BULLETIN DE LA S. M. F.

K. KRICKEBERG
C. PAUC

Martingales et dérivation

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 455-543
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__455_0>

Bull. Soc. math. France,
91, 1963, p. 455 à 543.

MARTINGALES ET DÉRIVATION ;

PAR

KLAUS KRICKEBERG
(Heidelberg)

et CHRISTIAN PAUC
(Nantes).

Introduction. — Il est connu depuis longtemps qu'entre la théorie des martingales et la théorie de la dérivation de fonctions d'ensemble, d'étroites relations subsistent. C'est ainsi que les théorèmes de dérivation par réseaux de de La Vallée Poussin ([41], chap. IV et V) [1] se laissent interpréter comme des théorèmes de convergence presque partout de certaines suites de fonctions (suites de variables aléatoires) représentant des martingales particulières, à savoir telles que l'ensemble des valeurs prises par chaque fonction soit dénombrable. Les sigma-algèbres booléennes des « bases de martingales » en cause sont atomiques, c'est-à-dire que chacune est engendrée à partir d'une partition dénombrable de l'espace mesuré ([11], p. 343 et suivantes; [52]). Il fut reconnu plus tard que les théorèmes classiques de dérivation de fonctions d'intervalle additives, par exemple ceux de Lebesgue ([50], p. 115) et leurs généralisations dans les espaces mesurés abstraits ([20], chap. 10), peuvent être formulés et démontrés comme théorèmes de convergence presque partout de suites de fonctions si l'on fait appel à la notion de suite généralisée au sens de MOORE-SMITH appelée dans la nouvelle terminologie *famille filtrante* par BOURBAKI et *net* en anglais [33]. Des propriétés de la fonction d'intervalle, comme d'être de variation bornée ou absolument continue, se traduisent par des propriétés de la famille de fonctions associée, à savoir

---

[1] Les indications entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de article.

la limitation des intégrales des valeurs absolues ou l'intégrabilité uniforme respectivement. Finalement les conditions de Vitali sur les bases de dérivation qui procèdent de familles de partitions de l'espace mesuré intervenant furent transférées à une base de martingales quelconque, entendant une famille de sigma-algèbres booléennes qui ne sont plus nécessairement atomiques et engendrées par des partitions [34]. Et ainsi, des théorèmes sur la convergence presque partout de martingales à ensemble filtrant de paramètres ont été établis, comprenant comme cas particuliers les théorèmes de dérivation mentionnés plus haut, au même titre que les théorèmes classiques sur les martingales à paramètres entiers comprennent les théorèmes de dérivation sur réseaux de de La Vallée Poussin. Pour ces dernières martingales, ces conditions de Vitali sont satisfaites d'elles-mêmes.

Dès qu'on quitte le domaine des fonctions additives d'intervalle généralisé (fonctions de cellule), la situation présente un aspect plus compliqué. Les théorèmes de dérivation de fonctions de cellule non additives ne se laissent pas envisager simplement comme cas particuliers de théorèmes sur des familles filtrantes de fonctions à ensemble dénombrable de valeurs, en d'autres termes, sur des bases à sigma-algèbres atomiques, toutefois un étroit parallélisme subsiste. Par exemple, les théorèmes sur la dérivation de fonctions de cellule semi-additives sont étroitement apparentés aux théorèmes sur la convergence presque partout de semimartingales. D'une manière générale les fonctions de cellule peuvent être assimilées à des familles de fonctions qui possèdent la propriété caractéristique des martingales « sur les atomes » (*cf.* 1.9). Le présent travail vise à décrire ces relations en une vue d'ensemble complétée par de nombreux résultats nouveaux.

La théorie de la dérivation dans les espaces mesurés abstraits ([20], chap. 9 et 10) est alourdie par de nombreuses conditions et hypothèses, parfois fort compliquées, qui ne sont autres que des propriétés bien connues des bases classiques de dérivation dans les espaces euclidiens transplantées au cadre abstrait; parmi celles-ci figurent les propriétés de Vitali déjà mentionnées. Il est apparu que le rôle de ces conditions se laissait analyser avec précision et qu'en outre une théorie de la dérivation des fonctions de cellules additives, très générale et plus simple, se laissait édifier si l'on s'intéressait d'abord non à la convergence presque partout et à la convergence essentielle qui lui est étroitement liée, mais à la convergence stochastique (convergence en mesure) ([35], [36], [37]), équivalente à la convergence en moyenne pour les familles de fonctions uniformément intégrables ([47], [35]). Il en est de même pour les fonctions de cellule non additives si l'on définit les dérivées supérieure et inférieure comme limites stochastiques supérieure et inférieure. Le théorème de « dérivation stochastique » pour fonctions de cellule additives de variation bornée découle alors d'un théorème de convergence stochastique pour martingales, et le théorème de décomposition de Lebesgue pour de telles fonctions se présente comme cas particulier d'un théorème de décomposition de martingales. Cette théorie est exposée dans le chapitre 2 du présent article.

Dans le chapitre 3 sont considérées les limites essentielles (*cf.* 4.1) de familles de fonctions, définies comme limites suivant l'ordre, supérieure et inférieure, grâce à la réticulation complète du treillis des classes de fonctions égales presque partout ([32], [33], [34]). Ces limites essentielles sont, par définition, déterminées à un ensemble de mesure nulle près et, dans le cas d'une famille dénombrable de fonctions, égales aux limites usuelles, c'est-à-dire aux limites définies ponctuellement. Elles sont mesurables *a priori* alors que la mesurabilité des limites ponctuelles n'est établie, en général, qu'au prix d'hypothèses pénibles (*cf.* [21]); elles évitent, dans le cas non dénombrable, les difficultés dues à la présence d'ensembles de mesure nulle dépendant du paramètre. L'idée qui est à la base du chapitre 3 consiste à envisager les diverses conditions de recouvrement de Vitali comme des conditions suffisantes et souvent aussi nécessaires pour la coïncidence des limites essentielles et des limites stochastiques pour certaines classes de familles filtrantes de fonctions de sorte que, sous ces conditions, la théorie des limites essentielles s'obtient comme cas particulier de la théorie des limites stochastiques. Il est toutefois, dans certains cas, plus commode de déduire des théorèmes de convergence essentielle directement à partir des conditions de Vitali.

Le chapitre 4 présente des applications variées, parmi elles, la théorie de la convergence et de la dérivation p. p. (abréviation pour *presque partout*). De nouveau, il apparaît que certaines conditions *ad hoc* exigées dans la théorie abstraite antérieure de la dérivation, analogues à la séparabilité en topologie, ne sont rien d'autre que des conditions assurant l'équivalence des limites ou dérivées essentielles et ponctuelles et, qu'ainsi, sous ces conditions et des conditions de Vitali, la théorie des limites ponctuelles se présente comme un cas particulier de la théorie des limites stochastiques. A côté de ces dernières conditions existent des conditions de Vitali propres à la théorie « ponctuelle » qui reviennent pratiquement à une combinaison des conditions de séparabilité et des conditions de Vitali correspondantes provenant de la théorie « essentielle ». Cependant, beaucoup de bases de dérivation, plus généralement de bases de martingales, se présentant naturellement, vérifient des conditions de Vitali essentielles mais non leurs versions ponctuelles (*cf.* 4.5), de sorte que les théorèmes obtenus valent pour les limites essentielles mais non pour les limites définies ponctuellement, un avantage de plus des limites essentielles.

Les suites de fonctions au sens ordinaire vérifiant aussi bien les conditions de séparabilité que la plupart des conditions de Vitali, la théorie

« classique » de Doob relative à la convergence de martingales est incluse dans les applications du chapitre 4. D'autres applications concernent la théorie classique de la dérivation, le théorème de Radon-Nikodym, les mesures dans des espaces produits, la théorie des espaces $\mathcal{L}_p$ conçus comme espaces de fonctions d'ensemble suivant BOCHNER et LEADER.

Afin de ne pas voiler les idées fondamentales, en général, seules les bases de martingales monotones croissantes ont été considérées. Néanmoins, dans la théorie de la dérivation exposée au chapitre 4, est introduite, en vue de retrouver les formulations classiques, à côté de la relation $\sqsubset$ entre partitions (finesse en partition) qui conduit à une base de martingale monotone croissante, une autre relation $\leqslant$ qui, dans le cas classique de partitions en intervalles, est définie à l'aide du maximum des diamètres des intervalles de la partition (finesse en norme). Il s'avère, comme déjà constaté dans [33], que certaines conditions **R** et **U**, entre autres, nécessitées dans la théorie de la dérivation selon $\leqslant$, sont précisément nécessaires et suffisantes pour que les versions $\sqsubset$ et selon $\leqslant$ de notions comme celles de dérivées stochastique, essentielle ou ponctuelle, ou de conditions de Vitali soient équivalentes et qu'ainsi, en fin de compte, la théorie selon $\leqslant$ se laisse déduire de la théorie selon $\sqsubset$. On a donc, précisément dans certains cas classiques, à utiliser l'un ou l'autre des schémas déductifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
& \sqsubset\text{-dérivée stochastique} \arrow[dl, "\mathbf{R}"'] \arrow[dr, "\sqsubset\text{-Vitali}"] & \\
\leqslant\text{-dérivée stochastique} \arrow[dr, "\leqslant\text{-Vitali}"'] & & \sqsubset\text{-dérivée essentielle} \arrow[dl, "\mathbf{U}"] \\
& \leqslant\text{-dérivée essentielle} \arrow[d, "\leqslant\text{-séparabilité}"] & \\
& \leqslant\text{-dérivée ponctuelle} &
\end{tikzcd}$$

Dans le présent article, la théorie de la convergence de martingales et la théorie de la dérivation de fonctions de cellule sont développées seulement dans le cas où la variation totale est bornée. Il existe certes une version, dans des espaces mesurés quelconques, de la théorie de la dérivation de Ward pour des fonctions de cellule de variation non bornée [49] et quelques théorèmes de convergence de martingales de variation non bornée ([8], [13]), toutefois une théorie embrassant et unifiant ces résultats est encore dans l'enfance (résultats non publiés de Y. S. Chow).

Les notions de limites stochastiques et essentielles étant invariantes vis-à-vis de modifications des fonctions participantes sur des ensembles de mesure nulle dépendant de la fonction considérée peuvent être définies pour des classes de fonctions égales p. p. Ceci revient à considérer l'espace mesuré quotient de l'espace mesuré initial relativement aux ensembles de mesure nulle. Pour cette raison, le cadre choisi pour ce travail, sauf évidemment dans la théorie ponctuelle du chapitre 4, est une sigma-algèbre booléenne portant une mesure strictement positive. Formulations et démonstrations s'en trouvent ainsi simplifiées.

Les relations entre les fonctions de cellule qui sont des fonctions d'ensembles particuliers, et certaines martingales, ont très tôt suggéré d'envisager aussi des martingales quelconques comme des fonctions d'ensembles particuliers ([3], [34], [43], p. 401 et suivantes). Cette attitude présente plusieurs avantages concernant les notions et la technique des démonstrations, par exemple, lors de la considération d'ensembles de martingales et de relations d'ordre entre elles (*cf.* [51]). Dans certains théorèmes relatifs aux martingales ainsi représentées, la mesure sous-jacente n'intervient plus. Dans le premier chapitre la théorie est développée aussi loin que possible sans faire appel à une mesure. Cette théorie n'atteint pas toutefois le degré d'élaboration des chapitres suivants, de nombreux problèmes restent ouverts.

Toutes les affirmations de cet article pour lesquelles il n'est pas renvoyé à la bibliographie sont démontrées complètement. On peut considérer comme entièrement nouveaux (notions et propositions) : § 1.5, proposition 1.7.1, proposition 1.8.2, proposition 1.11.1, théorème 1, proposition 2.2.6, théorème 3, théorème 4, théorème 13, proposition 4.6.1, théorème 13 $a_{\leqq}$, comme partiellement nouveaux : théorème 2, proposition 2.6.1, proposition 2.6.2, proposition 2.6.3, théorème 5, théorème 6, proposition 3.2.1 et ses préliminaires, théorème 9, § 4.6, théorème 2-3 $a_{\leqq}$, théorème 9 $a_{\leqq}$.

1. Théorie ne faisant pas intervenir une mesure.

1.1. **Fonctions additives.** — Soit $\mathcal{B}$ une sigma-algèbre booléenne d'élément nul O et d'unité E, à regarder comme fixée. Suivant Carathéodory, les éléments de $\mathcal{B}$ seront parfois appelés *somas*. Désignons la relation d'ordre [2] dans $\mathcal{B}$ par $\leqq$, l'infimum (« intersection ») de A et B dans $\mathcal{B}$ par $A \wedge B$ ou AB, le supremum (« union ») de A et B dans $\mathcal{B}$ par $A \vee B$, la différence entre A et B par $A - B$ quand A, $B \in \mathcal{B}$ et $B \leqq A$ et la différence symétrique $(A \wedge B) - AB$ par $A + B$. Par contre, quand il s'agira d'ensembles, l'inclusion, l'intersection et l'union de deux éléments sont notées $\subseteq$, $\cap$ et $\cup$ respectivement. Si $A \in \mathcal{B}$ et $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$, $A \wedge \mathcal{H}$ désigne la *trace de* $\mathcal{H}$ *sur* A, entendant l'ensemble des éléments $A \wedge H$, où $H \in \mathcal{H}$. L'infimum et le supremum d'un sous-ensemble arbitraire $\mathcal{K}$ de $\mathcal{B}$, s'ils existent, sont désignés par $\bigwedge \{K; K \in \mathcal{H}\}$ et $\bigvee \{K; K \in \mathcal{K}\}$ et aussi plus brièvement par $\bigwedge \mathcal{K}$ et $\bigvee \mathcal{K}$. L'intersection et l'union ensemblistes sont désignées par $\bigcap$ et $\bigcup$. Pour les opérations *borne inférieure, borne supérieure, minimum* et *maximum* sur la droite numérique achevée (c'est-à-dire complétée par $-\infty$ et $+\infty$), nous utiliserons les notations b inf, b sup, min et max.

Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$ d'unité E. Désignons par $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ l'ensemble des fonctions φ définies sur $\mathcal{A}$, à valeurs réelles ($-\infty$ et $+\infty$ toujours comprises) et simplement additives [ce qui implique par définition que $\varphi(O) = 0$]. Si φ, $\psi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, la fonction $\varphi + \psi$, définie comme d'habitude par

$$(\varphi + \psi)(A) = \varphi(A) + \psi(A),$$

appartient à $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ pourvu qu'elle ait un sens, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun A dans $\mathcal{A}$ tel que $\varphi(A)$ et $\psi(A)$ soient infinis et de sens opposés. De même, $\lambda\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ si $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ et λ est un nombre réel fini. La fonction φ de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ est dite *de variation bornée* (de variation bornée *vers le haut*, de variation bornée *vers le bas*) si l'ensemble des nombres $\varphi(A)$, où $A \in \mathcal{A}$, est borné (borné supérieurement, borné inférieurement). φ est dite de variation *semi-bornée* si elle est de variation bornée, soit vers le haut, soit vers le bas.

Définissons $\varphi \leqq \psi$ par $\varphi(A) \leqq \psi(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, et désignons l'infimum et le supremum dans $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ d'un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ par inf $\mathcal{R}$ et sup $\mathcal{R}$ quand ces fonctions existent.

PROPOSITION 1.1.1 [2]. — *L'existence de* sup $\mathcal{R}$ (inf $\mathcal{R}$) *dans* $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ *est assurée par la condition suivante :*

$\mathbf{S}^s$ ($\mathbf{S}^i$) $\mathcal{R}$ *contient une fonction de variation bornée vers le bas* (*vers le haut*).

PROPOSITION 1.1.2 [2]. — *Si* $\mathcal{R}$ *satisfait* $\mathbf{S}^s$, *en tout* $A \in \mathcal{A}$

$$(\sup \mathcal{R})(A) = b \sup (\varphi_1(A_1) + \ldots + \varphi_k(A_k))$$

[2] Ordre partiel dans l'ancienne terminologie.

pour toutes les décompositions finies de A en éléments A_i, $i = 1, \ldots, k$, de $\mathcal{A}$, disjoints, et les fonctions φ_i de $\mathcal{R}$ telles que $\varphi_1(A_1) + \ldots + \varphi_k(A_k)$ ait un sens. Il s'agit de la définition « individuelle » de sup $\mathcal{R}$.

La proposition correspondante vaut pour $(\inf \mathcal{R})(A)$.

Ainsi, pour tout $\varphi \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, les fonctions $\varphi^+ = \sup(\varphi, 0)$, $\varphi^- = \sup(-\varphi, 0)$ et $\varphi^T = \sup(-\varphi, \varphi) = \varphi^+ + \varphi^-$ existent et l'on a

$$\varphi^+(A) = b \sup \{ \varphi(B);\ B \leqq A,\ B \in \mathcal{A} \}.$$

De même, pour φ^- et φ^T, φ^+, φ^- et φ^T sont appelées variation positive, négative et totale de φ. On voit que φ est de variation bornée si et seulement si $\varphi^T(E)$ est fini. De même pour φ^+ et φ^-. Nous appellerons aussi $\varphi^T(E)$ la *norme* de φ et nous la désignerons par $\|\varphi\|$. Observons que $\varphi^T(E)$ est nul si et seulement si φ est identiquement nul.

On déduit immédiatement des propositions 1.1.1 et 1.1.2 la

PROPOSITION 1.1.3. — *L'espace $\mathcal{M}^T_{\mathcal{A}}$ des fonctions de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ de variation bornée est un espace de Riesz complètement réticulé (conditionnellement complet). Si φ est de variation semi-bornée, $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$.*

Observons qu'en général $\varphi^+(A)$ est $\neq (\varphi(A))^+$ qui est $\max(\varphi(A), 0)$, et plus généralement que $(\sup \mathcal{R})(A) \neq b \sup \{ \varphi(A);\ \varphi \in \mathcal{R} \}$. Toutefois, nous avons comme conséquence de la proposition 1.1.2 :

PROPOSITION 1.1.4. — *Si $\mathcal{R}$ est filtrant (à droite) pour l'ordre naturel $\leqq$, et satisfait $\mathbf{S}^s$, pour tout $A \in \mathcal{A}$,*

$$(\sup \mathcal{R})(A) = b \sup \{ \varphi(A);\ \varphi \in \mathcal{R} \},$$

ou encore, dans la notation Bourbaki,

$$\sup \mathcal{R} = \operatorname{env} \sup \{ \varphi;\ \varphi \in \mathcal{R} \}.$$

COROLLAIRES.

1. *On a toujours* env sup $\mathcal{R} \leqq$ sup $\mathcal{R}$. *L'égalité*

$$b \sup \{ \varphi(A);\ \varphi \in \mathcal{R} \} = (\sup \mathcal{R})(A)$$

est vraie si A est un atome de $\mathcal{A}$.

2. *Soit $\mathcal{C}$ une sous-algèbre booléenne de $\mathcal{A}$, d'unité E. Désignons la restriction à $\mathcal{C}$ d'une fonction φ de $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ par $\varphi \mid \mathcal{C}$, donc $\varphi \mid C \in \mathcal{M}_{\mathcal{C}}$. Alors, si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$, on a $\sup \{ (\varphi \mid \mathcal{C});\ \varphi \in \mathcal{R} \} \leqq (\sup \mathcal{R}) \mid \mathcal{C}$, le symbole* sup *désignant à gauche le supremum dans $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ et à droite le supremum dans $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$; l'égalité est vraie si $\mathcal{R}$ est filtrant.*

1.2. **Fonctions sigma-additives.** — Par *$\mathcal{K}$-partition* d'un élément $B \in \mathcal{B}$, où $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{B}$, nous entendons un sous-ensemble $\mathcal{L}$ de $\mathcal{K}$ dénombrable (éventuellement fini) d'éléments deux à deux disjoints et différents de O tel que $\bigvee \mathfrak{T} = \mathcal{B}$. Si φ est une fonction réelle définie sur un sous-ensemble de $\mathfrak{T}$, nous posons $\varphi(\mathfrak{T}) = \sum_{K \in \mathfrak{T}} \varphi(K)$ pourvu qu'au moins une des sommes $\sum_{K \in \mathfrak{T}} \varphi(K)^+$ ou $\sum_{K \in \mathfrak{T}} \varphi(K)^-$ soit finie. Nous rappelons qu'une fonction $\varphi \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ est dite *sigma-additive* si, pour tout $A \in \mathcal{A}$ et toute $\mathcal{A}$-partition $\mathfrak{T}$ de A, la somme $\varphi(\mathfrak{T})$ existe et est égale à $\varphi(A)$. Nous désignons par $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}^{\sigma}$ l'ensemble des fonctions de $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ qui sont sigma-additives.

PROPOSITION 1.2.1 (*Critère d'évanescence*). — *Une fonction $\varphi \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ de variation bornée est sigma-additive si et seulement si elle jouit de la propriété suivante :*

Quelle que soit la suite décroissante $S_1, S_2, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\bigwedge_n S_n = O$, nous avons $\lim_{n \to \infty} \varphi(S_n) = 0$.

COROLLAIRE. — *Toute fonction $\varphi \in \mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ majorée en valeur absolue par une fonction de variation bornée et sigma-additive est aussi de variation bornée et sigma-additive.*

PROPOSITION 1.2.2 ([34], p. 320 et [4], p. 158). — *$\mathcal{R}$ désigne un sous-ensemble de $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}^{\sigma}$. Alors la condition* $\mathbf{S}^s$ (cf. *proposition* 1.1.1) *implique l'existence de* $\sup \mathcal{R}$ *dans $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}^{\sigma}$ et sa coïncidence avec* $\sup \mathcal{R}$ *dans $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$.*

COROLLAIRE. — *L'espace $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}^{T,\sigma}$ des fonctions de $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ de variation bornée et sigma-additives est un espace de Riesz complètement réticulé, sous-espace de l'espace $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}^{T}$* (cf. *proposition* 1.1.3).

D'après un théorème de Hahn ([18], p. 17), toute fonction φ sigma-additive définie sur une sigma-algèbre booléenne est de variation semi-bornée, donc admet la décomposition de Jordan (*cf.* proposition 1.1.3). Plus précisément, φ est de variation bornée vers le haut ou vers le bas suivant que $\varphi(E) < \infty$ ou $\varphi(E) > -\infty$.

Soit maintenant $\mathcal{C}$ l'extension sigma-booléenne de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire la plus petite sigma-sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$ incluant l'algèbre $\mathcal{A}$. $\mathcal{C}$ est aussi l'extension borélienne (c'est-à-dire la $\delta\sigma$-extension) de $\mathcal{A}$. D'après un théorème classique ([18], p. 80), toute fonction sigma-additive et positive définie sur $\mathcal{A}$ peut être prolongée en une fonction sigma-additive et positive définie sur $\mathcal{C}$, ce prolongement étant unique si la fonction de départ est sigma-finie. En combinant ces informations nous déduisons la

PROPOSITION 1.2.3. — *Pour qu'une fonction additive φ définie sur $\mathfrak{A}$ puisse être prolongée en une fonction sigma-additive définie sur l'extension borélienne de $\mathfrak{A}$, il faut et il suffit que φ soit sigma-additive et de variation semi-bornée. Le prolongement est unique si φ^T est sigma-finie.*

Une fonction $\varphi \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ est dite *sigma-additive vers le haut* si φ^+ est sigma-additive. On définit la sigma-additivité vers le bas en remplaçant φ^+ par φ^- et la semi-sigma-additivité comme sigma-additivité vers le haut ou vers le bas. D'après la proposition 1.2.2, une fonction sigma-additive est sigma-additive vers le haut et vers le bas. L'implication inverse est vraie, grâce à la décomposition de Jordan, pour les fonctions de variation semi-bornée.

Une fonction $\varphi \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ positive (c'est-à-dire non négative) est dite *purement simplement additive* si toute fonction $\psi \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ sigma-additive et vérifiant $0 \leqq \psi \leqq \varphi$ s'annule identiquement. Une fonction $\varphi \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ de signe quelconque est dite purement simplement additive (vers le haut, vers le bas) si φ^T (φ^+, φ^-) est purement simplement additive.

PROPOSITION 1.2.4 [54]. — *Toute fonction $\varphi \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ de variation bornée est représentable d'une manière et d'une seule comme somme d'une fonction φ_c sigma-additive et d'une fonction φ_p purement simplement additive. Si $0 \leqq \varphi$, φ_c est la plus grande de toutes les fonctions ψ sigma-additives satisfaisant $0 \leqq \psi \leqq \varphi$. Nous avons $(\varphi^+)_c = (\varphi_c)^+$, $(\varphi^+)_p = (\varphi_p)^+$ et de même en changeant $^+$ en $^-$ et en ^{T}, ce qui légitime les notations φ_c^+, φ_p^+, ...*

La proposition 1.2.4 découle immédiatement de la proposition 1.2.3. Il nous suffit, dans le cas où φ est positif, de définir φ_c comme supremum dans $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ des fonctions ψ sigma-additives, positives et majorées par φ. Le cas où φ est de signe quelconque, mais de variation bornée, est ramené au cas positif grâce à la décomposition de Jordan (prop. 1.1.3).

Pour toute fonction φ de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ de variation bornée, nous définissons le *défaut de sigma-additivité* comme $\|\varphi_p\|$. Ainsi la sigma-additivité de φ est équivalente à l'annulation du défaut de sigma-additivité.

1.3. **Prémartingales, semi-martingales et martingales.** — Soit Θ un ensemble non vide de « paramètres » dirigé par une relation transitive $\leqslant$, à regarder comme fixé. En d'autres termes, Θ est un *ensemble filtrant à droite* ou *ensemble filtrant croissant.* Si $\rho, \tau \in \Theta$, $\rho \leqslant \tau$ est lu : « ρ précède τ » ou « τ suit ρ ». Un sous-ensemble Δ de Θ est dit *termina* s'il existe dans Θ un ρ tel que $\rho \leqslant \tau$ implique $\tau \in \Delta$, *cofinal* si $\Theta - \Delta$ n'est pas terminal.

Les familles filtrantes (suites de Moore-Smith) intervenant par la suite auront comme ensemble de paramètres, soit Θ, soit un sous-ensemble terminal de Θ. Dans le premier cas, au lieu de $(a_\tau)_{\tau \in \Theta}$, nous écrirons plus simplement (a_τ), de même $\lim a_\tau$ au lieu de $\lim\limits_{\tau \in \Theta; \leqslant} a_\tau$. Si Θ est l'ensemble des entiers naturels et $\leqslant$ l'ordre naturel, nous avons des suites au sens habituel.

Par *base stochastique* nous entendons une famille filtrante de sigma-sous-algèbres booléennes $\mathcal{B}_\tau$ de $\mathcal{B}$ d'unités E.

Par *prémartingale* de base $(\mathcal{B}_\tau)$ nous entendons une famille filtrante $\Phi = (\varphi_\tau)$, φ_τ désignant pour tout $\tau \in \Theta$ une fonction sigma-additive définie sur $\mathcal{B}_\tau$. Dans la suite $(\mathcal{B}_\tau)$ est à regarder comme fixé, nous renoncerons donc à la mention « de base $(\mathcal{B}_\tau)$ ».

Désormais dans les paragraphes 1, 2 et 3 nous ne considérerons que des *bases croissantes*, c'est-à-dire telles que $\rho \leqslant \tau$ entraîne $\mathcal{B}_\tau \subseteq \mathcal{B}_\tau$. $\mathcal{A}$ désignera l'union des $\mathcal{B}_\tau$ qui est une sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$. Un élément quelconque A de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{B}_\tau$ pour un ensemble terminal de paramètres que nous noterons Δ_A. Nous définissons la *trace d'une prémartingale* $\Phi = (\varphi_\tau)$ sur $A \in \mathcal{A}$ comme la suite des restrictions de φ_τ à $A \wedge \mathcal{B}_\tau$ pour $\tau \in \Delta_A$.

Une prémartingale est appelée *sous-martingale* (submartingale dans [13], (upper) semimartingale dans [11]) si $A \in \mathcal{B}_\rho$ et $\rho \leqslant \tau$ entraînent $\varphi_\rho(A) \leqq \varphi_\tau(A)$, autrement dit si $\rho \leqslant \tau$ entraîne $\varphi_\rho \leqq \varphi_\tau \mid \mathcal{B}_\rho$ où $\varphi_\tau \mid \mathcal{B}_\rho$ désigne la restriction de φ_τ à $\mathcal{B}_\rho$. Cette inégalité est à renverser pour une *sur-martingale* (supermartingale dans [13], lower semimartingale dans [11]) La conjonction de ces inégalités, c'est-à-dire l'égalité $\varphi_\rho = \varphi_\tau \mid \mathcal{B}_\rho$ fournit. la définition d'une martingale. Pour une martingale, $\varphi_\tau(E)$ est indépendant de τ. La trace d'une sous-martingale sur un élément A de $\mathcal{A}$ est une sous-martingale.

La somme de deux prémartingales (φ_τ) et (ψ_τ) est définie comme $(\varphi_\tau + \psi_\tau)$ pourvu que $\varphi_\tau + \psi_\tau$ ait un sens quel que soit τ. De même, λ étant un nombre réel fini, $\lambda(\varphi_\tau) = (\lambda\varphi_\tau)$. La somme de deux martingales ou sous-martingales est elle-même une martingale ou une sous-martingale sous réserve qu'elle existe. Si Φ est une sous-martingale et $\lambda \geqq 0$, $\lambda\Phi$ est aussi une sous-martingale. Par définition, $(\varphi_\tau) \leqq (\psi_\tau)$ signifie que $\varphi_\tau \leqq \psi_\tau$ pour tout $\tau \in \Theta$, c'est-à-dire encore que $\varphi_\tau(A) \leqq \psi_\tau(A)$ quels que soient $\tau \in \Theta$ et $A \in \mathcal{B}_\tau$. En particulier, Ω désignant la martingale identiquement nulle, $\Phi \geqq \Omega$ si $\varphi_\tau \geqq 0$ pour tout $\tau \in \Theta$.

Une prémartingale $\Phi = (\varphi_\tau)$ est dite *terminalement uniformément bornée*, plus brièvement *de variation bornée* (vers le haut, vers le bas) si Θ admet un sous-ensemble terminal Δ tel que l'ensemble des nombres $\varphi_\tau^T(E)$ $(\varphi_\tau^+(E),\ \varphi_\tau^-(E))$ pour $\tau \in \Delta$ soit borné, ou, ce qui est équivalent, tel que, pour $\tau \in \Delta$ et $A \in \mathcal{B}_\tau$, l'ensemble des nombres $\varphi_\tau(A)$ soit borné (borné supérieurement, borné inférieurement). Si Φ est une martingale, on peut toujours choisir $\Delta = \Theta$, de même dans le cas d'une sous-martingale s'il s'agit de la définition « vers le haut ». La somme (si elle existe) de deux prémartingales Φ et Ψ de variation bornée est aussi de variation bornée; la somme $\varphi_\tau + \varphi_\tau$ existe certainement pour les τ d'un ensemble terminal. Remarques analogues pour le produit par un scalaire. La norme $\|\Phi\|$ d'une prémartingale de variation bornée est définie comme $\lim\limits_{\tau} \sup \varphi_\tau^+(E)$.

1.4. **Espaces ordonnés de martingales de base** ($\mathcal{B}_\tau$). — Soit $\mathfrak{C}$ un ensemble de prémartingales. Nous désignons pour tout $\tau_0 \in \Theta$ par $\mathcal{R}_{\tau_0}$ l'ensemble des fonctions de paramètre τ_0 dans les prémartingales de $\mathfrak{C}$, ainsi $\mathcal{R}_{\tau_0}$, la « τ_0-section de $\mathfrak{C}$ », est un ensemble de fonctions sigma-additives définies sur $\mathcal{B}_{\tau_0}$. Nous faisons l'hypothèse suivante :

$\mathbf{S}_{\mathfrak{C}}^s$: *Quel que soit $\tau_0 \in \Theta$, il existe une prémartingale $\Phi = (\varphi_\tau)$ de $\mathfrak{C}$ telle que $\varphi_{\tau_0}(E) > -\infty$, en d'autres termes tout $\mathcal{R}_{\tau_0}$ possède la propriété $\mathbf{S}^s$.*

Dans ces conditions, nous pouvons poser, d'après la proposition 1.1.1 :

$$\xi_{\tau_0} = \sup \mathcal{R}_{\tau_0}, \tag{1}$$

le supremum étant formé dans $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}_{\tau_0}}$. D'après la proposition 1.2.2, ξ_{τ_0} est sigma-additive pour tout τ_0. Par conséquent, $\Xi = (\xi_\tau)$ est la plus petite des prémartingales Ψ telles que $\Phi \leqq \Psi$ pour tout Φ de $\mathfrak{C}$.

PROPOSITION 1.4.1 ([34], p. 320). — *Si $\mathfrak{C}$ est un ensemble de sous-martingales satisfaisant $\mathbf{S}_{\mathfrak{C}}^s$, la prémartingale $\Xi = (\xi_\tau)$ définie par* (1) *est une sous-martingale.*

En particulier, soit $\Phi = (\varphi_\tau)$ une martingale et $\mathfrak{C} = \{\Phi, \Omega\}$. Nous voyons que (φ_τ^+) est la plus petite sous-martingale majorant Φ et Ω, (φ_τ^-) la plus petite sous-martingale majorant $-\Phi$ et Ω, (φ_τ^T) la plus petite sous-martingale majorant Φ et $-\Phi$.

Si l'ensemble $\mathfrak{C}$ de prémartingales est filtrant pour l'ordre $\leqq$, pour chaque $\tau_0 \in \Theta$, la τ_0-section $\mathcal{R}_{\tau_0}$ jouit de la même propriété et nous pouvons écrire

$$\xi_{\tau_0} = \text{env sup} \{\varphi_{\tau_0}; (\varphi_\tau) \in \mathfrak{C}\}.$$

Soit alors $\Xi = (\xi_\tau)$ une sous-martingale telle que $\xi_\rho(E) > -\infty$ pour quelque $\rho \in \Theta$. Nous posons

$$\xi_\tau^m(A) = b \sup_{\tau \leqslant \vartheta} \xi_\vartheta(A) = \lim_{\tau \leqslant \vartheta} \xi_\vartheta(A)$$

pour tout $\tau \in \Theta$ et $A \in \mathcal{B}_\tau$, brièvement

$$\xi_\tau^m = \text{env} \sup_{\tau \leqslant \vartheta} (\xi_\vartheta \mid \mathcal{B}_\tau). \tag{2}$$

La proposition 1.1.4 et la proposition 1.2.2 impliquent que ξ_τ^m est sigma-additive; par conséquent nous avons la

PROPOSITION 1.4.2. — *$\Xi^m = (\xi_\tau^m)$ est une martingale, à savoir la plus petite des martingales Ψ telles que $\Xi \leqq \Psi$.*

Nous appelons Ξ^m l'*intégrale* de Ξ. Si Ξ est de variation bornée vers le bas, Ξ^m existe et possède la même propriété. Si Ξ est de variation bornée vers le haut, Ξ^m possède la même propriété pourvu qu'elle existe.

Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble ordonné de toutes les martingales de base $(\mathcal{B}_\tau)$. Nous désignons l'infimum et le supremum dans $\mathfrak{M}$ (s'ils existent) par $\inf_{\mathfrak{M}}$ et $\sup_{\mathfrak{M}}$. Des propositions 1.4.1 et 1.4.2 nous déduisons aussitôt :

PROPOSITION 1.4.3. — *Soit* $\mathfrak{C}$ *un ensemble de martingales satisfaisant à* $\mathbf{S}^*_{\mathfrak{C}}$, *c'est-à-dire tel que, pour tout* τ_0 *de* Θ, $\varphi_{\tau_0} > -\infty$ *pour au moins une martingale* $(\varphi_\tau) \in \mathfrak{C}$. *Alors* $\sup_{\mathfrak{M}} \mathfrak{C}$ *existe et est* $= (\xi^m_\tau)$ *définie par* (1) *et* (2). *Si* $\mathfrak{C}$ *est filtrant pour* $\leqq$,

$$\xi^m_{\tau_0} = \text{env sup}\,\{\varphi_{\tau_0};\ (\varphi_\tau) \in \mathfrak{C}\}.$$

COROLLAIRE. — *L'espace des martingales de variation bornée est un espace de Riesz complètement réticulé.*

Pour toute martingale Φ existent les martingales

$$\Phi^+ = \sup_{\mathfrak{M}} (\Phi, \Omega),\ \Phi^- = \sup_{\mathfrak{M}} (-\Phi, \Omega) \text{ et } \Phi^T = \sup_{\mathfrak{M}} (-\Phi, \Phi),$$

et nous avons

$$(3)\qquad \begin{cases} \Phi^+ = (\varphi^{+m}_\tau), & \text{où } \varphi^{+m}_\tau = \lim\limits_{\tau \leqslant \mathfrak{I}} (\varphi^+_{\mathfrak{I}} \mid \mathcal{B}_\tau), \\ \Phi^- = (\varphi^{-m}_\tau), & \text{où } \varphi^{-m}_\tau = \lim\limits_{\tau \leqslant \mathfrak{I}} (\varphi^-_{\mathfrak{I}} \mid \mathcal{B}_\tau), \\ \Phi^T = (\varphi^{Tm}_\tau), & \text{où } \varphi^{Tm}_\tau = \lim\limits_{\tau \leqslant \mathfrak{I}} (\varphi^T_{\mathfrak{I}} \mid \mathcal{B}_\tau), \end{cases}$$

et $\Phi^T = \Phi^+ + \Phi^-$. Les martingales Φ^+, Φ^- et Φ^T sont appelées *variation positive, variation négative* et *variation totale* de Φ respectivement. Φ est de variation bornée (vers le haut, vers le bas), si Φ^T (Φ^+, Φ^-) est fini, c'est-à-dire si $\varphi^{Tm}_\tau(E)$, $(\varphi^{+m}_\tau(E)$, $\varphi^{-m}_\tau(E))$ est fini. La norme d'une martingale de variation bornée s'écrit alors comme $\|\Phi\| = \lim\limits_\tau \varphi^T_\tau(E) = \varphi^{Tm}_\tau(E)$. Elle est nulle si et seulement si $\Phi = \Omega$.

Des relations (3) on déduit immédiatement la décomposition de Jordan pour martingales :

PROPOSITION 1.4.4. — *Si la martingale* Φ *est de variation bornée vers le haut ou vers le bas,* $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$.

1.5. **Intégrales de prémartingales.** — Soit $\Phi = (\varphi_\tau)$ une prémartingale telle que

$$\mathbf{T}^*_1(\Phi):\quad \varphi_\rho(E) > -\infty \quad \textit{pour un ensemble terminal d'indices } \rho.$$

Soit $\tau \in \Theta$ regardé comme fixe. Pour tout $\eta \gg \tau$, nous posons

$$(1)\qquad \psi_\tau^\eta = \sup_{\eta \ll \vartheta} (\varphi_\vartheta \mid \mathcal{B}_\tau).$$

Ce supremum existe en vertu de la proposition 1.2.2 et est en même temps le supremum relatif à $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_\tau}$ et à $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_\tau}^\sigma$.

Nous supposons, de plus, que :

$\mathbf{T}_2^s(\Phi)$: *Quel que soit* $\tau \in \Theta$, *il existe un* $\eta \gg \tau$ *tel que* $\psi_\tau^\eta(E) < +\infty$.

Observons que $\tau \ll \eta_1 \ll \eta_2$ entraîne $\psi_\tau^{\eta_1}(E) \geqq \psi_\tau^{\eta_2}(E)$.

Sous l'hypothèse $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$, l'infimum relatif à $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_\tau}$ des ψ_τ^η pour $\eta \gg \tau$ existe et est l'infimum dans $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_\tau}^\sigma$. Nous le désignons par φ_τ^s. La famille $(\psi_\tau^\eta ; \tau \ll \eta)$ étant décroissante pour τ fixe, on a d'après les propositions 1.1.4 et 1.2.2 :

$$(2)\qquad \varphi_\tau^s = \operatorname*{env\,inf}_{\tau \ll \eta} \Big(\operatorname*{env\,sup}_{\eta \ll \vartheta} (\varphi_\vartheta \mid \mathcal{B}_\tau) \Big),$$

et cette définition peut être écrite brièvement

$$(3)\qquad \varphi_\tau^s = \limsup_{\tau \ll \vartheta} (\varphi_\vartheta \mid \mathcal{B}_\tau).$$

Nous désignons la prémartingale (φ_τ^s) par Φ^s. L'intégrale Φ^i est définie de manière analogue, en supposant satisfaites les conditions

$$\mathbf{T}_1^i(\Phi) = \mathbf{T}_1^s(-\Phi) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{T}_2^i(\Phi) = \mathbf{T}_2^s(-\Phi).$$

D'après (3), on a $\Phi^i \leqq \Phi^s$, si ces intégrales existent.

PROPOSITION 1.5.1. — *Si* $\Phi^s = (\varphi_\tau^s)$ *existe, c'est une sous-martingale telle que* $\varphi_\tau^s(E) < +\infty$ *pour tout* τ. *Une condition suffisante pour qu'on ait* $\mathbf{T}_1^s(\Phi)$ *est que* Φ *soit de variation bornée vers le bas. Dans ce cas,* $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$ *implique que* Φ *est de variation bornée et que* Φ^s *est de variation bornée vers le bas.*

DÉMONSTRATION. — L'inégalité $\varphi_\tau^s(E) < +\infty$ est évidente.

Considérons des paramètres τ et ζ fixés tels que $\tau \ll \zeta$. La famille $(\psi_\tau^\eta ; \tau \ll \eta)$ est décroissante, d'où

$$\varphi_\tau^s = \inf_{\tau \ll \eta} \psi_\tau = \inf_{\zeta \ll \eta} \psi_\tau^\eta.$$

D'après la proposition 1.1.4, corollaire 2, $\tau \ll \zeta \ll \eta$ entraîne

$$\psi_\tau^\eta = \sup_{\eta \ll \vartheta} (\varphi_\vartheta \mid \mathcal{B}_\tau) \leqq \Big(\sup_{\eta \ll \vartheta} (\varphi_\vartheta \mid \mathcal{B}_\zeta) \Big) \Big| \mathcal{B}_\tau = \psi_\zeta^\eta \mid \mathcal{B}_\tau.$$

La famille $(\psi_\zeta^\eta \mid \mathcal{B}_\tau;\ \zeta < \eta)$, pour ζ et τ fixe, est aussi décroissante, ce qui implique, en vertu de la dernière partie du même corollaire :

$$\inf_{\zeta \ll \eta} (\psi_\zeta^\eta \mid \mathcal{B}_\tau) = \left(\inf_{\zeta \ll \eta} \psi_\zeta^\eta\right) \mid \mathcal{B}_\tau = \varphi_\zeta^s \mid \mathcal{B}_\tau.$$

Ainsi on a démontré $\varphi_\tau^s \leqq \varphi_\zeta^s \mid \mathcal{B}_\tau$, c'est-à-dire que Φ^s est une sous-martingale.

Soit alors Φ de variation bornée vers le bas. Il existe donc un ensemble Δ terminal de paramètres tel que

$$\varkappa = b \sup \{ \varphi_\rho^-(E);\quad \rho \in \Delta \} < +\infty.$$

Ainsi la condition $\mathbf{T}_1^s(\Phi)$ est évidemment valable. Supposons ensuite la condition $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$ satisfaite et choisissons τ et η tels que $\tau \ll \eta$ et que $\psi_\tau^\eta(E) < +\infty$. Pour $\eta \ll \mathfrak{I}$ nous avons en vertu de (1) : $\varphi_\mathfrak{I}(E) \leqq \psi_\tau^\eta(E)$. Or, si $\mathfrak{I} \in \Delta$, on a aussi $\varphi_\mathfrak{I}^-(E) \leqq \varkappa$, d'où résulte

$$\varphi_\mathfrak{I}^+(E) = \varphi_\mathfrak{I}(E) + \varphi_\mathfrak{I}^-(E) \leqq \psi_\tau^\eta(E) + \varkappa.$$

Ceci étant vrai pour un ensemble terminal de paramètres $\mathfrak{I}$, Φ est de variation bornée. Enfin, en choisissant $\mathfrak{I}$ dans Δ tel que $\eta \ll \mathfrak{I}$, on déduit de (1) l'inégalité $\varphi_\mathfrak{I} \mid \mathcal{B}_\tau \leqq \psi_\tau^\eta \mid \mathcal{B}_\tau$ qui entraîne $(\psi_\tau^\eta)^-(E) \leqq \varkappa$. La famille $(\psi_\tau^\eta;\ \tau \ll \eta)$ pour τ fixe étant décroissante, on a d'après les propositions 1.1.2 et 1.1.4 :

$$(\varphi_\tau^s)^-(E) \leqq b \sup_{\tau \ll \eta} (\psi_\tau^\eta)^-(E) \leqq \varkappa,$$

donc Φ^s est de variation bornée vers le bas.

Remarques :

1. Φ^s étant supposée de variation bornée et jouissant des propriétés $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$ et $\mathbf{T}_2^i(\Phi)$, Φ^s n'est pourtant pas nécessairement de variation bornée (*cf.* 1.10).

2. Si Φ est de variation bornée, mais ne satisfait plus à la condition $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$, on peut encore définir la fonction sigma-additive φ_τ^s sur $\mathcal{B}_\tau$ comme l'infimum des ψ_τ^η relative à $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_\tau}^\sigma$, les ψ_τ^η étant minorées par un fonction de variation bornée. Or, la famille (φ_τ^s) n'est pas, en général, une sous-martingale. Soit, en effet, E l'ensemble des entiers 1, 2, ..., $\mathcal{B}$ la sigma-algèbre de tous les sous-ensembles de E, $\Theta = E$, $\ll$ l'ordre naturel de E, $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, E\}$ et $\mathcal{B}_\tau = \mathcal{B}$ si $\tau = 2, 3, \ldots$. Définissons $\varphi_1(\emptyset) = 0$, $\varphi_1(E) = 1$. Pour $\tau > 1$, soit φ_τ la mesure définie sur $\mathcal{B}_\tau = \mathcal{B}$ par la masse unité placée en τ. La prémartingale $\Phi = (\varphi_\tau;\ \tau = 1, 2, \ldots)$ est de variation bornée, car $0 \leqq \varphi_\tau \leqq 1$. On a $\psi_1^\eta(\emptyset) = 0$, $\psi_1^\eta(E) = 1$ quel que soit η, et, si $\tau > 1$:

$$\psi_\tau^\eta(A) = \text{nombre des éléments de } A \text{ qui sont} \geqq \eta.$$

Par conséquent, $\varphi_1^s(\emptyset) = 0$, $\varphi_1^s(E) = 1$ tandis que φ_τ^s est identiquement nulle si $\tau > 1$. Remarquons que, si $\tau > 1$, l'infimum des ψ_τ^η pour $\tau \leqslant \eta$ dans $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_\tau}$ au lieu de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_\tau}^\sigma$ s'annule sur les ensembles finis et prend la valeur $+\infty$ sur les ensembles infinis, ce qui nous donne un exemple pour le clivage possible de l'infimum dans $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_\tau}$ et $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_\tau}^\sigma$ si la condition $\mathbf{S}^i$ (prop. 1.1.1) n'est pas satisfaite; il s'agit même de fonctions positives.

Définition. — La prémartingale est appelée *intégrable* si Φ^i et Φ^s existent et sont égales. Dans ce cas, $\Phi^m = \Phi^i = \Phi^s$ est une martingale à valeurs finies.

Proposition 1.5.2. — *Soit Φ une sous-martingale.*

1° $\mathbf{T}_1^s(\Phi)$ *équivaut à la condition considérée en* 1.4 : *il existe un ρ tel que $\varphi_\rho(E) > -\infty$. $\mathbf{T}_1^i(\Phi)$ est équivalent à $\varphi_\tau(E) < +\infty$ quel que soit τ.*

2° *Si $\mathbf{T}_1^s(\Phi)$ est satisfaite, on a $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$ si et seulement si Φ est de variation bornée vers le haut. Dans ce cas, Φ^s est l'intégrale Φ^m de Φ définie en* 1.4.

3° *Si $\mathbf{T}_1^i(\Phi)$ est satisfaite, on a $\mathbf{T}_2^i(\Phi)$ si et seulement si l'on a $\mathbf{T}_1^s(\Phi)$. Dans ce cas, Φ^i est l'intégrale Φ^m de Φ définie en* 1.4.

Corollaires :

1. *Pour une sous-martingale, la conjonction* « $\mathbf{T}_1^s(\Phi)$, $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$, $\mathbf{T}_1^i(\Phi)$. *et* $\mathbf{T}_2^i(\Phi)$ » *est équivalente à* « $\mathbf{T}_1^s(\Phi)$ *et Φ, est de variation bornée vers le haut* » *et aussi à* « *Φ est de variation bornée* ».

2. *Si Φ est une prémartingale satisfaisant à $\mathbf{T}_1^s(\Phi)$, une condition suffisante pour qu'on ait $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$, est l'existence d'une sous-martingale de variation bornée vers le haut majorant Φ.*

Démonstration. — 1° est évident. 2° La partie « seulement si » résulte de la proposition 1.5.1. Inversement, si Φ est de variation bornée vers le haut, l'intégrale Φ^m définie en 1.4 est une martingale de variation bornée vers le haut telle que $\Phi \leqq \Phi^m$ (*cf.* prop. 1.4.2), ce qui entraîne $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$. L'identité de Φ^s avec l'intégrale définie en 1.4 résulte immédiatement de la formule (1). 3° Si $\mathbf{T}_2^i(\Phi)$ est satisfaite, en choisissant $\rho \geqslant \eta \geqslant \tau$, on obtient

$$\varphi_\rho(E) \geqq \Big(\inf_{\eta \leqslant \mathfrak{I}} (\varphi_{\mathfrak{I}} \mid \mathcal{B}_\tau)\Big)(E) > -\infty.$$

Supposons ensuite que $\mathbf{T}_1^s(\Phi)$ est valable et $\varphi_\rho(E) > -\infty$. Étant donné τ il existe un paramètre η tel que $\rho \leqslant \eta$ et $\tau \leqslant \eta$. La famille $(\varphi_{\mathfrak{I}} \mid \mathcal{B}_\tau;\ \eta \leqslant \mathfrak{I})$ pour τ et η fixes étant croissante, on a $\varphi_\rho(E) \leqq \Big(\inf_{\eta \leqslant \mathfrak{I}} (\varphi_{\mathfrak{I}} \mid \mathcal{B}_\tau)\Big)$, donc $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$. L'identité de Φ^i avec l'intégrale définie en 1.4 résulte immédiatement de la définition de Φ^i analogue à la formule (1).

Revenons au cas d'une prémartingale Φ quelconque. Supposons que Φ est de variation bornée vers le bas et satisfait à $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$. Comme Φ^s est une sous-martingale de variation bornée vers le bas, son intégrale au sens de 1.4 existe. Nous la désignons par $\Phi^{sm} = (\varphi_\tau^{sm})$. Explicitement nous avons

$$\begin{aligned}\varphi_\tau^{sm} &= \sup_{\tau \leqslant \zeta} \Big(\Big(\inf_{\zeta \leqslant \eta} \Big(\sup_{\eta \leqslant \vartheta} (\varphi_\vartheta \mid \mathcal{B}_\zeta)\Big)\Big) \mid \mathcal{B}_\tau \\ &= \operatorname{env} \sup_{\tau \leqslant \zeta} \Big(\Big(\operatorname{env} \inf_{\zeta \leqslant \eta} \Big(\sup_{\eta \leqslant \vartheta} (\varphi_\vartheta \mid \mathcal{B}_\zeta)\Big)\Big) \Big| \mathcal{B}_\tau.\end{aligned}$$

Φ^{sm} est une martingale de variation bornée vers le bas. De façon analogue on définit Φ^{im} si Φ est de variation bornée vers le haut et satisfait à $\mathbf{T}_2^i(\Phi)$; c'est une martingale de variation bornée vers le haut. Si tous les deux existent,

$$\Phi^{im} \leqq \Phi^i \leqq \Phi^s \leqq \Phi^{sm}.$$

Ces inégalités entraînent la

Proposition 1.5.3. — *Une prémartingale Φ est intégrable si et seulement si $\Phi^{im} = \Phi^{sm}$, en ce cas*

$$\Phi^m = \Phi^{im} = \Phi^{sm}.$$

1.6. **Martingales et fonctions additives d'ensemble.** — Les définitions et propositions formulées en 1.4 et 1.5 sont basées sur les propositions formulées en 1.2 concernant les fonctions sigma-additives sur une sigma-algèbre booléenne d'unité E. Dans ce qui suit, nous allons établir des relations entre les martingales et les fonctions additives sur une algèbre booléenne d'unité E.

Soit $(\mathcal{B}_\tau)$ une base stochastique croissante. L'ensemble $\mathcal{A} = \bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$ est une sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$ d'unité E. Un élément quelconque A de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{B}_\tau$ pour un ensemble terminal de paramètres τ. Soit alors $\Phi = (\varphi_\tau)$ une martingale de base $(\mathcal{B}_\tau)$. Nous posons

$$\text{(1)} \qquad \varphi^\vee(A) = \varphi_\tau(A) \qquad \text{pour} \quad A \in \mathcal{B}_\tau.$$

Cette fonction $\varphi^\vee$ est définie dans $\mathcal{A}$ de manière unique et possède les propriétés suivantes :

I. $\varphi^\vee$ est additive sur $\mathcal{A}$.

II. La restriction de $\varphi^\vee$ à chaque $\mathcal{B}_\tau$ est sigma-additive.

La connaissance de $\varphi^\vee$ entraîne celle de Φ; en effet,

$$\text{(2)} \qquad \varphi_\tau = \varphi^\vee \mid \mathcal{B}_\tau,$$

c'est-à-dire que φ_τ est la restriction de $\varphi^\vee$ à $\mathcal{B}_\tau$. D'autre part, à toute fonction $\varphi^\vee$ définie sur $\mathcal{A}$ et vérifiant I et II correspond une martingale définie par $\varphi_\tau = \varphi^\nabla \mid \mathcal{B}_\tau$ telle que la fonction $\varphi^\vee$ définie par (1) coïncide avec φ^∇. Par conséquent, la correspondance $\Phi \leftrightarrow \varphi^\vee$ définie par (1) et (2), est une application biunivoque de l'ensemble $\mathcal{M}_0$ des fonctions vérifiant I et II, sur $\mathfrak{M}$. Nous la représentons par

$$(3) \qquad \varphi^\vee = Z(\Phi),\ \Phi = Z^{-1}(\varphi^\vee).$$

Il est clair que $\varphi^\vee$ est finie si et seulement si Φ est fini, c'est-à-dire si $|\varphi_\tau(E)| < +\infty$.

Z est une isomorphie relativement à l'ordre, l'addition et la multiplication par un scalaire. La proposition « Φ est de variation bornée » équivaut à « $\varphi^\vee$ est de variation bornée »; il en est de même si l'on ajoute « vers le bas » ou « vers le haut ». Si $\mathfrak{C}$ désigne un ensemble quelconque de martingales, $Z(\mathfrak{C})$ satisfait à la condition $\mathbf{S}^s$ si et seulement si $\mathfrak{C}$ inclut une martingale de variation bornée vers le bas, ce qui implique $\mathbf{S}^s_{\mathfrak{C}}$. Supposant $\mathbf{S}^s$, le supremum de $Z(\mathfrak{C})$ dans $\mathcal{M}_0$ est égal à $Z(\sup_{\mathfrak{M}} \mathfrak{C})$. Et même :

PROPOSITION 1.6.1. — *Pour tout ensemble $\mathfrak{C}$ de martingales contenant une martingale de variation bornée vers le bas,* $Z(\sup_{\mathfrak{M}} \mathfrak{C}) = \sup_{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}} Z(\mathfrak{C})$.

DÉMONSTRATION. — Soit τ un paramètre envisagé comme fixé, $\mathfrak{I} \geqslant \tau$, $A \in \mathcal{B}_\tau$, $\mathcal{R}_{\mathfrak{I}}$ la $\mathfrak{I}$-section de $\mathfrak{C}$, $\xi = \sup_{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}} Z(\mathfrak{C})$, $(\xi^m_\tau) = \sup_{\mathfrak{M}} \mathfrak{C}$.

D'après la proposition 1.1.2, $\xi(A) = b \sup \sum_i \varphi_i^\vee(A_i)$, où $i = 1, \ldots, k$, $A_i \in \mathcal{A}$, $A = A_i + \ldots + A_k$, $\varphi_i^\vee \in Z(\mathfrak{C})$. $\mathcal{A}$ étant l'union de la famille croissante $(\mathcal{B}_{\mathfrak{I}})$,

$$\xi(A) = \lim_{\tau \leqslant \mathfrak{I}} \left(b \sup \sum_i \varphi_i^\vee(A_i) \right),$$

les sommes $\sum_i \varphi_i^\vee(A_i)$ étant soumises à la restriction $A_i \in \mathcal{B}_{\mathfrak{I}}$. Par conséquent, d'après la proposition 1.1.2,

$$\xi(A) = \lim_{\tau \leqslant \mathfrak{I}} (\sup \mathcal{R}_{\mathfrak{I}})(A).$$

Mais, d'après la proposition 1.4.3, nous reportant à 1.4, (1) et 1.4, (2), nous constatons que $\xi^m_\tau(A) = \xi(A)$, donc

$$Z(\sup_{\mathfrak{M}} \mathfrak{C}) = \sup_{\mathcal{M}_{\mathcal{A}}} Z(\mathfrak{C}).$$

CAS PARTICULIERS. — Pour toute martingale Φ, nous avons (*cf.* 1.4.3)

$$\varphi^{\vee T} = Z(\Phi^T), \qquad \varphi^{\vee +} = Z(\Phi^+), \qquad \varphi^{\vee -} = Z(\Phi^-).$$

REMARQUE. — Pour toute martingale de variation bornée $\Phi = (\varphi_\tau)$,

$$\| \Phi \| = \| \varphi^\vee \| = \varphi^{\vee T}(E).$$

1.7. **Martingales sigma-additives.** — Une martingale Φ est dite *sigma-additive* ou *purement simplement additive* selon que $\varphi^\vee = Z(\Phi)$ est sigma-additive ou purement simplement additive. Définitions analogues vers le haut et vers le bas.

PROPOSITION 1.7.1. — *Toute martingale Φ de variation bornée est représentable d'une manière et d'une seule comme somme d'une martingale Φ_c sigma-additive et d'une martingale Φ_p purement simplement additive. Si $\Omega \leqq \Phi$, alors Φ_c est la plus grande de toutes les martingales Ψ sigma-additives satisfaisant $\Omega \leqq \Psi \leqq \Phi$. Nous avons*

$$(\Phi^+)_c = (\Phi_c)^+, \qquad (\Phi^+)_p = (\Phi_p)^+,$$

et de même en changeant $^+$ en $^-$ ou ^{T}.

DÉMONSTRATION. — Soit $\varphi^\vee = \varphi_c^\vee + \varphi_p^\vee$ la décomposition de $\varphi^\vee = Z(\Phi)$ en une fonction sigma-additive et une fonction purement simplement additive. $\varphi_c^\vee$ et $\varphi_p^\vee$ satisfont à I. La fonction $\varphi_c^\vee$ étant sigma-additive sur $\mathcal{A}$ l'est *a fortiori* sur chaque $\mathcal{B}_\tau$, et $\varphi_p^\vee \mid \mathcal{B}_\tau$ étant la différence de deux fonctions de variation bornée et sigma-additives est aussi sigma-additive. Ainsi donc $\varphi_c^\vee$ et $\varphi_p^\vee$ satisfont à II. Il suffit de poser

$$\Phi_c = Z^{-1}(\varphi_c), \qquad \Phi_p = Z^{-1}(\varphi_p)$$

pour obtenir la décomposition dont l'unicité est démontrée de manière analogue.

DÉFINITION. — Le *défaut de sigma-additivité* d'une martingale $\Phi = (\varphi_\tau)$ de variation bornée est défini comme

$$\| \Phi_p \| = \| \varphi_p^\vee \| = \varphi_p^{\vee T}(E).$$

1.8. **Martingales induites.** — Désignons par Θ_ω l'ensemble filtrant complété par un élément « à l'infini » ω, donc $\Theta_\omega = \Theta \cup \{\omega\}$ et $\tau \leqslant \omega$ pour tout $\tau \in \Theta$. Soit $\mathcal{B}_\omega$ la plus petite sigma-sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$ incluant $\mathcal{A} = \bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$, qui n'est autre que l'extension borélienne de $\mathcal{A}$. Étant donnée une martingale $\Phi = (\varphi_\tau; \tau \in \Theta)$ de base $(\mathcal{B}_\tau; \tau \in \Theta)$, une fonction sigma-additive φ_ω définie sur $\mathcal{B}_\omega$ est un prolongement de $\varphi^\vee = Z(\Phi)$ si et seulement si $(\varphi_\tau; \tau \in \Theta_\omega)$ est une martingale de base $(\mathcal{B}_\tau; \tau \in \Theta_\omega)$. Par ailleurs, partant d'une fonction sigma-additive quelconque φ_ω sur $\mathcal{B}_\omega$ nous obtenons de manière unique une martingale $\Phi = (\varphi_\tau; \tau \in \Theta)$ telle que $(\varphi_\tau; \tau \in \Theta_\omega)$ soit une martingale en posant $\varphi_\tau = \varphi_\omega \mid \mathcal{B}_\tau$, en d'autres termes $\Phi = Z^{-1}(\varphi_\omega \mid \mathcal{A})$. On appelle Φ la *martingale induite* par φ_ω. Or pour qu'une fonction φ^∇ définie sur $\mathcal{A}$ puisse être prolongée en une fonction sigma-additive sur $\mathcal{B}_\omega$, il est nécessaire et suffisant que φ^∇ soit de variation bornée vers le haut ou vers le bas et sigma-additive. Donc :

PROPOSITION 1.8.1. — *Une martingale $\Phi = (\varphi_\tau; \tau \in \Theta)$ est de variation bornée vers le haut ou vers le bas, et sigma-additive si et seulement si Φ est induite par une fonction sigma-additive φ_ω définie sur $\mathcal{B}_\omega$. Si φ_ω est finie, Φ est de variation bornée et inversement.*

PROPOSITION 1.8.2. — *Soit $\Phi = (\varphi_\tau; \tau \in \Theta)$ une sous-martingale telle que $\varphi_\rho(E) > -\infty$ pour un certain $\rho \in \Theta$. Afin que Φ^m soit de variation bornée vers le haut et sigma-additive vers le haut, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une fonction φ_ω définie sur $\mathcal{B}_\omega$ telle que $(\varphi_\tau; \tau \in \Theta_\omega)$ soit une sous-martingale et $\varphi_\omega(E) < +\infty$.*

DÉMONSTRATION. — *Suffisance.* — Si Ψ désigne la martingale induite par φ_ω, alors

$$\Phi^m \leq \Psi, \qquad \text{donc} \quad Z(\Phi^m) \leq Z(\Psi) = \varphi_\omega \mid \mathcal{A}.$$

Par conséquent, d'après le corollaire de la proposition 1.2.1, l'inégalité $\varphi_\omega(E) < +\infty$ implique que Φ^m soit de variation bornée vers le haut et sigma-additive.

Nécessité. — Si Φ^m est de variation bornée vers le haut et sigma-additive vers le haut, $\varphi^m = Z(\Phi^m)$ jouit des mêmes propriétés, donc φ^{m+} peut être prolongée en une fonction positive et sigma-additive de variation bornée, définie sur $\mathcal{B}_\omega$, que nous nommons φ_ω. Comme

$$\varphi_\tau \leq \varphi_\tau^m = \varphi^m \mid \mathcal{B}_\tau \leq \varphi^{m+} \mid \mathcal{B}_\tau = \varphi_\omega \mid \mathcal{B}_\tau$$

pour tout τ, $(\varphi_\tau; \tau \in \Theta_\omega)$ est une sous-martingale qui satisfait à $\varphi_\omega(E) < +\infty$.

1.9. **Prémartingales et fonctions de cellule.** — $\mathcal{A}$ désignant une sous-algèbre booléenne quelconque de $\mathcal{B}$ d'unité E, toute fonction $\varphi^\nabla \in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ peut être engendrée par une martingale de la manière décrite en 1.6. En effet, prenons pour Θ l'ensemble des $\mathcal{A}$-partitions finies $\tau = \{J_i, \ldots, J_k\}$ de E, ainsi donc $J_i \in \mathcal{A}$, $J_i \neq O$, $J_i \wedge J_j = O$ pour $i \neq j$ et $\bigvee_i J_i = E$.

Prenons ensuite pour $\leqslant$ la relation de *finesse en partition*, désignée par $\sqsubset$, c'est-à-dire que $\rho \leqslant \tau$ indiquera que τ est un raffinement de ρ, en d'autres termes, tout élément de ρ est le supremum d'un sous-ensemble de τ. $\mathcal{B}_\tau$ sera l'algèbre booléenne engendrée par τ; c'est aussi une sigma-algèbre booléenne. $\rho \leqslant \tau$ équivaut à $\mathcal{B}_\rho \subseteq \mathcal{B}_\tau$, la famille filtrante $(\mathcal{B}_\tau)$ est donc une base stochastique croissante, et $\mathcal{A} = \bigcup_{\tau} \mathcal{B}_{\tau}$. Relativement à cette base, φ^{∇} possède les propriétés I et II de 1.6. Posons donc $\varphi_{\tau} = \varphi^{\nabla} \mid \mathcal{B}_{\tau}$. Alors $\Phi = (\varphi_{\tau};\ \tau \in \Theta)$ est une martingale, et $\varphi^{\nabla} = Z(\Phi)$.

Les martingales ainsi obtenues sont des cas particuliers de martingales intervenant dans la théorie des fonctions de cellule. Le cadre en est une sigma-algèbre booléenne $\mathcal{B}$ d'élément nul O et d'unité E, et une famille $\Theta = \mathfrak{T}$ non vide de $\mathcal{B}$-partitions dénombrables $\tau = \mathfrak{G}$ de E ne comprenant pas l'élément nul, filtrante relativement à la finesse de partition $\sqsubset$. Si $\mathfrak{G} = \{J_1, J_2, \ldots\}$, alors $\mathcal{B}_{\mathfrak{G}}$ est la sigma-algèbre booléenne engendrée par $\mathfrak{G}$, ainsi donc $\mathcal{B}_{\mathfrak{G}}$ consiste en les éléments de $\mathcal{B}$ qui peuvent être représentés comme suprema de sous-ensembles de $\mathfrak{G}$. Les constituants J_i de $\mathfrak{G}$ sont les *atomes de* $\mathcal{B}_{\mathfrak{G}}$ qui est atomique. Si nous choisissons comme relation d'ordre $\leqslant$ la relation $\sqsubset$, la famille $(\mathcal{B}_{\mathfrak{G}};\ \mathfrak{G} \in \mathfrak{T})$ est une base stochastique appelée *base cellulaire.* Par *cellule* nous entendons tout élément (constituant) d'une partition quelconque dans $\mathfrak{T}$. L'ensemble $\mathcal{J}$ des cellules est donc $\bigcup \{\mathfrak{G};\ \mathfrak{G} \in \mathfrak{T}\} = \bigcup \mathfrak{T}$. Un *complexe* est défini comme un ensemble dénombrable (donc éventuellement fini ou même vide) de cellules disjointes, un *complexe actif* comme sous-ensemble d'une partition dans $\mathfrak{T}$. Par conséquent, l'algèbre booléenne $\mathcal{A} = \bigcup_{\tau} \mathcal{B}_{\mathfrak{G}}$ consiste en les éléments de la forme $\bigvee \mathfrak{J}$, où $\mathfrak{J}$ désigne un complexe actif quelconque. A tout complexe fini $\mathfrak{J}$ correspond au moins un complexe actif $\mathfrak{J}'$ tel que $\bigvee \mathfrak{J} = \bigvee \mathfrak{J}'$.

Exemples (*cf.* 4.8).

1. $\mathcal{B}$ est l'ensemble des sous-ensembles boréliens de l'intervalle unité $E = [0, 1[$, fermé à gauche et ouvert à droite, et $\mathfrak{T}$ consiste en toutes les partitions finies de E en intervalles $[u, v[$. Les cellules sont ces intervalles. Tout complexe actif est fini et inversement. Le supremum (union) d'un complexe actif n'est pas en général une cellule.

Dans les exemples suivants $\mathcal{B}$ désigne une sigma-algèbre booléenne quelconque d'unité E.

2. $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$ d'unité E et $\mathfrak{T}$ consiste en toutes les $\mathcal{A}$-partitions finies de E. Tout complexe actif est fini et inversement. Le supremum d'un complexe actif est une cellule.

3. $\mathfrak{T}$ consiste en toutes les $\mathcal{B}$-partitions de E. Tout complexe est actif et tout élément non nul de $\mathcal{B}$ est une cellule.

4. *Réseau de de La Vallée Poussin.* — $\mathfrak{T}$ est une suite $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots$ de $\mathcal{B}$-partitions de E telle que $\mathfrak{P}_1 \sqsubset \mathfrak{P}_2 \sqsubset \ldots$. Un complexe fini n'est pas

nécessairement actif. Le supremum d'un complexe fini actif n'est pas en général une cellule.

DÉFINITIONS. — Dans le cadre $(\mathcal{B}, \mathfrak{T})$ une *fonction de cellule* est, par définition, une fonction réelle φ à valeurs éventuellement infinies, définie sur l'ensemble $\mathcal{I}$ de toutes les cellules et telle que, pour tout complexe actif $\mathcal{J}$, la somme $\varphi(\mathcal{J}) := \sum_{J \in \mathcal{J}} \varphi(J)$ existe, c'est-à-dire que la somme des termes positifs et la somme des termes négatifs ne soient pas simultanément infinies. Soit donc φ une fonction de cellule et $\mathfrak{S} \in \mathfrak{T}$. Tout élément A de $\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}$ admet une représentation unique $A = \bigvee \mathcal{J}$, où $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{S}$. Nous posons

$$G: \quad \varphi_{\mathfrak{S}}(A) = \varphi(\mathcal{J}).$$

Il est clair que $\varphi_{\mathfrak{S}}$ est sigma-additive sur $\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}$, par conséquent $\Phi = (\varphi_{\mathfrak{S}})$ est une prémartingale. Nous écrirons $\Phi = G(\varphi)$ que nous lirons « Φ est engendrée par φ ». Pour tout constituant J d'une partition $\mathfrak{S}$ appartenant à $\mathfrak{T}$, nous avons $\varphi(J) = \varphi_{\mathfrak{S}}(J)$. Nous voyons ainsi que Φ détermine de manière unique la fonction de cellule initiale φ. En vertu de cette correspondance, toute proposition concernant les prémartingales en général implique comme cas particulier une proposition relative aux fonctions de cellule. A toute notion relative aux prémartingales correspond une notion relative aux fonctions de cellule. Par exemple, aux prémartingales $(\varphi^T_{\mathfrak{S}})$, $(\varphi^+_{\mathfrak{S}})$ et $(\varphi^-_{\mathfrak{S}})$ correspondent les fonctions de cellule dont les valeurs sur une cellule J sont $|\varphi(J)|$, $(\varphi(J))^+$ et $(\varphi(J))^-$, respectivement. Remarquons toutefois qu'une prémartingale quelconque sur la base cellulaire $(\mathcal{B}_{\mathfrak{S}})$ n'est pas nécessairement engendrée à partir d'une fonction de cellule d'après la loi de transfert G.

PROPOSITION 1.9.1. — *Afin qu'une prémartingale $\Phi = (\varphi_{\mathfrak{S}})$ sur la base cellulaire $(\mathcal{B}_{\mathfrak{S}})$ soit engendrable par une fonction de cellule φ en vertu de G, il est nécessaire et suffisant que, pour toute cellule J, le nombre $\varphi_{\mathfrak{S}}(J)$ soit le même quelle que soit la partition $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{T}$ contenant J (Condition* **B**).

Cette condition **B** est satisfaite pour *toute* prémartingale sur la base cellulaire $(\mathcal{B}_{\mathfrak{S}})$ si chaque cellule J n'appartient qu'à une seule partition dans $\mathfrak{T}$, ce qui est le cas pour des réseaux de de La Vallée Poussin particuliers. *Exemple* : $E = [0, 1[$, $\mathfrak{T}_n$ est la partition de E en intervalles $[(i-1)2^{-n}, i2^{-n}[$, où $i = 1, \ldots, 2^n$.

Une fonction de cellule φ est dite *de variation bornée* (variation bornée vers le haut, variation bornée vers le bas) si la prémartingale $\Phi = G(\varphi)$ est de variation bornée (bornée vers le haut, bornée vers le bas). Si φ est de variation bornée, la *norme* $\|\varphi\|$ est définie comme

$$\| G(\varphi) \| = \lim_{\mathfrak{S}} \sup \varphi^T_{\mathfrak{S}}(E).$$

Une fonction de cellule φ est dite *sous-additive, sur-additive* ou *additive* suivant que $\Phi = G(\varphi)$ est une sous-martingale, une sur-martingale ou une martingale, respectivement. C'est ainsi que la sous-additivité de φ est équivalente à la propriété suivante :

Quelles que soient les partitions $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{X}$ telles que $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$ et le complexe (actif) $\mathcal{J}$ inclus dans $\mathfrak{S}$ tel que $\bigvee \mathcal{J}$ soit une cellule de $\mathfrak{T}$, nous avons $\varphi\left(\bigvee \mathcal{J}\right) \leqq \varphi(\mathcal{J})$.

L'addtivité de φ équivaut à la propriété suivante :

Pour tout complexe actif $\mathcal{J}$ dont le supremum est une cellule vaut l'égalité $\varphi\left(\bigvee \mathcal{J}\right) = \varphi(\mathcal{J})$.

Si Φ est une martingale quelconque sur la base cellulaire $(\mathcal{B}_{\mathfrak{T}})$, la condition **B** est satisfaite, donc Φ est engendrée en vertu de G par une fonction de cellule additive, à savoir la restriction à $\mathcal{J}$ de $\varphi^{\vee} = Z(\Phi)$ (*cf.* 1.6). Cette fonction $\varphi^{\vee}$ est le prolongement de φ sur $\mathcal{A} = \bigcup_{\mathfrak{T}} \mathcal{B}_{\mathfrak{T}}$ qui satisfait aux conditions I et II de 1.6. Par ailleurs, si une fonction φ^{∇} définie sur $\mathcal{A}$ vérifie ces conditions I et II, sa restriction φ à $\mathcal{J}$ est une fonction de cellule additive et $\varphi^{\nabla} = Z(G(\varphi))$.

La proposition 1.9.1 peut être interprétée ainsi :

Les fonctions de cellule (univoques) sur une base cellulaire $(\mathcal{B}_{\mathfrak{T}})$ engendrent *celles* des prémartingales sur $(\mathcal{B}_{\mathfrak{T}})$ qui possèdent la « propriété des martingales pour atomes ». Il n'est donc pas surprenant de constater que des théorèmes relatifs aux martingales se laissent en partie transférer à des fonctions de cellule non additives.

Par *variation totale, positive* et *négative* de la fonction de cellule additive φ, nous entendons les fonctions de cellule φ^T, φ^+ et φ^- correspondant aux martingales Φ^T, Φ^+ et Φ^-, où $\Phi = G(\varphi)$, donc les restrictions à $\mathcal{J}$ des fonctions $Z(\Phi^T)$, $Z(\Phi^+)$ et $Z(\Phi^-)$. Ainsi donc, sur une cellule I, les valeurs de ces fonctions sont les bornes supérieures de

$$\sum_{J \in \mathcal{J}} |\varphi(J)|, \quad \sum_{J \in \mathcal{J}} (\varphi(J))^+ \quad \text{et} \quad \sum_{J \in \mathcal{J}} (\varphi(J))^-$$

pour les complexes actifs $\mathcal{J}$ dont le supremum $\bigvee \mathcal{J}$ est égal à I, respectivement.

La fonction de cellule φ additive est dite *sigma-additive* ou *purement simplement additive* si la martingale $\Phi = G(\varphi)$ l'est. La sigma-additivité de φ est équivalente à la propriété suivante :

Pour tout complexe (non nécessairement actif) $\mathcal{J}$ dont le supremum est une cellule, $\varphi(\mathcal{J}) := \sum_{J \in \mathcal{J}} \varphi(J)$ existe et est égal à $\varphi\left(\bigvee \mathcal{J}\right)$.

φ est purement simplement additif si, et seulement si, toute fonction de cellule sigma-additive majorée par φ^T est nulle.

Si φ est additive et de variation bornée, nous définissons la partie sigma-additive φ_c de φ comme $Z(\Phi_c) \mid \mathcal{I}$ et la partie purement simplement additive φ_p comme $Z(\Phi_p) \mid \mathcal{I}$ (*cf.* proposition 1.7.1). Pour $\varphi \geqq 0$, φ_c est le supremum des fonctions de cellule sigma-additives majorées par φ. Si φ est de signe quelconque, $\varphi_c = (\varphi^+)_c - (\varphi^-)_c$. La fonction φ_c admet la définition individuelle suivante que nous donnons sans démonstration : Posons, pour $I \in \mathcal{I}$, $\mathfrak{J}$ = ensemble des complexes (non nécessairement actifs) $\mathcal{J}$ dont le supremum coïncide avec I, filtrant suivant $\sqsubset$, alors $\varphi_c(I) = \lim\limits_{\mathfrak{J}} \varphi(\mathcal{J})$.

1.10. **Intégrales de fonctions de cellule.** — Soit φ une fonction de cellule et $\Phi = G(\varphi)$. Nous supposons d'abord que Φ satisfait à $\mathbf{T}_1^s(\Phi)$ et $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$ (*cf.* 1.5). En vertu de la proposition 1.5.1, l'intégrale Φ^s est alors une sous-martingale. Pour $\mathfrak{C} \in \mathfrak{T}$ nous avons, par définition,

$$\varphi_{\mathfrak{C}}^s = \inf_{\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{K}} \Big(\sup_{\mathfrak{K} \sqsubset \mathfrak{X}} (\varphi_{\mathfrak{X}} \mid \mathcal{B}_{\mathfrak{C}})\Big).$$

Soit $I \in \mathfrak{C}$, I étant un atome de $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$, nous reportant au corollaire 1 de la proposition 1.1.4 et à 1.5, nous obtenons

$$\Big(\sup_{\mathfrak{K} \sqsubset \mathfrak{X}} (\varphi_{\mathfrak{X}} \mid \mathcal{B}_{\mathfrak{C}})\Big)(I) = b \sup_{\mathfrak{K} \sqsubset \mathfrak{X}} \varphi_{\mathfrak{X}}(I),$$

donc

$$\varphi_{\mathfrak{C}}^s(I) = b \inf_{\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{K}} \Big(b \sup_{\mathfrak{K} \sqsubset \mathfrak{X}} \varphi_{\mathfrak{X}}(I)\Big) = \limsup_{\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{X}} \varphi_{\mathfrak{X}}(I),$$

et, d'après G,

$$\varphi_{\mathfrak{C}}^s(I) = \limsup_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}_I} \varphi(\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}),$$

où $\mathfrak{D}_I$ désigne l'ensemble des partitions $\mathfrak{X} \in \mathfrak{T}$ telles que $I \in \mathcal{B}_{\mathfrak{X}}$, $\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}$ le complexe inclus dans $\mathfrak{X}$ tel que $I = \bigvee \mathcal{I}_{\mathfrak{X}}$ et où lim sup se rapporte à $\sqsubset$. Cette expression de $\varphi_{\mathfrak{C}}^s(I)$ montre que Φ^s vérifie la condition **B**. Nous pouvons donc définir l'intégrale φ^s comme $G^{-1}(\Phi^s)$ et nous venons d'en trouver la *définition individuelle*

$$\varphi^s(I) = \limsup_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}_I} \varphi(\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}). \tag{1}$$

De même, pour $\varphi^i := G^{-1}(\Phi^i)$, nous avons

$$\varphi^i(I) = \liminf_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}_I} \varphi(\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}), \tag{1}$$

si Φ^i existe. φ^s est une fonction de cellule sous-additive et Φ^i est sur-additive.

Les intégrales $\Phi^{sm} = (\varphi^{sm}_{\mathfrak{S}})$ et $\Phi^{im} = (\varphi^{im}_{\mathfrak{S}})$ définies en 1.5 sont des martingales de variation bornée vers le bas et vers le haut, respectivement pourvu qu'elles existent. Pour $I \in \mathfrak{S}$, nous avons

$$\varphi^{sm}_{\mathfrak{S}}(I) = b \sup_{\mathfrak{S} \sqsubset \mathfrak{X}} \varphi^s_{\mathfrak{X}}(I) = \lim_{\mathfrak{S} \sqsubset \mathfrak{X}} \varphi^s_{\mathfrak{X}}(I),$$
$$\varphi^{im}_{\mathfrak{S}}(I) = b \inf_{\mathfrak{S} \sqsubset \mathfrak{X}} \varphi^i_{\mathfrak{X}}(I) = \lim_{\mathfrak{S} \sqsubset \mathfrak{X}}{}' \varphi^s_{\mathfrak{X}}(I).$$

Nous définissons $\varphi^{sm} = G^{-1}(\Phi^{sm})$ et $\varphi^{im} = G^{-1}(\Phi^{im})$. Ces intégrales sont des fonctions de cellule additives, de variation bornée vers le bas et vers le haut, respectivement. Faisant usage de G et de (1), nous obtenons sur I les définitions individuelles suivantes :

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi^{sm}(I) = b \sup\limits_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}_I} \varphi^s(\mathcal{J}_{\mathfrak{X}}) = \lim\limits_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}_I} \varphi^s(\mathcal{J}_{\mathfrak{X}}), \\ \varphi^{im}(I) = b \inf\limits_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}_I} \varphi^i(\mathcal{J}_{\mathfrak{X}}) = \lim\limits_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}_I} \varphi^i(\mathcal{J}_{\mathfrak{X}}). \end{cases}$$

Soit alors φ une fonction de cellule quelconque, ne satisfaisant pas nécessairement à $\mathbf{T}^s_1(\Phi)$, $\mathbf{T}^s_2(\Phi)$, $\mathbf{T}^i_1(\Phi)$, $\mathbf{T}^i_2(\Phi)$ ou de variation bornée vers le haut ou vers le bas. Dans ce cas, nous posons les relations (1) et (2) pour définir les fonctions de cellule φ^s, φ^i, φ^{sm} et φ^{im}. De cette définition découlent les inégalités $\varphi^{im} \leqq \varphi^i \leqq \varphi^s \leqq \varphi^{sm}$. Les fonctions φ^s et φ^i sont les *intégrales de Burkill-Kolmogoroff* de φ. On les appelle simplement *intégrales de Burkill* si les partitions utilisées sont finies, plus précisément, si la base cellulaire vérifie la condition suivante :

P. *Quelle que soit la cellule I, tout complexe actif* $\mathcal{J}$ *satisfaisant* $\bigvee \mathcal{J} = I$ *est fini.*

Remarquons que si chaque partition dans $\mathfrak{T}$ ne consiste qu'en un nombre fini de cellules, la condition « φ est de variation bornée vers le haut (vers le bas) » entraîne évidemment $\mathbf{T}^s_2(\Phi)$ ($\mathbf{T}^i_2(\Phi)$).

ILLUSTRATION. — E désigne l'intervalle unité $[0, 1[$ et $\mathcal{B}$ la sigma-algèbre de ses sous-ensembles boréliens. $\mathfrak{T}$ est la suite des partitions binaires régulières de E, ainsi $\mathfrak{T}_n = \{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}[; k = 1, \ldots, 2^n\}$. Soit $(p_n; n = 1, 2, \ldots)$ une suite de nombres dense en E et $\varphi_n = \varphi_{\mathfrak{T}_n}$ la mesure définie sur $\mathcal{B}_{\mathfrak{T}_n}$ par la masse unité placée en p_n. La prémartingale (φ_n) satisfait à la condition **B** (*cf.* remarque suivant la proposition 1.9.1), elle est donc engendrable par une fonction de cellule φ, à savoir $\varphi(I) = 1$ ou 0 suivant que $p_n \in I$ ou $p_n \notin I$, où n est l'indice tel que $I \in \mathcal{B}_{\mathfrak{T}_n}$. Alors, d'après (1) et (2),

$$\varphi^s(I) = 1, \qquad \varphi^i(I) = 0, \qquad \varphi^{sm}(I) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \varphi^{im}(I) = 0$$

quelle que soit la cellule I. Observons que $\Phi = G(\varphi)$ est de variation bornée et satisfait aux conditions $\mathbf{T}_1^s(\Phi)$, $\mathbf{T}_2^s(\Phi)$, $\mathbf{T}_1^i(\Phi)$ et $\mathbf{T}_2^i(\Phi)$; cependant Φ n'est pas de variation bornée vers le haut.

Nous nous limiterons dans la suite à des fonctions φ finies et à intégrales φ^s et φ^i finies ([36], p. 209). φ est dite *intégrable au sens de Burkill-Kolmogoroff* si $\varphi^s = \varphi^i$, et l'on écrit alors

$$\varphi^m(I) = \varphi^s(I) = \varphi^i(I).$$

Dans le cas d'une fonction φ de variation bornée satisfaisant à $T_2^s(\Phi)$ et $T_2^i(\Phi)$, la proposition 1.5.3 nous apprend que φ est intégrable si, et seulement si, $\varphi^{sm} = \varphi^{im}$.

Remarque. — Nous employons les notations $\varphi^s(I)$ et $\varphi^i(I)$ pour désigner les intégrales de Burkill-Kolmogoroff, seulement pour les cellules I. L'intégrale de Burkill-Kolmogoroff sur E est définie comme $\limsup_{\mathfrak{T}} \varphi(\mathfrak{T})$ ([33], p. 238). Cette intégrale peut être ∞ alors que φ^s s'annule sur toute cellule. Si φ est de variation bornée, sa norme $\|\varphi\|$, définie en 1.9, est égale à l'intégrale de Burkill-Kolmogoroff de ψ sur E, où $\psi(I) = |\varphi(I)|$ pour tout $I \in \mathcal{I}$.

Propriétés des intégrales φ^s et φ^i. — Comme nous avons vu plus haut, si φ satisfait aux conditions $T_1^s(\Phi)$, $T_2^s(\Phi)$, $T_1^i(\Phi)$ et $T_2^i(\Phi)$, φ^s et φ^i sont semi-additives. Il en est de même si la base cellulaire vérifie $\mathbf{P}$ ([9], p. 138 et [36], p. 209). Or, contrairement à ce qui se passe dans le cadre classique des fonctions d'intervalle, φ^s et φ^i ne sont pas nécessairement additives dans le présent cadre général comme le montre l'illustration. Afin d'obtenir les fonctions de cellule additives φ^{sm} et φ^{im}, il faut réitérer le processus d'intégration. Ce fait avait déjà été remarqué, par exemple dans [9]. Ce n'est que sous des hypothèses assez strictes, comme la condition $\mathbf{E}$ ci-dessous, que φ^s et φ^i sont elles-mêmes additives (*cf.* proposition 1.10.1 ci-dessous). Cette propriété $\mathbf{E}$ ne possède pas une contrepartie intéressante dans la théorie des prémartingales générales à base non cellulaire. Toutefois beaucoup de bases cellulaires la possèdent. La voici :

E. *Pour tout $\mathfrak{T} \in \mathfrak{X}$ et tout complexe fini $\mathcal{J}$ dont chaque élément est inclus dans une composante de $\mathfrak{T}$, il existe dans $\mathfrak{X}$ une partition $\mathfrak{Z}$ telle que $\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{Z}$.*

De $\mathbf{P}$ et $\mathbf{E}$ on déduit aussitôt l'additivité de φ^s et φ^i, toujours en supposant que φ, φ^s et φ^i sont finies ([9], p. 138 et 141; [36], p. 209). En outre, nous avons la

Proposition 1.10.1. — *Si la base cellulaire $(\mathcal{B}_{\mathfrak{T}})$ possède les propriétés* $\mathbf{P}$ *et* $\mathbf{E}$, *si φ est une fonction de cellule de variation bornée, et si $\Phi = G(\varphi)$, alors Φ^s et Φ^i sont des martingales, donc $\Phi^{sm} = \Phi^s$ et*

$\Phi^{im} = \Phi^i$. *Pour tout élément A de $\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}$ qui est le supremum d'un complexe fini inclus dans $\mathfrak{T}$, on a*

$$(3) \qquad \varphi_{\mathfrak{T}}^{sm}(A) = \limsup_{\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{X}} \varphi_{\mathfrak{X}}(A), \qquad \varphi_{\mathfrak{T}}^{im}(A) = \liminf_{\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{X}} \varphi_{\mathfrak{X}}(A).$$

En particulier, si toute partition dans $\mathfrak{T}$ est finie et la condition **E** satisfaite, les relations (3) sont vraies pour tout élément A de $\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}$.

Relativisation de $\mathfrak{T}$. — Dans les équations (1), (2) et (3), l'ensemble des paramètres consiste en partitions de l'unité E. Or, on désire parfois se servir seulement des partitions d'une cellule I, plus généralement du supremum A d'un complexe actif fini. Dans ce but, nous désignons par $\mathfrak{T}_A$ l'ensemble, envisagé comme filtrant selon $\sqsubset$, des partitions cellulaires $\mathfrak{J}$ de A possédant la propriété suivante : Il existe une partition $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{T}$ telle que $\mathfrak{J}$ soit $\subseteq \mathfrak{X}$. Autrement dit, $\mathfrak{T}_A$ est l'ensemble filtrant des complexes actifs $\mathfrak{J}$ tels que $\bigvee \mathfrak{J} = A$. Supposons que $(\mathcal{B}_{\mathfrak{T}})$ jouisse de la propriété suivante :

F. *Quels que soient la partition $\mathfrak{T}$ dans $\mathfrak{T}$, la cellule $I \in \mathcal{B}_{\mathfrak{T}}$ et le complexe actif $\mathfrak{J}$ tel que $\bigvee \mathfrak{J} = I$, il existe dans $\mathfrak{T}$ une partition $\mathfrak{Z}$ telle que $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{Z}$..*

On voit immédiatement que **F** entraîne les égalités

$$\limsup_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}_I} \varphi(\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}) = \limsup_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{T}_I} \varphi(\mathfrak{J}),$$
$$\liminf_{\mathfrak{X} \in \mathfrak{D}_I} \varphi(\mathfrak{I}_{\mathfrak{X}}) = \liminf_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{T}_I} \varphi(\mathfrak{J}),$$

pour toute fonction de cellule φ, les limites à droite étant formées relativement à la relation $\sqsubset$ dans $\mathfrak{T}_I$, d'où résultent les formes désirées des égalités (1), (2) et (3).

Si $\mathfrak{T}$ satisfait **P** et **E**, **F** se trouve aussi satisfaite et les égalités (3) peuvent être écrites

$$\varphi^{sm}(A) = \limsup_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{T}_A} \varphi(\mathfrak{J}), \qquad \varphi^{im}(A) = \liminf_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{T}_A} \varphi(\mathfrak{J}),$$

pour tout supremum A d'un complexe actif fini.

Un ensemble $\mathfrak{T}$ de partitions totalement ordonné par $\sqsubset$ satisfait **F**, mais pas nécessairement **E**. La condition **E** est satisfaite dans les exemples 1, 2 et 3 de 1.9, la condition **F** dans tous les exemples de 1.9.

1.11. **Théorèmes de convergence pour martingales de variation bornée quand $\mathcal{B}$ est une algèbre de mesure.** — Nous supposons que $\mathcal{B}$ est une algèbre de mesure, c'est-à-dire que $\mathcal{B}$ admet au moins une mesure sigma-additive, sigma-finie et strictement positive définie sur elle. $\mathcal{B}$ est alors une algèbre booléenne complète et tout sous-ensemble $\mathcal{K}$ de $\mathcal{B}$ inclut un ensemble dénombrable $\mathcal{L}$ tel que $\bigvee \mathcal{L} = \bigvee \mathcal{K}$ et $\bigwedge \mathcal{L} = \bigwedge \mathcal{K}$ [53]. Par conséquent, toute sigma-sous-algèbre booléenne $\mathcal{C}$ de $\mathcal{B}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}$ au sens complet, c'est-à-dire relativement aux infima et suprema d'ensembles quelconques, dénombrables ou non.

Si $\mathcal{C}$ désigne une sigma-sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$ d'unité E, nous entendons par *fonction $\mathcal{C}$-mesurable* ou simplement $\mathcal{C}$-fonction une fonction de lieu (Ortsfunktion de Carathéodory) relativement à $\mathcal{C}$, à valeurs réelles, $+\infty$ et $-\infty$ comprises. Une telle fonction peut être définie par son échelle spectrale $E_\alpha = \{ f \leqq \alpha \}$, $-\infty \leqq \alpha \leqq +\infty$. Les échelles spectrales des $\mathcal{C}$-fonctions sont caractérisées par les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lll} E_\alpha \in \mathcal{C}, & \alpha \leqq \beta & \text{entraîne } E_\alpha \leqq E_\beta, \\ E_{+\infty} = E, & \alpha_n \searrow \alpha & \text{entraîne } \lim\limits_n E_{\alpha_n} = E_\alpha. \end{array}$$

Ces fonctions obéissent aux règles ordinaires valables pour les fonctions de point mesurables; on trouve un exposé de leurs propriétés en [4]. L'espace $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ des $\mathcal{C}$-fonctions ordonné naturellement est un treillis complet, sous-treillis complet du treillis $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$. Si $B \in \mathcal{B}$, la $\mathcal{B}$-fonction prenant la valeur 1 dans B et la valeur 0 dans $E - B$ est appelée *fonction indicatrice* (ou caractéristique) de B et désignée par c_B. α représentant un nombre fini quelconque, αc_E sera désignée brièvement par α. Le sous-treillis complet de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ constitué par les fonctions indicatrices des somas de $\mathcal{C}$ est isomorphe à $\mathcal{C}$ par cette correspondance, ce qui permet de désigner les infima et les suprema dans $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ et $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ par les mêmes signes $\wedge$, $\bigwedge$, $\vee$ et $\bigvee$ que dans $\mathcal{C}$ et $\mathcal{B}$. En particulier,

$$|f| = f \vee (-f), \qquad f^+ = f \vee 0 \qquad \text{et} \qquad f^- = (-f) \vee 0.$$

Par *fonction* sans plus, nous entendons une $\mathcal{B}$-fonction, leur ensemble $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ sera aussi désigné par $\mathcal{F}$. f désignant une fonction, B un soma, nous représentons par $f|B$ la restriction de f à B.

Nous désignons par $\mathcal{V}_1$ ou $\mathcal{V}$ l'espace de Banach des fonctions ψ réelles, définies sur $\mathcal{A}$, sigma-additives, chacune étant de variation bornée (*cf.* 1.1) et pourvue de la norme $\|\psi\|_1$ ou $\|\psi\| :=$ variation totale de ψ (sur E). L'ensemble de ces fonctions est donc $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{T,\sigma}$ introduit en 1.2 après la proposition 1.2.2. Chacune de ces fonctions admettant un prolongement sigma-additif unique sur $\mathcal{B}_\omega$ (*cf.* 1.8) de même variation totale, nous pouvons dans la définition de $\mathcal{V}$ remplacer « définies sur $\mathcal{A}$ » par « définies sur $\mathcal{B}_\omega$ ». L'espace dual $\mathcal{V}'_1$ ou $\mathcal{V}'$ est l'espace vectoriel des $\mathcal{B}_\omega$-fonctions bornées f de norme $\|f\|' = \sup |f|$.

PROPOSITION 1.11.1. — *Pour une martingale* $\Phi = (\varphi_\tau)$ *de variation bornée les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. Φ *est sigma-additive* (*définition en* 1.7);

2_e. *Pour tout* τ *la fonction* φ_τ *peut être prolongée en une fonction* ψ_τ *de* $\mathcal{V}$ *telle que la suite* (ψ_τ) *converge fortement en* $\mathcal{V}$;

3_e. *Pour tout* τ *la fonction* φ_τ *peut être prolongée en une fonction* ψ_τ *de* $\mathcal{V}$ *telle que la suite* (ψ_τ) *converge faiblement dans* $\mathcal{V}$.

DÉMONSTRATION. — Les implications $1 \rightarrow 2_e$ et $2_e \rightarrow 3_e$ sont évidentes. Il reste à montrer que $3_e \rightarrow 1$. Supposons donc l'existence des prolongements ψ_τ convergeant faiblement vers ψ_τ dans $\mathcal{V}$. Un soma quelconque de $\mathcal{B}_\omega$ étant représenté par B, la fonctionnelle λ définie sur $\mathcal{V}$ par $\lambda(\psi) = \psi(B)$ est linéaire et continue sur $\mathcal{V}$, donc la convergence faible des ψ_τ vers ψ_ω implique $\psi_\omega(B) = \lim_\tau \psi_\tau(B)$, en particulier

$$\psi_\omega(A) = \lim_\tau \psi_\tau(A)$$

sur tout $A \in \mathcal{A}$. D'où il résulte

$$\psi_\omega(A) = \lim_{\tau \in \Delta_A} \varphi_\tau(A) = \varphi^\vee(A)$$

(*cf.* définition de Δ_A en 1.3 et de $\varphi^\vee$ en 1.6). $\varphi^\vee | \mathcal{A}$ admettant un prolongement ψ_ω sigma-additif est sigma-additif, ainsi la condition 1 est satisfaite.

DÉFINITION [14]. — Les fonctions d'un sous-ensemble $\mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ sont dites *uniformément sigma-additives* si quelle que soit la suite décroissante évanescente $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ d'éléments de $\mathcal{B}_\omega$ (*cf.* 1.2), la suite $\psi^T(B_1), \ldots, \psi^T(B_n), \ldots$ converge vers zéro uniformément sur $\mathcal{W}$.

THÉORÈME 1. — *Hypothèses :* $\Phi = (\varphi_\tau)$ *est une martingale sigma-additive. Pour tout* τ, ψ_τ *désigne un prolongement sigma-additif de* φ_τ *sur* $\mathcal{B}_\omega$. *Les* ψ_τ *sont uniformément sigma-additifs. L'ensemble des normes* $\|\psi_\tau\|$ *est borné. Conclusion : La suite* (ψ_τ) *converge faiblement en* $\mathcal{V}$ *vers la fonction* φ_ω *induisant* Φ *dans* $(\mathcal{B}_\tau)$ (*cf.* 1.8).

DÉMONSTRATION. — $\mathcal{B}_\omega$ étant l'extension borélienne de $\mathcal{A}$, la norme de φ_ω est égale à celle de sa restriction à $\mathcal{A}$. Désignant par ε un nombre positif quelconque, il existe donc une décomposition de E en éléments $A_1, \ldots, A_k$ de $\mathcal{A}$ telle que $\sum_{i=1}^{k} |\varphi_\omega(A_i)| \geqq \|\varphi_\omega\| - \varepsilon$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, nous avons $\lim_\tau \psi_\tau(A) = \varphi_\omega(A)$, par conséquent, quel que soit ρ dans Θ, il existe un $\tau \geqslant \rho$ tel que

$$\sum_i |\psi_\tau(A_i)| \geqq \sum_i |\varphi_\omega(A_i)| - \varepsilon.$$

Comme $\| \psi_\tau \| \geq \sum_i | \psi_\tau(A_i) |$, nous obtenons, en combinant les inégalités précédentes, l'inégalité $\| \psi_\tau \| \geq \| \varphi_\omega \| - 2\varepsilon$. D'où, en tenant compte de la liberté dans le choix de ρ et de τ,

$$\| \varphi_\omega \| \leq \limsup_\tau \| \psi_\tau \|.$$

Posons $\varkappa = \sup \{ \| \psi_\tau \| \}$, donc $\varkappa \geq \| \varphi_\omega \|$, et soit ε un nombre positif arbitraire, f une fonction quelconque de $\mathcal{V}'$. L'algèbre booléenne $\mathcal{A}$ étant dense dans $\mathcal{B}_\omega$ il existe une suite $s_1, \ldots, s_j, \ldots$ de fonctions $\mathcal{A}$-étagées (entendant : ne prenant qu'un nombre fini de valeurs finies et dont les éléments de constance appartiennent à $\mathcal{A}$) telle que

$$\gamma = \sup \{ \| f \|', \| s_j \|' ; j = 1, 2, \ldots \}$$

soit fini et que s_j converge vers f selon l'ordre $\left(\text{entendant que } \bigvee_k \bigwedge_{k \leq j} s_j = \bigwedge_k \bigvee_{k \leq j} s_j = f\right)$.

D'après le théorème d'Egoroff, il existe une suite $E_1, \ldots, E_i, \ldots$ de somas de $\mathcal{B}_\omega$ telle que E_i converge en croissant vers E et que, sur chaque E_i, la suite des s_j converge uniformément vers f. En vertu de l'uniforme sigma-additivité des ψ_τ et de la sigma-additivité de φ_ω, compte tenu de la finitude de la variation totale de ces fonctions, il existe un entier naturel i^0 tel que, pour $E_{i^0} = E^0$, nous ayons $\psi_\tau^T (E - E^0) < \frac{\varepsilon}{8\gamma}$ quel que soit τ, et que $\varphi_\omega^T (E - E^0) < \frac{\varepsilon}{8\gamma}$. La convergence uniforme de s_j vers f sur E^0 nous assure de l'existence d'un entier naturel n^0 tel que, pour $s_{n^0} = s^0$, nous ayons $| f - s^0 | < \frac{\varepsilon}{4\varkappa}$ sur E^0.

Écrivons l'inégalité

$$\begin{aligned} | \langle \psi_\tau, f \rangle - \langle \varphi_\omega, f \rangle | \leq{} & | \langle \psi_\tau, f \rangle - \langle \psi_\tau, s^0 \rangle | \\ & + | \langle \psi_\tau, s^0 \rangle - \langle \varphi_\omega, s^0 \rangle | + | \langle \varphi_\omega, s^0 \rangle - \langle \varphi_\omega, f \rangle |. \end{aligned}$$

Sur chaque soma de constance de s^0, ψ_τ et φ_ω finissent par coïncider, il existe donc un paramètre ρ tel que $\tau \gg \rho$ implique que $\langle \psi_\tau, s^0 \rangle - \langle \varphi_\omega, s^0 \rangle$ soit nul. Évaluons

$$\begin{aligned} | \langle \psi_\tau, f \rangle - \langle \psi_\tau, s^0 \rangle | \leq{} & \left| \int_{E_0} (f - s^0)\, d\psi_\tau \right| + \left| \int_{E - E_0} f\, d\psi_\tau \right| \\ & + \left| \int_{E - E^0} s^0\, d\psi_\tau \right| < \frac{\varepsilon\varkappa}{4\varkappa} + \frac{\varepsilon\gamma}{8\gamma} + \frac{\varepsilon\gamma}{8\gamma} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

De même

$$|\langle \varphi_\omega, s^0 \rangle - \langle \varphi_\omega, f \rangle| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Finalement, par combinaison des évaluations, nous constatons que $\tau \gg \rho$ entraîne $|\langle \psi_\tau, f\rangle - \langle \varphi_\omega, f\rangle| < \varepsilon$. Ainsi $\langle \psi_\tau, f\rangle \to \langle \varphi_\omega, f\rangle$, quelle que soit f dans V', par définition ψ_τ converge dans $\mathcal{V}$ faiblement vers φ_ω.

Compléments. — 1. Nous pouvons, dans l'énoncé du théorème, remplacer l'hypothèse : « $\Phi = (\varphi_\tau)$ est une martingale sigma-additive » par « $\Phi = (\varphi_\tau)$ est une prémartingale telle que, pour tout $A \in \mathfrak{A}$, $\lim\limits_{\tau} \psi_\tau(A)$ existe ». Cette limite, grâce à l'uniforme sigma-additivité des ψ_τ et la finitude de la borne supérieure des $\|\psi_\tau\|$, est un élément de $\mathcal{V}$ que nous désignons par φ_ω. La démonstration précédente est applicable, il faut seulement substituer à l'affirmation de l'existence d'un ρ tel que $\tau \gg \rho$ implique que $\langle \psi_\tau, s^0\rangle - \langle \varphi_\omega, s^0\rangle$ soit nul, la suivante « à tout $\delta > 0$ correspond un ρ tel que $\tau \gg \rho$ implique que $|\langle \psi_\tau, s^0\rangle - \langle \varphi_\omega, s^0\rangle| < \delta$ ». Nous concluons que les ψ_τ convergent faiblement vers φ_ω dans $\mathcal{V}$.

2. L'uniforme sigma-additivité des ψ_τ et la finitude de $b \sup \|\psi_\tau\|$ découlent de l'hypothèse suivante : Les fonctions ψ_τ^T sont uniformément majorées par une fonction de $\mathcal{V}$.

3. Nous *présumons* que l'hypothèse supplémentaire « $\|\varphi_\tau\| = \|\psi_\tau\|$ quel que soit τ » dans l'énoncé du théorème 1, assure la convergence forte de la suite (ψ_τ) en $\mathcal{V}$, et que pour toute martingale Φ sigma-additive et de variation bornée, cette hypothèse implique déjà la sigma-additivité uniforme des ψ_τ.

2. Théorie dans un espace mesuré sans conditions vitaliennes.

2.1. **Préliminaires.** — Nous supposons désormais que $\mathcal{B}$ est le domaine de définition d'une mesure μ sigma-additive, sigma-finie et strictement positive, donc $\mu(B) = 0$ entraîne $B = O$.

Soit φ une fonction définie sur une sous-algèbre booléenne $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{B}$ d'unité E, additive et nulle en O, c'est-à-dire $\varphi \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}$ (*cf.* 1.1). φ est dite *absolument continue* relativement à μ ou μ-continue, si, quel que soit ε positif, il existe un soma H de mesure finie et un nombre positif δ tels que $A \in \mathfrak{A}$ et $\mu(HA) < \delta$ impliquent $\varphi^T(A) < \varepsilon$. φ est appelée *singulière* si, quels que soient le nombre ε positif et le soma H de mesure finie, il existe un élément C de $\mathfrak{A}$ tel que $\mu(HC) < \varepsilon$ et $\varphi^T(E - C) < \varepsilon$. En remplaçant φ^T par φ^+ et φ^-, nous obtenons la définition d'une fonction absolument continue ou singulière vers le haut ou vers le bas, respectivement. Dans les définitions des notions de continuité absolue, nous pouvons remplacer $\varphi^T(A) < \varepsilon$, $\varphi^+(A) < \varepsilon$ ou $\varphi^-(A) < \varepsilon$ par $|\varphi(A)| < \varepsilon$,

$\varphi(A) < \varepsilon$ ou $\varphi(A) > -\varepsilon$, respectivement. Si $H_1, H_2, \ldots$ désigne une suite croissante quelconque de somas de mesure finie et telle que $\bigvee_n H_n = E$, il suffit de formuler les définitions précédentes au moyen des H_n seulement à la place de tous les somas H de mesure finie. En particulier, si $\mu(E) < +\infty$, il suffit de considérer le cas $H = E$.

Proposition 2.1.1. — *Toute fonction de $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ de variation bornée est représentable d'une manière et d'une seule comme somme d'une fonction absolument continue et d'une fonction singulière.*

Proposition 2.1.2. — *Une fonction de $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ de variation bornée est absolument continue si et seulement si elle est sigma-additive, et singulière si et seulement si elle est purement simplement additive* ([3]).

Démonstration. — On déduit immédiatement de la définition et de la proposition 1.2.1 que toute fonction de variation bornée et absolument continue est sigma-additive. Soit alors φ de variation bornée et sigma-additive. D'après la proposition 1.2.3, φ possède un prolongement φ^0 sigma-additif sur la sigma-algèbre booléenne $\mathcal{C}$ engendrée par $\mathcal{A}$. Comme μ est strictement positive, $B \in \mathcal{C}$ et $\mu(B) = 0$ entraînent $B = O$, donc $\varphi^0(B) = 0$. Par conséquent, d'après le raisonnement classique (*cf.* par exemple [18], 5.7), φ^0 est absolument continue, donc aussi φ.

Dans ce qui suit nous pouvons nous limiter au cas $\varphi \geq 0$. Supposons alors φ de variation bornée et purement simplement additive. Nous avons la décomposition $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, où φ_1 est absolument continue et φ_2 singulière. Comme φ_1 est sigma-additive et satisfait à $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi$, l'addtivité purement simple de φ entraîne $\varphi_1 = 0$, donc $\varphi = \varphi_2$ est singulière. Soit enfin φ de variation bornée et singulière. D'après la proposition 1.2.4, nous avons la décomposition $\varphi = \varphi_c + \varphi_p$, où φ_c est sigma-additive et φ_p purement simplement additive. Nous avons déjà montré que φ_c est absolument continue et φ_p singulière. Comme φ est elle-même singulière, l'unicité de la décomposition en une fonction absolument continue et une fonction singulière implique $\varphi_c = 0$, donc $\varphi = \varphi_p$ est purement simplement additive.

Une fonction f, $\mathcal{B}$-mesurable (*cf.* 1.11), est dite *semi-intégrable* si $\int_E f\,d\mu$ existe, en particulier *intégrable vers le haut* ou *vers le bas* si $\int_E f\,d\mu < +\infty$ ou $\int_E f\,d\mu > -\infty$, respectivement.

([3]) La proposition 2.1.1 et les implications « absolument continu $\to$ sigma-additif » et « purement simplement additif $\to$ singulier » pour les fonctions de $\mathfrak{M}_{\mathcal{A}}$ de variation bornée sont vraies même si μ n'est pas strictement positive.

Soit $\mathcal{C}$ une sigma-sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$ d'unité E et f une fonction $\mathcal{B}$-mesurable. Si f est intégrable vers le haut, la fonction φ définie sur $\mathcal{C}$ par

$$\varphi(C) = \int_C f\,d\mu \tag{1}$$

est sigma-additive, absolument continue vers le haut et de variation bornée vers le haut. Inversement, si φ est une fonction sigma-additive définie sur $\mathcal{C}$, il existe une fonction g et une seule telle que g soit $\mathcal{C}$-mesurable, semi-intégrable et $\varphi(C) = \int_C g\,d\mu$ pour tout C de $\mathcal{C}$. Si la fonction φ est engendrée par (1), g est appelée l'*espérance conditionnelle de la variable aléatoire f étant donné* $\mathcal{C}$ et désignée par $\mathcal{E}(f \mid \mathcal{C})$. Des remarques analogues s'appliquent au cas d'une sous-algèbre $\mathcal{A}$ de $\mathcal{B}$ au lieu de $\mathcal{C}$ en tenant compte de la proposition 1.2.3; il faut alors choisir g mesurable relativement à la sigma-algèbre engendrée par $\mathcal{A}$.

2.2. **Prémartingales absolument continues ou singulières.** — Reprenons la base stochastique $(\mathcal{B}_\tau)$ du chapitre 1 et supposons désormais que la restriction de μ à tout $\mathcal{B}_\tau$ soit sigma-finie. Nous posons de nouveau $\mathcal{A} = \bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$. Une prémartingale $\Phi = (\varphi_\tau)$ est dite *absolument continue* si, quel que soit ε positif, il existe un sous-ensemble terminal Δ de Θ, un soma H de mesure finie et un nombre δ positif tels que $\tau \in \Delta$, $A \in \mathcal{B}_\tau$ et $\mu(HA) < \delta$ entraînent $\varphi_\tau^T(A) < \varepsilon$. En remplaçant cette inégalité par $\varphi_\tau^+(A) < \varepsilon$ ou $\varphi_\tau^-(A) < \varepsilon$, nous obtenons la définition d'une prémartingale absolument continue vers le haut ou vers le bas, respectivement. On pourrait aussi utiliser les inégalités $|\varphi_\tau(A)| < \varepsilon$, $\varphi_\tau(A) < \varepsilon$ ou $\varphi_\tau(A) > -\varepsilon$. Dans le cas d'une martingale, Δ peut être pris égal à Θ, de même pour une semi-martingale s'il s'agit de la définition vers le haut. En effet, sous ces hypothèses, pour tout $A \in \mathcal{A}$, les suites $(\varphi_\tau^T(A))$, $(\varphi_\tau^+(A))$ sont croissantes.

Une prémartingale $\Phi = (\varphi_\tau)$ est dite *singulière* si, quels que soient le nombre positif ε et le soma H de mesure finie, il existe un paramètre ρ dans Θ et un élément C de $\mathcal{B}_\rho$ vérifiant $\mu(HC) < \varepsilon$ tels que $\rho \leqslant \tau$ entraîne $\varphi_\tau^T(E - C) < \varepsilon$. Nous obtenons la définition d'une prémartingale singulière vers le haut ou vers le bas en remplaçant φ_τ^T par φ_τ^+ ou φ_τ^-, respectivement.

Si $H_1, H_2, \ldots$ désigne une suite croissante quelconque de somas de mesure finie et telle que $\bigvee_n H_n = E$, il suffit de formuler les définitions précédentes au moyen des H_n seulement au lieu d'utiliser tous les somas H

de mesure finie. En particulier, dans la définition de la continuité absolue, le paramètre ρ étant prescrit, on peut toujours trouver H dans $\mathcal{B}_\rho$.

Contrairement aux notions de sigma-additivité et d'additivité purement simple, les notions de continuité absolue et de singularité concernent les prémartingales quelconques et non pas seulement les martingales. Cette remarque nous permettra de donner plus loin (proposition 2.2.4) une version plus simple de la proposition 1.8.2. Tout d'abord nous avons immédiatement la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2.1. — *Soit $\Phi = (\varphi_\tau)$ une sous-martingale telle $\varphi_\rho(E) > -\infty$ pour un certain $\rho \in \Theta$. Afin que Φ^m soit absolument continue vers le haut, il est nécessaire et suffisant que Φ le soit.*

PROPOSITION 2.2.2. — *Une martingale $\Phi = (\varphi_\tau)$ est absolument continue ou singulière si et seulement si la fonction additive $\varphi^\vee = Z(\Phi)$ (cf. 1.6) définie sur $\mathcal{A}$ jouit de cette propriété. Par conséquent, pour les martingales de variation bornée, les notions de continuité absolue et de sigma-additivité sont équivalentes ainsi que les notions de singularité et d'additivité purement simple. Il en est de même pour les notions « vers le haut » et « vers le bas ».*

Pour démontrer cette proposition, il suffit d'observer que $\varphi_\tau^T(A) \leqq \varphi^{\vee T}(A)$ et que $\lim\limits_\tau \varphi_\tau^T(A) = \varphi^{\vee T}(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

La proposition 1.8.1 nous donne alors :

PROPOSITION 2.2.3. — *Une martingale de variation bornée est absolument continue si et seulement si elle est induite par une fonction sigma-additive définie sur $\mathcal{B}_\omega$.*

De la proposition 1.8.2 on déduit, à l'aide des propositions 2.2.1 et 2.2.2 :

PROPOSITION 2.2.4. — *Soit $\Phi = (\varphi_\tau)$ une sous-martingale telle qu'il existe $\rho \in \Theta$ vérifiant $\varphi_\rho(E) > -\infty$. Alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction φ_ω définie sur $\mathcal{B}_\omega$ telle que $(\varphi_\tau;\ \tau \in \Theta_\omega)$ soit une sous-martingale et $\varphi_\omega(E) < +\infty$, est que Φ soit de variation bornée vers le haut et absolument continue vers le haut.*

2.3. **Processus stochastiques.** — Soit $\Phi = (\varphi_\tau)$ une prémartingale de base $(\mathcal{B}_\tau)$. A tout $\tau \in \Theta$ correspond une fonction f_τ et une seule, $\mathcal{B}_\tau$-mesurable, semi-intégrable et telle que

$$\varphi_\tau(A) = \int_A f_\tau \, d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{B}_\tau. \tag{1}$$

A la prémartingale Φ correspond donc la suite des intégrants (f_τ) ou *processus stochastique* (f_τ) dit μ-représentation intégrante ou simplement *représentation intégrante* de Φ.

Inversement à tout processus stochastique (f_τ), où f_τ désigne une fonction $\mathcal{B}_\tau$-mesurable et semi-intégrable, correspond la prémartingale (φ_τ) définie par (1) et appelée *représentation intégrale* de Φ. Si aucune confusion n'est à craindre, la suite (f_τ) sera aussi appelée prémartingale et il nous arrivera d'écrire $\Phi = (f_\tau)$.

Beaucoup de définitions et propositions du chapitre 1 s'expriment sous une forme simple au moyen des représentations intégrantes. Ainsi la condition pour Φ d'être une sous-martingale ou une martingale s'écrit :

$$\rho \leqslant \tau \quad \text{implique} \quad f_\rho \leqq \mathcal{E}(f_\tau \mid \mathcal{B}_\rho) \quad \text{ou} \quad f_\rho = \mathcal{E}(f_\tau \mid \mathcal{B}_\rho), \text{ respectivement.}$$

Si $\mathfrak{C}$ désigne un ensemble de prémartingales de représentation intégrante générique (f_τ) et si, pour tout τ, une des fonctions f_τ est intégrable vers le bas, alors le processus (g_τ), où $g_{\tau_0} = \bigvee \{ f_{\tau_0};\ (f_\tau) \in \mathfrak{C} \}$, est la représentation intégrante de la plus petite prémartingale majorant $\mathfrak{C}$. Observons que la fonction g_τ est définie indépendamment de l'hypothèse $\mathbf{S}_{\mathfrak{C}}^{*}$ (*cf.* 1.4) qui intervient seulement pour en assurer l'intégrabilité vers le bas. En particulier, pour une seule prémartingale $\Phi = (\varphi_\tau)$ de représentation intégrante (f_τ), aux prémartingales $(\varphi_\tau^{\mp})$, (φ_τ^{+}) et (φ_τ^{-}) correspondent les suites d'intégrants $(|f_\tau|)$, (f_τ^{+}) et (f_τ^{-}). Ces prémartingales sont des sous-martingales si Φ est une martingale.

Une martingale $\Phi = (\varphi_\tau)$ de représentation intégrante (f_τ) est induite par une fonction sigma-additive φ_ω définie sur l'extension borélienne $\mathcal{B}_\omega$ de $\mathcal{A}$ si et seulement s'il existe une fonction f_ω semi-intégrable et $\mathcal{B}_\omega$-mesurable telle que $f_\tau = \mathcal{E}(f_\omega \mid \mathcal{B}_\tau)$. Plus généralement, f désignant une fonction semi-intégrable, la suite (f_τ), où $f_\tau = \mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}_\tau)$, représente une martingale dite induite par f; elle est alors aussi induite par $f_\omega = \mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}_\omega)$. La martingale Φ de représentation intégrante $(f_\tau;\ \tau \in \Theta)$ est induite par une fonction $\mathcal{B}_\omega$-mesurable f_ω si et seulement si $(f_\tau;\ \tau \in \Theta_\omega)$ représente une martingale. Les propositions 1.8.1 et 2.2.3 nous donnent des conditions assurant l'existence d'une telle fonction f_ω.

Voici encore un exemple de traduction d'une propriété de Φ au moyen de (f_τ).

PROPOSITION 2.3.1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une prémartingale Φ de représentation intégrante (f_τ) soit de variation bornée (vers le haut, vers le bas), est l'existence d'un sous-ensemble terminal Δ de Θ tel que l'ensemble des nombres $\varphi_\tau^{\wedge}(B) = \int_B f_\tau \, d\mu$, où $\tau \in \Delta$ et $B \in \mathcal{B}$, soit borné (vers le haut, vers le bas, respectivement).*

Dans cette proposition, nous avons considéré l'intégrale indéfinie $\varphi_\tau^{\wedge}$ de f_τ sur la sigma-algèbre $\mathcal{B}$ et non pas seulement sur $\mathcal{B}_\tau$. Nous l'appelons *prolongement naturel* de φ_τ par rapport à μ ([34], p. 323). Afin d'obtenir un critère analogue pour les prémartingales de variation bornée et absolument continues, rappelons que la suite $(\varphi_\tau^\wedge)$ des intégrales indéfinies d'une suite (f_τ) de fonctions considérées sur la sigma-algèbre $\mathcal{B}$ tout entière, est *terminalement uniformément bornée* et *terminalement uniformément absolument continue* au sens de [34], p. 323, si et seulement si la suite (f_τ) est *terminalement uniformément intégrable,* cette dernière notion étant définie comme suit :

Quel que soit ε positif, il existe un sous-ensemble terminal Δ de Θ, un soma (élément de $\mathcal{B}$, *cf.* 1.1) H de mesure finie et un nombre positif δ tel que, pour $G_\tau = \{ |f_\tau| > \delta \}$ et $G = E - H$, la relation $\tau \in \Delta$ entraîne

$$\int_{G_\tau} |f_\tau|\, d\mu < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_G |f_\tau|\, d\mu < \varepsilon.$$

Les définitions « vers le haut » et « vers le bas » s'obtiennent à partir de la précédente en y remplaçant $|f_\tau|$ par f_τ^+ et f_τ^-.

Proposition 2.3.2 ([34], 3.1). — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une prémartingale soit de variation bornée et absolument continue est que sa représentation intégrante soit terminalement uniformément intégrable. Condition analogue pour les notions « vers le haut » et « vers le bas ».*

Nous avons défini en 1.3 la trace Φ^A d'une prémartingale Φ sur un soma A de $\mathcal{A}$ comme la suite $(\varphi_\tau \mid A \wedge \mathcal{B}_\tau)$ restreinte aux τ tels que $A \in \mathcal{B}_\tau$. Nous définissons, pour $A \in \mathcal{B}$, la μ-trace de la prémartingale Φ de représentation intégrante (f_τ), comme la prémartingale de base $(A \wedge \mathcal{B}_\tau)$ et de représentation intégrante (f_τ^A), où $f_\tau^A = f_\tau \mid A$, par rapport à la mesure $\mu \mid A \wedge \mathcal{B}$.

2.4. **Convergence stochastique.** — Une suite (A_τ) de somas est dite converger stochastiquement vers O si $\lim_\tau \mu(HA_\tau) = 0$ pour tout soma H de mesure finie. Étant donnée une suite (f_τ) de fonctions, nous lui attachons l'ensemble $\mathcal{H}$ des fonctions h telles que la suite $(\{ h < f_\tau \})$ converge stochastiquement vers O, et l'ensemble $\mathcal{G}$ des fonctions g telles que la suite $(\{ f_\tau < g \})$ converge stochastiquement vers O. La *limite stochastique supérieure* $s \lim\sup_\tau f_\tau$ est alors définie comme $\bigwedge \mathcal{H}$ et la *limite stochastique inférieure* $s \lim\inf_\tau f_\tau$ comme $\bigvee \mathcal{G}$ (¹). Dans le cas où ces deux fonc-

(¹) Dans [35] une définition différente, mais logiquement équivalente a été donnée, apparemment plus compliquée, mais mieux adaptée à certaines démonstrations. Particulièrement utile est la proposition 2.8 de [35] qui n'est pas vraie pour les classes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ que nous venons de définir. L'équivalence des deux définitions des limites stochastiques découle immédiatement de cette proposition 2.8 de [35]. *Voir* aussi [17]. En ce qui concerne l'indépendance de ces notions relativement à la mesure μ définie sur $\mathcal{B}$, strictement positive, finie ou sigma-finie, *cf.* [35], § 2, en particulier Satz 2.1. Ces notions sont intrinsèques, entendant qu'elles dépendent seulement de l'algèbre de mesure $\mathcal{B}$ (*cf.* 1.11).

tions limites sont égales, leur valeur commune est la *limite stochastique* $s \lim\limits_{\tau} f_{\tau}$ de la suite (f_{τ}) qui est alors dite converger stochastiquement. Cette notion de convergence est aussi connue sous le nom de convergence en probabilité, convergence en mesure et convergence asymptotique. Cependant, sa définition est donnée le plus souvent seulement dans le cas d'une mesure finie et d'une suite de Fréchet de fonctions finies convergeant stochastiquement vers une fonction finie.

PROPOSITION 2.4.1 ([20], p. 84, Satz 4; [39]). — *Hypothèses : a est une fonction continue définie sur un sous-ensemble du produit topologique $R' \times R'$ et à valeurs dans R', R' désignant la droite numérique achevée, $s \lim\limits_{\tau} f_{\tau} = f$ et $s \lim\limits_{\tau} g_{\tau} = g$. Conclusion : $s \lim\limits_{\tau} a(f_{\tau}, g_{\tau}) = a(f, g)$ pourvu que ces fonctions soient « définies partout dans E ».*

Des lemmes de Fatou pour limites stochastiques ([35], p. 480) et de la proposition 2.3.2 résulte :

PROPOSITION 2.4.2. — *Si la prémartingale Φ de représentation intégrante (f_{τ}) est de variation bornée vers le haut et absolument continue vers le haut, et si $s \lim\limits_{\tau} \sup f_{\tau}$ est semi-intégrable, alors, pour tout soma B nous avons*

$$\limsup_{\tau} \int_B f_{\tau}\, d\mu \leqq \int_B \left(s \limsup_{\tau} f_{\tau}\right) d\mu.$$

Version analogue « vers le bas ». Si Φ est de variation bornée et absolument continue et si $f_{\omega} = s \lim f_{\tau}$ existe, alors f_{ω} est intégrable,

$$\lim_{\tau} \int_B f_{\tau}\, d\mu = \int_B f_{\omega}\, d\mu \quad \textit{pour tout soma } B$$

et

$$\lim_{\tau} \int_B |f_{\tau} - f_{\omega}|\, d\mu = 0.$$

THÉORÈME 2. — *Si Φ est une sous-martingale de variation bornée et Φ^{m} son intégrale définie en 1.4, leurs représentations intégrantes (f_{τ}) et (f_{τ}^{m}) convergent stochastiquement vers la même fonction f_{ω} qui est intégrable. Si Φ est une martingale de variation bornée vers le haut ou vers le bas, (f_{τ}) converge stochastiquement vers une fonction f_{ω} qui est intégrable vers le haut ou vers le bas, respectivement, et nous avons*

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_B f_{\omega}^{+}\, d\mu \leqq \lim_{\tau} \int_B f_{\tau}^{+}\, d\mu, \\ \displaystyle\int_B f_{\omega}^{-}\, d\mu \leqq \lim_{\tau} \int_B f_{\tau}^{-}\, d\mu, \\ \displaystyle\int_B |f_{\omega}|\, d\mu \leqq \lim_{\tau} \int_B |f_{\tau}|\, d\mu \end{cases}$$

pour tout soma B de $\mathfrak{A}$, la première inégalité restant vraie dans le cas d'une sous-martingale de variation bornée.

COROLLAIRE. — *Si la martingale Φ est de variation bornée, les suites (f_τ^{+m}), (f_τ^{-m}) et (f_τ^{Tm}) des intégrants de Φ^+, Φ^- et Φ^T convergent stochastiquement vers f_ω^+, f_ω^- et $|f_\omega|$, respectivement.*

DÉMONSTRATION. — L'existence et l'intégrabilité des limites stochastiques sont démontrées dans [35], p. 484. L'existence des limites à droite dans les inégalités (1), pour tout B de $\mathfrak{A}$ découle du fait que, sous nos hypothèses, (f_τ^+), (f_τ^-) et $(|f_\tau|)$ sont des sous-martingales. Pour obtenir les inégalités elles-mêmes, il suffit d'appliquer la proposition 2.4.2.

Pour établir l'égalité

$$s\lim_\tau f_\tau = s\lim_\tau f_\tau^m,$$

considérons la sous-martingale $\Phi - \Phi^m$ de représentation intégrante $h_\tau = f_\tau - f_\tau^m$. Nous avons

$$h_\omega = s\lim_\tau h_\tau = s\lim_\tau f_\tau - s\lim_\tau f_\tau^m,$$

ces limites étant intégrables, donc finies parce que Φ et Φ^m sont de variation bornée. Évidemment, $h_\tau \leqq 0$, donc $h_\omega \leqq 0$. Or, en vertu de la proposition 2.4.2,

$$\lim_\tau \int_E h_\tau\, d\mu \leqq \int_E h_\omega\, d\mu \leqq 0.$$

La définition de Φ^m entraîne

$$\lim_\tau \int_E h_\tau\, d\mu = 0, \qquad \text{donc} \qquad \int_E h_\omega\, d\mu = 0$$

et, par conséquent,

$$h_\omega = 0.$$

Pour démontrer le corollaire, supposons que Φ soit une martingale de variation bornée. En appliquant le résultat précédent à la sous-martingale (f_τ^+) qui est de variation bornée, nous déduisons de la proposition 2.4.1 :

$$s\lim_\tau f_\tau^{+m} = s\lim_\tau f_\tau^+ = (s\lim_\tau f_\tau)^+,$$

et de manière analogue pour (f_τ^{-m}) et (f_τ^{Tm}).

THÉORÈME 3. — *Toute martingale $\Phi = (\varphi_\tau)$ de variation bornée dont (f_τ) est la μ-représentation intégrante, admet la décomposition*

$$\varphi_\tau(A) = \varphi_{p,\tau}(A) + \int_A f_\omega\, d\mu, \qquad A \in \mathcal{B}_\tau,$$

où $f_\omega = s \lim_\tau f_\tau$ *et* $\Phi_p = (\varphi_{p,\tau})$ *est la partie purement simplement additive de* Φ; *la partie sigma-additive* Φ_c *de* Φ *est donc la martingale induite par* f_ω.

COROLLAIRES.

1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* Φ *soit sigma-additive est que* Φ *soit induite par* f_ω, *en d'autres termes que la suite* $(f_\tau;\ \tau \in \Theta_\omega)$ *représente une martingale.*

2. Φ *est purement simplement additive si et seulement si* $f_\omega = 0$.

REMARQUE. — Rappelons que, d'après les propositions 2.2.2 et 2.3.2, pour les martingales de variation bornée les notions de sigma-additivité, de continuité absolue et d'intégrabilité terminalement uniforme de la représentation intégrante, sont équivalentes. Il en est de même pour les notions d'additivité purement simple et de singularité. D'après le corollaire du théorème 2, Φ_c^+, Φ_c^- et Φ_c^T sont induites par f_ω^+, f_ω^- et $|f_\omega|$, respectivement.

DÉMONSTRATION. — Comme la martingale Φ^0 induite par f_ω est sigma-additive, grâce à la proposition 2.2.3, il suffit de démontrer que $\Phi^{00} = \Phi - \Phi^0$ est purement simplement additive. Nous référant au corollaire du théorème 2, nous pouvons nous contenter de traiter le cas où $\Phi \geqq 0$. D'après les inégalités (1) du théorème 2, nous avons $\Phi^{00} \geqq 0$. Désignons la limite stochastique de la suite (f_τ^0) des intégrants de Φ^0 par f_ω^0 et la représentation intégrante de Φ^{00} par (f_τ^{00}). Les propositions 2.2.3 et 2.4.2 nous fournissent les égalités

$$\int_B f_\omega^0\, d\mu = \lim_\tau \int_B f_\tau^0\, d\mu = \int_B f_\omega\, d\mu$$

pour tout soma B de $\mathcal{A}$, donc $f_\omega^0 = f_\omega$ et, par conséquent,

$$s \lim_\tau f_\tau^{00} = 0.$$

Soit alors Ψ une martingale sigma-additive, de représentation intégrante (g_τ), telle que $\Omega \leqq \Psi \leqq \Phi^{00}$. Comme

$$0 \leqq s \lim_\tau g_\tau \leqq s \lim_\tau f_\tau^{00},$$

nous avons $s \lim_\tau g_\tau = 0$. Des propositions 2.2.2 et 2.4.2 découle

$$\int_B g_\rho\, d\mu = \lim_\tau \int_B g_\tau\, d\mu = \int_B \left(s \lim_\tau g_\tau\right) d\mu = 0 \quad \text{pour tout } B \in \mathcal{B}_\rho,$$

donc

$$\Psi = \Omega.$$

C. Q. F. D.

Les corollaires sont immédiats.

THÉORÈME 4. — *Soit Φ une sous-martingale de variation bornée, Φ^m son intégrale, (f_τ) et (f_τ^m) leurs représentations intégrantes, $f_\omega = s \lim\limits_\tau f_\tau$. Alors, la martingale induite par f_ω est la partie absolument continue Φ_c^m de Φ^m. La sous-martingale Φ est absolument continue vers le haut dans le cas et seulement dans le cas où $(f_\tau;\ \tau \in \Theta_\omega)$ représente une sous-martingale.*

DÉMONSTRATION. — La première proposition découle des théorèmes 2 et 3. La suffisance de la condition dans la seconde proposition résulte de la proposition 2.2.4. Supposons maintenant que Φ soit absolument continue vers le haut. Pour tout $\rho \in \Theta$ et $A \in \mathcal{B}_\rho$, en vertu de la proposition 2.4.2 valent les inégalités

$$\int_A f_\rho\, d\mu \leq \lim_\tau \int_A f_\tau\, d\mu \leq \int_A f_\omega\, d\mu,$$

qui nous permettent d'affirmer que $(f_\tau;\ \tau \in \Theta_\omega)$ est une semi-martingale.

REMARQUE. — Les théorèmes 3 et 4 sont des théorèmes de convergence au sens plein (« Full differentiation theorems » suivant [22], p. 221), entendant par là que nous ne nous contentons pas d'établir la convergence de la suite (f_τ), mais que nous interprétons l'intégrale de la limite f_ω.

2.5. **Convergence en moyenne d'ordre 1.** — La norme d'ordre 1 d'une fonction f est définie par $\| f \|_1 = \int_E |f|\, d\mu$. Nous désignons par $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1(\mathcal{B})$ l'espace de Banach des fonctions f vérifiant $\| f \|_1 < +\infty$, de norme $\| \varphi \|_1$. φ désignant l'intégrale indéfinie de f sur $\mathcal{B}$, cette norme $\| f \|_1$ n'est autre que la variation totale de φ, dont la norme $\| \varphi \|_1$ définie en 1.11. La transformation $f \to \varphi$ applique isomorphiquement et isométriquement $\mathcal{L}_1(\mathcal{B}_\omega)$ sur $\mathcal{V}_1$. Pour toute prémartingale Φ de représentation intégrante (f_τ), la norme $\| \Phi \|_1$ définie en 1.3, dernières lignes, est $\limsup\limits_\tau \| \varphi_\tau \|_1$. Ainsi, Φ est de variation bornée si et seulement si cette limite supérieure est finie. Dans le cas d'une martingale,

$$\| \Phi \|_1 = \lim_\tau \| f_\tau \|_1 = b \sup_\tau \| f_\tau \|_1$$

(*cf.* les lignes suivant le corollaire de la proposition 1.4.3).

Soit alors Φ une martingale de variation bornée, Φ_c sa partie sigma-additive, Φ_p sa partie purement simplement additive et $f_\omega = s \lim\limits_\tau f_\tau$. Nous posons

$$\varphi^{\vee T} = Z(\Phi^T), \qquad \varphi_c^{\vee T} = Z(\Phi_c^T), \qquad \varphi_p^{\vee T} = Z(\Phi_p^T)$$

(*cf.* 1.6 et 1.7); nous rappelons que les opérations Z et ^{T} sont permutables entre elles ainsi qu'avec $_c$ et $_p$. D'après la définition de Φ^T (*cf.* 1.4, (3)), nous avons $\| \Phi \|_1 = \varphi^{\vee T}(E)$. D'autre part, nous déduisons du théorème 3, corollaire 1 et remarque (en 2.4), que $\| f_\omega \|_1 = \varphi_c^{\vee T}(E)$. Comme $\Phi_p^T = \Phi^T - \Phi_c^T$, nous obtenons

$$(DS) \qquad \varphi_p^{\vee T}(E) = \| \Phi \|_1 - \| f_\omega \|_1.$$

Nous avons là une expression du défaut de sigma-additivité de Φ (*cf.* dernières lignes de 1.7).

PROPOSITION 2.5.1. — *Soit Φ une martingale de variation bornée dont (f_τ) est la représentation intégrante et $f_\omega = s \lim_\tau f_\tau$. Les quatre conditions suivantes sont alors équivalentes :*

1° *Φ est sigma-additive;*

2° *(f_τ) converge fortement vers f_ω dans $\mathcal{L}_1$;*

3° *(f_τ) converge faiblement vers f_ω dans $\mathcal{L}_1$;*

4° $\| \Phi \|_1 = \| f_\omega \|_1$.

REMARQUES.

1. D'autres conditions équivalentes à 1° sont énoncées dans les propositions 1.8.1, 2.2.2 et 2.3.2.

2. La convergence faible de la suite (f_τ) des intégrants d'une martingale dans $\mathcal{L}_1$ vers une fonction f entraîne que Φ est de variation bornée et sigma-additive et l'égalité $f = s \lim_\tau f_\tau$.

DÉMONSTRATION. — 1° implique 2° en vertu des propositions 2.2.2 et 2.4.2. L'implication 2° $\to$ 3° est triviale. Montrons que 3° $\to$ 1° : Soit Φ une martingale dont la suite (f_τ) des intégrants converge faiblement dans $\mathcal{L}_1$ vers une fonction f. Pour tout soma A de $\mathcal{B}_\tau$ on a

$$\int_A f_\tau \, d\mu = \lim_{\tau \ll \vartheta} \int_A f_\vartheta \, d\mu = \int_A f \, d\mu,$$

puisque l'intégration sur A d'une fonction de $\mathcal{L}_1$ est une fonctionnelle linéaire dans $\mathcal{L}_1$. Ainsi donc Φ est induite par f. D'après la proposition 1.8.1, Φ est de variation bornée et sigma-additive, par conséquent la suite (f_τ) converge dans $\mathcal{L}_1$ faiblement vers $s \lim_\tau f_\tau$. La deuxième remarque se trouve établie. Enfin 4° est équivalent à 1°, d'après (DS).

L'équivalence des quatre conditions : « Φ est uniformément intégrable », « Φ est une martingale induite par une fonction de $\mathcal{L}_1$ », « Φ converge fortement ou faiblement dans $\mathcal{L}_1$ » fut démontrée dans [23]. Tandis que, dans la démonstration de la proposition 2.5.1, la fonction limite de (f_τ) dans $\mathcal{L}_1$ apparaît comme limite stochastique, existant en vertu du théorème 2 (en 2.4), Helms introduit celle-ci en faisant appel à la compacitié faible conditionnelle des sous-ensembles uniformément intégrables de $\mathcal{L}_1$. Une troisième méthode pour se procurer la fonction limite découle de la proposition 1.8.1; en effet, pour les martingales induites, la convergence forte dans $\mathcal{L}_1$ s'établit très facilement. L'équivalence de 1° et 3° peut aussi être déduite de la proposition 1.11.1 et du théorème 1 appliquée à ψ_τ = intégrale indéfinie de f_τ sur $\mathcal{B}_\omega$.

Observons à ce propos que $\|\varphi_\tau\| = \|\psi_\tau\|$ quel que soit τ. Si donc la conjecture du complément 3 en fin de 1.11 se vérifie, la proposition correspondante, la proposition 1.11.1 et le théorème 1 (en 1.11) pourront être envisagés comme version intrinsèque de la proposition 2.5.1 au moins en ce qui concerne 1°, 2°, 3°. Quant à 4°, sa formulation intrinsèque est $\|\Phi\|_1 = \|\Phi_c\|_1$ (*cf.* la proposition 1.7.1, dernières lignes de 1.7, 1er alinéa de 2.5).

$\mathcal{C}$ désignant une sigma-sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$ (*cf.* premières lignes de 1.11), ξ une fonction réelle définie sur $\mathcal{C}$, sigma-additive et de variation bornée, à toute mesure $\mu \mid \mathcal{B}$ finie et strictement positive correspond un prolongement de ξ sur $\mathcal{B}$ sigma-additif, ayant la même norme que ξ, à savoir le prolongement naturel $\xi^\wedge \mid \mathcal{B}$ (*cf.* 2.3). Nous présumons que tout prolongement de ξ sur $\mathcal{B}$ sigma-additif, conservant la norme, peut être interprété comme prolongement naturel de ξ relativement à une mesure μ convenable.

Un théorème de Dubrovskij [14] relatif aux sous-ensembles $\mathfrak{V}$ de $\mathfrak{V}_1$ affirme l'équivalence des propriétés suivantes : Les fonctions de $\mathfrak{V}$ sont uniformément sigma-additives; il existe une mesure μ définie sur $\mathcal{B}$ strictement positive, finie et sigma-additive telle que les fonctions de $\mathfrak{V}$ soient uniformément μ-continues. Considérons alors une martingale $\Phi = (\varphi_\tau)$ sigma-additive de variation bornée et, pour tout τ, un prolongement $\psi_\tau \mid \mathcal{B}_\omega$ sigma-additif, conservant la norme; on peut se demander s'il existe une mesure $\mu \mid \mathcal{B}$ finie et strictement positive telle que, pour tout τ, ψ_τ soit le prolongement naturel de φ_τ sur $\mathcal{B}_\omega$ relativement à μ. Dans l'affirmative, d'après la proposition 2.5.1, la suite (ψ_τ) convergerait fortement vers (φ_ω).

Les considérations qui précèdent concernant la convergence en moyenne peuvent être appliquées aux théorèmes de convergence stochastique de martingales en 2.4 et ultérieurement aux théorèmes de convergence suivant l'ordre de martingales en 3.3, ces convergences étant de nature intrinsèque (*cf.* note (4) en bas de page, début de 2.4, et définition en début de 3.1), pour autant que les hypothèses se laissent traduire aisément en langage intrinsèque.

2.6. **Convergence dans les espaces d'Orlicz.** — Nous désignons par x et y des fonctions réelles, définies dans $[0, +\infty[$, à valeurs non négatives, $+\infty$ comprise, non décroissantes et non identiquement nulles, telles que x soit « inverse » de y, et réciproquement. Les « sauts » de x correspondent donc aux « intervalles où y est constante ». L'inégalité $x(u) \leqq \lambda$ pour un λ fini et pour tout u est vérifiée dans le cas et seulement dans le cas où $y(v) = +\infty$ pour $v > \lambda$. Comme x détermine y, sauf éventuellement sur un ensemble dénombrable, et réciproquement, les fonctions

$$X(u) = \int_0^u x(\bar{u})\,d\bar{u} \qquad \text{et} \qquad Y(v) = \int_0^v Y(\bar{v})\,d\bar{v}$$

sont déterminées de manière unique, soit par x, soit par y. $X(0) = Y(0) = 0$, X et Y sont non négatives, non décroissantes, non identiquement nulles, à valeurs finies sur un intervalle $[0, \delta]$, avec $\delta > 0$, et convexes sur tout intervalle où elles sont finies. Pour toute fonction mesurable f, nous posons

$$(1) \qquad \begin{cases} \|f\|_X = b \sup\left\{ \int_E |fg|\,d\mu\,;\ \int_E Y(|g|)\,d\mu \leqq 1 \right\}, \\ \|f\|_Y = b \sup\left\{ \int_E |fg|\,d\mu\,;\ \int_E X(|g|)\,d\mu \leqq 1 \right\}. \end{cases}$$

On a alors les inégalités

$$(2) \qquad \int_E |fg|\,d\mu \leqq \|f\|_X \|g\|_Y, \qquad \left\| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right\|_X \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_X$$

si la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge, et $|f_1| \leqq |f_2|$ entraîne

$$\|f_1\|_X \leqq \|f_2\|_X.$$

L'espace $\mathcal{L}_X$ des fonctions f vérifiant $\|f\|_X < +\infty$ est un espace de Banach pour la norme $\|\ \|_X$. $\mathcal{L}_X$ et $\mathcal{L}_Y$ sont appelés *espaces d'Orlicz complémentaires* ([55], 5.5). On obtient des cas particuliers en prenant des nombres p et q tels que

$$1 \leqq p \leqq +\infty, \qquad 1 \leqq q \leqq +\infty \qquad \text{et} \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

avec la convention $p = +\infty$ si $q = 1$, et $q = +\infty$ si $p = 1$, en posant

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p\,d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si} \quad p < +\infty,$$
$$\|f\|_{+\infty} = \sup |f|,$$

et en désignant par $\mathcal{L}_p$ l'espace des fonctions f pour lesquelles $\|f\|_p$ est finie. En effet, pour $x(u) = 1$, $X(u) = u$ et $y(v) = Y(v) = 0$ si $0 \leqq v \leqq 1$,

$y(v) = Y(v) = +\infty$ si $1 < v$, par conséquent $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{+\infty}$,

$$\|f\|_X = \|f\|_1, \qquad \|f\|_Y = \|f\|_{+\infty}.$$

Pour $x(u) = u^{p-1}$, $1 < p < +\infty$,

$$X(u) = \frac{1}{p} u^p, \qquad y(v) = v^{q-1}, \qquad Y(v) = \frac{1}{q} v^q,$$

par conséquent,

$$\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_p, \qquad \mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_q, \qquad \|f\|_X = q^{\frac{1}{q}} \|f\|_p, \qquad \|f\|_Y = p^{\frac{1}{p}} \|f\|_q.$$

Si A désigne un soma quelconque différent de O, le sous-espace de $\mathcal{L}_X$ qui consiste en les fonctions s'annulant dans $E - A$, est comme espace de Banach, isomorphe et isométrique à l'espace d'Orlicz, relatif à X, des fonctions définies sur A, ainsi qu'on le voit en considérant l'application « restriction à A ». Si $\mu(A)$ est finie, des constantes finies et positives α et β existent telles que

$$\alpha \int_A |f|\, d\mu \leqq \|fc_A\|_X \leqq \beta \sup_A |f| \quad \text{pour toute fonction } f.$$

Par conséquent, la convergence forte dans $\mathcal{L}_X$ entraîne la convergence stochastique vers la même limite. Si $\mu(E)$ est finie, $\mathcal{L}_{+\infty} \subseteq \mathcal{L}_X \subseteq \mathcal{L}_1$, et la convergence forte dans $\mathcal{L}_{+\infty}$ ou $\mathcal{L}_X$ entraîne la convergence dans $\mathcal{L}_X$ ou $\mathcal{L}_1$.

Dans le cas $\mu(E) = +\infty$, une fonction f de $\mathcal{L}_X$ n'est pas nécessairement semi-intégrable (entendant sur E), toutefois, f est *intégrable à mesure finie* ([5]), c'est-à-dire intégrable sur tout soma de mesure finie. Si nous voulons parler d'une martingale induite par une fonction f de $\mathcal{L}_X$, nous devons introduire de légères variantes des notions de 1.3. Nous définissons donc une *prémartingale à mesure finie* sur la base $(\mathcal{B}_\tau)$ comme une suite $(\varphi_\tau \mid \mathcal{B}_\tau^f)$, où $\mathcal{B}_\tau^f$ désigne la sous-algèbre booléenne des somas de $\mathcal{B}_\tau$ de mesure finie, φ_τ une fonction sigma-additive sur $\mathcal{B}_\tau^f$ à valeurs finies. Φ est dite *sous-martingale* (*martingale*) *à mesure finie*, si $\rho \leqslant \tau$ et $A \in \mathcal{B}_\rho$ entraînent

$$\varphi_\rho(A) \leqq \varphi_\tau(A) \qquad (\varphi_\rho(A) = \varphi_\tau(A)).$$

A tout $\varphi_\tau \mid \mathcal{B}_\tau^f$ correspond une fonction f_τ, $\mathcal{B}_\tau$-mesurable, telle que l'intégrale de f_τ sur tout soma A de $\mathcal{B}_\tau^f$ soit $\varphi_\tau(A)$. La suite (f_τ) est dite représentation intégrante de Φ. $\mathcal{C}$ désignant une sigma-sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$ telle que la restriction de μ à $\mathcal{C}$ soit sigma-finie, f une fonction intégrable à mesure finie, l'espérance conditionnelle $\mathcal{E}(f \mid \mathcal{C})$ est définie

([5]) Expression formée de manière analogue à l'expression usuelle *à distance finie*.

comme la fonction $\mathcal{C}$-mesurable dont la μ-intégrale sur tout C de $\mathcal{C}$ de mesure finie est $\int_C f\,d\mu$ (*cf.* 2.3). L'inégalité (égalité) caractérisant les sous-martingales (martingales) peut alors s'exprimer par $\rho \ll \tau$ implique

$$f_\rho \leqq \mathcal{E}(f_\tau \mid \mathcal{B}_\rho) \qquad (f_\rho = \mathcal{E}(f_\tau \mid \mathcal{B}_\rho)).$$

Une martingale à mesure finie $\Phi = (\varphi_\tau)$ est dite sigma-additive si, pour tout $\rho \in \Theta$ et tout $A \in \mathcal{B}_\rho^f$, la martingale $(\varphi_\tau \mid A \wedge \mathcal{B}_\tau)$, définie pour les paramètres τ tels que $A \in \mathcal{B}_\tau$ (trace de Φ sur A), est sigma-additive. Cette propriété peut aussi être formulée ainsi : Pour tout A de $\mathcal{A}$ de mesure finie, la martingale de base $(A \wedge \mathcal{B}_\tau;\ \tau \in \Theta)$ et de représentation intégrante $(f_\tau \mid A)$ par rapport à $\mu \mid A \wedge \mathcal{B}$ (μ-trace de μ sur A) est sigma-additive.

Ces notions « à mesure finie » ne sont pas requises dans les problèmes de convergence stochastique ou essentielle, car une telle convergence sur tout soma de mesure finie entraîne la même convergence sur E tout entier. C'est pourquoi nous nous en servirons seulement dans le présent paragraphe (à savoir 2.6).

Par *martingale dans* $\mathcal{L}_X$ nous entendons une martingale à mesure finie dont la représentation intégrante vérifie $f_\tau \in \mathcal{L}_X$ quel que soit τ.

Proposition 2.6.1. — *$\mathcal{C}$ étant une sigma-sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$ telle que la restriction de μ à $\mathcal{C}$ est sigma-finie, alors pour tout $f \in \mathcal{F}_\mathcal{C}$*

$$(3) \qquad \|f\|_X = b \sup\left\{ \int_E fg\,d\mu\,;\ \int_E Y(|g|)\,d\mu \leqq 1,\ fg \geqq 0,\ g \in \mathcal{F}_\mathcal{C} \right\}$$

Démonstration. — Dans la définition de $\|f\|_X$ d'après (1), il suffit de considérer des fonctions g telles que $fg \geqq 0$. Soit g une telle fonction. Comme g est intégrable à mesure finie, $g' = \mathcal{E}(g \mid \mathcal{C})$ existe. En vertu de l'inégalité de Jensen ([11], p. 33),

$$Y(|g'|) \leqq \mathcal{E}(Y(|g|) \mid \mathcal{C}),$$

donc

$$\int_E Y(|g'|)\,d\mu \leqq \int_E Y(|g|)\,d\mu \leqq 1.$$

L'hypothèse $f \in \mathcal{F}_\mathcal{C}$ entraîne

$$0 \leqq \mathcal{E}(fg \mid \mathcal{C}) = fg' \quad ([11],\ \text{p. } 22),$$

d'où

$$\int_E fg\,d\mu = \int_E \mathcal{E}(fg \mid \mathcal{C})\,d\mu = \int_E fg'\,d\mu,$$

ce qui démontre (3), puisque $g' \in \mathcal{F}_\mathcal{C}$ et $fg' \geqq 0$.

PROPOSITION 2.6.2. — *Si $\mathcal{C}$ est une sigma-sous-algèbre booléenne de $\mathcal{B}$ telle que la restriction de μ à $\mathcal{C}$ soit sigma-finie et si f est une fonction intégrable à mesure finie, nous avons*

$$(4) \qquad \| \mathcal{E}(f \mid \mathcal{C}) \|_X \leq \| f \|_X.$$

DÉMONSTRATION. — Posons $f' = \mathcal{E}(f \mid \mathcal{C})$ et exprimons $\| f' \|_X$ au moyen de (3). Si fg est intégrable, $f'g = \mathcal{E}(fg \mid \mathcal{C})$, donc

$$\int_E f' g \, d\mu = \int_E fg \, d\mu \leq \| f \|_X.$$

Si fg n'est pas intégrable, $\| f \|_X = +\infty$. Ainsi est démontrée l'inégalité (4).

Pour une prémartingale Φ de représentation intégrante (f_τ) nous posons $\| \Phi \|_X = \limsup\limits_{\tau} \| f_\tau \|_X$. Φ est dite *de variation bornée d'ordre X* si $\| \Phi \|_X$ est finie, ou encore, s'il existe un sous-ensemble terminal Δ de Θ tel que l'ensemble des fonctions f_τ, où $\tau \in \Delta$, est fortement borné dans $\mathcal{L}_X$.

PROPOSITION 2.6.3. — *Quelle que soit la prémartingale Φ dont la représentation intégrante (f_τ) converge stochastiquement vers une fonction f_ω, nous avons*

$$(5) \qquad \| f_\omega \|_X \leq \liminf_{\tau} \| f_\tau \|_X \leq \| \Phi \|_X.$$

DÉMONSTRATION. — De l'inégalité $\int_E Y(|g|) \, d\mu \leq 1$ et d'un des lemmes de Fatou pour limites stochastiques ([35], p. 480, (5.3)) résulte

$$\int_E | f_\omega g | \, d\mu \leq \liminf_{\tau} \int_E | f_\tau g | \, d\mu \leq \liminf_{\tau} \| f_\tau \|_X.$$

Soit alors Φ une martingale à mesure finie. D'après la proposition 2.6.2, $\| f_\tau \|_X$ est une fonction croissante de τ. Par conséquent, $\| f_\tau \|_X \leq \| \Phi \|_X$ quel que soit τ, et

$$\lim_{\tau} \| f_\tau \|_X = b \sup_{\tau} \| f_\tau \|_X = \| \Phi \|_X.$$

Ainsi donc Φ est de variation bornée d'ordre X si et seulement si (f_τ) est bornée dans $\mathcal{L}_X$, et $\Phi = \Omega$ si et seulement si $\| \Phi \|_X = 0$.

THÉORÈME 5. — *Φ désigne une martingale dans $\mathcal{L}_X$ de représentation intégrante (f_τ). Si la suite (f_τ) est bornée dans $\mathcal{L}_X$, elle converge stochastiquement et sa limite f_ω se trouve dans $\mathcal{L}_X$. En outre, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *Φ est sigma-additive à mesure finie et bornée dans $\mathcal{L}_X$;*

2° *La suite* (f_τ) *converge stochastiquement, sa limite appartient à* $\mathcal{L}_X$ *et* Φ *est induite par* f_ω;

3° Φ *est induite par une fonction* f *de* $\mathcal{L}_X$.

Si ces conditions sont satisfaites, nous avons les relations

$$\|\Phi\|_X = \|f_\omega\|_X \leqq \|f\|_X. \tag{6}$$

Corollaire. — *Supposons* $\mathcal{B}_\omega = \mathcal{B}$. *Alors, en faisant correspondre à chaque fonction de* $\mathcal{L}_X$ *la martingale qu'elle induit, on définit un isomorphisme (isométrique) de* $\mathcal{L}_X$ *sur l'espace des martingales sigma-additives à mesure finie et bornées dans* $\mathcal{L}_X$ *envisagé comme espace de Banach.*

Démonstration. — D'après le théorème 2 (en 2.4) la limite stochastique f_ω de la représentation intégrante d'une martingale bornée dans $\mathcal{L}_X$ existe sur tout soma de A de mesure finie, donc partout dans E, et, d'après la proposition 2.6.3, f_ω appartient à $\mathcal{L}_X$. Si la condition 1° est satisfaite, on voit que Φ est induite par f_ω en se fixant un paramètre ρ et en appliquant le théorème 3 (en 2.4) aux suites $(f_\tau \mid B;\ \rho \leqslant \tau)$, $B \in \mathcal{B}_\rho^f$ (ou aux traces de Φ sur les somas de $\mathcal{A}$ de mesure finie). Il est clair que 2° entraîne 3° et 3° entraîne 1°, d'après les propositions 1.8.1 et 2.6.2. Enfin, (6) découle de (4) et (5).

Remarques :

1. Si x n'est pas bornée ou, ce qui est équivalent, si y est partout finie, on peut remplacer la condition 1° du théorème par « Φ est bornée dans $\mathcal{L}_X$ ». Ceci est vrai, en particulier, pour les espaces $\mathcal{L}_p$, où $1 < p \leqq +\infty$.

En effet, si $\|f_\tau\|_X \leqq \gamma$ pour tout τ, γ étant une constante finie positive, en vertu de [55], p. 80 :

$$\int_E X\left(\frac{|f_\tau|}{\gamma}\right) d\mu \leqq 1 \quad \text{quel que soit } \tau.$$

Cette inégalité implique l'uniforme intégrabilité des f_τ sur tout soma de mesure finie [41], donc la sigma-additivité de Φ.

2. Si $\mu(E)$ est finie et si x est bornée, alors $\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_1$ et les normes $\|\ \|_X$ et $\|\ \|_1$ sont équivalentes. On se trouve dans la situation de la proposition 2.5.1.

Théorème 6. — *Soit* Φ *une martingale dans* $\mathcal{L}_X$ *de représentation intégrante* (f_τ). *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° (f_τ) *converge fortement dans* $\mathcal{L}_X$;

2° (f_τ) *converge faiblement dans* $\mathcal{L}_X$;

3° *Les conditions* 1°, 2°, 3° *du théorème* 5 *sont satisfaites et, pour tout* ε *positif il existe un paramètre* ρ *et une fonction* h *dans* $\mathcal{L}_X$, *mesurable* $\mathcal{B}_\rho$, *telle que* $\|f_\omega - h\|_X < \varepsilon$.

DÉMONSTRATION (*voir* aussi [23]). — 1° implique évidemment 2°. Supposons 2° satisfaite et désignons la limite faible de (f_τ) par f. Pour $A \in \mathcal{B}_\rho^f$, l'intégration sur A est une fonctionnelle linéaire continue dans $\mathcal{L}_X$, par conséquent

$$\int_A f_\rho \, d\mu = \lim_{\rho \ll \tau} \int_A f_\tau \, d\mu = \int_A f \, d\mu,$$

ce qui est la condition 3° du théorème 5. En outre, $f = f_\omega$, car f est mesurable $\mathcal{B}_\omega$ et f et f_ω induisent Φ. Désignons encore par $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions h de $\mathcal{L}_X$ jouissant de la propriété suivante : Il existe un paramètre ρ tel que h est mesurable $\mathcal{B}_\rho$. $\mathcal{H}$ étant un sous-espace linéaire de $\mathcal{L}_X$, son adhérence faible coïncide avec son adhérence forte. Comme la fonction f_ω est la limite faible de (f_τ), elle appartient donc à l'adhérence forte de $\mathcal{H}$, ce qui achève l'établissement de la condition 3°. Supposons enfin 3°. Soit ε positif et choisissons ρ et h comme dans l'énoncé de cette condition. Alors $\rho \ll \tau$ entraîne $h - f_\tau = \mathcal{E}(h - f_\omega \mid \mathcal{B}_\tau)$, donc en vertu de la proposition 2.6.2, l'inégalité $\| h - f_\tau \|_X < \varepsilon$, d'où résulte

$$\| f_\tau - f_\omega \|_X \leq \| f_\tau - h \|_X + \| h - f_\omega \|_X < 2\varepsilon.$$

REMARQUE. — Si X jouit de la propriété

$$\limsup_{u \to +\infty} \frac{X(2u)}{X(u)} < +\infty,$$

on peut remplacer la condition 3° du théorème 6 par : Les conditions 1°, 2°, 3° du théorème 5 sont satisfaites. Ceci est vrai, en particulier pour les espaces $\mathcal{L}_p$, où $1 \leq p < +\infty$.

En effet, à l'aide du lemme α ([55], p. 83), on démontre facilement que l'espace $\mathcal{H}$ défini dans la démonstration du théorème est alors dense dans l'espace $\mathcal{L}_X(\mathcal{B}_\omega)$ des fonctions de $\mathcal{L}_X$ mesurables $\mathcal{B}_\omega$. Pour obtenir un exemple où $\mathcal{H}$ n'est pas dense dans $\mathcal{L}_X(\mathcal{B}_\omega)$, considérons l'algèbre $\mathcal{B}$ des sous-ensembles boréliens d'intervalle $[0, 1]$ avec la mesure de Lebesgue, modulo les ensembles de mesure nulle. Si $\mathcal{B}_\tau$ est l'algèbre booléenne engendrée par une partition générique τ de $[0, 1]$ en un nombre fini d'intervalles, et $\ll$ la relation « plus fine que », alors $\mathcal{B}_\omega = \mathcal{B}$ et chaque fonction de $\mathcal{H}$ est bornée. Or, on sait ([31], p. 499) que l'ensemble des fonctions bornées n'est pas dense dans $\mathcal{L}_X$ si $\mathfrak{X}$ ne satisfait pas à la condition de la remarque. Dans le cas particulier de l'espace $\mathcal{L}_{+\infty}$, l'adhérence de $\mathcal{H}$ consiste en les fonctions réglées au sens de Bourbaki (plus précisément, en les classes de fonctions équivalentes à des fonctions réglées). Par conséquent, une martingale induite par une fonction f mesurable et bornée converge fortement ou faiblement vers f dans $\mathcal{L}_{+\infty}$ dans le cas et seulement dans le cas où f est une fonction réglée.

2.7. **Cas des fonctions de cellule.** — Nous reprenons le cadre de 1.9 : $\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}$ est la sigma-algèbre booléenne atomique engendrée par la partition $\mathfrak{T}$ de E, $\leqslant$ est la relation de finesse en partition $\sqsubset$. La sigma-finitude de la restriction de la mesure μ à $\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}$ s'exprime par la finitude de la mesure des constituants de $\mathfrak{T}$.

Une fonction de cellule φ est dite *absolument continue* ou *singulière* si la prémartingale $\Phi = G(\varphi)$ engendrée par φ possède cette propriété; de même pour les notions « vers le haut » ou « vers le bas ». Explicitons, comme exemple, la définition de la continuité absolue :

Quel que soit ε positif, il existe un sous-ensemble terminal $\mathfrak{D}$ de $\mathfrak{T}$, un soma H de mesure finie et un nombre δ positif, tels que $|\varphi(\mathfrak{J})| < \varepsilon$ pour tout sous-ensemble $\mathfrak{J}$ d'une partition $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{D}$ vérifiant $\mu\left(H \wedge \bigvee \mathfrak{J}\right) < \varepsilon$. Étant fixée une partition $\mathfrak{Y}$ de E, on peut toujours choisir H dans $\mathcal{B}_{\mathfrak{Y}}$, et si $\mu(E)$ est finie, on peut prendre $H = E$. D'après la proposition 2.2.2, une fonction de cellule additive φ est absolument continue ou singulière si et seulement si le prolongement additif $\varphi^{\vee}$ de φ à l'algèbre $\mathfrak{A}$ jouit de cette propriété. Une fonction de cellule additive φ de variation bornée est absolument continue ou singulière selon que φ, ou, ce qui revient au même $\varphi^{\vee}$, est sigma-additive ou purement simplement additive. De manière analogue, les propositions 2.2.1, 2.2.3 et 2.2.4 sont immédiatement transférables aux fonctions de cellule.

Pour une fonction de cellule φ, la représentation intégrante $(f_{\mathfrak{T}})$ (relative à μ) de la prémartingale $\Phi = G(\varphi)$ s'obtient de la manière suivante : $f_{\mathfrak{T}}$ est la fonction mesurable prenant sur chaque constituant J de $\mathfrak{T}$ la valeur $\varphi(J)/\mu(J)$, en d'autres termes, $f_{\mathfrak{T}}$ est la $\mathfrak{T}$-dérivée de φ, que nous désignons par $D_{\mathfrak{T}}\varphi$. Les *dérivées stochastiques supérieure* et *inférieure* de φ, notées $s\,D^s\varphi$ et $s\,D^i\varphi$, sont définies comme les limites stochastiques supérieure et inférieure de $(D_{\mathfrak{T}}\varphi;\ \mathfrak{T} \in \mathfrak{T})$ respectivement. φ est dite *stochastiquement dérivable* ou *dérivable* $\mathcal{L}_X$ suivant que $(D_{\mathfrak{T}}\varphi)$ converge stochastiquement (c'est-à-dire que $s\,D^s\varphi = s\,D^i\varphi$) ou fortement dans $\mathcal{L}_X$. La limite est alors appelée *dérivée stochastique* ou *dérivée* $\mathcal{L}_X$ de φ et désignée par $s\,D\varphi$ ou $\mathcal{L}_X$-$D\varphi$, plus brièvement, dans l'un ou l'autre cas, par $D\varphi$ quand aucune ambiguïté n'est possible. Les propositions 2.4.2, 2.5.1, 2.6.3 et les théorèmes 2-6 (en 2.4 et 2.6) se transfèrent immédiatement au cadre présent. Par exemple, tenant compte de 1.10, en particulier de la définition (1), la proposition 2.4.2 fournit une version cellulaire partielle des théorèmes 2 et 3, à savoir :

THÉORÈME 2-3 *a* (6). — *Toute fonction de cellule φ de variation bornée et sous-additive admet une dérivée stochastique $D\varphi$ intégrable qui est aussi*

(6) *a* se rapporte à « atomique ».

la dérivée stochastique de la fonction de cellule intégrale φ^m. *Pour toute cellule* I *nous avons* $\int_I D\varphi\, d\mu = (\varphi^m)_c(I)$, *où* $(\varphi^m)_c$ *désigne la partie sigma-additive de* φ^m.

On transfère le théorème 5 (en 2.6) en définissant la $\mathcal{L}_X$-norme d'une fonction de cellule additive comme $\mathcal{L}_X$-norme de la martingale qu'elle engendre; le corollaire ainsi transféré sera étudié plus tard dans le cas d'une base cellulaire particulière (*cf.* 4.6).

Énonçons enfin quelques théorèmes spécifiquement cellulaires. De [36], p. 210, nous reportant à 1.10, découle :

THÉORÈME 7. — *Supposons que* $\mathfrak{T}$ *possède les propriétés* **E** *et* **P** *et que* φ *est de variation bornée. Alors*

$$sD^s\varphi = sD\varphi^s \qquad \text{et} \qquad sD^i\varphi = sD\varphi^i.$$

Par conséquent, φ *est dérivable stochastiquement si et seulement si* $D\varphi^s = D\varphi^i$, *ce qui est en particulier le cas si* φ *est intégrable au sens de Burkill-Kolmogoroff.*

THÉORÈME 8 ([36], p. 208, Satz 1.3). — *Supposons que* $\mathfrak{T}$ *possède la propriété* **E** *et que* φ *soit de variation bornée et absolument continue. Alors* $sD^s\varphi$ *et* $sD^i\varphi$ *sont intégrables et*

$$\varphi^s(E) = \int_E sD^s\varphi\, d\mu, \tag{1 s}$$

$$\varphi^i(E) = \int_E sD^i\varphi\, d\mu. \tag{1 i}$$

CONSÉQUENCES ([35], p. 482, Satz 5.4). — Quel que soit $B \in \mathcal{B}$,

$$\limsup_{\mathfrak{T}} \int_B D_{\mathfrak{T}}\varphi\, d\mu = \int_B sD^s\varphi\, d\mu, \tag{2 s}$$

$$\liminf_{\mathfrak{T}} \int_B D_{\mathfrak{T}}\varphi\, d\mu = \int_B sD^i\varphi\, d\mu, \tag{2 i}$$

d'où, pour $B = I \in \mathcal{I}$, tenant compte des définitions individuelles de $\varphi^s(I)$ et $\varphi^i(I)$ en 1.10, (1) et de $\varphi(\mathcal{I}_{\mathfrak{X}}) = \int_I D_{\mathfrak{X}}\varphi\, d\mu$,

$$\varphi^s(I) = \int_I sD^s\varphi\, d\mu, \tag{3 s}$$

$$\varphi^i(I) = \int_I sD^i\varphi\, d\mu. \tag{3 i}$$

Nous constatons ainsi que φ^s et φ^i sont additives, donc

$$\varphi^s = \varphi^{sm} \qquad \text{et} \qquad \varphi^i = \varphi^{im}.$$

Dérivées extrêmes en moyenne. — L'examen de la démonstration de l'inégalité

$$(2\,s') \qquad \limsup_{\mathfrak{T}} \int_B D_{\mathfrak{T}}\varphi\, d\mu \leqq \int_B s\,D^s\varphi\, d\mu$$

consistant en l'application d'un lemme généralisé de Fatou ([35], p. 480, (5.2)) permet d'affirmer que l'implication suivante ($4s'$) ait lieu :

Quel que soit le nombre positif ε, il existe $\mathcal{R} \in \mathfrak{T}$ telle que, pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\mathcal{R} \sqsubset \mathfrak{T}$ entraîne

$$\int_B (f^s - D_{\mathfrak{T}}\varphi)\, d\mu > -\varepsilon \qquad \text{pour} \quad f^s = s\,D^s\varphi.$$

Cette implication ($4s'$) est plus forte que ($2s'$) en ce que le choix de $\mathcal{R}$ ne dépend que de ε et non de B.

De même, l'examen de la démonstration de l'inégalité

$$(2\,s'') \qquad \limsup_{\mathfrak{T}} \int_B D_{\mathfrak{T}}\varphi\, d\mu \geqq \int_B s\,D^s\, d\mu$$

consistant en une adaptation aisée de la démonstration pour le cas $B = E$ ([36], p. 206-207, Satz 1.2), conduit au renforcement analogue suivant de ($2s''$), appelé ($4s''$) :

Quels que soient le nombre positif ε, et $\mathcal{R} \in \mathfrak{T}$, il existe $\mathfrak{T} \in \mathfrak{T}$ telle que $\mathcal{R} \sqsubset \mathfrak{T}$ et, pour tout $B \in \mathcal{B}$,

$$\int_B (f^s - D_{\mathfrak{T}}\varphi)\, d\mu < \varepsilon.$$

Étant donnée une fonction de cellule φ quelconque, nous définissons une *dérivée supérieure en moyenne* de φ comme une fonction f^s satisfaisant à ($4s'$) et ($4s''$). Une telle fonction, si elle existe, est unique. Nous avons donc montré que, sous les hypothèses du théorème 8, la dérivée stochastique supérieure peut être regardée comme dérivée supérieure en moyenne. Les considérations analogues valent pour les dérivées inférieures stochastique et en moyenne.

3. Théorie dans un espace mesuré avec conditions vitaliennes.

3.1. **Préliminaires.** — Nous maintenons le cadre du paragraphe 2. Pour tout processus stochastique (f_τ; $\tau \in \Theta$) sont définies les *limites extrêmes suivant l'ordre*

$$\limsup_{\tau} f_\tau = \bigwedge_{\rho \in \Theta} \bigvee_{\rho \ll \tau} \qquad \text{et} \qquad \liminf_{\tau} f_\tau = \bigvee_{\rho \in \Theta} \bigwedge_{\rho \ll \tau} f_\tau.$$

Dans le cas où ces deux fonctions limites sont égales, leur valeur commune, notée $\lim\limits_{\tau} f_\tau$, est *la limite suivant l'ordre* de la suite (f_τ) qui est alors dite convergente suivant l'ordre. De manière analogue, ou en recourant aux fonctions indicatrices, on définit les limites suivant l'ordre pour des suites de somas.

Si Θ admet une sous-suite dénombrable confinale (τ_n) alors

$$\limsup_{\tau} f_\tau = \bigwedge_n \bigvee_{\tau_n \ll \tau} f_\tau \quad \text{et} \quad \liminf_{\tau} f_\tau = \bigvee_n \bigwedge_{\tau_n \ll \tau} f_\tau.$$

On démontre aisément ([35], p. 478) les inégalités suivantes :

$$\liminf_{\tau} f_\tau \leqq s \liminf_{\tau} f_\tau \leqq s \limsup_{\tau} f_\tau \leqq \limsup_{\tau} f_\tau.$$

Par conséquent, si $\lim f_\tau$ existe, $s \lim f_\tau$ existe aussi et lui est égale.

La fonction excès de recouvrement $e_{\mathcal{L}}$ d'une suite de somas $\mathcal{L} = (L_i)$, $i = 1, \ldots, r$ ou $i = 1, 2, 3, \ldots$ est définie comme

$$e_{\mathcal{L}} = \sum_i c_{L_i} - c_L, \qquad \text{où} \quad L = \bigvee \mathcal{L}.$$

Étant donnée une norme $\| \ \|_Y$ d'espace d'Orlicz (*cf.* 2.6), le nombre

$$\omega_Y(\mathcal{L}) = \| e_{\mathcal{L}} \|_Y$$

est appelé *empiétement d'ordre* Y de $\mathcal{L}$. On définit aussi

$$\omega_q(\mathcal{L}) = \| e_{\mathcal{L}} \|_q \qquad \text{si} \quad 1 \leqq q \leqq +\infty \quad (^7).$$

Les conditions suivantes sont équivalentes : $\mathcal{L}$ est disjointe; $\omega_Y(\mathcal{L}) = 0$ pour un certain (et alors pour tout) Y; $\omega_{+\infty}(\mathcal{L}) < 1$. Nous avons

$$(1) \qquad \omega_1(\mathcal{L}) = \sum_i \mu(L_i) - \mu(L) \quad \text{si } \mu(L) \text{ est finie,}$$

et, plus généralement,

$$\omega_1(\mathcal{L}) = \sum_j \left(\sum_i \mu(L_i E_j) - \mu(L E_j) \right)$$

si $E_1, E_2, \ldots$ représente une partition de E telle que $\mu(LE_j)$ soit finie pour tout j.

(7) Dans [22], p. 296, l'empiétement d'ordre q est $\int e_{\mathcal{L}}^q \, d\mu$.

La première des inégalités de 2.6 (2) entraîne

$$\left| \sum_i \int_{L_i} f\,d\mu - \int_L f\,d\mu \right| \leqq \|f\|_X\, \omega_Y(\mathcal{L}), \tag{2}$$

où $\| \ \|_X$ désigne la norme complémentaire de $\| \ \|_Y$, pourvu que f et $f e_{\mathcal{L}}$ soient des fonctions intégrables.

Par *recouvrement fin* d'un soma M relativement à la base stochastique $(\mathcal{B}_\tau)$, nous entendons une suite $(K_\tau;\ \tau \in \Theta)$ telle que

$$\mathbf{C}(M, (K_\tau)): \quad K_\tau \in \mathcal{B}_\tau \textit{ quel que soit } \tau, \textit{ et } M \leqq \limsup_\tau K_\tau.$$

La condition $M \leqq \limsup_\tau K_\tau$ est équivalente à la suivante : $M \leqq \bigvee \{ K_\tau;\ \tau \in \Delta \}$ pour tout sous-ensemble terminal Δ de Θ. Par conséquent, si (K_τ) est un recouvrement fin de M et Δ un sous-ensemble terminal de Θ, la suite $(K_\tau;\ \tau \in \Delta)$ est un recouvrement fin de M relativement à la base $(\mathcal{B}_\tau;\ \tau \in \Delta)$. Si (K_τ) est un recouvrement fin de M et $A \in \mathcal{A} = \bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$, la suite $(K_\tau A;\ \tau \in \Delta)$, où Δ désigne l'ensemble terminal des paramètres τ tels que $A \in \mathcal{B}_\tau$ (c'est-à-dire $\Delta = \Delta_A$ au sens de 1.3), est un recouvrement fin de MA relativement à la base $(\mathcal{B}_\tau;\ \tau \in \Delta)$.

Si (f_τ) est un processus stochastique de base $(\mathcal{B}_\tau)$ et si $\limsup_\tau f_\tau > \alpha$ sur le soma M, alors la suite (K_τ) définie par $K_\tau = \{ f_\tau > \alpha \}$ est un recouvrement fin de M.

3.2. **Conditions de Vitali.** — Nous disons que la base stochastique $(\mathcal{B}_\tau)$ jouit de la *propriété de Vitali d'ordre Y* si

$\mathbf{V}_Y$: *Quels que soient le soma M de mesure finie, le recouvrement fin* (K_τ) *de M et le nombre positif* ε, *il existe une suite finie* $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ *de paramètres et une suite* $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_r)$ *de somas telles que* $L_i \in \mathcal{B}_{\xi_i}$, $L_i \leqq K_{\xi_i}$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, r$, $\omega_Y(\mathcal{L}) < \varepsilon$ (limitation de l'empiétement) *et* $\mu(M - ML) < \varepsilon$, *où* $L = \bigvee \mathcal{L}$ (limitation du défaut de recouvrement).

Comme cas particuliers, utilisant $\omega_q(\mathcal{L})$ au lieu de $\omega_Y(\mathcal{L})$, nous définissons les conditions $\mathbf{V}_q$, où $1 \leqq q \leqq +\infty$. $V_{+\infty}$ peut être énoncée en remplaçant la limitation de l'empiétement par : $\mathcal{L}$ est disjointe. Si $Y_1(u) = O(Y_2(u))$ pour $u \to +\infty$, la condition $\mathbf{V}_{Y_2}$ implique $\mathbf{V}_{Y_1}$. En particulier, $\mathbf{V}_{q_2}$ implique $\mathbf{V}_{q_1}$ si $q_1 < q_2$, $\mathbf{V}_{+\infty}$ implique $\mathbf{V}_Y$ et $\mathbf{V}_Y$ implique $\mathbf{V}_1$ quel que soit Y. $\mathbf{V}_{+\infty}$ est appelée *propriété forte de Vitali* ($\mathbf{V}_0$ dans [34], p. 325) et $\mathbf{V}_1$ *propriété faible de Vitali.*

Si Δ désigne un sous-ensemble terminal de Θ et si $(\mathcal{B}_\tau;\ \tau \in \Theta)$ jouit de la propriété $\mathbf{V}_Y$, la base stochastique $(\mathcal{B}_\tau;\ \tau \in \Delta)$ jouit de la même propriété.

Nous obtenons une condition équivalente si, dans la formulation de $\mathbf{V}_Y$, nous nous limitons à des soma M de $\mathcal{B}_\omega$. En effet, tout recouvrement fin d'un soma M est recouvrement fin de son enveloppe $\mathcal{B}_\omega$-mesurable M^* et $\mu(M - ML) \leqq \mu(M^* - M^* L)$. En outre, un paramètre ρ quelconque étant fixé, nous pouvons toujours exiger $\rho \leqslant \xi_i$ pour $i = 1, \ldots, r$.

Montrons maintenant que la condition $\mu(L - LM) < \varepsilon$ (limitation du débordement) peut être ajoutée dans l'énoncé de $\mathbf{V}_Y$ sans en modifier la valeur logique si, dans sa formulation, nous nous limitons à $M \in \mathcal{B}_\omega$.

Supposons donc la condition $\mathbf{V}_Y$ sous sa présente forme satisfaite. Soit M un soma de $\mathcal{B}_\omega$ de mesure finie, (K_τ) un recouvrement fin de M et $\varepsilon > 0$. $\mathcal{B}_\omega$ étant l'extension borélienne de $\mathfrak{A} = \bigcup \mathcal{B}_\tau$ et μ sigma-finie, il existe un paramètre ρ et un soma A de $\mathcal{B}_\rho$ tels que

$$(3) \qquad \mu((A \vee M) - AM) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La suite $(K_\tau A;\ \rho \leqslant \tau)$ est un recouvrement fin de MA relativement à la base $(\mathcal{B}_\tau;\ \rho \leqslant \tau)$. Il existe donc une suite finie $\xi_1, \ldots, \xi_r$ de paramètres et une suite $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_r)$ de somas vérifiant

$$L_i \in \mathcal{B}_{\xi_i}, \qquad L_i \leqq K_{\xi_i} A \leqq K_{\xi_i}, \qquad \omega_Y(\mathcal{L}) < \varepsilon$$

et

$$\mu(MA - MAL) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \text{où} \quad L = \bigvee_i L_i.$$

Comme $L \leqq A$, $AL = L$, donc $\mu(M - ML) < \varepsilon$, d'après (3). Enfin, $L \leqq A$ et (3) entraînent

$$\mu(L - LM) \leqq \mu(A - LM) = \mu(A - ALM) \leqq \mu(A - AM) < \varepsilon.$$

Nous constatons donc que la condition $\mathbf{V}_Y$ formulée comme condition de Vitali réduite, c'est-à-dire sans limitation de débordement, est en fait une condition de Vitali complète pour les soma de $\mathcal{B}_\omega$.

La suite finie $(L_1, \ldots, L_r)$ dont $\mathbf{V}_Y$ nous assure l'existence, couvre M à ε près. Montrons que nous pouvons réaliser un recouvrement exact de M si nous acceptons des suites dénombrables de paramètres et de somas correspondantes. Disons que la base stochastique $(\mathcal{B}_\tau)$ satisfait à la condition $\mathbf{W}_Y$ si quels que soient le soma M, le recouvrement fin (K_τ) de M et le nombre positif ε, il existe une suite de Fréchet $\xi_1, \xi_2, \ldots$ de paramètres et une suite de Fréchet $\mathcal{L} = (L_1, L_2, \ldots)$ de somas telles que $L_i \in \mathcal{B}_{\xi_i}$, $L_i \leqq K_{\xi_i}$ pour $i = 1, 2, \ldots$, $\omega_Y(\mathcal{L}) < \varepsilon$ et $M \leqq \bigvee_i L_i$.

Proposition 3.2.1. — *Les conditions* $\mathbf{V}_Y$ *et* $\mathbf{W}_Y$ *sont équivalentes.*

Démonstration (*cf.* méthode d'expansion en [46], p. 79). — $\mathbf{W}_Y$ implique évidemment $\mathbf{V}_Y$. Postulons donc $\mathbf{V}_Y$. Soit (K_τ) un recouvrement fin d'un soma M et ε un nombre positif. Fixons-nous une suite $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ de nombres positifs de somme ε et une suite croissante de somas $S_1, S_2, \ldots$ de mesure finie telle que $\bigvee_n S_n = E$. En vertu de $\mathbf{V}_Y$ il existe une suite finie $(\xi_i;\ i = 1, \ldots, r_1)$ de paramètres et une suite $\mathcal{L}_1 = (L_i;\ i = 1, \ldots, r_1)$ telles que $L_i \in \mathcal{B}_{\xi_i}$, $L_i \leqq K_{\xi_i}$ pour $i = 1, \ldots, r_1$, $\omega_Y(\mathcal{L}_1) < \varepsilon_1$ et

$$\mu(MS_1(E - L_1^\star)) < \varepsilon_1, \qquad \text{où} \quad L_1^\star = \bigvee \mathcal{L}_1 = L_1 \vee \ldots \vee L_{r_1}.$$

Désignons par Δ_1 l'ensemble terminal des paramètres τ tels que $\xi_i \leqslant \tau$ pour $i = 1, \ldots, r_1$. La suite $(K_\tau(E - L_1^\star);\ \tau \in \Delta_1)$ étant un recouvrement fin de $MS_2(E - L_1^\star)$ relativement à la base $(\mathcal{B}_\tau;\ \tau \in \Delta_1)$ qui jouit aussi de la propriété $\mathbf{V}_Y$, il existe une suite finie $(\xi_i;\ i = r_1 + 1, \ldots, r_2)$ et une suite $\mathcal{L}_2 = (L_i;\ i = r_1 + 1, \ldots, r_2)$ telles que $L_i \in \mathcal{B}_{\xi_i}$,

$$L_i \leqq K_{\xi_i}(E - L_1^\star) \qquad \text{pour} \quad i = r_1 + 1, \ldots, r_2,$$
$$\omega_Y(\mathcal{L}_2) < \varepsilon_2 \qquad \text{et} \qquad \mu(MS_2(E - (L_1^\star \vee L_2^\star))) < \varepsilon_2,$$

où

$$L_2^\star = \bigvee \mathcal{L}_2 = L_{r_1+1} \vee \ldots \vee L_{r_2}.$$

Nous procédons alors par récurrence : Les paramètres $\xi_1, \ldots, \xi_{r_{n-1}}$ et les somas $L_1, \ldots, L_{r_{n-1}}$ étant déjà définis, nous choisissons $(\xi_i;\ i = r_{n-1} + 1, \ldots, r_n)$ et $\mathcal{L}_n = (L_i;\ i = r_{n-1} + 1, \ldots, r_n)$ telles que

$$L_i \in \mathcal{B}_{\xi_i}, \qquad L_i \leqq K_{\xi_i}(E - (L_1^\star \vee \ldots \vee L_{n-1}^\star)) \qquad \text{pour} \quad i = r_{n-1} + 1, \ldots, r_n,$$
$$\omega_Y(\mathcal{L}_n) < \varepsilon_n \qquad \text{et} \qquad \mu(MS_n(E - (L_1^\star \vee \ldots \vee L_n^\star))) < \varepsilon_n,$$

où

$$L_n^\star = \bigvee \mathcal{L}_n = L_{r_{n-1}+1} \vee \ldots \vee L_{r_n}.$$

Posons $\mathcal{L} = (L_i;\ i = 1, 2, \ldots)$ et $L = \bigvee \mathcal{L} = \bigvee_n L_n^\star$. Alors, quel que soit i, $L_i \in \mathcal{B}_{\xi_i}$ et $L_i \leqq K_{\xi_i}$. Comme

$$\mu(MS_m(E - L)) \leqq \mu(MS_m(E - (L_1^\star \vee \ldots \vee L_n^\star)))$$
$$\leqq \mu(MS_n(E - (L_1^\star \vee \ldots \vee L_n^\star))) < \varepsilon_n \qquad \text{pour} \quad m \leqq n$$

et comme

$$\lim_n \varepsilon_n = 0, \qquad \mu(MS_m(E - L)) = 0 \quad \text{pour tout } m,$$

donc $\mu(M(E-L))=0$, ce qui est équivalent à $M \leqq L$. Les somas $L_n^\star = \bigvee \mathcal{L}_n$ étant disjoints par construction, $e_{\mathcal{L}} = \sum_n e_{\mathcal{L}_n}$, donc, d'après la deuxième des inégalités de 2.6 (2),

$$\omega_Y(\mathcal{L}) \leqq \sum_n \omega_Y(\mathcal{L}_n) < \sum_n \varepsilon_n = \varepsilon.$$

Ainsi est achevée la démonstration.

Nous envisageons $\mathbf{V}_Y$ et $\mathbf{W}_Y$ comme deux versions de la même propriété que nous appelons version ε et version o, ε et o se rapportant au défaut de recouvrement. Comme dans l'énoncé de $\mathbf{V}_Y$, on peut ajouter la condition de limitation du débordement, à savoir $\mu(L-LM)<\varepsilon$, dans l'énoncé de $\mathbf{W}_Y$ pour $M \in \mathcal{B}_\omega$ et l'on obtient ainsi la condition vitalienne d'ordre Y sous sa forme complète et en version o.

La condition $\mathbf{W}_{+\infty}$ ne dépend pas de la mesure μ, donc aussi $\mathbf{V}_{+\infty}$ (*cf.* [34], p. 325).

3.3. Convergence suivant l'ordre de martingales.

Théorème 9. — $\| \; \|_X$ *et* $\| \; \|_Y$ *désignent des normes complémentaires d'espaces d'Orlicz. La base stochastique* $(\mathcal{B}_\tau;\ \tau \in \Theta)$ *satisfait à la condition vitalienne* $\mathbf{V}_Y$. Φ *est une martingale de base* $(\mathcal{B}_\tau)$ *de variation bornée d'ordre* X. *Alors : La représentation intégrante* (f_τ) *de* Φ *converge suivant l'ordre. En outre, si* $(\mathcal{B}_\tau)$ *satisfait à* $\mathbf{V}_{+\infty}$, *la même conclusion vaut pour toute martingale* Φ *de variation semi-bornée.*

Démonstration. — Si A désigne un soma de $\mathfrak{A}$ de mesure finie, la trace sur A de Φ et sa base $(A \wedge \mathcal{B}_\tau)$ satisfont aux hypothèses du théorème. Comme la convergence suivant l'ordre de (f_τ) sur tout soma de A de mesure finie entraîne celle-ci sur E, on peut supposer $\mu(E)$ finie.

Considérons d'abord le cas où $\lim\limits_{u \to +\infty} X(u)/u = +\infty$. Φ est supposée de variation bornée d'ordre X, c'est-à-dire bornée dans $\mathcal{L}_X$. D'après le théorème 5, remarque 1 (en 2.6), $f_\omega = s \lim\limits_\tau f_\tau$ existe, $f_\omega \in \mathcal{L}_X$ et Φ est induite par f_ω. Comme f_ω^+ et f_ω^- appartiennent à $\mathcal{L}_X$ et comme Φ^+ et Φ^- sont induites par f_ω^+ et f_ω^- respectivement, Φ^+ et Φ^- sont aussi de variation bornée d'ordre X. Or, l'hypothèse que $\mu(E)$ soit finie, implique que Φ est de variation bornée, donc $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$. Par conséquent, nous pouvons nous contenter d'établir la convergence suivant l'ordre de Φ dans le cas où Φ est non négative.

Posons $\gamma = \|\Phi\|_X$ et raisonnons par l'absurde en supposant que la suite (f_τ) ne converge pas suivant l'ordre. γ est alors positif et il existe deux nombres α et β et un soma B de $\mathcal{B}_\omega$ non nul tels que

$$(1) \qquad \liminf_\tau f_\tau \,\|\, B < \alpha < \beta < \limsup_\tau f_\tau \,\|\, B,$$

utilisant la notation introduite en 1.11. Observons que nécessairement $0 < \alpha < \beta < +\infty$.

Désignons par ε un nombre positif quelconque. Comme $B \in \mathcal{B}_\omega$, il existe un paramètre ρ et un soma R de $\mathcal{B}_\rho$ tels que

$$(2) \qquad \mu((B \vee R) - BR) < \varepsilon \mu(B).$$

D'après (1), la suite (M_τ), où $M_\tau = R\{f_\tau < \alpha\}$ pour $\rho \leqslant \tau$, est un recouvrement fin de BR relativement à la base $(\mathcal{B}_\tau; \rho \leqslant \tau)$. Comme $\mathbf{V}_Y$ implique $\mathbf{V}_1$, il existe une suite finie $(\eta_1, \ldots, \eta_s)$ de paramètres et une suite $\mathfrak{N} = (N_1, \ldots, N_s)$ de somas telles que, pour $N = \bigvee \mathfrak{N}$, tenant compte de $N \leqq R$, nous ayons

$$(3) \qquad \begin{cases} \rho \leqslant \eta_j, \quad N_j \leqq M_{\eta_j} & \text{pour } j = 1, \ldots, s; \\ \omega_1(\mathfrak{N}) < \dfrac{\varepsilon\beta}{\alpha} \mu(B) & \text{et} \quad \mu(BR - BN) < \varepsilon \mu(B). \end{cases}$$

Combinant la dernière inégalité avec (2), nous déduisons

$$\mu(N) \geqq \mu(BN) > \mu(BR) - \varepsilon \mu(B) > \mu(B) - 2\varepsilon \mu(B),$$

donc

$$(4) \qquad \mu(N) > (1 - 2\varepsilon) \mu(B).$$

Par ailleurs, (2) et $N \leqq R$ impliquent

$$(5) \qquad \mu(N) < (1 + \varepsilon) \mu(B).$$

D'après (1), la suite (K_τ), où $K_\tau = R\{\beta < f_\tau\}$ pour $\eta_1, \ldots, \eta_s \leqslant \tau$, est un recouvrement fin de BR relativement à la base $(\mathcal{B}_\tau; \eta_1, \ldots, \eta_s \leqslant \tau)$. En vertu de $\mathbf{V}_Y$ il existe une suite finie $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ de paramètres et une suite $\mathfrak{L} = (L_1, \ldots, L_r)$ de somas telles que, pour $L = \bigvee \mathfrak{L}$, nous ayons

$$(6) \qquad \begin{cases} \eta_1, \ldots, \eta_s \leqslant \xi_i, \quad L_i \in \mathcal{B}_{\xi_i}, \quad L_i \leqq K_{\xi_i} & \text{pour } i = 1, \ldots r, \\ \omega_Y(\mathfrak{L}) < \dfrac{\varepsilon\beta}{\gamma} \mu(B) & \text{et} \quad \mu(BR - BL) < \varepsilon \mu(B). \end{cases}$$

Comme précédemment, nous obtenons l'inégalité

$$\mu(L) > (1 - 2\varepsilon) \mu(B),$$

analogue à (4), d'où, recourant à (4), à $N \vee L \leqq R$ et à (2), découle l'inégalité

$$(7) \qquad \mu(NL) > (1 - 5\varepsilon) \mu(B).$$

D'après (5), l'inégalité $f_{\eta_j} \mid N_j < \alpha$ et (3), nous avons

$$\alpha (1+\varepsilon)\mu(B) > \alpha\mu(N) = \alpha\left(\sum_j \mu(N_j) - \omega_1(\mathfrak{N})\right) \tag{8}$$
$$> \sum_j \int_{N_j} f_{\eta_j}\, d\mu - \varepsilon\beta\,\mu(B).$$

Nous nous fixons un paramètre ζ suivant tous les ξ_i, $i = 1, \ldots, r$, donc aussi tous les η_j, $j = 1, \ldots, s$. Tenant compte de l'égalité caractéristique des martingales, de $N_j \in \mathcal{B}_{\eta_j}$, $f_\zeta \geqq 0$ et $NL \leqq \bigvee_j N_j$, nous obtenons

$$\sum_j \int_N f_{\eta_j}\, d\mu = \sum_j \int_{N_j} f_\zeta\, d\mu \geqq \int_{NL} f_\zeta\, d\mu. \tag{9}$$

Or, faisant appel à l'inégalité (2) de 3.1, à (6) et à l'inégalité $\| f_\zeta \|_X \leqq \gamma$, nous parvenons à

$$\int_{NL} f_\zeta\, d\mu \geqq \sum_i \int_{NL_i} f_\zeta\, d\mu - \varepsilon\beta\,\mu(B). \tag{10}$$

Mais $NL_i \in \mathcal{B}_{\xi_i}$, $\xi_i \ll \zeta$ pour $i = 1, \ldots, r$ et $f_{\xi_i} \mid NL_i > \beta$, d'où, en vertu de (7), les inégalités

$$\sum_i \int_{NL_i} f_\zeta\, d\mu = \sum_i \int_{NL_i} f_{\xi_i}\, d\mu \tag{11}$$
$$\geqq \beta \sum_i \mu(NL_i) \geqq \beta\mu(NL) > \beta(1-5\varepsilon)\mu(B).$$

De (8)-(11) nous déduisons $\alpha(1+\varepsilon)\mu(B) > \beta(1-7\varepsilon)\mu(B)$, ce qui contredit $\alpha < \beta$ si ε est suffisamment petit.

Considérons enfin le cas où $\limsup_{u \to +\infty} X(u)/u$ est finie, où donc $Y(v) = +\infty$ pour v suffisamment grand. Dans ce cas, $\mathbf{V}_Y$ est équivalente à $\mathbf{V}_{+\infty}$. Grâce au théorème de décomposition de Jordan, pour établir la convergence suivant l'ordre d'une martingale quelconque de variation semi-bornée, nous pouvons nous contenter de l'établir dans le cas où Φ est non négative. Nous choisissons alors; dans la démonstration ci-dessus, $\mathcal{L}$ comme suite disjointe. L'inégalité (10) devient

$$\int_{NL} f_\zeta\, d\mu = \sum_i \int_{NL_i} f_\zeta\, d\mu,$$

même si f_ζ n'est pas intégrable, (8), (9) et (11) demeurent inchangées. Par conséquent,

$$\alpha(1+\varepsilon)\,\mu(B) > \beta(1-6\,\varepsilon)\,\mu(B),$$

d'où, ici encore, une contradiction si ε est suffisamment petit.

REMARQUES : 1. Le théorème 9 reste vrai si, au lieu de $\|\Phi\|_X$ finie, nous supposons seulement qu'il existe une partition de E en somas de A disjoints, soit $E = \bigvee_j A_j$, telle que, pour tout j, la suite des restrictions des f_τ à A_j soit bornée dans l'espace $\mathcal{L}_X$ sur A_j. (Pour la démonstration, *cf.* le 1$^{\text{er}}$ alinéa de la démonstration du théorème 9.)

2. La limite suivant l'ordre de la représentation intégrante (f_τ) d'une martingale, si elle existe, étant égale à sa limite stochastique f_ω, nous pouvons utiliser les résultats du chapitre précédent pour identifier $\lim\limits_\tau f_\tau$. C'est ainsi que les théorèmes 5 (de 2.6) et 9 impliquent que, pour la martingale induite par une fonction f de $\mathcal{L}_X$, la suite (f_τ) converge suivant l'ordre vers $\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}_\omega)$ si la base stochastique $(\mathcal{B}_\tau)$ jouit de la propriété $\mathbf{V}_Y$.

Une prémartingale $\Phi = (\varphi_\tau)$ de représentation intégrante (f_τ) est dite *lipschitzienne* s'il existe un nombre fini γ tel que $|\varphi_\tau(A)| \leqq \gamma\,\mu(A)$ pour tout τ et tout A appartenant à $\mathcal{B}_\tau$. Cette condition est équivalente à $|f_\tau| \leqq \gamma$, c'est-à-dire $\|f_\tau\|_{+\infty} \leqq \gamma$ pour tout τ. Elle entraîne donc la condition $\|\Phi\|_{+\infty} \leqq \gamma$ et lui est équivalente si Φ est une martingale. Dans le cas où $\mu(E)$ est finie, une prémartingale lipschitzienne est absolument continue et de variation bornée d'ordre X quelconque. D'après les théorèmes 5 (de 2.6) et 9 toute martingale lipschitzienne converge suivant l'ordre et est induite par sa limite suivant l'ordre si $(\mathcal{B}_\tau)$ possède la propriété de Vitali faible $\mathbf{V}_1$.

A tout soma B est attachée la martingale $(\zeta_{B,\tau})$ définie par $\zeta_{B,\tau}(A) = \mu(AB)$ pour $A \in \mathcal{B}_\tau$. Cette martingale est lipschitzienne et nous pouvons prendre $\gamma = 1$. Nous désignons sa représentation intégrante par $(c_{B,\tau})$. Il est clair que cette suite est induite par la fonction indicatrice c_B. D'où résulte :

THÉORÈME 10 (*théorème de la densité suivant l'ordre*). — *Supposons que* $(\mathcal{B}_\tau)$ *possède la propriété de Vitali faible* $\mathbf{V}_1$. *Alors, pour tout soma* B, *la suite* $(c_{B,\tau})$ *converge suivant l'ordre vers* $\mathcal{E}(c_B \mid \mathcal{B}_\omega)$, *en particulier* $\lim\limits_\tau c_{B,\tau} = c_B$ *si* $B \in \mathcal{B}_\omega$.

3.4. **Nécessité de conditions vitaliennes.** — Nous avons d'abord le théorème suivant, réciproque du théorème de la densité suivant l'ordre :

THÉORÈME 11 ([38], § 2). — *Si, pour tout soma B de $\mathcal{B}_\omega$ de mesure finie, la suite $(c_{B,\tau})$ converge suivant l'ordre vers c_B, la base stochastique $(\mathcal{B}_\tau)$ satisfait à* $\mathbf{V}_1$ ([8]).

Fixons-nous alors des nombres p et q tels que

$$1 < p < +\infty \qquad \text{et} \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

De [38], § 3, résulte :

THÉORÈME 12. — *Soit $(\mathcal{B}_\tau)$ une base stochastique dont l'ensemble Θ des paramètres admet un sous-ensemble confinal dénombrable. Supposons que, pour toute fonction f de $\mathcal{L}_p$ mesurable $\mathcal{B}_\omega$, la suite (f_τ) induite par f converge suivant l'ordre vers f. Alors la base $(\mathcal{B}_\tau)$ satisfait $\mathbf{V}_{q'}$ pour tout* $1 \leqq q' < q$ ([8]).

Nous n'avons énoncé aucune propriété de convergence pour martingales impliquant $\mathbf{V}_{+\infty}$. Nous renvoyons sur ce point à la remarque [22], p. 261, lignes 4-7 se rapportant au cas de fonctions d'ensembles qui ne sont pas nécessairement des fonctions de cellule.

Nous présumons la validité du théorème suivant, plus général que le théorème 12 : Si Θ admet un sous-ensemble confinal dénombrable et si $Y'(v) = o(Y(v))$ quand $v \to +\infty$, la convergence suivant l'ordre des martingales induites par les fonctions f de $\mathcal{L}_X$, mesurables $\mathcal{B}_\omega$, vers f, implique la validité de $\mathbf{V}_Y$.

3.5. Convergence suivant l'ordre de sous-martingales.

THÉORÈME 13. — *Si la base stochastique $(\mathcal{B}_\tau)$ jouit de la propriété $\mathbf{V}_Y$, pour toute sous-martingale de variation bornée d'ordre X vaut pour la représentation intégrante (f_τ)*

$$\limsup_\tau f_\tau = s \lim_\tau f_\tau.$$

DÉMONSTRATION. — Comme dans la démonstration du théorème 9 (de 3.3), nous pouvons supposer que $\mu(E)$ est finie. (f_τ^m) désignant l'intégrale de (f_τ) (*cf.* 1.4), d'après le théorème 2 (de 2.4), $s \lim_\tau f_\tau$ et $s \lim_\tau f_\tau^m$ existent et sont égales. D'après la proposition 2.6.3, leur valeur commune f_ω appartient à $\mathcal{L}_X$. Pour établir la convergence suivant l'ordre de la suite (f_τ^m), il suffit, en vertu du théorème 9 (de 3.3), de vérifier que (f_τ^m) est de variation bornée d'ordre X. Nous traitons séparément les cas $\lim X(u)/u = \infty$ et $\limsup X(u)/u < \infty$ quand $u \to \infty$. Dans le premier cas, l'ensemble des f_τ est uniformément intégrable (*cf.* démonstration de la remarque concernant le théorème 5 de 2.6), donc, grâce aux propositions 2.2.1 et 2.3.2, (f_τ^m) représente une martingale sigma-additive et de variation bornée. Le théorème 3 (de 2.4) entraîne alors

---

([8]) Ceci est vrai même si l'on supprime la condition de monotonie pour la base, à savoir que $\rho \leqslant \tau$ entraîne $\mathcal{B}_\rho \subseteq \mathcal{B}_\tau$.

que (f_τ^m) est induite par f_ω, donc bornée dans $\mathcal{L}_X$ d'après la proposition 2.6.2. Dans le second cas, (f_τ) est de variation bornée, ainsi (f_τ^m) l'est aussi d'après 1.4.

Dans les deux cas, $f_\omega = \lim_\tau f_\tau^m$. Or, $f_\tau \leqq f_\tau^m$, d'où l'inégalité $\limsup_\tau f_\tau \leqq \lim_\tau f_\tau^m$, donc enfin $\limsup_\tau f_\tau \leqq s \lim_\tau f_\tau$. L'inégalité opposée étant triviale, le théorème est démontré.

Nous définissons maintenant pour une base $(\mathcal{B}_\tau)$ la propriété de Vitali $\mathbf{V}'$ (introduite en [35], p. 486, rectifiée en [38], p. 288) :

Quels que soient le soma M de mesure finie, le recouvrement fin (K_τ) de M et le nombre positif ε, il existe une suite finie $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ de paramètres telle que

$$\xi_1 \leqslant \ldots \leqslant \xi_i \leqslant \ldots \leqslant \xi_r \qquad et \qquad \mu\left(M - M\bigvee_{i=1}^{r} K_{\xi_i}\right) < \varepsilon.$$

A la version ε qui vient d'être formulée, est équivalente la version o que voici :

Quels que soient le soma M et le recouvrement fin (K_τ) de M, il existe une suite $(\xi_i;\ i = 1, 2, \ldots)$ de paramètres telle que

$$\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant \ldots \qquad et \qquad M \leqq \bigvee_i K_{\xi_i}.$$

La démonstration de l'équivalence est analogue à celle de la proposition 3.2.1. Sous cette forme, nous voyons que $\mathbf{V}'$ ne dépend pas de la mesure μ.

Proposition 3.5.1. — *La condition $\mathbf{V}'$ implique $\mathbf{V}_{+\infty}$. Elle est toujours satisfaite si Θ est totalement ordonné par $\leqslant$.*

En effet, posant

$$L_i = K_{\xi_i} - K_{\xi_i}\left(\bigvee_{j<i} K_{\xi_j}\right) \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, r,$$

on déduit $\mathbf{V}_{+\infty}$ de $\mathbf{V}'$. L'autre implication énoncée est triviale.

Théorème 14 ([35], p. 486). — *Si la base $(\mathcal{B}_\tau)$ vérifie $\mathbf{V}'$, toute sous-martingale de variation bornée converge suivant l'ordre.*

Complément ([38], théorème 4.1, p. 288). — On ne peut, dans l'énoncé, remplacer $\mathbf{V}'$ par $\mathbf{V}_{+\infty}$, même si (f_τ) est uniformément borné. En effet, il existe une base $(\mathcal{B}_\tau)$ vérifiant $\mathbf{V}_{+\infty}$ et $\mu(E) < +\infty$, et une semi-martingale (f_τ) relativement à cette base telle que

$$0 \leqq f_\tau \leqq 1, \qquad \liminf_\tau f_\tau = 0 \qquad \text{et} \qquad \limsup_\tau f_\tau = 1.$$

Un tel exemple prouve aussi que $\mathbf{V}'$ n'est pas conséquence de $\mathbf{V}_{+\infty}$.

3.6. **Cas des fonctions de cellule.** — Nous reprenons le cadre de 2.7. Les *dérivées extrêmes suivant l'ordre* de la fonction de cellule φ, notées $D^s\varphi$ et $D^i\varphi$, sont définies comme les limites, suivant l'ordre, supérieure et inférieure de $(D_{\mathfrak{T}}\varphi;\ \mathfrak{T}\in\mathfrak{X})$, et ainsi valent les inégalités

$$D^i\varphi \leqq s\,D^i\varphi \leqq s\,D^s\varphi \leqq D^s\varphi.$$

φ est dite *dérivable suivant l'ordre* si $D^i\varphi = D^s\varphi$.

A tout ensemble $\mathfrak{Z}$ de cellules correspond une suite $(K_{\mathfrak{T}})$, où $K_{\mathfrak{T}}\in\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}$, définie ainsi :

(1) $$K_{\mathfrak{T}} = \bigvee(\mathfrak{Z}\cap\mathfrak{T}).$$

D'autre part, à toute suite $(K_{\mathfrak{T}})$, où $K_{\mathfrak{T}}\in\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}$, on peut faire correspondre un ensemble $\mathcal{K}$ de cellules défini ainsi : Pour tout $\mathfrak{T}$ de $\mathfrak{X}$, $\mathcal{J}_{\mathfrak{T}}$ désignant le sous-ensemble de $\mathfrak{T}$ dont le supremum est $K_{\mathfrak{T}}$, on pose $\mathcal{K} = \bigcup_{\mathfrak{T}\in\mathfrak{X}}\mathcal{J}_{\mathfrak{T}}$, en symboles

(2) $$\mathcal{J}_{\mathfrak{T}}\subseteq\mathfrak{T},\qquad \bigvee\mathcal{J}_{\mathfrak{T}} = K_{\mathfrak{T}},\qquad \mathcal{K} = \bigcup_{\mathfrak{T}}\mathcal{J}_{\mathfrak{T}}.$$

De cette définition, découle l'inégalité

(3) $$K_{\mathfrak{T}} \leqq \bigvee(\mathcal{K}\cap\mathfrak{T}).$$

PROPOSITION 3.6.1. — *Si $(K_{\mathfrak{T}})$ est une suite de somas telle que $K_{\mathfrak{T}}\in\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}$, et si $\mathcal{K}$ est défini par* (2), *les conditions suivantes sont équivalentes* '

1° *L'inégalité* (3) *est une égalité;*

2° *Il existe un ensemble $\mathfrak{Z}$ de cellules tel que* (1) *soit satisfait pour tout $\mathfrak{T}$.*

3° *La prémartingale $(c_{K_{\mathfrak{T}}})$ est engendrée par une fonction de cellule φ au moyen de la loi de transfert G* (*cf.* 1.9).

Si ces conditions sont satisfaites, $\mathcal{K}=\mathfrak{Z}$, $\varphi(I)=0$ pour $I\notin\mathfrak{Z}$, $\varphi(I)=\mu(I)$ pour $I\in\mathfrak{Z}$.

Par conséquent, partant d'un ensemble $\mathfrak{Z}$ de cellules et définissant $(K_{\mathfrak{T}})$ par (1), on retrouve $\mathfrak{Z}$ comme l'ensemble $\mathcal{K}$ donné par (2).

Par *recouvrement cellulaire fin* ([33], p. 243) d'un soma M, nous entendons un ensemble $\mathfrak{Z}$ de cellules tel que la suite $(K_{\mathfrak{T}})$ définie par (1) soit un recouvrement fin de M, c'est-à-dire, que soit satisfaite la condition

$$\mathbf{C}^0(M,\mathfrak{Z}):\quad M \leqq \limsup_{\mathfrak{T}}\bigvee(\mathfrak{Z}\cap\mathfrak{T}).$$

Si $(K_{\mathfrak{T}})$ est un recouvrement fin quelconque de M, l'ensemble $\mathcal{K}$ défini par (2) est un recouvrement cellulaire fin de M en vertu de (3).

De chaque condition vitalienne $\mathbf{V}_Y$ ou $\mathbf{V}'$ on déduit alors une condition plus faible $\mathbf{aV}_Y$ ou $\mathbf{aV}'$ en acceptant dans son énoncé seulement des recouvrements fins $(K_{\mathfrak{S}})$ de M qui satisfont aux conditions de la proposition 3.6.1, c'est-à-dire qui correspondent, en vertu de (1), à des recouvrements cellulaires fins $\mathfrak{Z}$ de M. Or, d'après [38], p. 294 et exemple 6, p. 300-301, nous avons :

Proposition 3.6.2. — *La condition* $\mathbf{aV}_Y$ *est équivalente à* $\mathbf{V}_Y$ *et peut être énoncée ainsi* :

Quels que soient le soma M *de mesure finie, le recouvrement cellulaire fin* $\mathfrak{Z}$ *de* M *et le nombre positif* ε, *il existe un sous-ensemble fini* $\mathfrak{T}$ *de* $\mathfrak{Z}$ *tel que*

$$\omega_Y(\mathfrak{T}) < \varepsilon \qquad \textit{et} \qquad \mu\Big(M - \Big(M \wedge \bigvee \mathfrak{T}\Big)\Big) < \varepsilon.$$

La condition $\mathbf{aV}'$ *est strictement plus faible que* $\mathbf{V}'$ *mais entraîne* $\mathbf{aV}_\infty$ *donc* $\mathbf{V}_\infty$.

Par transfert du théorème 9 de 3.3 au présent cadre, nous obtenons :

Théorème 9 *a*. — Soient $\|\ \|_X$ *et* $\|\ \|_Y$ *des normes complémentaires d'espaces d'Orlicz. Supposons que la base stochastique cellulaire* $(\mathcal{B}_{\mathfrak{S}})$ *possède la propriété* $\mathbf{aV}_Y$. *Alors toute fonction additive de cellule* φ *de variation bornée d'ordre X, c'est-à-dire vérifiant* $\sup\limits_{\mathfrak{S}} \|D_{\mathfrak{S}}\,\varphi\|_X < +\infty$, *est dérivable suivant l'ordre. Si* $(\mathcal{B}_{\mathfrak{S}})$ *satisfait à* $\mathbf{aV}_{+\infty}$, *chaque fonction de cellule additive et de variation semi-bornée admet une dérivée suivant l'ordre.*

De façon analogue se transfèrent les théorèmes 10 (de 3.3), 11, 12 (de 3.4) et 13 (de 3.5) qui deviennent 10 *a*, 11 *a*, 12 *a* et 13 *a*. Des analogues à 10 *a* et 11 *a* se trouvent dans [22] (théorèmes 2.12 et 2.48). Voici, enfin, l'analogue du théorème 14 :

Théorème 14 *a*. — *Si la base stochastique cellulaire* $(\mathcal{B}_{\mathfrak{S}})$ *vérifie* $\mathbf{aV}'$, *chaque fonction de cellule de variation bornée et semi-additive est dérivable suivant l'ordre.*

Remarquons qu'il ne suffit pas de supposer $\mathbf{V}_{+\infty}$ dans ce théorème, et que $\mathbf{aV}'$ n'entraîne pas la convergence suivant l'ordre des sous-martingales, même uniformément bornées, qui ne sont pas engendrées en vertu de G par des fonctions de cellule ([38], exemples 3 et 6).

Terminons par quelques théorèmes spécifiquement cellulaires, introduisant les conditions vitaliennes suivantes ([38], p. 288 et 290) :

$\mathbf{aV}''$. *Pour tout recouvrement cellulaire fin* $\mathfrak{Z}$ *d'un soma* M *différent de O*, $\limsup\limits_{\mathfrak{S}} \mu\Big(M \wedge \bigvee(\mathfrak{Z} \cap \mathfrak{S})\Big) > 0$.

$\mathbf{aV}'''$. *Quels que soient le soma M de mesure finie, le recouvrement cellulaire fin $\mathfrak{J}$ de M et le nombre positif ε, il existe une partition $\mathcal{H}$ dans $\mathfrak{T}$ telle que* $\mu\left(M - M \wedge \bigvee(\mathfrak{J} \cap \mathcal{H})\right) < \varepsilon$.

Il est clair que $\mathbf{aV}'''$ entraîne $\mathbf{aV}''$ et que $\mathbf{aV}''$ entraîne $\mathbf{aV}'$ ([38], § 5), mais les implications inverses ne sont pas vraies ([38], exemples 4 et 5). Cependant, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{aV}_{+\infty}$ impliquent $\mathbf{aV}'''$. D'après [38] (théorème 4.2, p. 289 et 294), on a

THÉORÈME 15. — *La condition $\mathbf{aV}''$ est nécessaire et suffisante pour que $D^s\varphi = sD^s\varphi$ et que $D^i\varphi = sD^i\varphi$ pour toute fonction de cellule φ.*

Observant que la condition $\mathbf{aV}'''$ est équivalente à la condition $'\mathbf{V}$ de [33], des théorèmes 2.4 et 2.5 de cet article résulte :

THÉORÈME 16. — *La condition $\mathbf{aV}'''$ est nécessaire et suffisante pour que*

$$\varphi^s(I) = \int_I D^s\varphi \, d\mu \qquad \textit{et} \qquad \varphi^i(I) = \int_I D^i\varphi \, d\mu$$

pour toute fonction de cellule φ de variation bornée et absolument continue, et toute cellule I.

Il est possible de définir des conditions analogues à $\mathbf{E}$, $\mathbf{aV}''$ et $\mathbf{aV}'''$ pour des bases stochastiques générales. Des analogues $\mathbf{V}''$ et $\mathbf{V}'''$ se trouvent dans [38] (§ 4). Cependant, contrairement à $\mathbf{E}$, $\mathbf{aV}''$ et $\mathbf{aV}'''$, ces conditions semblent être plus ou moins dépourvues d'intérêt.

4. Applications.

4.1. **Cadre ponctuel. Transfert de la théorie somatique.** — D'après un théorème de L. H. Loomis ([44], p. 757), toute sigma-algèbre booléenne peut être représentée isomorphiquement comme quotient d'une sigma-algèbre booléenne d'ensembles par un sigma-idéal de cette algèbre. Si la sigma-algèbre abstraite porte une mesure strictement positive, celle-ci peut être transférée à la sigma-algèbre concrète, le sigma-idéal diviseur est alors constitué par les ensembles de mesure nulle.

En fait, dans la plupart des applications, la donnée primaire est une sigma-algèbre booléenne d'ensembles avec mesure, une mesure strictement positive est alors obtenue en divisant par le sigma-idéal des ensembles de mesure nulle. Afin d'en tenir compte, nous modifions le sens des notations utilisées jusqu'à présent et en introduisons de nouvelles de la manière suivante :

$\mathcal{B}$ désigne une sigma-algèbre booléenne de sous-ensembles d'un ensemble E qui est l'unité de $\mathcal{B}$, $\emptyset$ l'ensemble vide, μ une mesure sigma-finie définie sur $\mathcal{B}$ et $\mathcal{N}$ le sigma-idéal dans $\mathcal{B}$ des ensembles de μ-mesure nulle.

Les résultats des paragraphes précédents sont immédiatement applicables à la sigma-algèbre booléenne $\mathcal{B}/\mathcal{N}$ et à la mesure μ^c obtenue par transfert de μ sur $\mathcal{B}/\mathcal{N}$. Il convient souvent de les formuler dans le cadre $\mathcal{B}$, $\mathcal{N}$, μ plutôt que dans le cadre $\mathcal{B}/\mathcal{N}$, μ^c. Les somas de $\mathcal{B}/\mathcal{N}$ sont les classes d'ensembles de $\mathcal{B}$ équivalents mod $\mathcal{N}$. Les fonctions $\mathcal{B}/\mathcal{N}$-mesurables (échelles spectrales) se laissent représenter par des classes de fonctions $\mathcal{B}$-mesurables définies sur E.

Les notions d'infimum et de supremum d'un ensemble de fonctions (*cf.* 1.11), de limites stochastiques (*cf.* 2.4), de limites suivant l'ordre (*cf.* 3.1), de limites dans $\mathcal{L}_X$ (*cf.* 2.6) d'une suite (famille filtrante) de fonctions, transférées à un ensemble $\mathcal{G}$ de fonctions $\mathcal{B}$-mesurables et à une famille $(f_\tau; \tau \in \Theta)$ de fonctions $\mathcal{B}$-mesurables, fournissent les notions d'*infimum* $e\bigwedge \mathcal{G}$ et de *supremum* $e\bigvee \mathcal{G}$ *essentiels*, de limites stochastiques $s \lim\inf_\tau f_\tau$ et $s \lim\sup_\tau f_\tau$, de *limites essentielles* $e \lim\inf_\tau f_\tau$ et $e \lim\sup_\tau f_\tau$ et de limite dans $\mathcal{L}_X$, envisagées comme fonctions définies mod $\mathcal{N}$, en d'autres termes : à un ensemble indéterminé de μ-mesure nulle près. C'est ainsi que $e\bigvee \mathcal{G}$ désigne l'une quelconque h des fonctions $\mathcal{B}$-mesurables possédant les propriétés suivantes : h est une minorante mod $\mathcal{N}$ de $\mathcal{G}$, c'est-à-dire que $g \in \mathcal{G}$ implique $g \geqq h$ mod $\mathcal{N}$; toute minorante h' mod $\mathcal{N}$ de $\mathcal{G}$ satisfait $h' \leqq h$ mod $\mathcal{N}$. La modification de chaque fonction g de $\mathcal{G}$ sur un ensemble de $\mathcal{N}$ pouvant dépendre de g, ou de chaque f_τ sur un ensemble de $\mathcal{N}$ pouvant dépendre de τ ne modifie pas ces extrema et ces limites.

Par *base stochastique* nous entendons, en accord avec la définition générale donnée en 1.3, une suite $(\mathcal{B}_\tau)$ de sigma-sous-algèbres de $\mathcal{B}$. Dans ce paragraphe nous faisons l'hypothèse que

$$\rho \leqslant \tau \qquad \text{entraîne} \quad \mathcal{B}_\rho \subseteq \mathcal{B}_\tau + \mathcal{N},$$

où $\mathcal{B}_\tau + \mathcal{N}$ désigne la sigma-sous-algèbre des ensembles de la forme

$$B + N, \quad B \in \mathcal{B}_\tau, \qquad N \in \mathcal{N}.$$

Une prémartingale de base $(\mathcal{B}_\tau)$ est une suite (φ_τ) telle que φ_τ soit une fonction réelle définie et sigma-additive sur $\mathcal{B}_\tau$. Les prémartingales obtenues comme images inverses et par transfert, à partir de prémartingales sur $\mathcal{B}/\mathcal{N}$, sont caractérisées par la conjonction de la propriété

$$\textbf{NS} : \quad \mathcal{B}_\tau = \mathcal{B}_\tau + \mathcal{N}$$

et de la propriété

$$\mathbf{AC}: \quad \varphi_\tau(N) = 0 \quad \textit{pour tout } \tau \textit{ et } N \in \mathcal{B}_\tau \cap \mathcal{N}.$$

Un processus stochastique de base $(\mathcal{B}_\tau)$ est défini (*cf.* 2.3) comme une suite (f_τ) de fonctions réelles sur E telle que f_τ soit $\mathcal{B}_\tau$-mesurable quel que soit τ. Remarquons que, pour tout processus stochastique de base $(\mathcal{B}_\tau + \mathcal{N})/\mathcal{N}$, si f_τ désigne un représentant de la classe d'équivalence correspondant à la « fonction » de paramètre τ, alors f_τ est $(\mathcal{B}_\tau + \mathcal{N})$-mesurable mais pas nécessairement $\mathcal{B}_\tau$-mesurable.

La condition **AC** est nécessaire et suffisante pour que la prémartingale (φ_τ) admette une représentation intégrante pour la mesure μ, c'est-à-dire un processus stochastique (f_τ) de base $(\mathcal{B}_\tau)$ tel que, pour tout τ, f_τ soit semi-intégrable et que $\varphi_\tau(B) = \int_B f_\tau \, d\mu$ quel que soit B dans $\mathcal{B}_\tau$. Par la suite, nous ne considérerons que des prémartingales vérifiant **AC**, mais nous ne demandons pas **NS**.

Les définitions de sous-martingale et martingale de base $(\mathcal{B}_\tau)$ sont immédiates; celles-ci n'apparaîtront que par leurs représentations intégrantes, donc comme processus stochastiques.

Par *recouvrement fin essentiel* d'un ensemble M mesurable, relativement à $(\mathcal{B}_\tau)$, nous entendons une suite $(K_\tau;\ \tau \in \Theta)$ telle que $K_\tau \in \mathcal{B}_\tau$ pour tout $\tau \in \Theta$ et $M \subseteq e \limsup\limits_\tau K_\tau$. La relation d'appartenance $K_\tau \in \mathcal{B}_\tau$ pour tout $\tau \in \Theta$ est équivalente à : (c_{K_τ}) est un processus stochastique de base $(\mathcal{B}_\tau)$. Observons de nouveau que cette condition est plus restrictive que $K_\tau \in \mathcal{B}_\tau + \mathcal{N}$ pour tout $\tau \in \Theta$.

Nous disons que la base stochastique $(\mathcal{B}_\tau)$ jouit de la propriété de Vitali $\mathbf{V}_Y$ s'il en est ainsi de $((\mathcal{B}_\tau \times \mathcal{N})/\mathcal{N})$. Il est aisé de voir qu'il suffit, dans son énoncé, de considérer des recouvrements fins au sens que nous venons de définir, et que nous pouvons remplacer les relations mod $\mathcal{N}$ par des relations strictes, d'où la formulation directe suivante :

Quels que soient l'ensemble M mesurable de mesure finie, le recouvrement fin essentiel (K_τ) de M et le nombre positif ε, il existe une suite finie de paramètres $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ et une suite associée $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_r)$ d'ensembles telles que $L_i \in \mathcal{B}_{\xi_i}$ et $L_i \subseteq K_{\xi_i}$ pour $i = 1, \ldots, r$,

$$\omega_Y(\mathcal{L}) < \varepsilon, \qquad \mu(M - ML) < \varepsilon, \qquad \text{où } L = \bigcup \mathcal{L}.$$

Remarquons cependant que, dans le cas de $\mathbf{V}_{+\infty}$, nous ne pouvons pas en général exiger la disjonction stricte des ensembles de $\mathcal{L}$. Toutefois, ce renforcement est permis si Θ est totalement ordonné et si la base $(\mathcal{B}_\tau)$ est croissante (entendant que $\rho \leqslant \tau$ entraîne $\mathcal{B}_\rho \subseteq \mathcal{B}_\tau$).

Les formulations des autres conditions vitaliennes sont analogues à celle de $\mathbf{V}_Y$.

Dans ce qui précède, il s'est agi seulement, chaque fois, du passage d'une notion « somatique » à son interprétation sur modèle « concret ». Le transfert des résultats des paragraphes 1, 2, 3 au cadre actuel est immédiat. De cette manière sont obtenus des théorèmes « mod $\mathfrak{N}$ », c'est-à-dire insensibles, dans leur formulation, à une modification de chaque fonction intervenant sur un ensemble de $\mathfrak{N}$ pouvant dépendre de cette fonction. Or, en théorie ponctuelle proprement dite, l'intérêt porte surtout sur les théorèmes où ne figure qu'un seul ensemble de $\mathfrak{N}$ exceptionnel.

4.2. **Notions et résultats spécifiquement ponctuels. Convergence presque partout.** — Comme notion sortant du cadre antérieur nous introduisons d'abord la mesure extérieure μ^* déduite de μ, définie sur l'ensemble $\mathfrak{B}^*$ des sous-ensembles de E. Nous désignons par $\mathfrak{N}^*$ l'ensemble des ensembles N de $\mathfrak{B}^*$ tels que $\mu^*(N) = 0$. $\mathfrak{N}^*$ est un sigma-idéal dans $\mathfrak{B}^*$ (envisagé comme sigma-anneau booléen). Nous désignons ensuite l'*enveloppe inférieure* (infimum ponctuel) d'un ensemble $\mathfrak{G}$ de fonctions réelles sur E par $\bigwedge^* \mathfrak{G}$; c'est la fonction définie en tout point x de E par

$$\left(\bigwedge{}^* \mathfrak{G}\right)(x) = b \inf_{g \in \mathfrak{G}} g(x).$$

De même, $\bigvee^* \mathfrak{G}$ désigne l'enveloppe supérieure de $\mathfrak{G}$, et, pour un ensemble $\mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{B}^*$, nous posons

$$\bigwedge{}^* \mathfrak{K} = \bigcap \mathfrak{K} \qquad \text{et} \qquad \bigvee{}^* \mathfrak{K} = \bigcup \mathfrak{K}.$$

Les *limites ponctuelles* $\liminf_{\tau}^* f_\tau$ et $\limsup_{\tau}^* f_\tau$ d'une suite (f_τ) de fonctions sur E sont définies comme $\bigvee^*_{\rho \in \Theta} \bigwedge^*_{\rho \leqslant \tau} f_\tau$ et $\bigwedge^*_{\rho \in \Theta} \bigvee^*_{\rho \leqslant \tau} f_\tau$ respectivement. Ainsi la *convergence presque partout* (abrégé en p. p.) de (f_τ), c'est-à-dire l'existence d'un ensemble N de $\mathfrak{N}^*$, bien déterminé, tel que la suite numérique $(f_\tau(x))$ converge en tout x de $E - N$, se traduit par l'égalité $\liminf_{\tau}^* f_\tau = \limsup_{\tau}^* f_\tau$ presque partout, entendant « sauf sur un ensemble N de $\mathfrak{N}^*$ déterminé ».

PROPOSITION 4.2.1 ([34], p. 333). — *Quel que soit l'ensemble $\mathfrak{G}$ de fonctions $\mathfrak{B}$-mesurables sur E, nous avons*

$$\bigwedge{}^* \mathfrak{G} \leqq e \bigwedge \mathfrak{G} \quad \text{mod}\, \mathfrak{N}^* \qquad \textit{et} \qquad e \bigvee \mathfrak{G} \leqq \bigvee{}^* \mathfrak{G} \quad \text{mod}\, \mathfrak{N}^*.$$

PROPOSITION 4.2.2 ([34], p. 334). — *Si* Θ *admet un sous-ensemble dénombrable confinal, pour toute suite* (f_τ) *de fonctions* $\mathcal{B}$*-mesurables définies sur E valent les inégalités*

$$\liminf_\tau{}^* f_\tau \leqq e \liminf_\tau f_\tau \qquad \bmod \mathcal{N}^*$$

et

$$e \limsup_\tau f_\tau \leqq \limsup_\tau{}^* f_\tau \qquad \bmod \mathcal{N}^*.$$

PROPOSITION 4.2.3 ([11], p. 56 et [34], p. 335). — *Si* Θ *admet un sous-ensemble dénombrable confinal, pour toute suite* (f_τ) *de fonctions* $\mathcal{B}$*-mesurables définies sur E, il existe une suite* (g_τ) *de fonctions* $\mathcal{B}$*-mesurables définies sur E telle que* $g_\tau = f_\tau$ *p. p. quel que soit* τ,

$$\liminf_\tau{}^* g_\tau = e \liminf_\tau g_\tau \qquad \textit{et} \qquad \limsup_\tau{}^* g_\tau = e \limsup_\tau g_\tau.$$

REMARQUE. — Les fonctions f_τ et g_τ étant $\mathcal{B}$-mesurables, l'ensemble des points où ces fonctions diffèrent est un ensemble (bien déterminé) de $\mathcal{N}$.

Par *recouvrement fin p. p.* (⁹) d'un ensemble M de $\mathcal{B}^*$ relativement à $(\mathcal{B}_\tau)$ nous entendons une suite $(K_\tau;\ \tau \in \Theta)$ telle que $K_\tau \in \mathcal{B}_\tau$ pour tout τ et $M \subseteq \limsup_\tau{}^* K_\tau$ p. p. Ainsi, l'ensemble des points de M n'appartenant pas à $\limsup_\tau{}^* K_\tau$ est un ensemble de $\mathcal{N}^*$ bien déterminé.

Introduisons alors ([38], p. 303) les propriétés **L** et **M** pour une base stochastique $(\mathcal{B}_\tau)$ dans le cadre ponctuel :

L. *Tout recouvrement fin p. p. d'un ensemble est un recouvrement fin essentiel de ses enveloppes mesurables.*

M. *Tout recouvrement fin essentiel d'un ensemble* $\mathcal{B}$*-mesurable en est un recouvrement fin p. p.*

La condition **L** peut s'énoncer ainsi : Quels que soient l'ensemble M et le recouvrement fin p. p. (K_τ) de M, il existe une suite dénombrable (τ_n) de paramètres telle que $M \subseteq \bigcup_n K_{\tau_n}$ p. p.

L et **M** sont en particulier vérifiées si Θ est dénombrable.

THÉORÈME 17 ([38], Satz 7.1, p. 303). — $(\mathcal{B}_\tau)$ *désignant une base stochastique dans le cadre ponctuel,* **L** *équivaut aux inégalités*

$$e \liminf_\tau f_\tau \leqq \liminf_\tau{}^* f_\tau \qquad \bmod \mathcal{N}^*,$$

$$\limsup_\tau{}^* f_\tau \leqq e \limsup_\tau f_\tau \qquad \bmod \mathcal{N}^*,$$

(⁹) Appelé « fine quasicovering » dans [34], p. 336 et « feine Quasiüberdeckung » dans [38], p. 303.

et **M** *aux inégalités opposées, pour tout processus stochastique* (f_τ) *de base* $(\mathcal{B}_\tau)$.

Remarque. — La propriété de monotonie « mod $\mathfrak{N}$ » de la base $(\mathcal{B}_\tau)$ n'est pas utilisée dans la démonstration.

D'après la proposition 4.2.2 et le théorème précédent, une condition suffisante (mais non nécessaire) pour la validité de **M** est l'existence d'un ensemble dénombrable confinal dans Θ.

Grâce au théorème 17, la convergence p. p. d'un processus stochastique (f_τ) de base $(\mathcal{B}_\tau)$ peut être déduite de sa convergence essentielle sous l'hypothèse **L**, et la convergence essentielle de (f_τ) peut être déduite de la convergence p. p. sous l'hypothèse **M**. Si donc, dans chacun des théorèmes 9 (de 3.3) et 14 (de 3.5), traduits dans le cadre ponctuel, outre la condition vitalienne, nous postulons **L**, nous obtenons des théorèmes de convergence p. p. pour des martingales et des sous-martingales de base $(\mathcal{B}_\tau)$. De même, si dans l'énoncé de la version ponctuelle du théorème 13 (de 3.5), nous postulons la conjonction « **L** et **M** », nous pouvons remplacer la limite essentielle supérieure par la limite ponctuelle supérieure et l'égalité devient $\lim\sup^*_\tau f_\tau = s\lim_\tau f_\tau \bmod \mathfrak{N}^*$.

Supposons que la base $(\mathcal{B}_\tau)$ soit croissante, c'est-à-dire que $\rho \leqslant \tau$ implique $\mathcal{B}_\rho \subseteq \mathcal{B}_\tau$. Une analyse des démonstrations des théorèmes 9 et 14 montre alors que, dans chacune d'elles, au lieu de la conjonction de la condition vitalienne et de la condition **L**, pour obtenir des théorèmes de convergence p. p., nous pouvons recourir à la condition vitalienne correspondante pour recouvrements fins p. p. Nous désignons par $\mathbf{V}^*_\gamma$, $\mathbf{V}'^*$, ..., ces conditions vitaliennes. Explicitons comme exemple :

$\mathbf{V}^*_\gamma$. Quels que soient l'ensemble M de mesure extérieure finie, le recouvrement fin p. p. (K_τ) de M et le nombre positif ε, il existe une suite finie $(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ de paramètres et une suite associée $\mathcal{L} = (L_1, \ldots, L_r)$ d'ensembles telles que

$$L_i \in B_{\xi_i} \quad \text{et} \quad L_i \subseteq K_{\xi_i} \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, r,$$

$$\omega_\gamma(\mathcal{L}) < \varepsilon, \qquad \mu^*(M - ML) < \varepsilon, \qquad \text{où} \quad L = \bigcup \mathcal{L}.$$

Substituant $\mathbf{V}^*_\gamma$ à $\mathbf{V}_\gamma$, $\mathbf{V}^*_\infty$ à $\mathbf{V}_\infty$ dans la version ponctuelle du théorème 9 (de 3.3), nous pouvons conclure à la convergence presque partout des martingales en question. La même situation se présente avec le théorème 14 (de 3.5), où le remplacement de la condition $\mathbf{V}'$ par $\mathbf{V}'^*$ permet de conclure à la convergence presque partout des sous-martingales de variation bornée. Si, dans la version ponctuelle du théorème 13 (de 3.5), nous remplaçons $\mathbf{V}_\gamma$ par « $\mathbf{V}^*_\gamma$ et M », nous pouvons dans la conclusion substituer à la limite supérieure essentielle la limite supérieure ponctuelle.

Signalons les implications suivantes : $\mathbf{V}_Y^* \to \mathbf{L}$; $(\mathbf{L}$ et $\mathbf{V}_Y) \to \mathbf{V}_Y^*$; d'où résulte l'équivalence

$$(\mathbf{M} \text{ et } \mathbf{L} \text{ et } \mathbf{V}_Y) \leftrightarrow (\mathbf{M} \text{ et } \mathbf{V}_Y^*).$$

Même remarque pour $\mathbf{V}'$ et $\mathbf{V}'^*$.

REMARQUE. — La condition $\mathbf{V}_\infty^*$ fut introduite sous le nom de $\mathbf{V}_0$ par Y. S. CHOW ([8], p. 266) qui établit le cas correspondant du théorème 9 (de 3.3).

4.3. **Martingales au sens classique.** — La théorie « classique » des martingales se rapporte à des ensembles de paramètres, sous-ensembles de la droite numérique, donc totalement ordonnés. Pour un exposé de cette théorie, y compris son origine historique et de nombreuses applications, surtout en calcul des probabilités et en statistique, le lecteur est renvoyé au livre de DOOB [11].

Comme une martingale à base croissante ($\mathcal{B}_n$; $n = 1, 2, \ldots$) induite par une fonction f, fournit une suite d'approximations de f par des fonctions $\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}_n)$, obtenues à partir de f en prenant des « valeurs moyennes » de f, et, en général, de nature beaucoup plus simple que f, on peut s'attendre à des applications dans des raisonnements d'analyse pure. En fait, on en a un exemple dans [7]; chaque $\mathcal{B}_n$ est alors atomique.

Beaucoup d'applications se rencontrent dans la théorie de l'information; citons [29] pour des exemples typiques.

Une application à la théorie du potentiel se trouve dans [12]. Ici, on a déjà, sous une forme déguisée, un ensemble de paramètres filtrant; les paramètres pourraient être des ensembles ouverts, ordonnés par inclusion.

Toutes les théories et les applications mentionnées ici se présentent dans le cadre ponctuel décrit en 4.1 et 4.2.

4.4. **Espaces produits.** — Soit $(D_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille non vide d'ensembles et soit $\mathcal{C}_\gamma$, pour tout γ, une sigma-algèbre booléenne d'ensembles, d'unité D_γ. Nous posons $E = \bigtimes_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma$; E est l'espace produit des D_γ, c'est-à-dire l'ensemble des applications $x : \gamma \to x_\gamma$ de Γ telles que $x_\gamma \in D_\gamma$ quel que soit γ. Désignons par Θ l'ensemble des sous-ensembles finis de Γ, filtrant par inclusion. Si $\tau \in \Theta$, on appelle τ-cylindre tout sous-ensemble de E de la forme $C = \bigtimes_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma$, où $C_\gamma = D_\gamma$ si $\gamma \notin \tau$, et $C_\gamma \in \mathcal{C}_\gamma$ pour tout γ. Pour τ fixé, nous définissons $\mathcal{B}_\tau$ comme l'extension borélienne dans E (entendant : dans la sigma-algèbre booléenne de tous les sous-ensembles de E) de l'ensemble des τ-cylindres.

Ainsi l'inclusion $\tau \subseteq \xi$ implique l'inclusion $\mathcal{B}_\tau \subseteq \mathcal{B}_\xi$. Par conséquent, l'union $\mathcal{A}$ des $\mathcal{B}_\tau$ pour $\tau \in \Theta$ est une algèbre booléenne d'ensembles. Nous désignons par $\mathcal{B}$ son extension borélienne dans E. La famille $(\mathcal{B}_\tau;\ \tau \in \Theta)$ est donc une base stochastique croissante dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_\omega = \mathcal{B}$.

Soit μ une mesure définie sur $\mathcal{B}$, sigma-finie sur chaque $\mathcal{B}_{\{\gamma\}}$, donc sur chaque $\mathcal{B}_\tau$ (*cf.* 2.2). La théorie du paragraphe 2, transférée au cadre ponctuel d'après 4.1, est alors applicable. En particulier, on déduit du théorème 6 (de 2.6) et de la remarque qui le suit, que la famille $(\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}_\tau))$ converge fortement vers f dans l'espace d'Orlicz $\mathcal{L}_X$ correspondant à μ si $f \in \mathcal{L}_X$ et $\limsup\limits_{u \to \infty} X(2u)/X(u) < \infty$.

Dans le cas d'une mesure produit μ on dispose d'une formule commode pour calculer $\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}_\tau)$ si $f \in \mathcal{L}_1$. Considérons, en effet, pour tout γ, une mesure $\varkappa_\gamma$ sur $\mathcal{C}_\gamma$ telle que $\varkappa_\gamma(D_\gamma) = 1$, et prenons pour μ la mesure produit borélien des $\varkappa_\gamma$ (*voir* [20], 7.2 et [25]). Pour tout $\tau \in \Theta$ et $\tau' = \Gamma - \tau$, l'espace E est « canoniquement » isomorphe à l'espace $E_\tau \times E'_\tau$, où $E_\tau = \bigtimes\limits_{\gamma \in \tau} D_\gamma$ et $E'_\tau = \bigtimes\limits_{\gamma \in \tau'} D_\gamma$. Par abus de notation, chaque élément de E s'écrit sous la forme $x = (x_\tau, x'_\tau)$, où $x_\tau \in E_\tau$ et $x'_\tau \in E'_\tau$. Nous désignons par μ_τ la mesure produit borélien des $\varkappa_\gamma$ pour $\gamma \in \tau$, qui est une mesure sur E_τ et nous définissons de manière analogue μ'_τ comme mesure borélienne dans E'_τ. Ainsi μ devient la mesure produit de μ_τ et μ'_τ. Alors, posant $f_\tau = \mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}_\tau)$, nous avons

$$f_\tau(x_\tau, x'_\tau) = \int_{E'_\tau} f(x_\tau, y'_\tau)\, d\mu'_\tau(y'_\tau). \tag{1}$$

En effet, d'après le théorème de Fubini, la fonction définie par (1) est $\mathcal{B}_\tau$-mesurable et μ-intégrable; si $A \in \mathcal{B}_\tau$, on a $A = C \times E'_\tau$, où C appartient au domaine de définition de μ_τ, par conséquent

$$\begin{aligned}\int_A f_\tau\, d\mu &= \int_C f_\tau(x_\tau, x'_\tau)\, d\mu_\tau(x_\tau) \\ &= \int_C \int_{E'_\tau} f(x_\tau, y'_\tau)\, d\mu'_\tau(y'_\tau)\, d\mu_\tau(x_\tau) = \int_A f\, d\mu,\end{aligned}$$

ce qui démontre l'égalité en question $f_\tau = \mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}_\tau)$.

La convergence en moyenne de $(\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}_\tau))_{\tau \in \Theta}$ dans le cas d'une mesure produit fut démontrée dans [15]. Remarquons que, déjà dans le cas d'un produit dénombrable de mesures de Lebesgue sur l'intervalle $[0, 1]$, la base $(\mathcal{B}_\tau)$ ne jouit pas de la propriété $\mathbf{V}_1$ d'après [10]. Si Γ est dénombrable, si $(\tau_n;\ n = 1, 2, \ldots)$ est une sous-suite de Θ croissante et confinale et si $f \in \mathcal{L}_1$, la suite $(\mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}_{\tau_n}))_{n=1,2,\ldots}$ converge presque partout vers f en vertu des théorèmes classiques, résultat qui fut, pour les mesures produits, démontré auparavant directement dans [25]. Si Γ est non dénombrable, Θ n'admet aucune sous-suite croissante et confinale.

4.5. **L'intégrant de Radon-Nikodým défini comme dérivée.** — Soit μ une mesure finie et strictement positive définie sur la sigma-algèbre booléenne abstraite $\mathcal{B}$ d'unité E, et φ une fonction additive et de variation bornée définie sur une sous-algèbre booléenne $\mathfrak{A}$ de $\mathcal{B}$. Désignons par $\mathfrak{T}$ l'ensemble de toutes les $\mathfrak{A}$-partitions finies de E, filtrant pour la relation $\sqsubset$ (*cf.* exemple 2° de 1.9). Tout soma différent de O est alors une cellule et la restriction de φ à $\mathfrak{A} - \{O\}$ est une fonction de cellule additive et de variation bornée.

Sans faire appel au théorème de Radon-Nikodým nous pouvons, pour tout $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{T}$, définir la $\mathfrak{S}$-dérivée $D_{\mathfrak{S}}\varphi$ de φ comme la fonction prenant sur chaque constituant J de $\mathfrak{S}$ la valeur $\varphi(J)/\mu(J)$ (*cf.* 2.7). Le théorème 2-3 *a* (de 2.7) est alors applicable à la martingale engendrée par φ dont la représentation intégrante est $(D_{\mathfrak{S}}\varphi;\, \mathfrak{S}\in\mathfrak{T})$. En effet, ce théorème est basé sur les théorèmes 2 et 3 de 2.4 dans lesquels le théorème de Radon-Nikodým n'intervient que pour définir la représentation intégrante de la martingale ou sous-martingale considérée (*cf.* les sept premières lignes de 2.3). Par conséquent, $(D_{\mathfrak{S}}\varphi)$ converge stochastiquement vers une fonction $sD\varphi$ et pour tout soma A de $\mathfrak{A}$ vaut l'égalité

$$\int_A sD\varphi\, d\mu = \varphi_c(A),$$

φ_c désignant la partie sigma-additive de φ.

Ainsi est établi le théorème de Radon-Nikodým pour les fonctions additives, puisque nous obtenons une fonction $sD\varphi$ possédant la propriété caractéristique de l'intégrant de Radon-Nikodým. Il est à noter que l'intégrant ainsi obtenu se présente comme une dérivée « authentique », à savoir une dérivée stochastique (*cf.* [22], p. 227, Remarks). Pour une fonction φ sigma-additive, nous avons $\int_A sD\varphi\, d\mu = \varphi(A)$ quel que soit A dans $\mathfrak{A}$.

Si $\mathfrak{A} = \mathcal{B}$, la démonstration du Satz 5.1 dans [33] (p. 275) faisant usage du lemme de Zorn, est immédiatement applicable à notre présente base $(\mathcal{B}_{\mathfrak{S}})$, montrant que la condition $\mathbf{aV}_\infty$ est vérifiée. Donc, d'après le théorème 9 *a* de 3.6, $(D_{\mathfrak{S}}\varphi)$ converge suivant l'ordre vers $sD\varphi = D\varphi$. Par conséquent, l'intégrant de Radon-Nikodým apparaît comme une dérivée suivant l'ordre (dérivée essentielle en version ponctuelle).

Dans le cas où $\mathfrak{A} = \mathcal{B}$ et φ est sigma-additive, nous pouvons prendre pour $\mathfrak{T}$ l'ensemble de toutes les $\mathcal{B}$-partitions dénombrables de E et les conclusions du cas fini, en particulier la validité de $\mathbf{aV}_\infty$, restent vraies.

Signalons que Kolmogoroff [30] avait démontré le théorème de Radon-Nikodým pour les fonctions φ lipschitziennes en montrant que la famille $(D_{\mathfrak{S}}\varphi)$ converge alors fortement dans $\mathcal{L}_2$.

4.6. **Représentation des espaces $\mathcal{L}_X$ comme espaces de fonctions de cellule.** — Considérons une mesure finie et strictement positive μ définie sur la sigma-algèbre $\mathcal{B}$ d'unité E. Soit $\mathfrak{T}$ une famille non vide de $\mathcal{B}$-partitions finies $\mathfrak{S}$ de E ne comprenant pas O, filtrante relativement à $\sqsubset$, telle que $\mathcal{B}$ soit l'extension borélienne de l'union des $\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{T}$, et soit $\mathcal{L}_X$ un espace d'Orlicz relatif à μ, quelconque.

Toute fonction de cellule φ finie et additive engendre une martingale Φ de base $(\mathcal{B}_{\mathfrak{S}})$ dont $(D_{\mathfrak{S}}\varphi; \mathfrak{S}\in\mathfrak{T})$ est la μ-représentation intégrante (*cf.* 1.9 et 2.7). En vertu de la proposition 2.6.2, $\| D_{\mathfrak{S}}\varphi \|_X$ est une fonction croissante de $\mathfrak{S}$. Nous définissons naturellement la $\mathcal{L}_X$-norme ou $\mathcal{L}_X$-variation totale de φ en accord avec 2.7 comme la $\mathcal{L}_X$-norme de la martingale correspondante Φ, c'est-à-dire d'après 2.6 (après la proposition 2.6.2)

$$(1) \qquad \|\varphi\|_X = \|\Phi\|_X = \lim_{\mathfrak{S}} \| D_{\mathfrak{S}}\varphi \|_X,$$

et $\mathcal{V}_X$ comme l'espace des fonctions de cellule φ sigma-additives pour lesquelles $\|\varphi\|_X$ est finie. D'après la remarque 1 concernant le théorème 5 (de 2.6), si x n'est pas bornée, nous pouvons dans cette définition remplacer « sigma-additives » par « additives ». Si $x(u) = 1$, $\mathcal{V}_X$ est l'espace des fonctions de cellule sigma-additives et de variation bornée que nous désignons par $\mathcal{V}_1$. Comme il existe une constante positive α telle que $\alpha \int_E |f|\, d\mu \leqq \|f\|_X$ pour toute fonction f (*cf.* 2.6), on a l'inclusion $\mathcal{V}_X \subseteq \mathcal{V}_1$.

En vertu de la définition (1), on obtient un isomorphisme isométrique de $\mathcal{V}_X$ sur l'espace des martingales de base $(\mathcal{B}_{\mathfrak{S}})$ sigma-additives et bornées dans $\mathcal{L}_X$ en faisant correspondre à φ la martingale $(D_{\mathfrak{S}}\varphi)$. Or, d'après le corollaire du théorème 5, l'application $(f_{\mathfrak{S}}; \mathfrak{S}\in\mathfrak{T}) \to s \lim_{\mathfrak{S}} f_{\mathfrak{S}}$ est un isomorphisme isométrique de ce dernier espace sur $\mathcal{L}_X$. Par conséquent, la correspondance $\varphi \to sD\varphi$ est un isomorphisme de $\mathcal{V}_X$ sur $\mathcal{L}_X$ envisagés comme espaces de Banach. L'application inverse fait correspondre à $f\in\mathcal{L}_X$ l'intégrale indéfinie de f sur les cellules.

Dans leur théorie des espaces $\mathcal{V}_p$, Bochner et Leader ([1] et [42]; *voir* aussi Fuglede [16]) posent une algèbre booléenne abstraite $\mathfrak{A}$ pourvue d'un contenu (fonction additive et positive) strictement positif. Afin de reconstituer le cadre précédent, il nous suffit de plonger $\mathfrak{A}$ dans une sigma-algèbre $\mathcal{B}$ et de prolonger le contenu en une mesure strictement positive définie sur $\mathcal{B}$ grâce au procédé de complétion de Hausdorff-Nikodým (*cf.* [28], § 8), puis de définir $\mathfrak{T}$ comme l'ensemble de toutes les $\mathfrak{A}$-partitions finies de E et de faire correspondre à toute fonction φ définie sur $\mathfrak{A}$, additive et finie, sa restriction à $\mathfrak{A} - \{O\}$ comme fonction de cellule. La « projection de φ sur la partition $\mathfrak{E}$ » suivant LEADER ([42], p. 530), est l'intégrale indéfinie $\varphi^{\wedge}_{\mathfrak{E}}$ de $D_{\mathfrak{E}}\varphi$, c'est-à-dire le prolongement naturel de $\varphi_{\mathfrak{E}}$ (*cf.* 2.3 après la proposition 2.3.1), restreinte aux somas de $\mathfrak{A}$, en symboles $\varphi^{\wedge}_{\mathfrak{E}} \mid \mathfrak{A}$. Pour $\mathfrak{E}$ fixé, la fonction $D_{\mathfrak{E}}\varphi$ qui est bornée, appartient à $\mathcal{L}_{+\infty}$, donc à $\mathcal{L}_X$, et correspond à $\varphi^{\wedge}_{\mathfrak{E}} \mid \mathfrak{A} - \{O\}$ par l'isomorphisme de $\mathcal{V}_X$ sur $\mathcal{L}_X$ décrit ci-dessus. Il en résulte que pour $\varphi \in \mathcal{V}_X$,

$$\| (\varphi - \varphi^{\wedge}_{\mathfrak{E}}) \mid \mathfrak{A} - \{O\} \|_X = \| sD\varphi - D_{\mathfrak{E}}\varphi \|_X.$$

Si donc $\limsup_{u \to \infty} X(2u)/X(u)$ est finie, le théorème 6 et sa remarque (en 2.6) entraînent

(2) $$\lim_{\mathfrak{E}} \| (\varphi - \varphi^{\wedge}_{\mathfrak{E}}) \mid \mathfrak{A} \|_X = 0.$$

Dans le cas particulier de l'espace $\mathcal{L}_p$, $1 \leqq p \leqq \infty$, $\| \varphi \|_X$ définie ci-dessus pour la fonction de cellule $\varphi \mid \mathfrak{A} - \{O\}$ est $= \| \varphi \|_p$ au sens de BOCHNER-LEADER (*cf.* [42], (1.3), (2.2) et (2.3)). Le principal théorème de Leader ([42], théorème 9), à savoir « $1 \leqq p < \infty$ et $\varphi \in \mathcal{V}_p$ impliquent $\lim_{\mathfrak{E}} \| (\varphi - \varphi^{\wedge}_{\mathfrak{E}}) \mid \mathfrak{A} \|_p = 0$ », découle immédiatement de (2).

Signalons enfin que la définition de $\mathcal{V}_1$ donnée en 1.11 est en accord avec la définition donnée plus haut.

Comme application nous allons établir la

PROPOSITION 4.6.1. — *Si* $(\mathcal{B}_\tau)$ *est une base stochastique (sous-entendu « croissante ») dans* $(E, \mathcal{B}, \mu)$ *et* $\Phi = (\varphi_\tau)$ *une sous-martingale de base* $(\mathcal{B}_\tau)$ *dont la X-norme est finie, alors son intégrale* Φ^m *peut être définie selon* 1.4 *et* $\| \Phi^m \|_X \leqq \| \Phi \|_X$.

DÉMONSTRATION. — Soit (f_τ) la μ-représentation intégrante de Φ. Sans restreindre la généralité, nous pouvons nous placer dans le cas où $\| f_\tau \|_X$ est inférieure à une constante finie $\varkappa$ pour tout τ dans Θ. $\mu(E)$ étant finie, il existe une constante α (*cf.* 2.6) telle que $\alpha \| f \|_1 \leqq \| f \|_X$ quelle que soit la fonction f, ce qui entraîne $\| f_\tau \|_1 \leqq \varkappa\alpha^{-1}$ pour tout τ dans Θ. Ainsi est légitimée la définition de la martingale intégrale Φ^m selon 1.4.

Φ^m étant une martingale, (f^m_τ) sa μ-représentation intégrante,

(3) $$\| \Phi^m \|_X = b \sup_{\tau \in \Theta} \| f^m_\tau \|_X$$

(*cf.* 2.6 après la proposition 2.6.3).

Posant $\mathfrak{A} = \bigcup_\tau \mathcal{B}_\tau$, nous désignons par $\mathfrak{T}$ l'ensemble des $\mathfrak{A}$-partitions finies $\mathfrak{E}$ de E dirigé suivant $\sqsubset$ et pour chaque $\mathfrak{E}$, par $\mathcal{C}_{\mathfrak{E}}$, son extension borélienne. Pour τ fixé nous introduisons les représentations intégrantes $(f_{\tau,\mathfrak{T}})$ et $(f^m_{\tau,\mathfrak{T}})$ des martingales de base $(\mathcal{C}_{\mathfrak{T}})$ induites par f_τ et f^m_τ respectivement.

Grâce au théorème 5 (de 2.6), nous avons

$$(4)\qquad \| f^m_\tau \|_X = b \sup_{\mathfrak{T}\in\mathfrak{X}} \| f^m_{\tau,\mathfrak{T}} \|_X.$$

D'où, en combinant (3) et (4),

$$(5)\qquad \| \Phi^m \|_X = b \sup_{\tau\in\Theta,\, \mathfrak{T}\in\mathfrak{X}} \| f^m_{\tau,\mathfrak{T}} \|_X.$$

Envisageons pour un instant τ et $\mathfrak{T}$ comme fixés et soient A_j, $j = 1, \ldots, k$ les composantes de $\mathfrak{T}$, τ_j un paramètre tel que $A_j \in \mathcal{B}_{\tau_j}$, et τ un paramètre suivant tous les τ_j. De la définition de (f^m_τ) résulte

$$(6)\qquad \int_{A_j} f^m_\tau \, d\mu = \lim_{\rho\in\Theta} \int_{A_j} f_\rho \, d\mu,$$

les intégrales étant finies et la suite de droite croissante pour $\rho \gg \tau_j$. Divisant les deux membres de (6) par $\mu(A_j)$ nous déduisons $f^m_{\tau,\mathfrak{T}} \mid A_j = \lim\limits_\rho f_{\rho,\mathfrak{T}} \mid A_j$ pour chaque j, donc

$$(7)\qquad f^m_{\tau,\mathfrak{T}} = \lim_\rho f_{\rho,\mathfrak{T}},$$

la suite de droite étant croissante pour $\rho \gg \tau$. La convergence étant trivialement uniforme sur chaque A_j, les fonctions bornées $f_{\rho,\mathfrak{T}}$ convergent uniformément, en d'autres termes dans $\mathcal{L}_{+\infty}$, *a fortiori* dans $\mathcal{L}_X$, vers $f^m_{\tau,\mathfrak{T}}$. D'où la relation de convergence des X-normes

$$(8)\qquad \| f^m_{\tau,\mathfrak{T}} \|_X = \lim_\rho \| f_{\rho,\mathfrak{T}} \|_X.$$

La conjonction de (5) et (8) fournit

$$(9)\qquad \| \Phi^m \|_X = b \sup_{\tau,\mathfrak{T}} \left(\lim_\rho \| f_{\rho,\mathfrak{T}} \|_X\right) = b \sup_{\mathfrak{T}} \left(\lim_\rho \| f_{\rho,\mathfrak{T}} \|_X\right).$$

L'égalité (9) implique l'inégalité

$$\| \Phi^m \|_X \leqq b \sup_{\mathfrak{T}} \left(b \sup_{\eta \ll \rho} \| f_{\rho,\mathfrak{T}} \|_X\right)$$

quel que soit η dans Θ, d'où, tenant compte de $\| f_{\rho,\mathfrak{T}} \|_X \leqq \| f_\rho \|_X$, l'inégalité

$$(10)\qquad \| \Phi^m \|_X \leqq b \sup_{\mathfrak{T}} \left(b \sup_{\eta \ll \rho} \| f_\rho \|_X\right) = b \sup_{\eta \ll \rho} \| f_\rho \|_X$$

quel que soit η dans Θ.

Par conséquent, $\| \Phi^m \|_X \leq \limsup_\rho \| f_\rho \|_X$ qui, par définition, est $= \| \Phi \|_X$ et ainsi est établie l'inégalité

$$\| \Phi^m \|_X \leq \| \Phi \|_X.$$

Remarque. — L'emploi de la proposition 4.6.1 permet d'abréger la démonstration du théorème 13 (de 3.5), évitant entre autres de distinguer deux cas.

4.7. **Dérivation ponctuelle.** — La théorie classique de la dérivation proprement dite s'intéresse aux dérivées ponctuelles. En outre, elle utilise, en général, une relation de « finesse » entre partitions différente de $\sqsubset$ que nous désignons par $\leqslant$. Nous parvenons à déduire de tels théorèmes à partir de la théorie générale exposée dans les paragraphes 1, 2 et 3 en appliquant la méthode du cadre ponctuel, décrit en 4.1 et 4.2, aux versions cellulaires de ces paragraphes, c'est-à-dire à 1.9, 1.10, 2.7 et 3.6, et en traduisant les résultats obtenus en « langue $\leqslant$ ».

Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré, comme en 4.1, et $\mathcal{N}$ le sigma-idéal des ensembles de $\mathcal{B}$ de μ-mesure nulle. Nous posons une famille non vide $\mathfrak{T}$ de partitions de $E \bmod \mathcal{N}$, dénombrables et filtrantes pour la relation $\sqsubset \bmod \mathcal{N}$. En d'autres termes, chaque élément $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{T}$ est un ensemble d'ensembles mesurables, appelées cellules, deux à deux disjoints $\bmod \mathcal{N}$ et de mesure positive, tel que $\bigcup \mathfrak{C} = E \bmod \mathcal{N}$. La relation de finesse $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{S} \bmod \mathcal{N}$ est définie ainsi : Chaque composante de $\mathfrak{S}$ est incluse $\bmod \mathcal{N}$ dans une composante de $\mathfrak{C}$. Ceci équivaut à l'inclusion $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}} \subseteq \mathcal{B}_{\mathfrak{S}} + \mathcal{N}$, où $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$ et $\mathcal{B}_{\mathfrak{S}}$ désignent les sigma-algèbres booléennes engendrées par $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{S}$ respectivement. Nous constatons ainsi que $(\mathcal{B}_{\mathfrak{C}})$ est une base stochastique croissante $\bmod \mathcal{N}$ relativement à la relation $\sqsubset \bmod \mathcal{N}$ dans $\mathfrak{T}$.

Un complexe actif est un sous-ensemble d'une partition appartenant à $\mathfrak{T}$. Une fonction de cellule est une fonction réelle φ définie sur $\mathcal{I} = \bigcup \mathfrak{T}$, telle que $I_1 = I_2 \bmod \mathcal{N}$ entraîne $\varphi(I_1) = \varphi(I_2)$, et que $\varphi(\mathcal{J}) = \sum_{J \in \mathcal{J}} \varphi(J)$ existe pour tout complexe actif $\mathcal{J}$. Les notions de sous-additivité et d'additivité d'une fonction de cellule définies en 1.9 s'étendent aussitôt au présent cadre par modification $\bmod \mathcal{N}$.

Nous supposons que $\mathfrak{T}$ est filtrante relativement à une relation $\leqslant$, outre $\sqsubset$ (*voir* à la fin du paragraphe et en 4.8 pour des exemples). Nous utilisons les notations $(\mathfrak{T}, \leqslant)$ et $(\mathfrak{T}, \sqsubset)$ pour les ensembles filtrants de partitions et $(\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}; \mathfrak{C} \in \mathfrak{T}, \leqslant)$ et $(\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}; \mathfrak{C} \in \mathfrak{T}, \sqsubset)$ pour les bases stochastiques cellulaires qu'ils déterminent. La base stochastique $(\mathcal{B}_{\mathfrak{E}};\ \mathfrak{E}\in\mathfrak{T},\ \ll)$ n'est pas nécessairement croissante mod $\mathfrak{N}$.

A côté des notions « en finesse de partition », entendant définies au moyen de passages à la limite relatifs à $(\mathfrak{T},\ \sqsubset)$, nous considérons maintenant les notions correspondantes relatives à $(\mathfrak{T},\ \ll)$:

L'intégrale supérieure selon $\ll$:

$$\ll\text{-}\varphi^s(E) = \limsup_{\mathfrak{E}\in\mathfrak{T};\ll} \varphi(\mathfrak{E})$$

(*cf.* 1.10), la variation totale selon $\ll$:

$$\|\varphi\|_{1,\ll} = \ll\text{-}|\varphi|^s(E),$$

la fonction φ de variation bornée (*cf.* 1.9 et Remarque en 1.10) ou absolument continue (*cf.* 2.7) selon $\ll$, la dérivée stochastique supérieure selon $\ll$:

$$\ll\text{-}s\,D^s\varphi = s\limsup_{\mathfrak{E}\in\mathfrak{T};\ll} D_{\mathfrak{E}}\varphi$$

(*cf.* 2.7), la dérivée $\mathcal{L}_X$ selon $\ll$, si elle existe (*cf.* 2.7), la dérivée essentielle supérieure selon $\ll$:

$$\ll\text{-}e\,D^s\varphi = e\limsup_{\mathfrak{E}\in\mathfrak{T};\ll} D_{\mathfrak{E}}\varphi$$

(*cf.* 3.6 et 4.1), le recouvrement cellulaire essentiel, fin selon $\ll$, d'un ensemble mesurable, les conditions de Vitali $\ll$-$\mathbf{aV}_Y$, $\ll$-$\mathbf{aV}'$, la condition $\ll$-$\mathbf{F}$ (*cf.* 1.10), etc. Observons que les dérivées sont définies mod $\mathfrak{N}$.

Toutefois, nous n'envisageons pas les propriétés de sous-additivité et d'additivité d'une fonction de cellule ainsi que la notion d'intégrale de Burkill-Kolmogoroff sur une cellule différente de E, ni la propriété $\mathbf{E}$ (*cf.* 1.10) comme relativisables à $\ll$.

Considérons la condition suivante ([33], p. 257) :

Z. $\ll$ *est plus fine que* $\sqsubset$, *explicitement : Tout sous-ensemble de* $\mathfrak{T}$ *terminal relativement à* $\ll$ *l'est aussi relativement à* $\sqsubset$.

Z est toujours satisfaite si $\mathfrak{E}\sqsubset\mathfrak{X}$ entraîne $\mathfrak{E}\ll\mathfrak{X}$.

PROPOSITION 4.7.1. — *Supposons que la condition* **Z** *soit satisfaite. Alors, pour toute fonction de cellule* φ : $\ll\text{-}\varphi^s(E)\geq\varphi^s(E)$, $\|\varphi\|_{X,\ll}\geq\|\varphi\|_X$, $\ll\text{-}s\,D^s\varphi\geq s\,D^s\varphi$, $\ll\text{-}e\,D^s\varphi\geq e\,D^s\varphi$. *Si* φ *est de variation bornée ou absolument continue relativement à* $\ll$, *elle l'est aussi relativement à* $\sqsubset$. *Tout recouvrement essentiel fin selon* $\ll$, *d'un ensemble mesurable est un recouvrement fin essentiel du même ensemble.* $\ll$-$\mathbf{aV}_Y$ *implique* $\mathbf{aV}_Y$ *et* $\ll$-$\mathbf{aV}'''$ *implique* $\mathbf{aV}'''$.

$\mathcal{G}$ et $\mathcal{S}$ désignant deux partitions dans $\mathfrak{T}$, nous définissons $R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{S}}$ comme l'union des composantes I de $\mathcal{S}$ telles qu'aucune cellule de $\mathcal{G}$ n'inclue I mod $\mathfrak{N}$. Nous considérons les conditions suivantes de liaison :

R : *Quelle que soit* $\mathcal{G} \in \mathfrak{T}$, $s \lim\limits_{\mathcal{S} \in \mathfrak{T}; \ll} R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{S}} = \emptyset$.

U : *Quelle que soit* $\mathcal{G} \in \mathfrak{T}$, $e \lim\limits_{\mathcal{S} \in \mathfrak{T}; \ll} R^{\mathcal{G}}_{\mathcal{S}} = \emptyset$.

Notons que **U** implique **R**.

PROPOSITION 4.7.2 (*cf.* [36], Satz 4.2 et Satz 4.1; [33], Satz 3.2 et Satz 3.1). — *Nous supposons* **E** *et* **R** *vérifiées. Alors, pour toute fonction de cellule* φ,

$$(\mathrm{I}_1) \qquad \leqslant\text{-}s D^s \varphi \underline{\leqslant} s D^s \varphi \bmod \mathfrak{N} \quad (^{10}).$$

Si φ *est absolument continue relativement à* $\leqslant$ *et* $\sqsubset$,

$$(\mathrm{I}_2) \qquad \leqslant\text{-}\varphi^s(E) \underline{\leqslant} \varphi^s(E) \quad (^{10}),$$

pourvu que ces intégrales existent. Inversement, sans postuler **E**, *la validité de* (I_1) [*resp.* (I_2)] *pour toute fonction de cellule non négative et lipschitzienne implique* **R**.

PROPOSITION 4.7.3 (*cf.* [33], Satz 3.4 et Satz 3.7; [38], Satz 5.5 *et* [33], Satz 3.3). — *Nous supposons* **E** *et* **U** *vérifiées. Alors, pour toute fonction de cellule* φ,

$$(\mathrm{I}_3) \qquad \leqslant\text{-}e D^s \varphi \underline{\leqslant} e D^s \varphi \bmod \mathfrak{N} \quad (^{10}).$$

Tout recouvrement $\leqslant$*-fin essentiel d'un ensemble mesurable est un recouvrement fin essentiel du même ensemble.* $\mathbf{aV}_Y$ *implique* $\leqslant$-$\mathbf{aV}_Y$ *et* $\mathbf{aV}'''$ *implique* $\leqslant$-$\mathbf{aV}'''$. *Sans postuler* **E**, *la validité de* I_3 *pour toute fonction de cellule non négative et lipschitzienne implique* **U**.

Par application de ces propositions, il est facile de traduire des résultats antérieurs en « langue $\leqslant$ » (version ponctuelle). Dans les théorèmes 2-3 $a_{\leqslant}$, $7_{\leqslant}$ et $8_{\leqslant}$ formulés ci-dessous, traductions des théorèmes 2-3, 7 et 8 de 2.7, **Z**, **E** et **R** sont postulés.

THÉORÈME 2-3 $a_{\leqslant}$. — *Toute fonction de cellule de variation bornée selon* $\leqslant$ *et sous-additive possède une* $\leqslant$*-dérivée stochastique* $\leqslant$-$sD\varphi$ *intégrable qui est aussi la* $\leqslant$*-dérivée stochastique de la fonction de cellule intégrale* φ^m. *Pour toute cellule* I, $\int_I (\leqslant\text{-}sD\varphi)\, d\mu = \varphi^m_c(I)$, *où* φ^m_c *désigne la partie sigma-additive de* φ^m.

---

(10) Cette inégalité ne subsiste pas si l'on ne postule pas **E**. Il serait intéressant de savoir si elle reste toutefois valable pour les fonctions φ additives.

THÉORÈME $7_{\leqslant}$. — *Si, outre* **Z, E** *et* **R**, $\mathfrak{T}$ *satisfait* **P** *et si* φ *est de variation bornée selon* $\leqslant$, *alors*

$$\leqslant\text{-}s\,D^i\,\varphi = \leqslant\text{-}s\,D\varphi^i \qquad et \qquad \leqslant\text{-}s\,D^s\,\varphi = \leqslant\text{-}s\,D\varphi^s.$$

THÉORÈME $8_{\leqslant}$. — *Si* φ *est de variation bornée selon* $\leqslant$ *et absolument continue selon* $\leqslant$, *alors* $\leqslant$-$s\,D^i\,\varphi$ *et* $\leqslant$-$sD^s\,\varphi$ *sont intégrables et*

$$\leqslant\text{-}\varphi^i(E) = \int_E \leqslant\text{-}sD^i\varphi\,d\mu \qquad et \qquad \leqslant\text{-}\varphi^s(E) = \int_E \leqslant\text{-}sD^s\,\varphi\,d\mu.$$

Dans les théorèmes $9\,a_{\leqslant}$, $13\,a_{\leqslant}$ et $14\,a_{\leqslant}$, traductions des théorèmes $9\,a$, $13\,a$ et $14\,a$ de 3.6, **Z, E** et **U** sont postulés. $\|\ \ \|_X$ et $\|\ \ \|_Y$ désignent des normes d'espaces d'Orlicz complémentaires.

THÉORÈME $9\,a_{\leqslant}$. — *Si la base stochastique cellulaire* $(\mathcal{B}_{\mathfrak{C}};\ \mathfrak{C}\in\mathfrak{T};\ \leqslant)$ *possède la propriété* $\leqslant$-**a**$\mathbf{V}_Y$, *toute fonction additive de cellule* φ *telle que* $\|\,\varphi\,\|_{X,\leqslant}$ *soit finie, est essentiellement* $\leqslant$*-dérivable. Si cette base satisfait à* $\leqslant$-**a**$\mathbf{V}_\infty$, *toute fonction* φ *additive et de variation semi-bornée selon* $\leqslant$ *admet une* $\leqslant$*-dérivée essentielle.*

THÉORÈME $13\,a_{\leqslant}$. — *Si la base stochastique cellulaire* $(\mathcal{B}_{\mathfrak{C}};\ \mathfrak{C}\in\mathfrak{T};\ \leqslant)$ *jouit de la propriété* $\leqslant$-**a**$\mathbf{V}_Y$, *pour toute fonction de cellule* φ *sous-additive telle que* $\|\,\varphi\,\|_{X,\leqslant}$ *soit finie, la dérivée stochastique* $\leqslant$-$s\,D\varphi$ *existe et est égale à* $e\,D^s\,\varphi \bmod \mathfrak{N}$.

A propos de la traduction des théorèmes $14\,a$ et 16 de 3.6, nous observons que la conjonction (**E** et **a**$\mathbf{V}_\infty$) implique **a**$\mathbf{V}'''$, donc **a**$\mathbf{V}'$ (*cf.* [38], schéma p. 294).

THÉORÈME $14\,a_{\leqslant}$. — *Si la base stochastique cellulaire* $(\mathcal{B}_{\mathfrak{C}};\ \mathfrak{C}\in\mathfrak{T};\ \leqslant)$ *vérifie* $\leqslant$-**a**$\mathbf{V}_\infty$, *toute fonction de cellule semi-additive et de variation bornée selon* $\leqslant$ *est essentiellement* $\leqslant$*-dérivable.*

THÉORÈME $16_{\leqslant}$. — *La condition* $\leqslant$-**a**$\mathbf{V}'''$ *est nécessaire et suffisante pour que*

$$\leqslant\text{-}\varphi^i\,(E) = \int_E \leqslant\text{-}e\,D^i\,\varphi\,d\mu \qquad et \qquad \leqslant\text{-}\varphi^s\,(E) = \int_E \leqslant\text{-}e\,D^s\,\varphi\,d\mu,$$

quelle que soit la fonction de cellule φ *de variation bornée selon* $\leqslant$ *et absolument continue selon* $\leqslant$.

Les théorèmes $11\,a$ et $12\,a$ sont immédiatement applicables au cas $\leqslant$ sans supposer aucune des conditions **Z, E** et **U** puisqu'ils découlent des théorèmes 11 et 12 de 3.4, lesquels ne supposent pas la condition de monotonie de la base (*cf.* note (8) en bas de page).

Passons aux notions spécifiquement ponctuelles. La définition de la limite inférieure ponctuelle selon $\ll$ d'une famille de fonctions définies sur un même ensemble ou d'une famille d'ensembles, désigneé par $\liminf^*_{\mathfrak{C}\in\mathfrak{T};\ll}$, est immédiate et il en est de même pour la limite supérieure. Par recouvrement cellulaire $\ll$-fin p. p. d'un ensemble M nous entendons un ensemble $\mathfrak{Z}$ de cellules tel que la famille $(K_{\mathfrak{C}};\ \mathfrak{C}\in\mathfrak{T})$, où $\mathcal{K}_{\mathfrak{C}} = \bigcup (\mathfrak{Z}\cap\mathfrak{C})$, vérifie

$$M \subseteq \limsup_{\mathfrak{C}\in\mathfrak{T};\ll}{}^* \mathcal{K}_{\mathfrak{C}} \quad \text{p. p.}$$

Voici les versions cellulaires des conditions **M** et **L** de 4.2 pour la relation $\ll$:

$\ll$-**aL.** Tout recouvrement cellulaire $\ll$-fin p. p. d'un ensemble est un recouvrement $\ll$-fin essentiel de ses enveloppes mesurables.

$\ll$-**aM.** Tout recouvrement $\ll$-fin essentiel d'un ensemble mesurable en est un recouvrement $\ll$-fin p. p.

Avant de définir les dérivées ponctuelles proprement dites, remarquons que la $\mathfrak{C}$-dérivée $D_{\mathfrak{C}}\,\varphi$ n'est pas, en général, dans le cadre du présent paragraphe, complètement déterminée ponctuellement si on lui impose seulement d'être une fonction définie sur E, $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$-mesurable et prenant presque partout sur chaque composante I de $\mathfrak{C}$ la valeur $\varphi(I)/\mu(I)$. Nous allons définir les dérivées inférieure et supérieure ponctuelles de φ selon $\ll$ de manière unique en utilisant, pour tout $\mathfrak{C}$, un choix particulier de $D_{\mathfrak{C}}\,\varphi$.

Considérons d'abord une partition quelconque $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{T}$ et un point x de E et posons

$$(D^i_{\mathfrak{C}}\,\varphi)(x) = b\inf\left\{\frac{\varphi(I)}{\mu(I)};\ x\in I\in\mathfrak{C}\right\},$$

I parcourant toutes les composantes de $\mathfrak{C}$ telles que $x\in I$. En vertu d'une convention usuelle, il est entendu que $(D^i_{\mathfrak{C}}\varphi)(x) = +\infty$ s'il n'existe aucune telle composante, c'est-à-dire si $x\in E - \cup\mathfrak{C}$. De manière analogue, nous posons

$$(D^s_{\mathfrak{C}}\varphi)(x) = b\sup\left\{\frac{\varphi(I)}{\mu(I)};\ x\in I\in\mathfrak{C}\right\}.$$

$D^i_{\mathfrak{C}}\,\varphi$ et $D^s_{\mathfrak{C}}\,\varphi$ sont alors deux représentantes $\mathcal{B}_{\mathfrak{C}}$-mesurables de $D_{\mathfrak{C}}\,\varphi$ définies partout. Nous définissons ensuite

$$\ll\text{-}D^{*i}\,\varphi = \liminf_{\mathfrak{C}\in\mathfrak{T};\ll}{}^* D^i_{\mathfrak{C}}\,\varphi, \qquad \ll\text{-}D^{*s}\,\varphi = \limsup_{\mathfrak{C}\in\mathfrak{T};\ll}{}^* D^s_{\mathfrak{C}}\,\varphi.$$

On démontre de la même manière que le théorème 17 de 4.2 (*cf.* la remarque qui le suit) :

THÉORÈME 17 $a_{\leqslant}$. — *La condition* $\leqslant$-**aL** *équivaut aux inégalités*

$$\leqslant\text{-}e D^{i} \varphi \leqq \leqslant\text{-}D^{*i} \varphi \bmod \mathfrak{N}^{*}, \qquad \leqslant\text{-}D^{*s} \varphi \leqq \leqslant\text{-}e D^{s} \varphi \bmod \mathfrak{N}^{*}$$

et la condition $\leqslant$-**aM** *aux inégalités opposées, pour toute fonction de cellule* φ.

φ est dite *dérivable p. p. selon* $\leqslant$ *si* $\leqslant$-$D^{*i}\varphi = \leqslant$-$D^{*s}\varphi$ p. p. Traduisant les versions cellulaires des conditions de Vitali ponctuelles de 4.2 en langue $\leqslant$, ou bien prenant les versions ponctuelles des conditions de Vitali en 4.7, on obtient les conditions de Vitali cellulaires ponctuelles pour la relation $\leqslant$, désignées par $\leqslant$-$\mathbf{aV}_{Y}^{*}$, etc. D'après la proposition 3.6.2 et la définition de $\mathbf{V}_{Y}^{*}$ en 4.2, la condition $\leqslant$-$\mathbf{aV}_{Y}^{*}$ équivaut à :

Quels que soient l'ensemble M de mesure extérieure finie, le recouvrement cellulaire $\leqslant$*-fin p. p.* $\mathfrak{Z}$ *de M et le nombre positif* ε, *il existe un sous-ensemble fini* $\mathfrak{T}$ *de* $\mathfrak{Z}$ *tel que* $\omega_{Y}(\mathfrak{T}) < \varepsilon$ *et que* $\mu^{*}\left(M - \left(M \cap \bigcup \mathfrak{T}\right)\right) < \varepsilon$.

Il est alors facile d'obtenir les versions ponctuelles des théorèmes 9 $a_{\leqslant}$, 13 $a_{\leqslant}$, 14 $a_{\leqslant}$ et $16_{\leqslant}$. Nous pouvons énoncer les résultats suivants :

Si $(\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}; \mathfrak{T} \in \mathfrak{T}; \leqslant)$ *jouit des propriétés* **Z**, **E**, **U**, $\leqslant$-**aM** *et* $\leqslant$-$\mathbf{aV}_{Y}^{*}$, *toute fonction de cellule* φ *additive telle que* $\| \varphi \|_{X,\ll}$ *soit finie, est* $\leqslant$*-dérivable p. p. et, pour toute fonction de cellule* φ *sous-additive telle que* $\| \varphi \|_{X,\ll}$ *soit finie,* $\leqslant$-$s D\varphi = \leqslant$-$D^{*s}\varphi \bmod \mathfrak{N}$.

En effet, $\leqslant$-**aM** et $\leqslant$-$\mathbf{aV}_{Y}^{*}$ impliquent $\leqslant$-$\mathbf{aV}_{Y}$ et $\leqslant$-**aL** (*cf.* 4.2, les trois dernières lignes avant la remarque finale). Il suffit alors d'appliquer les théorèmes 9 $a_{\leqslant}$ et 13 $a_{\leqslant}$ et de remplacer, en vertu du théorème 17 a, les dérivées essentielles par les dérivées ponctuelles.

De façon tout à fait analogue, nous déduisons de 9 $a_{\leqslant}$, 14 $a_{\leqslant}$ et $16_{\leqslant}$, tenant compte, entre autres, de l'implication (**E** et $\mathbf{aV}_{\infty}$) $\rightarrow$ $\mathbf{aV}'''$:

Si $(\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}; \mathfrak{T} \in \mathfrak{T}; \leqslant)$ *jouit des propriétés* **Z**, **E**, **U**, $\leqslant$-**aM** *et* $\leqslant$-$\mathbf{aV}_{\infty}^{*}$, *toute fonction de cellule* φ *additive et de variation semi-bornée selon* $\leqslant$, *est* $\leqslant$*-dérivable p. p. Toute fonction de cellule* φ *semi-additive et de variation bornée suivant* $\leqslant$ *est* $\leqslant$*-dérivable p. p. Pour toute fonction de cellule de variation bornée selon* $\leqslant$ *et absolument continue selon* $\leqslant$,

$$\leqslant\text{-}\varphi^{i}(E) = \int_{E} \leqslant\text{-}D^{*i}\varphi \, d\mu^{0} \qquad \text{et} \qquad \leqslant\text{-}\varphi^{s}(E) = \int_{E} \leqslant\text{-}D^{*s}\varphi \, d\mu^{0},$$

μ^{0} *désignant la complétion de* μ.

Ordinairement on définit les dérivées d'une fonction d'ensemble φ par rapport à une mesure μ à l'aide d'une base de dérivation attachée à chaque point x d'un ensemble D, consistant en un ensemble de familles filtrantes d'ensembles mesurables et de mesure finie, envisagées comme « convergeant vers x ». Ces familles sont alors appelées familles dérivantes au point x ([22], p. 223). Dans la théorie des fonctions de cellule, une telle base de dérivation est déduite de la structure cellulaire de la manière suivante : Par *famille dérivante au point* x, on entend une famille $(I_{\mathfrak{E}};\ \mathfrak{E} \in \mathfrak{R})$, où $\mathfrak{R}$ représente un sous-ensemble confinal de $\mathfrak{T}$ que nous regardons comme filtrant pour la restriction de $\leqslant$ à $\mathfrak{R}$, telle que $x \in I_{\mathfrak{E}}$ et $I_{\mathfrak{E}} \in \mathfrak{E}$ quel que soit $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{R}$. Pour qu'une telle famille existe il faut et il suffit que l'ensemble des $\mathfrak{E}$ vérifiant $x \in \bigcup \mathfrak{E}$ soit confinal dans $\mathfrak{T}$. Le domaine D de la base de dérivation est alors l'ensemble de ces points x. Ce domaine peut être vide comme le montre l'exemple suivant : $E =]0, 1[$, μ est la mesure de Borel sur E, $\mathfrak{E}$ consiste en les ensembles finis de sous-intervalles ouverts de E disjoints et recouvrant E à un ensemble fini de points près, $\leqslant\ =\ \sqsubset$. Dans les applications le domaine D de la base cellulaire de dérivation ne diffère de E que par un ensemble de $\mathcal{N}^*$, ce qui revient à dire que l'ensemble $\mathcal{I}$ des cellules est un recouvrement $\leqslant$-fin p. p. de E. C'est ainsi que l'ensemble $\mathcal{I}$ étant toujours un recouvrement $\leqslant$-fin essentiel de E, la condition $\leqslant$-**aM** implique $E - D \in \mathcal{N}^*$. Si $\bigcup \mathfrak{E} = E$ pour tout $\mathfrak{E}$ dans $\mathfrak{T}$, alors $D = E$. Cette condition est satisfaite dans tous les exemples de 4.8.

En tout point x de D les nombres dérivés extrêmes $D^i \varphi(x)$ et $D^s \varphi(x)$ sont définis comme

$$b \inf_{(I_{\mathfrak{E}})} \left\{ \liminf_{\mathfrak{E}, \leqslant} \frac{\varphi(I_{\mathfrak{E}})}{\mu(I_{\mathfrak{E}})} \right\} \quad \text{et} \quad b \sup_{(I_{\mathfrak{E}})} \left\{ \limsup_{\mathfrak{E}, \leqslant} \frac{\varphi(I_{\mathfrak{E}})}{\mu(I_{\mathfrak{E}})} \right\}$$

respectivement, $(I_{\mathfrak{E}})$ parcourant toute la base de dérivation au point x, en accord avec la définition générale dans [22], p. 223. En un point $x \in E - D$, nous posons $D^i \varphi(x) = +\infty$ et $D^s \varphi(x) = -\infty$. Les dérivées extrêmes $D^i \varphi$ et $D^s \varphi$ sont ainsi définies en tout point x de E de manière unique.

Il est alors aisé de vérifier que

$$\leqslant\text{-}D^{*i} \varphi(x) = D^i \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \leqslant\text{-}D^{*s} \varphi(x) = D^s \varphi(x)$$

en tout point x de E.

Les notions de recouvrement cellulaire $\leqslant$-fin p. p. d'un ensemble M et de recouvrement fin pour la base cellulaire de dérivation suivant [46], p. 74 et [22], p. 224 sont logiquement équivalentes. Il en résulte l'équivalence entre $\leqslant$-**a**$\mathbf{V}_p^*$ pour $1 \leqq p \leqq \infty$ et la propriété de Vitali définissant les bases $S^{(p)}$ dans [22], p. 236, sans la limitation de débordement.

Dans la plupart des applications, la relation $\leqslant$ est introduite au moyen d'une fonction ν positive, définie sur $\mathfrak{T}$, par la convention :

$$\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{S} \qquad \text{si et seulement si} \quad \nu(\mathfrak{C}) \geqq \nu(\mathfrak{S}).$$

Remplaçant éventuellement $\nu(\mathfrak{C})$ par $\nu(\mathfrak{C}) - b\inf\{\nu(\mathfrak{S});\ \mathfrak{S} \in \mathfrak{T}\}$ nous pouvons toujours supposer que $\mathfrak{T}$ contient des partitions $\mathfrak{C}$ telles que $\nu(\mathfrak{C})$ soit arbitrairement petite. Il existe dans $\mathfrak{T}$ un ensemble confinal dénombrable, $\leqslant$-**aM** est donc vérifiée et, par conséquent, $E - D \in \mathfrak{N}^*$. En général, la fonction ν est monotone, entendant que $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{S}$ implique $\nu(\mathfrak{C}) \geqq \nu(\mathfrak{S})$, ainsi **Z** est vérifiée.

Pour toute cellule I, posons

$$\delta(I) = b\inf\{\nu(\mathfrak{C});\ I \in \mathfrak{C} \in \mathfrak{T}\}.$$

On peut alors montrer que

$$(\leqslant\text{-}D^{*i}\varphi)(x) = b\sup_{\varepsilon>0}\left\{ b\inf\left\{\frac{\varphi(I)}{\mu(I)};\ x \in I,\ \delta(I) < \varepsilon\right\}\right\},$$

de même pour la dérivée supérieure.

Par un choix particulier de ν on obtient diverses définitions classiques de dérivées extrêmes.

4.8. **Exemples de bases cellulaires concrètes.** — Toutes les bases qui suivent sont ponctuelles (*cf.* 4.1).

1° E est un espace compact et μ une mesure de Radon positive considérée comme fonction sigma-additive sur l'ensemble $\mathcal{B}$ des boréliens de E, $\mu(E)$ est donc finie. La cellule générique est un sous-ensemble fermé I de E, mesurable Jordan (ensemble de continuité pour μ), de mesure positive. $\mathfrak{T}$ comprend toutes les décompositions mod $\mathfrak{N}$ finies de E en cellules non empiétantes mod $\mathfrak{N}$. Ainsi $\mathfrak{T}$ est filtrant relativement à $\sqsubset$, les conditions **P** et **E** (*cf.* 1.10) sont satisfaites. Soit alors $\mathfrak{U}$ un système fondamental d'entourages sur E. Étant donné un ensemble V de $\mathfrak{U}$, une partition $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{T}$ est dite *fine d'ordre* V si chaque composante I de $\mathfrak{C}$ est petite d'ordre V, c'est-à-dire $(x, y) \in V$ quelles que soient $x, y \in I$. La relation $\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{S}$ est définie par la condition :

Quel que soit l'entourage $V \in \mathfrak{U}$, ($\mathfrak{C}$ est fine d'ordre V) implique ($\mathfrak{S}$ est fine d'ordre V).

Comme $\mathfrak{C} \sqsubset \mathfrak{S}$ entraîne $\mathfrak{C} \leqslant \mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ est filtrant relativement à $\leqslant$ et **Z** est satisfaite (*cf.* 4.7). Ainsi le domaine de la base cellulaire de dérivation selon $\leqslant$ ne diffère de E que par un ensemble ouvert de mesure nulle.

Remarquons que $\leqslant$ dépend de $\mathcal{U}$. En prenant pour $\mathcal{U}$ le filtre de tous les entourages sur E, la relation $\leqslant$ devient $\sqsubset$. Démontrons la validité de **U** (*cf.* 4.7), pour $\mathcal{U}$ arbitraire : Soit $\mathcal{C} = \{ I_1, \ldots, I_n \}$ une partition dans $\mathfrak{T}$, I_0 l'adhérence de $E - (I_1 \cup \ldots \cup I_n)$ et B l'union des frontières des I_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ qui est un compact de mesure nulle. Considérons un entourage fermé W quelconque, n'appartenant pas nécessairement à $\mathcal{U}$, et définissons F_W comme l'ensemble des points x tels qu'existent des indices k et l et un point y satisfaisant $k \neq l$, $x \in I_k$, $y \in I_l$, x et y sont voisins d'ordre W. Alors F_W est fermé. Soit V un entourage appartenant à $\mathcal{U}$ et inclus dans W. On démontre facilement qu'il existe une partition $\mathcal{R}$ dans $\mathfrak{T}$ qui est fine d'ordre V. Si $\mathcal{R} \leqslant \mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ est fine d'ordre V, donc fine d'ordre W, ce qui entraîne $R^{\mathcal{C}}_{\mathcal{S}} \subseteq F_W$. Par conséquent,

$$e \limsup_{\mathcal{S} \in \mathfrak{T}; \ll} R^{\mathcal{C}}_{\mathcal{S}} \subseteq F_W \bmod \mathfrak{N}.$$

L'espace $E \times E$ étant régulier, on a $\bigcap_W F_W = B$. La famille des F_W est filtrante à gauche, d'où résulte $b \inf \mu(F_W) = 0$, puisque $\mu(B) = 0$ et que chaque F_W est fermé. Par conséquent, $e \limsup_{\mathcal{S} \in \mathfrak{T}; \ll} R^{\mathcal{C}}_{\mathcal{S}} = \emptyset$, donc **U**. Rappelons que **U** entraîne **R**.

CONSÉQUENCES. — Les propositions 4.7.2, 4.7.3, les théorèmes 2-3*a*, $7_{\leqslant}$ et $8_{\leqslant}$ de 4.7 sont applicables à la base 1°.

2° *Base d'intervalles.* — Γ, ensemble quelconque ; τ, désignation générique pour un sous-ensemble fini de Γ. Pour $\gamma \in \Gamma$, D_γ désigne une copie de l'intervalle $[0, 1]$. D_γ est munie de la topologie usuelle et de la structure uniforme compatible, $\varkappa_\gamma$ est la mesure de Borel sur D_γ. E est le produit $\bigtimes_\gamma D_\gamma$ pourvu de la topologie produit et d'une mesure de Radon μ qui peut être la mesure produit borélien des $\varkappa_\gamma$ (*cf.* 4.4), et $\mu(E) = 1$. La cellule générique est l'intervalle générique $I = \bigtimes_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$, où $I_\gamma = D_\gamma$ si $\gamma \notin \tau$ et

$$I_\gamma = [a_\gamma, b_\gamma], \qquad 0 \leqq a_\gamma < b_\gamma \leqq 1,$$

mesurable Jordan et de mesure $\mu(I)$ positive. Notons que si μ est le produit des mesures $\varkappa$, $I_1 = I_2 \bmod \mathfrak{N}$ implique $I_1 = I_2$. $\mathfrak{T}$ comprend toutes les décompositions de E en cellules non empiétantes mod $\mathfrak{N}$. Des relations $\leqslant$ sont définies comme dans 1°. Les propriétés **P, Z, E, R, U** sont vérifiées, d'où les mêmes conséquences que pour 1°.

Cas particulier. — Γ est l'ensemble des entiers positifs. Alors E est appelé cube de Hilbert et l'on a $\mathcal{B}_\omega = \mathcal{B}$. La structure uniforme produit sur E peut être exprimée par la distance de Fréchet (*cf.* [49], p. 57)

$$\delta(x, y) = \sum_r 2^{-r} |x_r - y_r|, \qquad \text{où} \quad x = (x_r) \in E, \quad y = (y_r) \in E.$$

Parmi les relations $\ll$ définies comme dans 1° figure celle qui correspond au système fondamental d'entourages $\{(x, y) : \delta(x, y) < \varepsilon\}$, où ε parcourt les nombres positifs. Désignant alors, pour $\mathfrak{S} \in \mathfrak{T}$, par $\nu(\mathfrak{S})$ le plus grand diamètre des cellules de $\mathfrak{S}$, cette relation $\mathfrak{S} \ll \mathfrak{S}'$ peut être exprimée par l'inégalité $\nu(\mathfrak{S}) \geqq \nu(\mathfrak{S}')$. Ainsi **aM** est vérifiée. Si μ est la mesure produit des $\varkappa_\gamma$, ni $\mathbf{aV}_1^*$ ni $\ll$-$\mathbf{aV}_1^*$ ne sont valides (*cf.* [10], [26] et [27]).

3° *Base de grilles.* — E, μ et $\ll$ ont la même signification qu'en 2°. $\mathfrak{S}_\gamma$ désignant la subdivision générique finie de D_γ en intervalles (linéaires) fermés non empiétants, $(\mathfrak{S}_\gamma; \gamma \in \Gamma)$ la famille générique de subdivisions $\mathfrak{S}_\gamma$ telles que $\mathfrak{S}_\gamma = \{D_\gamma\}$, sauf pour les γ d'un ensemble exceptionnel fini, nous entendons par *grille* toute décomposition de E en intervalles $I = \bigtimes_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$, où $I_\gamma \in \mathfrak{S}_\gamma$, de mesures positives et mesurables Jordan. $\mathfrak{T}$ est l'ensemble des grilles sur E. Le domaine de dérivation selon $\ll$ ne diffère de E que par un ensemble ouvert de mesure nulle et $\mathcal{B}_\omega = \mathcal{B}$. Les conditions **Z, F, U, R** sont vérifiées mais non **E** en général. Les grilles sur E et les grilles induites dans les intervalles sont des grilles de Rutovitz (*cf.* [49], p. 25). Si μ est la mesure produit des $\varkappa_\gamma$, ces grilles admettent comme borne tout $p > 2$ (*cf.* [49], Theorem X, p. 27 et Lemma, p. 28-29).

4° *Base d'intervalles dans* R^n. — $E = [c_1, \ldots, c_n; d_1, \ldots, d_n]$, produit euclidien de n intervalles fermés $[c_j, d_j]$, μ est une mesure de Radon, les cellules sont les intervalles fermés $I = [a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n]$, $c_j \leqq a_j < b_j \leqq d_j$ pour $j = 1, \ldots, n$, de mesures $\mu(I)$ positives et mesurables Jordan. $\mathfrak{T}$ consiste en toutes les décompositions cellulaires finies de E. Pour tout $\mathfrak{S} \in \mathfrak{T}$, $\nu(\mathfrak{S}) = b$ sup des diamètres euclidiens $\delta(I)$ des cellules I de $\mathfrak{S}$. Par définition, $\mathfrak{S} \ll \mathfrak{S}'$ est équivalent à $\nu(\mathfrak{S}) \geqq \nu(\mathfrak{S}')$. Cette définition est en accord avec 1° et 2°. Par conséquent, $\mathcal{B}_\omega = \mathcal{B}$ et

$$\delta(I) = b \inf\{\nu(\mathfrak{S}); I \in \mathfrak{S} \in \mathfrak{T}\}.$$

Quelle que soit la cellule I, $\mathfrak{T}_I$ (*cf.* 1.10) possède les propriétés **Z, E, P, U, R** (*cf.* [33], § 5).

Supposons maintenant que μ soit la mesure borélienne sur E, tout intervalle fermé I inclus dans E est alors une cellule et inversement. D'après un théorème de Zygmund [56], si, pour $p > 1$, la fonction f

appartient à $\mathcal{L}_p(E)$, c'est-à-dire si la $p^{\text{ième}}$ puissance de f est μ-intégrable sur E, et si nous posons pour tout sous-intervalle J de E : $\varphi(J) = \int_J f d\mu$, alors il existe un sous-ensemble N de E de mesure lebesguienne nulle tel que la dérivée ponctuelle usuelle $D\varphi$ de φ relativement aux sous-intervalles fermés de E existe en tout $x \in E - N$ et soit $= f$.

Il résulte d'un théorème de Hayes-Pauc ([22], p. 247-252) que la base d'intervalles considérée possède pour $1 \leqq q' < q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, la propriété de Vitali $\leqslant$-**a**$\mathbf{V}^*_{q'}$ (*cf.* 4.2 et 4.7) complète. Observons que q' est un nombre quelconque fini $\geqq 1$.

Nous pouvons aussi déduire ce résultat du théorème de Zygmund de la manière suivante : $\mathfrak{T}$ admettant un ensemble dénombrable confinal selon $\leqslant$, $\leqslant$-**aM** est vérifiée. Il est aisé d'établir la propriété $\leqslant$-**aL.** En vertu de $\leqslant$-$D^{*i} = D^i$ et $\leqslant$-$D^{*s} = D^s$ (*cf.* 4.7), et du théorème 17 *a* (en 4.7), φ admet une dérivée essentielle $= f \bmod \mathfrak{N}$. D'après le théorème 12 *a* (*cf.* 3.5 et théorème 12 de 3.4), la base $(\mathfrak{T}; \leqslant)$ possède la propriété **a**$\mathbf{V}_{q'}$, donc, grâce à la proposition 4.7.3, la propriété $\leqslant$-**a**$\mathbf{V}_{q'}$, enfin, tenant compte de $\leqslant$-**aM** et $\leqslant$-**aL**, la propriété $\leqslant$-**a**$\mathbf{V}^*_{q'}$.

5° *Bases d'intervalles uniformément réguliers dans R^n.* — Comme au 4° avec μ = mesure borélienne usuelle, mais l'ensemble des cellules est l'ensemble $\mathfrak{I}_\alpha$ des intervalles fermés I dont le paramètre de régularité $r(I)$ est $> \alpha$, α désignant un nombre positif < 1 à regarder comme fixé. Cette base jouit des propriétés **Z, E, U, R,** $\leqslant$-**aL** et $\leqslant$-**aM.** Le théorème 1 de [46], p. 77 appliqué à la base de dérivation selon $\leqslant$, en prenant $\delta(I)$ = diamètre de I ou mesure $\mu(I)$ de I, montre que $(\mathcal{B}_{\mathfrak{T}}, \leqslant)$ possède la propriété $\leqslant$-**a**$\mathbf{V}_\infty$. L'emploi des théorèmes 2-3 $a_\leqslant$, 14 $a_\leqslant$ et 17 $a_\leqslant$ de 4.7 nous permet d'affirmer que toute fonction φ définie sur $\mathfrak{I}_\alpha$, sous-additive et de $\leqslant$-variation bornée sur toute cellule I, admet p. p. sur E une dérivée $\leqslant$-$D^*\varphi(x)$ intégrable sur tout I et telle que

$$\int_I (\leqslant\text{-}D^*\varphi)\, d\mu = (\varphi^m)_c\,(I).$$

Remarque. — L'ensemble des partitions finies d'un cube de R^n en sous-cubes n'est pas $\sqsubset$-filtrant. Il le devient si l'on se limite aux cubes rationnels (entendant : à côtés de longueurs rationnelles).

Base de dérivation de Lebesgue. — C'est la base de dérivation dont les familles dérivantes en un point x sont les suites (I_n) d'intervalles fermés contenant x, de diamètres tendant vers zéro et dont les paramètres de régularité $r(I_n)$ sont bornés inférieurement par un nombre α positif dépendant de la suite (I_n) (*cf.* [50], p. 106). Cette base peut être aussi définie comme l'union des bases de dérivation correspondant à 5° pour tous les α positifs. Les dérivées d'une fonction d'intervalle (fermé) relativement à la base de Lebesgue sont appelés *dérivées ordinaires* (*cf.* [50], p. 106). Du théorème de dérivation explicité plus haut découle presque immédiatement le théorème suivant, dit de Lebesgue (*cf.* [50], p. 115) : Toute fonction d'intervalle fermé, additive et de variation bornée sur un intervalle E y est presque partout dérivable au sens ordinaire.

Remarque. — La base de dérivation de Lebesgue n'a pas été définie suivant 4.7 à partir de l'ensemble $\mathfrak{T}$ des partitions de E en intervalles fermés pour une filtration convenable.

6° *Base et fonction de cellule en théorie de l'aire des surfaces* (*cf.* [5], chap. II, III et VIII, [6] et [48], II.5.4). — E est le carré $[0, 0; 1, 1]$, T une application continue de E dans un plan E', μ et μ' sont les mesures boréliennes dans E et E' respectivement. La cellule générique I est le domaine fermé de E limité par une ligne polygonale simple et fermé $C, \delta(I) =$ diamètre de $T(I)$, $u(I) = \int_{E'} O(p', C')\, d\mu'(p')$,

où C' désigne l'image par T de C parcourue dans le sens direct et $O(p', C')$ l'indice topologique de C' en $p' \in E'$, posé $= 0$ si p' est situé sur C'. $\mathfrak{T}$ comprend toutes les partitions finies $\mathfrak{C}$ de E en cellules non empiétantes, $\nu(\mathfrak{C}) := \max \delta(I)$ pour $I \in \mathfrak{C}$, et $\mathfrak{C}_1 \leqslant \mathfrak{C}_2 : \nu(\mathfrak{C}_1) \geqq \nu(\mathfrak{C}_2)$.

La condition **U** n'est pas vérifiée. La fonction u est additive au sens restreint suivant :

si, pour tout I de $\mathfrak{C}$, $\mu(T(C))$ est nulle, alors $u(E) = \sum_{I \in \mathfrak{C}} u(I)$.

La connaissance de u entraîne celle du jacobien généralisé $J(x)$ presque partout sur E, toutefois on ne sait pas comment l'obtenir directement par dérivation de la fonction u (*cf.* [48], V.5).

4.9. **Base stochastique sur un groupe** (*cf.* [24]). — Voici un exemple de base stochastique qui peut être envisagée de type atomique, mais dans un sens différent de celui des bases cellulaires :

E, groupe compact dont la loi de composition est notée multiplicativement; x, élément générique de E; μ, mesure de Haar sur E (*cf.* [19], chap. XI); Θ, ensemble de groupes fermés (donc compacts) distingués (« compact normal subgroups » en [24]) de E, non réduits à l'élément neutre, dirigé (ou filtrant) selon $\supseteq$. Ainsi, par définition,

$$\rho \leqslant \tau \leftrightarrow \rho \supseteq \tau.$$

μ_τ, mesure de Haar sur τ, normalisée (entendant $\mu_\tau(\tau) = 1$); $\mathcal{B}_\tau$, sigma-algèbre booléenne des ensembles boréliens de E qui sont « τ-entiers », c'est-à-dire unions de classes d'équivalence $x\tau$ (« cosets » dans [24]). Pour τ fixé, ces $x\tau$ sont les atomes (ponctuels) de $\mathcal{B}_\tau$; deux points distincts de $x\tau$ ne peuvent être séparés par des ensembles de $\mathcal{B}_\tau$. A la différence de ce qui se passe dans le cas cellulaire, ces atomes sont en général de μ-mesure nulle. Désignons par $\mu_{x,\tau}$ la mesure transférée de μ_τ sur $x\tau$. Comme μ est une somme directe de ces mesures sur les $x\tau$, pour toute fonction borélienne f définie et intégrable sur E, on dispose, pour calculer $f_\tau = \mathcal{E}(f \mid \mathcal{B}_\tau)$, d'une formule analogue à celles de 2.7 et 4.4, à savoir

$$f_\tau(x) = \text{valeur moyenne de } f \text{ sur } x\tau \text{ relativement à } \mu_{x,\tau}.$$

Dans [24], théorème 3.1 est établie la convergence p. p. de la suite (f_τ) dans le cas d'une suite de Fréchet décroissante de sous-groupes fermés distingués de E. Dans le cadre du présent article ce résultat découle du théorème 9 (de 3.3), proposition 3.5.1 et des propriétés **L** et **M** (*cf.* 4.2) résultant de la dénombrabilité de Θ. Quant à la convergence en moyenne dans le cas général, elle découle de [23] ou de la proposition 2.5.1.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bochner (S.). — Additive set functions on groups, *Annals of Math.*, t. 40, 1939, p. 769-799.

[2] Bochner (S.) and Phillips (R. S.). — Additive set functions and vector lattices, *Annals of Math.*, t. 42, 1941, p. 316-324.

[3] Bochner (S.). — Partial ordering in the theory of martingales, *Annals of Math.*, t. 62, 1955, p. 162-169.

[4] Carathéodory (C.). — *Mass und Integral und ihre Algebraisierung.* — Basel, Stuttgart, Birkhäuser Verlag, 1956 (Lehrbücher und Monographien ..., Mathematische Reihe, 10).

[5] Cesari (L.). — *Surface area.* — Princeton, Princeton University Press, 1956 (Annals of Mathematics Studies, 35).

[6] Cesari (L.). — *Area and measure.* Brunswick, Summer Institute, 1958.

[7] Chiang (Tse-Pei). — Une remarque sur la définition de la quantité d'information [en russe], *Teorija Veroj. Prim.*, t. 3, 1958, p. 99-103.

[8] Chow (Y. S.). — Martingales in a σ-finite measure space indexed by directed sets, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 97, 1960, p. 254-285.

[9] Cotlar (M.) y Frenkel (Y.). — Una teoria general de integral basada en una extensión del concepto de limite, *Univ. nac. Tucuman, Rivista*, Série A, t. 6, 1947, p. 113-159.

[10] Dieudonné (J.). — Sur un théorème de Jessen, *Fund. Math.*, t. 37, 1950, p. 242-248.

[11] Doob (J. L.). — *Stochastic processes.* — New York, J. Wiley; London, Chapman and Hall, 1953 (Wiley Publications in Statistics).

[12] Doob (J. L.). — Semimartingales and subharmonic functions, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 77, 1954, p. 86-121.

[13] Doob (J. L.). — Notes on martingale theory, *Proceedings of the Fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability* [4, 1960, Berkeley]; vol. 2, p. 95-102. — Berkeley, Los Angeles, University of California Press, 1961.

[14] Dubrovskij (V. M.). — Sur la base d'une famille de fonctions d'ensemble complètement additives et sur les propriétés d'additivité uniforme et d'équicontinuité [en russe], *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, N. S., t. 58, 1947, p. 737-740.

[15] DUNFORD (N.) and TAMARKIN (J. D.). — A principle of Jessen and general Fubini theorems, *Duke math. J.*, t. 8, 1941, p. 743-749.

[16] FUGLEDE (B.). — On a theorem of F. Riesz, *Math. Scand.*, t. 3, 1955, p. 283-302.

[17] GOFFMAN (C.) and WATERMAN (D.). — On upper and lower limits in measure, *Notices Amer. math. Soc.*, t. 5, 1958, p. 812.

[18] HAHN (H.) and ROSENTHAL (A.). — *Set functions.* — Albuquerque, N. M., University of New Mexico Press, 1948.

[19] HALMOS (P. R.). — *Measure theory.* — Toronto, New York, London, Van Nostrand Company, 1950 (The University Series in higher Mathematics).

[20] HAUPT (O.), AUMANN (G.) und PAUC (C.). — *Differential- und Integralrechnung*, III, 2te Auflage. — Berlin, W. de Gruyter, 1955 (Göschens Lehrbücherei, Reine und angewandte Mathematik, 26).

[21] HAUPT (O.) et PAUC (C.). — Propriétés de mesurabilité de bases de dérivation, *Portugaliæ Math.*, t. 13, 1954, p. 37-54.

[22] HAYES (C. A. Jr) and PAUC (C.). — Full individual and class differentiation theorems in their relations to halo and Vitali properties, *Canad. J. Math.*, t. 7, 1955, p. 221-274.

[23] HELMS (L. L.). — Mean convergence of martingales, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 87, 1958, p. 439-446.

[24] JERISON (M.) and RABSON (G.). — Convergence theorems obtained from induced homomorphisms of a group algebra, *Annals of Math.*, t. 63, 1956, p. 176-190.

[25] JESSEN (B.). — The theory of integration in a space of an infinite number of dimensions, *Acta Math.*, t. 63, 1934, p. 249-323.

[26] JESSEN (B.). — On strong differentiation in a space of infinitely many dimensions, *Mat. Tidsskr.*, B, 1950, p. 54-57.

[27] JESSEN (B.). — On strong differentiation, *Mat. Tidsskr.*, B, 1952, p. 90-91.

[28] KAPPOS (Demetrios A.). — *Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und -räume.* — Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer Verlag, 1960 (Ergebnisse der Mathematik ..., 24).

[29] KHINČIN (A. J.). — Sur les théorèmes fondamentaux de la théorie de l'information [en russe], *Uspekhi mat. Nauk*, t. 11, 1956, p. 17-75. Traduction allemande dans *Arbeiten zur Informationstheorie*, I; p. 26-85. — Berlin, V. E. B. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957.

[30] KOLMOGOROFF (A.). — Untersuchungen über den Integralbegriff, *Math. Annalen*, t. 103, 1930, p. 654-696.

[31] KRASNOSELSKIJ (A.) et RUTISKIJ (Ja. B.). — Sur la théorie des espaces d'Orlicz [en russe], *Doklady Akad. Nauk S. S. S. R.*, N. S., t. 81, 1951, p. 497-500.

[32] KRICKEBERG (K.). — La nécessité de certaines hypothèses de Vitali fortes dans la théorie de la dérivation extrême de fonctions d'intervalles, *C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 764-766.

[33] KRICKEBERG (K.). — Extreme Derivierte von Zellenfunktionen in Booleschen σ-Algebren und ihre Integration, *Sitzungb. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München*, 1955, p. 217-279.

[34] KRICKEBERG (K.). — Convergence of martingales with a directed index set, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 83, 1956, p. 313-337.

[35] KRICKEBERG (K.). — Stochastische Konvergenz von Semimartingalen, *Math. Z.*, t. 66, 1957, p. 470-486.

[36] KRICKEBERG (K.). — Stochastische Derivierte, *Math. Nachr.*, t. 18, 1958, p. 203-217.

[37] KRICKEBERG (K.). — *Seminar on martingales.* — Aarhus, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, 1959, 58 p.

[38] KRICKEBERG (K.). — Notwendige Konvergenzbedingungen bei Martingalen und verwandten Prozessen, *Transactions of the Second Prague conference on infor-*

mation theory, statistical decision functions, random processes [1959, Prague]; p. 279-305. — Prague, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1960.

[39] KRICKEBERG (K.). — Bemerkungen zur stochastischen Konvergenz, *Bull. Soc. math. Grèce* (à paraître).

[40] LA VALLÉE POUSSIN (C. de). — Sur l'intégrale de Lebesgue, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 16, 1915, p. 435-501.

[41] LA VALLÉE POUSSIN (C. de). — *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*. 2e édition. — Paris, Gauthier-Villars, 1934.

[42] LEADER (S.). — The theory of L_p-space for finitely additive set functions, *Annals of Math.*, t. 58, 1953, p. 528-543.

[43] LOÈVE (M.). — *Probability theory*. Second edition. — Princeton, Toronto, New York, Van Nostrand Company, 1960 (The University Series in higher Mathematics).

[44] LOOMIS (L. H.). — On the representation of σ-complete boolean algebras, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 53, 1947, p. 757-760.

[45] MOY (Shu-Teh Chen). — Measure extensions and the martingale convergence theorem, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 4, 1953, p. 902-907.

[46] PAUC (C.). — Ableitungsbasen, Prätopologie und starker Vitalischer Satz, *J. für die reine und angew. Math.*, t. 191, 1953, p. 69-91.

[47] PAUC (C.). — Contributions à une théorie de la différentiation de fonctions d'intervalle sans hypothèse de Vitali, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1937-1939.

[48] PAUC (C.). — *Dérivés et intégrants, Fonctions de cellule*. Cours d'été de Varenne. — Varenna, 1954 (Publ. Mat. Ist. Roma, 76 p.).

[49] RUTOVITZ (D.) and PAUC (C.). — Theory of Ward for cell functions, I and II, *Annali di Mat.*, Série 4, t. 47, 1959, p. 1-57.

[50] SAKS (S.). — *Theory of the integral*. Second edition. — New York, 1952.

[51] SNELL (J. L.). — Applications of martingale system theorems, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 73, 1952, p. 293-312.

[52] SPARRE-ANDERSEN (E.) and JESSEN (B.). — Some limit theorems on integrals in an abstract set, *Danske Vid. Selsk. Math.-Fys. Medd.*, t. 22, 1946, n° 14, 29 p.

[53] WECKEN (Franz). — Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen, *Math. Z.*, t. 45, 1939, p. 377-404.

[54] YOSIDA (K.) and HEWITT (E.). — Finitely additive measures, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 72, 1952, p. 46-66.

[55] ZAANEN (A. C.). — *Linear analysis; measure and integral, Banach and Hilbert space, linear integral equations*. — Amsterdam, North-Holland publishing Company; Groningen, P. Noordhoff, 1953 (Biblioteca mathematica, 2).

[56] ZYGMUND (A.). — On the differentiability of multiple integrals, *Fund. Math.*, t. 23, 1934, p. 143-149.

(Manuscrit reçu le 14 mars 1963.)

Klaus KRICKEBERG,
Am Schlierbachhang 45 *a*
69 Heidelberg (Allemagne),
Christian PAUC,
8, rue Émile-Souvestre,
Nantes (Loire-Atlantique).