K. Soit Λ le poids dominant de π et e_Λ un vecteur dominant. La condition

$$ava \in \Omega U,$$

peut s'écrire

$$\bar{w}ava \in \bar{w}\Omega U,$$

ou encore

$$a^{-1}\bar{w}va \in \bar{w}\Omega U.$$

Supposons $v \neq e$, et posons

$$\bar{w}v = v' m_v h_v u_v, \qquad v' \in V, \quad m_v \in M, \quad h_v \in A \quad \text{et} \quad u_v \in U.$$

On a

$$\pi(a^{-1}\bar{w}va)e_\Lambda = \langle \Lambda, h_v\rangle \pi(a^{-1}v'a)\pi(m_v)e_\Lambda.$$

Soit P le projecteur sur le sous-espace des vecteurs de poids Λ. On a

$$P\pi(a^{-1}\overline{w}va)\,e_\Lambda = \langle \Lambda, h_\nu \rangle P\pi(m_\nu)\,e_\Lambda = \langle \Lambda, h_\nu \rangle \pi(m_\nu)\,e_\Lambda.$$

S'il existe $\omega \in \Omega$ tel que

$$a^{-1}\overline{w}va \in \overline{w}\omega U,$$

alors

$$P\pi(a^{-1}\overline{w}va)\,e_\Lambda = P\pi(\overline{w}\omega)\,e_\Lambda$$

ou encore, en prenant les normes

$$\| P\pi(\overline{w}\omega)\,e_\Lambda \| = \langle \Lambda, h_\nu \rangle \| e_\Lambda \|.$$

On en déduit que

$$\langle \Lambda, h_\nu \rangle \| e_\Lambda \| \leq \sup_{\omega \in \Omega} \| P\pi(\overline{w}\omega)\,e_\Lambda \|.$$

La formule (2.1.3) permet de calculer h_ν en fonction de v et montre que si $\langle \Lambda, h_\nu \rangle$ reste bornée, alors v reste dans une partie compacte de V ce qui prouve l'existence de Ω'. D'autre part, soient toujours a et v tels que $ava \in \Omega U$. On a

$$\pi(ava)\,e_\Lambda = \langle 2\Lambda, a \rangle \pi(ava^{-1})\,e_\Lambda,$$

d'où

$$P\pi(ava)\,e_\Lambda = \langle 2\Lambda, a \rangle e_\Lambda$$

et par suite,

$$\langle 2\Lambda, a \rangle \| e_\Lambda \| \leq \sup_{\omega \in \Omega} \| P\pi(\omega)\,e_\Lambda \|.$$

Comme $\langle 2\Lambda, a \rangle$ reste borné, il en est donc de même de $\langle 1, a \rangle$.

3.3. Le prolongement analytique des intégrales de Whittaker.

On suppose toujours G de rang 1, linéaire algébrique. On utilise les notations du n° 3.1.

Théorème 3.1. — *Si π est non triviale, alors l'intégrale*

$$W_\varphi(g, \lambda, \pi) = \int_V \varphi_\lambda(gv) \otimes \pi(v)\,dv \tag{3.1.1}$$

converge pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. *Si $\varepsilon \in F$ et $\eta \in F_\pi$, alors $W_\varphi(g, \lambda, \pi)\,\varepsilon \otimes \eta$ est une fonction analytique de λ qui se prolonge en une fonction entière de λ.*

On a déjà vu, proposition 3.1, que l'intégrale convergeait pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. Pour le prolongement analytique, on peut supposer que φ est à valeurs scalaires et que $g = e$. On a alors

$$W_\varphi(e, \lambda, \pi) = \int_{V \times A} \varphi(va) \langle \lambda + \rho, a \rangle \pi(v)\,dv\,da.$$

Changeons a en a^2; il vient

$$W_\varphi(e, \lambda, \pi) = 2\int_{V\times A} \varphi(va^2) \langle 2\lambda + 2\rho, a\rangle \pi(v)\, dv\, da.$$

Changeons v en ava^{-1}; il vient

$$W_\varphi(e, \lambda, \pi) = 2\int_A \langle 2\lambda, a\rangle da \int_V \varphi(ava)\, \pi(ava^{-1})\, dv.$$

Si t est un nombre positif, on note a_t l'unique élément de A tel que $t = \langle 1, a_t\rangle$. Soit $\eta \in F_\pi$ et

$$f(t) = \int_V \varphi(a_t v a_t)\, \pi(a_t v a_t^{-1})\, \eta\, dv.$$

On a

$$W_\varphi(e, \lambda, \pi)\, \eta = 2\int_0^{+\infty} t^{2\lambda} f(t)\, \eta\, d^* t.$$

D'après les propriétés générales de la transformation de Mellin, il nous suffit donc de prouver le lemme suivant :

LEMME 3.4. — *La fonction f est continue et son support est une partie compacte de* $[0, +\infty[$. *De plus, quel que soit l'entier positif ou nul n, on a*

$$\lim_{t \to 0} t^{-n} \| f(t) \| = 0.$$

Soit Ω une partie compacte de G telle que $\sup(\varphi) \subset \Omega U$. D'après le lemme 3.3, il existe une partie compacte Ω' de V et une constante positive C telles que

$$\varphi(a_t v a_t) \neq 0 \qquad \text{implique} \quad v \in \Omega' \quad \text{et} \quad t \leqq C.$$

On a donc $f(t) = 0$ pour $t \geqq C$ et

$$f(t) = \int_{\Omega'} \varphi(a_t v a_t)\, \pi(a_t v a_t^{-1})\, \eta\, dv.$$

Comme Ω' est indépendant de t, ceci montre que f est continue. Pour étudier le comportement de f à l'origine, notons qu'il existe toujours un élément X de $\mathfrak{v}$, appartenant soit à $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{g}^{-\beta}$ soit à $\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{g}^{-2\beta}$ tel que

$$\pi(X) = c\,\mathrm{Id}, \qquad c \neq 0.$$

En effet, comme $\mathfrak{v}_2$ est le centre de $\mathfrak{v}$, il existe une forme linéaire ν sur $\mathfrak{v}_2$ telle que

$$\pi(Z) = i\nu(Z) \qquad \text{pour} \quad Z \in \nu^2.$$

Si $\nu \neq 0$, on prend $X \in \mathfrak{v}_2$ telle que $\nu(X) \neq 0$. Si $\nu = 0$, alors π est triviale sur $V_2 = \exp(\mathfrak{v}_2)$, donc provient d'une représentation unitaire irréductible de V/V_2. Comme V/V_2 est abélien, π est un caractère de V, trivial sur V_2. Il existe donc une forme linéaire ν' sur $\mathfrak{v}$, nulle sur $\mathfrak{v}_2$, telle que

$$\pi(Y) = i\nu'(Y) \qquad \text{pour} \quad Y \in \mathfrak{v}.$$

Comme π est non triviale, $\nu' \neq 0$, et on prend $X \in \mathfrak{v}_1$ tel que $\nu'(X) \neq 0$. Remarquons que

$$\pi(\mathrm{Ad}(a_t)X) = ct^{-2r}, \qquad \text{avec} \quad r = 1 \quad \text{si } X \in \mathfrak{v}_1, \qquad \text{et} \quad r = 2 \quad \text{si } X \in \mathfrak{v}_2.$$

Soit

$$\varphi_t(v) = \varphi(a_t v a_t).$$

La fonction φ_t est indéfiniment dérivable et à support compact. On a donc

$$\int_V X^n \star \varphi_t(v)\, \pi(a_t v a_t^{-1})\, \eta\, dv = c^n t^{-2nr} \int_V \varphi(a_t v a_t)\, \pi(a_t v a_t^{-1})\, \eta\, (dv,$$

d'où

$$(3.3.2) \qquad \| f(t) \| \leq | c |^{-n} t^{2nr} \int_V X^n \star \varphi_t(v)\, dv.$$

Il nous suffit de prouver que l'intégrale figurant au second membre de cette inégalité reste bornée quand t tend vers zéro. Or, avec les notations des lemmes 3.1 et 3.2, on a

$$\varphi_t(v) = \psi\left(\sum_i t^{2\mu_i} \eta_i(v)\right)$$

et par suite, $X^n \star \varphi_t(v)$ est de la forme

$$\sum_j \psi_j \left(\sum_i t^{2\mu_i} \eta_i(v)\right) \alpha_j(t, v),$$

où les α_j sont des fonctions polynomiales de t et de v et les ψ_j des dérivées partielles de ψ. Les fonctions ψ_j sont continues à support compact, donc bornées.

Les fonctions α_j se prolongent en des fonctions continues sur $\mathbf{R} \times V$ donc

$$\sup_{\substack{0 \leq t \leq C \\ v \in \Omega'}} | \alpha_j(t, v) | < +\infty.$$

Comme $X^n \star \varphi_t$ est à support compact contenu dans Ω' et est nulle pour $t \geq C$, on a

$$\int_V | X^n \star \varphi_t(v) |\, dv \leq \sup_{\substack{t \in C \\ v \in \Omega'}} | X^n \star \varphi_t(v) | < +\infty.$$

Il existe donc une constante M_n, telle que

$$\| f(t) \| \leq M_n \, | c |^{-n} t^{2nr} \| \eta \|.$$

ce qui prouve le lemme.

Remarque. — Dans le cas où π est la représentation triviale de V, la méthode précédente nous a été suggérée par R. GODEMENT. Elle redonne le prolongement analytique des intégrales d'entrelacement.

Au paragraphe 4, on aura besoin de la remarque suivante. Supposons que la représentation π soit de dimension 1. Il existe alors une forme linéaire ν sur $\mathfrak{v}$, nulle sur $[\mathfrak{v}, \mathfrak{v}]$ telle que

$$\pi(\exp Y) = e^{i\nu(Y)} \qquad \text{pour} \quad Y \in \mathfrak{v}.$$

Notons π_ν cette représentation.

LEMME 3.5. — *Pour* $\nu \neq 0$, *l'application* $(\lambda, \nu) \mapsto W_\varphi(e, \lambda, \pi)$ *est continue.*

En effet si,

$$f_\nu(t) = \int_{V} \varphi(a_t v a_t) \, \pi_\nu(a_t v a_t^{-1}) \, \eta \, dv,$$

alors, pour $t \neq 0$, $f_\nu(t)$ est une fonction continue de ν et de t (on intègre sur un compact fixe). De plus

$$\| f_\nu(t) \| \leq M_n \, | \nu(X) |^{-n} t^{2nr} \| \eta \|.$$

L'élément X de $\mathfrak{v}$ dépend *a priori* de ν, mais on peut le choisir indépendant lorsque ν varie au voisinage d'un point; dans ce voisinage, M_n est alors indépendant de ν. L'inégalité précédente montre alors que $t^{2\lambda} f_\nu(t,)$ prolongée par 0 au point $t = 0$ est continue au point $(\nu, 0)$ pour $\nu \neq 0$. Comme

$$W_\varphi(e, \lambda, \pi_\nu) = 2 \int_0^{+\infty} t^{2\lambda} f_\nu(t) \, d^* t$$

et que l'intégration se fait sur un compact fixe, indépendant de (λ, ν), la somme de cette intégrale est une fonction continue de (λ, ν).

Revenons au théorème 3.1. Il permet de définir l'opérateur $W(g, \lambda, \pi)$ pour tout λ. La majoration obtenue pour f, montre que cet opérateur est borné. Examinons un cas particulier. Soit $\mathfrak{d}$ une représentation unitaire irréductible de K, d'espace $F_\mathfrak{d}$; prenons $F = F_\mathfrak{d}$ et supposons que

$$\varphi(kg) = \mathfrak{d}(k) \, \varphi(g).$$

On a vu que

$$\varphi_\lambda(g) = f_{\lambda, \mathfrak{d}}(g) \, \varphi_\lambda(e),$$

avec

$$f_{\lambda, \mathfrak{d}}(g) = \mathfrak{d}(k) < -\lambda - \rho, a > \qquad \text{si} \quad g = kau.$$

On a donc le résultat suivant :

THÉORÈME 3.2. — *L'intégrale*

$$W_{\mathfrak{d}}(g, \lambda, \pi) = \int_V f_{\lambda, \mathfrak{d}}(gv) \otimes \pi(v)\, dv$$

converge pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$. *Pour* $\varepsilon \in F_{\mathfrak{d}}$ *et* $\eta \in F_\pi$, *l'application*

$$\lambda \mapsto W(g, \lambda, \pi)\, \varepsilon \otimes \eta$$

est analytique et se prolonge en une fonction entière de λ.

3.4. L'équation fonctionnelle.

Rappelons que, pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, on a

$$f_{-\lambda, \mathfrak{d}}\, T(\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}) = f_{\lambda, \mathfrak{d}} \star \Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}}. \tag{3.4.1}$$

D'autre part, une variante de la proposition 2.3 montre que

$$\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}} = \mathfrak{d}(m_v)\, N(v)^{\lambda - \rho} \tag{3.4.2}$$

où, pour $v \neq e$, on a posé

$$\overline{w}^{-1} v \in V m_v h_v U, \qquad m_v \in M, \quad h_v \in A$$

et $N(v) = \langle 1, h_v \rangle$. Si $v = \exp(Y + Z)$ avec $Y \in \mathfrak{v}_1$ et $Z \in \mathfrak{v}_2$, alors

$$N(v)^4 = \| Y \|^4 + \| Z \|^2,$$

où Y et Z sont définis comme au n° 2.1. En particulier, la fonction $N(v)^{\lambda - \rho}$ n'est jamais intégrable sur V.

Une application polynomiale P de V dans $\mathcal{L}(F_{\mathfrak{d}})$ sera dite homogène de degré μ si

$$P(ava^{-1}) = \langle -2\mu, a \rangle P(v).$$

On montrera en appendice qu'il existe des polynômes P_i, homogènes de degré $\mu_i \geqq 0$, tels que

$$\mathfrak{d}(m_v) = \sum_i P_i(v)\, N(v)^{-\mu_i}.$$

On a donc

$$\mathfrak{d}(m_v)\, N(v)^{\lambda - \rho} = \sum_i P_i(v)\, N(v)^{\lambda - \rho - \mu_i}.$$

On doit définir $\pi(\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}})$ pour toute représentation unitaire irréductible, non triviale, de V. Formellement

$$\pi(\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}}) = \int_V \sum_i N(v)^{\lambda - \rho - \mu_i} P_i(v) \otimes \pi(v)\, dv. \tag{3.4.3}$$

Pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, on a

$$N(v)^{\lambda-\rho-\mu_i} = \frac{1}{\Gamma((\rho+\mu_i-\lambda)/4)} \int_0^{+\infty} t^{((\rho+\mu_i-\lambda)/4)} e^{-tN(v)^4} d^*t.$$

Cette égalité peut encore s'écrire :

$$N(v)^{\lambda-\rho-\mu_i} = \frac{8}{\Gamma((\rho+\mu_i-\lambda)/4)} \int_A \langle 2\lambda - 2\rho - 2\mu_i, a\rangle e^{-N(ava^{-1})^4} da.$$

Posons

$$P(v) = \sum_i \frac{8}{((\rho+\mu_i-\lambda)/4)} P_i(v).$$

Formellement on a

$$\pi(\Phi_{\lambda,\mathfrak{d},\overline{w}}) = \int_A \langle 2\lambda, a\rangle da \int_V e^{-N(v)^4} P(v) \otimes \pi(a^{-1}va)\, dv.$$

On va prendre cette formule comme définition de $\pi(\Phi_{\lambda,\mathfrak{d},\overline{w}})$. Soient F_π l'espace de π, et F_π^∞ le sous-espace des vecteurs réguliers.

PROPOSITION 3.3. — *Soit* $\varepsilon \in F_{\mathfrak{d}}$ *et* $\eta \in F_\pi^\infty$. *Posons*

$$f(t) = \int_V e^{-N(v)^4} P(v) \otimes \pi(a_t^{-1} v a_t)(\varepsilon \otimes \eta)\, dv. \tag{3.4.4}$$

L'intégrale

$$g(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^{2\lambda} f(t) d^*t \tag{3.4.5}$$

converge pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, *et sa somme est une fonction analytique de* λ *qui se prolonge en une fonction méromorphe dont tous les pôles sont simples et sont des entiers négatifs ou nuls.*

Il suffit de faire la démonstration en remplaçant P par P_i. Posons donc

$$f_i(t) = \int_V e^{-N(v)^4} P_i(v) \otimes \pi(a_t^{-1} v a_t)(\varepsilon \otimes \eta)\, dv$$

et étudions le comportement de f_i lorsque t tend vers zéro ou vers $+\infty$. Soit

$$\varphi_i(v) = e^{-N(v)^4} P_i(v)\, \varepsilon.$$

Soit $X \in \mathfrak{v}_1$ ou à $\mathfrak{v}_2$ tel que $\pi(X) = c\,\mathrm{Id}$; $c \neq 0$. La fonction $X^n \star \varphi_i$ est à décroissance rapide sur V et

$$\int_V X^n \star \varphi_i(v) \star \pi(a_t^{-1} v a_t)\, \eta\, dv = (ct^{2r})^n \int_V \varphi_i(v) \otimes \pi(a_t^{-1} v a_t)\, \eta\, dv,$$

où $r = 1$ (resp. 2) si $X \in \mathfrak{v}_1$ (resp. à $\mathfrak{v}_2$). On a donc

$$(3.4.6) \qquad \| f_i(t) \| \leq | c |^{-n} t^{-2rn} \int_V \| X^n \star \varphi_i(v) \| \, dv.$$

La fonction f_i est donc à décroissance rapide à l'infini. Étudions son comportement au voisinage de 0. Posons à nouveau $v = \exp(Y + Z)$, $Y \in \mathfrak{v}_1$ et $Z \in \mathfrak{v}_2$. On a

$$f_i(t) = \int_V e^{-N(v)^4} P_i(v) \otimes \pi(\exp(t^2 Y + t^4 Z)) \eta \, dv.$$

Remarquons que cette formule à un sens pour $t = 0$. Comme $\eta \in F_\pi^\infty$, la fonction

$$t \mapsto \pi(\exp(t^2 Y + t^4 Z)) \eta$$

est de classe C^∞, et on voit aisément que

$$d^n/dt^n \pi(\exp(t^2 Y + t^4 Z)) \eta) = \pi(\exp(t^2 Y + t^4 Z)) \pi(Q_n(t, Y, Z))$$

où Q_n est une fonction polynomiale. L'intégrale

$$\int_V e^{-N(v)^4} P_i(v) \otimes d^n/dt^n \pi(a_t^{-1} v a_t) \eta \, dv$$

converge donc uniformément pour t dans une partie compacte de $\mathbf{R}$. La fonction f_i est donc de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Notons qu'elle est paire et donc que

$$d^{2p+1}/dt^{2p+1} f(0) = 0.$$

La transformée de Mellin :

$$g_i(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^{2\lambda} f_i(t) \, d^* t$$

est donc définie et analytique pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ et se prolonge en une fonction méromorphe dont tous les pôles sont simples et entiers négatifs ou nuls. La proposition 3.3 est donc démontrée.

Par définition, on pose, pour $-\lambda \notin N$,

$$\pi(\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}}) \varepsilon \otimes \eta = g(\lambda).$$

L'opérateur $\pi(\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}})$ a donc pour domaine de définition $F_{\mathfrak{d}} \otimes F_\pi^\infty$. Si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, on déduit aisément de (3.4.6) que cet opérateur est borné. On vérifie également que si $a \in A$ et si $\pi^a(v) = \pi(a^{-1} v a)$, alors

$$(3.4.7) \qquad \pi^a(\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}}) = \langle -2\lambda, a \rangle \pi(\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}}).$$

THÉORÈME 3.3. — *Si π est non triviale et si* $-\lambda \notin \mathbf{N}$, *alors*

$$W_{\mathfrak{d}}(g, -\lambda, \pi)\, T(\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}) = W_{\mathfrak{d}}(g, \lambda, \pi)\, \pi(\Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}}). \tag{3.4.8}$$

Dans (3.4.8) les deux membres sont maintenant définis. Les formules (3.4.7) et (3.1.7) montrent qu'il suffit de prouver (3.4.8) lorsque $g = e$. Pour simplifier, on pose

$$W(\lambda) = W_{\mathfrak{d}}(e, \lambda, \pi); \qquad \Phi_\lambda = \Phi_{\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}};$$
$$T(\lambda) = T(\lambda, \mathfrak{d}, \overline{w}); \qquad f_\lambda = f_{\lambda, \mathfrak{d}}.$$

On doit donc prouver que

$$W(-\lambda)\, T(\lambda) = W(\lambda)\, \pi(\Phi_\lambda) \tag{3.4.9}$$

sachant que

$$f_{-\lambda}\, T(\lambda) = f_\lambda \star \Phi_\lambda. \tag{3.4.10}$$

Nous commencerons par le cas où π est de dimension infinie.

PROPOSITION 3.4. — *Soit* $\nu \in \mathfrak{v}_2^* - \{0\}$. *Si* $Y \in \mathfrak{v}_1$ *et si* $\nu([Y, \mathfrak{v}_1]) = 0$, *alors* $Y = 0$.

En effet, soient θ l'involution de Cartan et B la forme de Killing. Il existe $Z \in \mathfrak{v}_2$ tel que

$$B(\theta(Z), X) = \nu(X) \qquad \text{pour} \quad X \in \mathfrak{v}_2.$$

Par hypothèse, on a donc

$$B(\theta(Z), \operatorname{ad}(Y)\, \mathfrak{v}_1) = 0$$

ou encore

$$B(\operatorname{ad}(Y)\, \theta(Z), \mathfrak{v}_1) = 0,$$

ce qui équivaut à

$$\operatorname{ad}(Y)\, \theta(Z) = 0.$$

Comme Z est non nul, la formule (2.1.13) montre que $Y = 0$.

COROLLAIRE. — *La forme bilinéaire alternée*

$$(Y, Y') \mapsto \nu([Y, Y'])$$

est non dégénérée, et $\mathfrak{v}_2 = [\mathfrak{v}, \mathfrak{v}]$.

Comme π est irréductible, il existe $\nu \in \mathfrak{v}_2^*$ telle que

$$\pi(\exp Z) = e^{i\nu(Z)} \qquad \text{pour} \quad Z \in \mathfrak{v}_2.$$

Soit $V_2 = \exp(\mathfrak{v}_2)$; c'est le sous-groupe dérivé de V. Si $\nu = 0$, alors, par passage au quotient, π définit une représentation unitaire irréductible de V/V_2. Comme V/V_2 est abélien, π est de dimension 1. On va donc supposer $\nu \neq 0$. Plongeons $\mathfrak{v}_2^*$ dans $\mathfrak{v}^*$. On vérifie de suite que $\mathrm{Ad}(V)\nu = \nu + \mathfrak{v}_1^*$ et donc que l'orbite $\mathrm{Ad}(V)\nu$ est de dimension p. D'après la théorie de Kirillov, une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{v}$, subordonnée à ν [c'est-à-dire telle que $\nu([\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]) = 0$] maximale, est de codimension $p/2$. On construit comme suit une telle sous-algèbre : soit $\mathfrak{c}$ un sous-espace de $\mathfrak{v}_1$, isotrope maximal pour la forme alternée $\nu([Y, Y'])$; on a $[\mathfrak{c} \oplus \mathfrak{v}_2, \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{v}_2] = [\mathfrak{c}, \mathfrak{c}]$ donc $\mathfrak{h} = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{v}_2$ est surbordonnée à ν, maximale puisque de codimension $p/2$. Soit $H = \exp(\mathfrak{h})$ et

$$\chi(\exp X) = e^{i\nu(X)} \qquad \text{pour} \quad X \in \mathfrak{h}.$$

La représentation π est équivalente à la représentation induite par χ. On identifie ces deux représentations.

Soit

$$K_\lambda(x, y) = \int_H f_\lambda(xhy^{-1})\,\chi(h)\,dh. \tag{3.4.11}$$

LEMME 3.6. — *Supposons* $\mathrm{Re}(\lambda) > -p/2$.

(*a*) *L'intégrale* (3.4.9) *converge et sa somme* $K_\lambda(x, y)$ *est une fonction continue de* (λ, x, y), *analytique par rapport à* λ.

(*b*)
$$\int_{V/H\times V/H} \| K_\lambda(x, y) \|^2\,dx\,dy < +\infty.$$

(*c*) *Si* $\eta \in F_\mathfrak{d} \otimes F_\pi$, *alors*

$$W(\lambda)\,\eta(x) = \int_{V/H} K_\lambda(x, y)\,\eta(y)\,dy. \tag{3.4.12}$$

Pour (*c*), rappelons que $F_\mathfrak{d} \otimes F_\pi$ est l'espace des applications η de V dans $F_\mathfrak{d}$ telles que

$$\eta(vh) = \chi(h^{-1})\,\eta(v)$$

et

$$\int_{V/H} \| \eta(v) \|^2\,dv < +\infty.$$

Prouvons (*a*). Le sous-groupe H est normal, donc

$$\int_H \| f_\lambda(xhy^{-1}) \|\,dh = \int_H \| f(xy^{-1}h) \|\,dh.$$

Mais

$$f_\lambda(xy^{-1}h) \leq C \langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_h \rangle,$$

où la constante C ne dépend que de xy^{-1} et reste bornée quand xy^{-1} reste dans une partie compacte de V. Si $h = \exp(Y + Z)$ avec $Y \in \mathfrak{c}$ et $Z \in \mathfrak{v}_2$, on a

$$\langle -\mathrm{Re}(\lambda) - \rho, a_h \rangle = [(1 + \| Y \|^2)^2 + \| Z \|^2]^{-(\mathrm{Re}(\lambda)+\rho)/4}.$$

On doit donc vérifier que, pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -p/2$, on a

$$\int_{\mathfrak{c}\times\mathfrak{v}_2} [(1 + \| Y \|^2)^2 + \| Z \|^2]^{-(\mathrm{Re}(\lambda)+\rho)/4}\, dY\, dZ < +\infty.$$

Remplaçons Z par $(1 + \| Y \|^2)\, Z$; il vient

$$\int_{\mathfrak{v}_2} (1 + \| Z \|^2)^{-(\mathrm{Re}(\lambda)+\rho)/4}\, dZ \int_{\mathfrak{c}} (1 + \| Y \|^2)^{-(\mathrm{Re}(\lambda)+p)/2}\, dY.$$

La première intégrale converge pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -p$, et la deuxième pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -p/2$. De plus, la convergence est uniforme pour xy^{-1} appartenant à une partie compacte de V et λ à une partie compacte du demi-plan $\mathrm{Re}(\lambda) > -p/2$, ce qui montre que $K_\lambda(x, y)$ est continue par rapport à (λ, x, y) et analytique par rapport à λ.

Prouvons (*b*). Pour $Y \in \mathfrak{v}_1$, posons

$$g(Y) = \int_{\mathfrak{v}_2} f_\lambda(\exp(Y + Z))\, e^{i\nu(Z)}\, dZ.$$

En explicitant f_λ, on a

$$g(Y) = \int_{\mathfrak{v}_2} \mathfrak{d}(k_{\exp(Y+Z)})[(1 + \| Y \|^2)^2 + \| Z \|^2]^{-(\lambda+\rho)/4}\, e^{i\nu(Z)}\, dZ.$$

Changeons Z en $(1 + \| Y \|^2)\, Z$; il vient

$$g(Y) = (1 + \| Y \|^2)^{-(\lambda+p)/2} \int_{\mathfrak{v}^2} \mathfrak{d}(k_{\exp(Y+(1+\| Y \|^2)Z)})$$
$$\times (1 + \| Z \|^2)^{-(\lambda+\rho)/4}\, e^{i\nu(Z)(1+\| Y \|^2)}\, dZ.$$

Dans cette formule, l'intégrale converge pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -p$, et est une fonction bornée de Y. En conséquence, g est de carré intégrable sur $\mathfrak{v}_1$ pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -p/2$. Soit $\mathfrak{c}'$ un sous-espace de $\mathfrak{v}_1$ isotrope maximal pour la forme alternée $\nu([Y, Y'])$ et tel que $\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{c} \oplus \mathfrak{c}'$. Posons

$$\langle Y, Y' \rangle = \frac{1}{2}\, \nu([Y, Y']) \qquad \text{pour} \quad Y \in \mathfrak{c} \quad \text{et} \quad Y' \in \mathfrak{c}'.$$

$\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c}'$ sont donc en dualité, et on peut identifier l'un au dual de l'autre. Cela étant, on a

$$K_\lambda(x, y) = \int_H f_\lambda(xhy^{-1})\,\chi(h)\,dh$$
$$= \int_{H/V_2 \times \mathfrak{v}_2} f_\lambda(xhy^{-1} \exp(Z))\, e^{i\nu(Z)}\,(dh\,dZ.$$

En explicitant, il vient

$$K_\lambda(\exp(X), \exp(Y)) = \int_{\mathfrak{c}} g(X - Y + H)\, e^{i\nu([H, X+Y]+[X, Y])/2}\,dH.$$

Il nous faut montrer que la fonction $K_\lambda(\exp(X), \exp(Y))$ est de carré intégrable sur $\mathfrak{c}\times\mathfrak{c}'$ ou encore que la fonction

$$g'(X, Y) = K_\lambda\left(\exp\left(\frac{1}{2}(X+Y)\right), \exp\left(\frac{1}{2}(Y-X)\right)\right)$$

est de carré intégrable sur $\mathfrak{c}'\times\mathfrak{c}'$. Or si X et Y appartiennent à $\mathfrak{c}'$, on a

$$g'(X, Y) = \int_{\mathfrak{c}} g(X+H)\, e^{i<H, Y>}\,dH.$$

La fonction g' est donc une transformée de Fourier partielle de g. Comme g est de carré intégrable, il en est de même de g'.

Prouvons (*c*). Soit φ une application C^∞ à support compact de V dans $F_{\mathfrak{b}}$. Posons

$$\varphi_\chi(v) = \int_H \varphi(vh)\,\chi(h)\,dh.$$

La fonction φ_χ appartient à $F_{\mathfrak{b}} \otimes F_\pi^\infty$ et on obtient ainsi un sous-espace dense de $F_{\mathfrak{b}} \otimes F_\pi^\infty$. Pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, on a

$$\pi(f_\lambda)\,\varphi_\chi(x) = \int_V f_\lambda(y)\,\varphi_\chi(y^{-1}x)\,dy$$
$$= \int_{V/H\times H} f_\lambda(xhy^{-1})\,\varphi_\chi(y)\,\chi(h)\,dy\,dh$$
$$= \int_{V/H} K_\lambda(x, y)\,\varphi_\chi(y)\,dy.$$

Par définition, pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, on a $W(\lambda) = \pi(f_\lambda)$, donc

$$W(\lambda)\,\varphi_\chi(x) = \int_{V/H} K_\lambda(x, y)\,\varphi_\chi(y)\,dy.$$

Comme φ_χ est à support compact modulo H, l'intégrale du second membre à un sens pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -p/2$ et sa somme est une fonction analytique de λ. D'après le théorème 3.2, il en est de même du premier membre de sorte que l'égalité reste valable pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -p/2$. D'après (*b*),

$K_\lambda(x, y)$ est de carré intégrable sur V/H, donc définit un opérateur borné dans $F_\mathfrak{b} \otimes F_\pi$. Comme cet opérateur coïncide avec $W(\lambda)$ sur un sous-espace dense, il lui est égal ce qui prouve (c).

Considérons maintenant l'opérateur $\pi(\Phi_\lambda)$. Soit

$$B_\lambda(x, y) = \int_H \Phi_\lambda(xhy^{-1})\,\chi(h)\,dh. \tag{3.4.13}$$

LEMME 3.7. — *Supposons* $0 < \operatorname{Re}(\lambda) < p/2$.

(*a*) *L'intégrale* (3.4.13) *converge pour* $xy^{-1} \notin H$, *et sa somme est une fonction continue.*

(*b*) *On a*

$$\pi(\Phi_\lambda)\,\varphi_\chi(x) = \int_{V/H} B_\lambda(x, y)\,\varphi_\chi(y)\,dy.$$

Comme

$$\|\Phi_\lambda\| = N(v)^{\operatorname{Re}(\lambda)-\rho},$$

la démonstration de (*a*) est immédiate. Pour prouver (*b*), rappelons que, par définition,

$$\begin{aligned}\pi(\Phi_\lambda)\varphi_\chi &= \int_A \langle 2\lambda, a\rangle\,da \int_V e^{-N(v)^4} P(v) \otimes \pi(a^{-1}va)\,\varphi_\chi\,dv \\ &= \int_A \langle 2\lambda - 2\rho, a\rangle\,da \int_V e^{-N(ava^{-1})^4} P(ava^{-1}) \otimes \pi(v)\,\varphi_\chi\,dv.\end{aligned}$$

La fonction

$$e^{-N(ava^{-1})^4} P(ava^{-1})$$

est à décroissance rapide sur V, donc l'opérateur

$$\int_V e^{-N(ava^{-1})^4} P(ava^{-1}) \otimes \pi(v)\,dv$$

est l'opérateur de noyau

$$\int_H e^{-N(axhy^{-1}a^{-1})^4} P(axhy^{-1}a^{-1})\,\chi(h)\,dh.$$

Si on pose

$$\theta(v, a) = \int_{\mathfrak{v}_2} e^{-N(av\exp(Z)a^{-1})^4} P(av\exp(Z)a^{-1})\,e^{i\nu(Z)}\,dZ,$$

on a donc, pour $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$,

$$\pi(\Phi_\lambda)\,\varphi_\chi(x) = \int_A \langle 2\lambda - 2\rho, a\rangle\,da \int_{H/V_2 \times V/H} \theta(xhy^{-1}, a)\,\varphi_\chi(y)\,dh\,dy.$$

On va voir que, pour $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, cette intégrale triple est absolument convergente. Pour évaluer $\theta(v, a)$ on peut supposer que $v = \exp(Y)$ avec $Y \in \mathfrak{v}_1$. Posons $t = \langle 1, a\rangle$; il vient, en considérant P comme défini sur $\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2$,

$$\theta(\exp(Y), a) = \int_{\mathfrak{v}_2} P(t^{-2}Y, t^{-4}Z)\, e^{-\|Y\|^4 t^{-8} - \|Z\|^2 t^{-8}}\, e^{i\nu(Z)}\, dZ$$

$$= t^{4q} e^{-\|Y\|^4 t^{-8}} \int_{\mathfrak{v}_2} P(t^{-2}Y, Z)\, e^{-\|Z\|^2}\, e^{i\nu(Z)t^4}\, dZ.$$

Il existe donc un polynôme Q, à coefficients fonctions holomorphes de λ, tel que

$$\theta(\exp(Y), a) = e^{-\|Y\|^4 t^{-8}} t^{4q}\, Q(t^{-2}Y, \nu t^4)\, e^{-t^8\|\nu\|^2/4}.$$

D'autre part, comme $|\theta|$ est invariante à droite par V_2, on a

$$\int_A \langle 2\operatorname{Re}(\lambda) - 2\rho, a\rangle\, da \int_{H/V_2 \times V/H} \|\theta(xhy^{-1}, a)\|\, |\varphi_\chi(y)|\, dh\, dy$$

$$\leq \sup|\varphi_\chi| \int_A \langle 2\operatorname{Re}(\lambda) - 2\rho, a\rangle\, da \int_{H/V_2 \times V/H} |\theta(xy^{-1}h, a)|\, dh\, dy$$

$$= \sup|\varphi_\chi| \int_A \langle 2\operatorname{Re}(\lambda) - 2\rho, a\rangle\, da \int_{\mathfrak{v}_1} |\theta(\exp(Y), a)|\, dy.$$

Remplaçant θ par sa valeur, on doit montrer que, pour $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$, on a

$$\int_{A\times\mathfrak{v}_1} \langle 2\operatorname{Re}(\lambda) - 2p, a\rangle\, |Q(t^{-2}Y, \nu t^4)|\, e^{-\|Y\|^4 t^{-8} - t^{-8}\|\nu\|^2/4}\, dY\, da < +\infty.$$

Comme ν est non nul, il suffit de changer Y en $t^2 Y$ pour obtenir notre assertion. En appliquant le théorème de Fubini, on a donc

$$\pi(\Phi_\lambda)\varphi_\chi(x) = \int_{V/H} dy \int_A \langle 2\lambda - 2\rho, a\rangle\, da \int_{H/V_2} \theta(xhy^{-1}, a)\, \varphi_\chi(y)\, dh$$

$$= \int_{V/H} dy \int_A \langle 2\lambda - 2\rho, a\rangle\, da \int_H e^{-N(axhy^{-1}a^{-1})^4}$$

$$\times P(axhy^{-1}a^{-1})\, \varphi_\chi(y)\, \chi(h)\, dh.$$

Pour $0 < \operatorname{Re}(\lambda) < p/2$, on peut permuter les intégrations par rapport à a et h, ce qui donne

$$\pi(\Phi_\lambda)\varphi_\chi(x) = \int_{V/H} B_\lambda(x, y)\, \varphi_\chi(y)\, dy,$$

l'intégrale étant absolument convergente.

Prouvons maintenant le théorème. Si $0 < \operatorname{Re}(\lambda) < p/2$, alors

$$W(-\lambda)\varphi_\chi(x) = \int_{V/H} K_{-\lambda}(x, y)\, \varphi_\chi(y)\, dy = \int_V K_{-\lambda}(x, y)\, \varphi(y)\, dy.$$

Mais

$$f_{-\lambda} T(\lambda) = f_\lambda \star \Phi_\lambda.$$

On a donc

$$K_{-\lambda}(x, y)\, T(\lambda) = \int_H (f_\lambda \star \Phi_\lambda)(xhy^{-1})\, \chi(h)\, dh,$$

d'où

$$W(-\lambda)\, T(\lambda)\, \varphi_\chi(x) = \int_V dy \int_H dh \int_V f_\lambda(xhy^{-1} v^{-1})\, \Phi_\lambda(v)\, \varphi(y)\, \chi(h)\, dv.$$

Prouvons que cette intégrale triple est absolument convergente. Comme H est un sous-groupe normal, on a

$$\int_{V\times H\times V} \| f_\lambda(xhy^{-1} v^{-1}) \| . \| \Phi_\lambda(v) \| . | \varphi(y) |\, dv\, dy\, dh$$
$$= \int_{V\times H\times V} \| f_\lambda(xy^{-1} hv^{-1}) \| . \| \Phi_\lambda(v) \| . | \varphi(y) |\, dv\, dy\, dh.$$

Comme le support de φ est compact, il existe une constante C telle que

$$\| f_\lambda(xy^{-1} hv^{-1}) \| \leq C \| f_\lambda(hv^{-1}) \| \qquad \text{pour} \quad y \in \operatorname{supp}(\varphi)$$

et il nous suffit d'étudier

$$\int_{H\times V} \| f_\lambda(hv^{-1}) \| . \| \Phi_\lambda(v) \|\, dv\, dh.$$

En remplaçant $\| f_\lambda \|$ et $\| \Phi_\lambda \|$ par leurs expressions explicites, on vérifie sans peine que cette dernière intégrale est finie.

En appliquant le théorème de Fubini, il vient alors

$$\begin{aligned}
W(-\lambda)\, T(\lambda)\, \varphi_\chi(x) &= \int_{V\times H\times V} f_\lambda(xhy^{-1} v^{-1})\, \Phi_\lambda(v)\, \varphi(y)\, \chi(h)\, dh\, dy\, dv \\
&= \int_{V\times H\times V} f_\lambda(xhv^{-1})\, \Phi_\lambda(vy^{-1})\, \varphi(y)\, \chi(h)\, dh\, dy\, dv \\
&= \int_{V/H\times V\times H\times H} f_\lambda(xhh'^{-1} v^{-1})\, \Phi_\lambda(vh' y^{-1})\, \varphi(y) \\
&\qquad \times \chi(h)\, dh\, dh'\, dy\, dv \\
&= \int_{V/H\times V\times H\times H} f_\lambda(xhv^{-1})\, \Phi_\lambda(vh' y^{-1})\, \varphi(y) \\
&\qquad \times \chi(h)\, \chi(h')\, dh\, dh'\, dy\, dv \\
&= \int_{V/H\times V} K_\lambda(x, v)\, B_\lambda(v, y)\, \varphi(y)\, dy\, dv \\
&= \int_{V/H\times V/H} K_\lambda(x, v)\, B_\lambda(v, y)\, \varphi_\chi(y)\, dv\, dy \\
&= \int_{V/H} K_\lambda(x, v)\, \pi(\Phi_\lambda)\, \varphi_\chi(v)\, dv \\
&= W(\lambda)\, \pi(\Phi_\lambda)\, \varphi_\chi(x)
\end{aligned}$$

et comme les φ_χ sont denses dans $F_{\mathfrak{b}} \otimes F_\pi$, ceci prouve le théorème.

Il nous reste à examiner le cas où la représentation π est de dimension 1. Supposons d'abord que 2β ne soit pas racine. Le groupe V est donc abélien. Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on l'identifie à son algèbre de Lie $\mathfrak{v}$. Soit ν un élément non nul du dual $\mathfrak{v}^*$ de $\mathfrak{v}$. Posons

$$\pi_\nu(\exp(Y)) = e^{i\nu(Y)} \qquad \text{pour} \quad Y \in \mathfrak{v}.$$

Les représentations non triviales de V sont exactement les caractères π_ν. On a

$$\| f_\lambda(Y) \| = (1 + \| Y \|^2)^{-(\mathrm{Re}(\lambda)+p)/2}.$$

Par conséquent f_λ est une fonction à croissance lente sur $\mathfrak{v}$, donc définit une distribution tempérée sur $\mathfrak{v}$; soit $\hat{f}_\lambda$ sa transformée de Fourier au sens distribution.

Lemme 3.8. — *Si* $\mathrm{Re}(\lambda) > -p/2$, *alors* $\hat{f}_\lambda = W(\lambda, \pi_\nu)\, d\nu$.

Pour $\mathrm{Re}(\lambda) > -p/2$, la fonction f_λ est de carré intégrable, et par suite $\hat{f}_\lambda$ est une fonction. Il suffit donc de prouver que la fonction $\nu \mapsto W(\lambda, \pi_\nu)$, $\nu \neq 0$ est la restriction à $\mathfrak{v}^* - \{0\}$ de $\hat{f}_\lambda$. Soit donc h une application, de classe C^∞, à support compact de $\mathfrak{v}^*$ dans $F_\mathfrak{b}$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathfrak{v})$, à valeurs dans $F_\mathfrak{b}$, telle que $\hat{\varphi} = h$. On doit vérifier que

$$\int_\mathfrak{v} f_\lambda(Y)\, \varphi(Y)\, dY = \int_\mathfrak{v} W(\lambda, \pi_\nu)\, h(\nu)\, d\nu.$$

Le second membre a un sens puisque (lemme 3.5) $W(\lambda, \pi_\nu)$ est une fonction continue de (λ, ν). Par définition même de $W(\lambda, \pi_\nu)$, cette égalité est exacte pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, mais les deux membres sont des fonctions analytiques de λ, donc l'égalité est valable quel que soit λ.

D'autre part, on a

$$\| \Phi_\lambda \| = \| Y \|^{\mathrm{Re}(\lambda) - \rho}.$$

Pour $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, cette fonction est localement intégrable et à croissance lente, donc définit une distribution tempérée.

Lemme 3.9. — *Pour* $< 0 < \mathrm{Re}(\lambda) < p/2$, *la transformée de Fourier de* Φ_λ *est la fonction*

$$\nu \mapsto \pi_\nu(\Phi_\lambda), \qquad \nu \neq 0.$$

Avec les notations du début du numéro, il suffit de prouver que, pour $0 < \mathrm{Re}(\lambda) < p/2$, la transformée de Fourier de

$$P_i(Y)\, \| Y \|^{\lambda - \rho - \mu_i}$$

est la fonction

$$\nu \mapsto \frac{8}{\Gamma((\rho + \mu_i - \lambda)/4)} \int_0^{+\infty} t^{2\lambda} \, d^*t \int_{\mathfrak{v}} e^{-\|Y\|^4} P_i(Y) \, e^{it^2\nu(Y)} \, dY.$$

Or, pour $0 < \mathrm{Re}(\lambda) < p/2$, la fonction $P_i(Y) \|Y\|^{\lambda-\rho-\mu_i}$ appartient à $\mathcal{O}'_{L^2}$, donc sa transformée de Fourier est une fonction. Posons

$$g(\nu) = \int_{\mathfrak{v}} e^{-\|Y\|^4} P_i(Y) \, e^{i\nu(Y)} \, dY.$$

Soit h et φ comme dans la démonstration précédente; on doit vérifier que

$$\int_{\mathfrak{v}} P_i(Y) \, \varphi(Y) \, \|Y\|^{\lambda-\rho-\mu_i} \, dY$$
$$= \frac{8}{\Gamma((\rho + \mu_i - \lambda)/4)} \int_{\mathfrak{v}^*} d\nu \int_0^{+\infty} t^{2\lambda} \, g(t^2\nu) \, h(\nu) \, d^*t.$$

Or le support de h est compact et contenu dans $\mathfrak{v}^* - \{0\}$, l'intégrale double au second membre est donc absolument convergente, ce qui permet de permuter les intégrations et la démonstration s'achève sans difficultés.

Pour $0 < \mathrm{Re}(\lambda) < p/2$, interprétons l'égalité

$$f_{-\lambda} \, T(\lambda) = f_\lambda \star \Phi_\lambda$$

comme une égalité entre distributions tempérées. On a

$$\hat{f}_{-\lambda} \, T(\lambda) = (f_\lambda \star \Phi_\lambda)\hat{}.$$

Mais pour les λ considérées, f_λ et Φ_λ appartiennent à $\mathcal{O}'_{L^2}$, et par suite :

$$(f_\lambda \star \Phi_\lambda)\hat{} = \hat{f}_\lambda \star \hat{\Phi}_\lambda,$$

d'où

$$W(-\lambda, \pi_\nu) \, T(\lambda) = W(\lambda, \pi_\nu) \, \pi_\nu(\Phi_\lambda)$$

a priori pour $0 < \mathrm{Re}(\lambda) < p/2$. Par unicité du prolongement analytique, cette égalité subsiste pour $-\lambda \notin \mathbf{N}$.

Enfin, supposons que 2β soit racine et que π soit de dimension 1. Il existe donc une forme linéaire ν sur $\mathfrak{v}_1$, non nulle, telle que

$$\pi(\exp(Y + Z) = e^{i\nu(Y)} \qquad \text{pour} \quad Y \in \mathfrak{v}_1 \quad \text{et} \quad Z \in \mathfrak{v}_2.$$

En rendant f_λ et Φ_λ invariantes à droite par V_2, on se retrouve essentiellement dans la situation où V est abélien. Nous omettrons les détails.

APPENDICE.

Soient G un groupe de Lie réel, connexe, semi-simple, à centre fini, et $G = KAU$ une décomposition d'Iwasawa de G. Soient V le sous-groupe unipotent opposé à U, et M le centralisateur de A dans K. Si $v \in V$, posons

$$(\text{A.1}) \qquad v = k_v a_v u_v \quad \text{avec} \quad k_v \in K, \quad a_v \in A \quad \text{et} \quad u_v \in U.$$

Soit w un élément du groupe de Weyl, $\bar{w}$ l'un de ses représentants dans K. Si $v \in V \cap \bar{w}^{-1} VMAU$, posons

$$(\text{A.2}) \qquad \bar{w}v = v' m_v h_v u'_v \quad \text{avec} \quad v' \in V, \quad m_v \in M, \quad h_v \in A \quad \text{et} \quad u'_v \in U.$$

Une fonction P, définie sur V est dite polynomiale si $P \circ \exp$ est une fonction polynomiale sur $\mathfrak{v}$.

PROPOSITION A.1. — *Supposons que G possède une représentation linéaire fidèle de dimension finie.*

(*a*) *Soient $\mathfrak{d}$ une représentation unitaire de K et ε et ε' deux éléments de l'espace de $\mathfrak{d}$. Il existe des fonctions polynomiales $P_1, \ldots, P_n$ sur V et des poids dominants réels $\mu_1, \ldots, \mu_n$ tels que, quel que soit $v \in V$, on ait*

$$(\text{A.3}) \qquad (\mathfrak{d}(k_v)\varepsilon \mid \varepsilon') = \sum_i P_i(v) \langle -\mu_i, a_v \rangle.$$

(*b*) *Soient τ une représentation unitaire de M et ε et ε' deux éléments de l'espace de τ. Il existe des fonctions polynomiales P'_i sur V et des poids dominants réels μ'_i tels que, quel que soit $v \in V \cap \bar{w}^{-1} VMAU$, on ait*

$$(\text{A.4}) \qquad (\tau(m_v)\varepsilon \mid \varepsilon') = \sum_i P'_i(v) \langle -\mu'_i, h_v \rangle.$$

Dans toute la démonstration, les représentations considérées de G sont des représentations linéaires de dimension finie. Si π est une telle représentation, on note E son espace; lorsque π est irréductible, on introduit son poids dominant réel μ et le sous-espace E_μ des vecteurs dominants. Rappelons que M stabilise E_μ.

LEMME A.1. — *Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *Le groupe G possède une représentation linéaire fidèle de dimension finie.*

(2) *Si $m \in M$ et si, quel que soit la représentation linéaire irréductible π de G, la restriction de $\pi(m)$ à E_μ est l'application identique, alors $m = e$.*

Soit $\tilde{G}_{\mathbf{C}}$ (resp. $\tilde{G}_{\mathbf{R}}$), un groupe de Lie complexe (resp. réel) connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}$ (resp. $\mathfrak{g}$). Soit

$$\sigma : \quad \tilde{G}_{\mathbf{R}} \to \tilde{G}_{\mathbf{C}}$$

l'homomorphisme de groupes de Lie réels déduit de l'injection de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ et soit N le noyau de σ. Soit

$$\rho : \quad \tilde{G}_{\mathbf{R}} \to G$$

l'unique homomorphisme dont la différentielle à l'origine est l'application identique de $\mathfrak{g}$. On sait (Hochschild, *The structure of Lie groups*, [9], chap. 17) que l'intersection des noyaux des représentations irréductibles de dimension finie de G est $\rho(N)$. De plus, il existe une représentation de dimension finie de G dont le noyau est exactement $\rho(N)$. Par suite, G vérifie la condition (1) du lemme, si et seulement si $\rho(N) = \{e\}$. D'autre part, il est clair que $\rho(N)$ est contenu dans le centre de G donc dans M.

Si G ne vérifie pas la condition (1), il existe $m \in \rho(N) \subset M$, différent de e et, pour toute représentation de dimension finie π de G, on a $\pi(m) = \mathrm{Id}$, ce qui montre que G ne vérifie pas la condition (2).

Inversement, supposons que G vérifie la condition (1). Il existe alors un groupe de Lie complexe, connexe $G_{\mathbf{C}}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ tel que G puisse s'identifier au sous-groupe analytique réel de $G_{\mathbf{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit M_0 la composante connexe de M, et $Z = \exp(i\mathfrak{a}) \cap K$; on sait que $M = M_0 Z$. Soit $m \in M - \{e\}$, et posons $m = m_0 z$. Il existe un sous-groupe de Cartan B de M_0 tel que $m_0 \in B$; soit $\mathfrak{b}$ son algèbre de Lie. Si $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{h}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbf{C}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ et $m \in H = \exp(\mathfrak{h})$.

Choisissons sur $\mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$ un ordre compatible avec celui choisi sur $\mathfrak{a}$. Il est facile de voir que, considérés comme caractères de H, les poids dominants des représentations holomorphes irréductibles de dimension finie de $G_{\mathbf{C}}$ séparent les points de H. Il existe donc une représentation holomorphe irréductible de dimension finie $\pi_{\mathbf{C}}$ de $G_{\mathbf{C}}$, de poids dominant complexe Λ et un vecteur dominant complexe e_Λ tels que $\pi_{\mathbf{C}}(m)\, e_\Lambda \neq e_\Lambda$. En considérant la restriction π de $\pi_{\mathbf{C}}$ à G, ceci montre que G vérifie la condition (2) du lemme.

Prouvons l'assertion (*a*) de la proposition. Le groupe G vérifie les deux conditions équivalentes du lemme. En particulier, le centre de G est fini et K est compact. Soit π une représentation irréductible de dimension de G, d'espace E, de poids dominant réel μ. Soient E' le dual de E, et π' la représentation contragrédiente de π.

Considérons les fonctions

$$\text{(A.5)} \qquad f(g) = \langle \pi(g)\, e, e' \rangle \qquad \text{pour} \quad e \in E_\mu \quad \text{et} \quad e' \in E'.$$

On a $f(gau) = \langle +\mu, a\rangle f(g)$ pour $a \in A$ et $u \in U$. Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies des fonctions f obtenues en faisant varier e, e' et π. C'est une algèbre de fonctions définies sur G; elle est stable par translations à gauche et par l'application $f \to \bar{f}$ (considérer la représentation conjuguée de π).

Soit $\mathcal{R}$ l'algèbre des coefficients des représentations unitaires de K. Par restriction, on obtient une application de $\mathfrak{A}$ dans $\mathcal{R}$ et l'image de $\mathfrak{A}$ est une sous-algèbre $\mathcal{R}'$ de $\mathcal{R}$. On va voir que $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$. Comme $\mathcal{R}'$ est invariante par translations à gauche, il suffit de prouver que $\mathcal{R}'$ est dense dans $\mathcal{R}$ ou encore qu'elle satisfait aux hypothèses du théorème de Stone-Weirstrass. Par construction, $\mathcal{R}'$ est autoadjointe et contient les constantes, il reste donc à vérifier qu'elle sépare les points de K. Par invariance à gauche, il suffit de montrer que si $k \in K$ et si, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{R}'$, on a $\varphi(k) = \varphi(e)$, alors $k = e$. D'après A.5, on aurait

$$\langle \pi(k)\, e, e'\rangle = \langle e, e'\rangle$$

et comme e' est quelconque, ceci implique $\pi(k)\, e = e$ pour $e \in E_\mu$. Utilisons la décomposition de Bruhat. Il existe un élément w du groupe de Weyl et un représentant $\bar{w}$ de w dans K tels que $k \in U\bar{w}MAU$. Posons $k = u\bar{w}mau'$. On a

$$\langle \pi(k)\, e\rangle = \langle \mu, a\rangle\, \pi(u\bar{w}m)\, e.$$

Supposons que $w \neq e$; on peut choisir π telle que $w(\mu) \neq \mu$. Or $\pi(\bar{w}m)\, e \in E_{w(\mu)}$ [sous-espace des vecteurs de poids $w(\mu)$], et la composante suivant $E_{w(\mu)}$ de $\pi(u\bar{w}m)\, e$ est $\pi(\bar{w}m)\, e \neq 0$, donc $\pi(k)\, e \neq e$, ce qui contredit notre hypothèse sur k. On a donc $w = 1$, et $k \in MAU \cap K = M$. Le lemme montre alors que $k = e$.

Cela étant si $\mathfrak{d}$ est une représentation unitaire de K et si ε et ε' sont deux éléments de l'espace de $\mathfrak{d}$, alors la fonction $(\mathfrak{d}(k)\varepsilon \mid \varepsilon')$ appartient à $\mathcal{R}$, et le résultat précédent montre qu'elle est de la forme

$$(\mathfrak{d}(k)\,\varepsilon \mid \varepsilon') = \sum_i \langle \pi_i(k)\, e_i, e_i'\rangle.$$

Mais alors, si $v \in V$, on a

$$(\mathfrak{d}(k_v)\,\varepsilon \mid \varepsilon') = \sum_i \langle -\mu_i, a_v\rangle \langle \pi_i(v)\, e_i, e_i'\rangle.$$

Pour terminer la démonstration, il nous suffit donc de noter que les fonctions $P_i(v) = \langle \pi_i(v)\, e_i, e_i'\rangle$ sont des fonctions polynomiales sur V.

On va établir (b) de façon analogue. Conservons les notations relatives aux représentations π, et rappelons que les poids de π' sont les opposés des poids de π. On considère cette fois les fonctions de la forme

(A.6) $\qquad f(g) = \langle \pi(g)\, e, e'\rangle \qquad$ pour $e \in E_\mu$ et $e' \in E'_{-\mu}$.

L'ensemble des combinaisons linéaires finies de ces fonctions est une algèbre $\mathfrak{A}$, autoadjointe. Elle est invariante par translations à gauche par M. En effet, si $m \in M$, on a

$$f(m^{-1}g) = \langle \pi(m^{-1}g)\, e,\, e' \rangle = \langle \pi(g)\, e,\, \pi'(m)\, e' \rangle$$

et $\pi'(m)\, E'_{-\mu} = E'_{-\mu}$. Soit alors $\mathfrak{R}$ l'algèbre des coefficients des représentations unitaires de dimension finie de M et $\mathfrak{R}'$ la sous-algèbre formée des restrictions à M des éléments de $\mathfrak{A}$. Pour prouver que $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$, il suffit à nouveau de vérifier que $\mathfrak{R}'$ sépare e de tout élément m de M, $m \neq e$. Or, si, pour toute fonction f de la forme A.6, on a $f(m) = f(e)$, alors $\langle \pi(m)\, e - e,\, e' \rangle = 0$. Or e' est quelconque dans $E'_{-\mu}$, donc $\pi(m)\, e - e$ est orthogonal à $E'_{-\mu}$. Mais $\pi(m)\, e - e$ est orthogonal aux vecteurs de poids autre que $-\mu$ puisqu'il appartient à E_{μ}, de sorte que finalement $\pi(m)\, e = e$. Le lemme montre alors que $m = e$. Soit τ une représentation unitaire de M et soient ε et ε' deux éléments de l'espace de τ. La fonction $(\tau(m)\varepsilon \mid \varepsilon')$ appartient à $\mathfrak{R}$, donc est de la forme

$$(\tau(m)\,\varepsilon \mid \varepsilon') = \sum_i \langle \pi_i(m)\, e_i,\, e'_i \rangle.$$

Si m_ν est défini par $\bar{w}v = v' m_\nu h_\nu u_\nu$, alors

$$(\tau(m_\nu)\,\varepsilon \mid \varepsilon') = \sum_i \langle -\mu_i,\, h_\nu \rangle \langle \pi_i(v)\, e_i,\, \pi'_i(\bar{w}^{-1})\, e'_i \rangle.$$

Remarque. — Supposons G de rang réel 1. Soit β l'unique racine positive indivisible. Soient p la multiplicité de β et q celle de 2β. Identifions $\mathfrak{a}^*_{\mathbf{C}}$ à $\mathbf{C}$ de telle sorte que $\beta = 2$; la demi-somme des racines positives vaut $\rho = p + 2q$. Un poids dominant réel est un entier positif ou nul. Si $\mathfrak{d}$ est une représentation unitaire irréductible de K, on a introduit, au paragraphe 1, l'opérateur

$$T(\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w}) = \mathfrak{d}(\bar{w}) \int_V \mathfrak{d}(k_\nu) \langle -\lambda - \rho,\, a_\nu \rangle\, dv.$$

La proposition précédente, jointe à la formule qui donne a_ν, permet d'évaluer les coefficients de cet opérateur. Par un calcul simple, on montre que, si 2β est racine, alors ces coefficients sont des combinaisons linéaires finies, de termes de la forme

$$\frac{\Gamma((\lambda + \mu + \rho - 2s)/4)}{\Gamma((\lambda + \mu + \rho)/4)}\, \frac{\Gamma((\lambda + \mu - 2s - 2r)/2)}{\Gamma((\lambda + \mu - 2s + p)/2)}.$$

où μ, s et r sont des entiers positifs ou nuls tels que $r + s \leq \mu/2$. Si 2β n'est pas racine, alors les coefficients sont combinaisons linéaires finies de termes de la forme

$$\frac{\Gamma((\lambda+\mu-2r)/2)}{\Gamma((\lambda+\mu+p)/2)}.$$

En particulier, on constate que $T(\lambda, \mathfrak{d}, \bar{w})$ est une fonction rationnelle de λ si, et seulement, si $q = 0$ et p est pair. Les groupes correspondants sont des groupes de Lorentz généralisés (un sur deux). Parmi les groupes de rang 1, ils sont caractérisés par le fait que tous leurs sous-groupes de Cartan sont conjugués.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Borel (A.). — *Linear algebraic groups.* — New York, W. A. Benjamin, 1969.

[2] Bourbaki (N.). — *Intégration.* Chap. 7-8. — Paris, Hermann, 1963 (*Act. scient. et ind.*, 1306; *Bourbaki*, 29).

[3] Bourbaki (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 4-6. — Paris, Hermann, 1968 (*Act. scient. et ind.*, 1337; *Bourbaki*, 34).

[4] Bruhat (F.). — Sur les représentations induites des groupes de Lie, *Bull. Soc. math. France*, t. 84, 1958, p. 241-310.

[5] Gel'fand (I. M.), Graev (M. I.) and Pjateckij-Šapiro (I. I.). — *Representation theory and automorphic functions.* — Philadelphia, London, W. B. Saunders Company, 1969 (*Saunders Mathematics Books*).

[6] Gindikin (S. G.) and Karpelevič (F. I.). — Plancherel measure for Riemann symetric spaces of nonpositive curvature, *Soviet Mathematics*, t. 3, 1962, p. 962-965.

[7] Harish-Chandra. — Spherical functions on a semi-simple Lie group, I., *Amer. J. of Math.*, t. 80, 1958, p. 241-310.

[8] Helgason (S.). — Applications of the Radon transform to representations of semi-simple Lie groups, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 63, 1969, p. 643-647.

[9] Hochschild (G.). — *The structure of Lie groups.* — San Francisco, London, Holden-Day, 1965 (*Holden-Day Series Mathematics*).

[10] Jacquet (H.). — Fonctions de Whittaker associées aux groupes de Chevalley, *Bull. Soc. math. France*, t. 95, 1967, p. 243-309 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1967),

[11] Knapp (W.) and Stein (E. M.). — Singular integrals and the principle series. *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 63, 1969, p. 282-284.

[12] Kunze (R. A.) and Stein (E. M.). — Uniformly bounded representations, III, *Amer. J. of Math.*, t. 89, 1967, p. 385-442.

(Texte reçu le 7 janvier 1970.)

Gérard Schiffmann,
8, boulevard de Belgique,
78-Le Vésinet.