BULLETIN DE LA S. M. F.

J. LAFON

Anneaux henséliens

Bulletin de la S. M. F., tome 91 (1963), p. 77-107
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1963__91__77_0>

Bull. Soc. math. France,
91, 1963, p. 77 à 107.

ANNEAUX HENSÉLIENS ;

PAR

JEAN-PIERRE LAFON

(Montpellier).

Introduction. — Ce travail a son point de départ dans trois articles de M. NAGATA [4], [5] et [6].

L'hensélisation que nous appelons clôture hensélienne est définie comme solution d'un problème universel pour un couple $(A, \mathfrak{a})$ d'un anneau commutatif à élément unité quelconque A et pour un idéal $\mathfrak{a}$ quelconque de A.

La technique utilisée est plus directe que celle de M. NAGATA. Elle repose sur un résultat simple de relèvements de décomposition de polynômes unitaires et sur un résultat de passage au quotient pour la clôture hensélienne. On obtient ainsi un foncteur de la catégorie des couples d'un anneau A et d'un idéal $\mathfrak{a}$ dans la catégorie des couples henséliens.

Une étude précise de la clôture hensélienne n'est faite que dans le cas où A est local d'idéal maximal $\mathfrak{a}$. C'était le cadre dans lequel se plaçait M. NAGATA et nous retrouvons, donc, ses résultats.

Nous avons donné, toutefois, un aspect plus constructif aux extensions quasi-de décomposition et à leurs localisées que nous appelons extensions à la Nagata. M. NAGATA les utilisait, en fait, dans des raisonnements par l'absurde après applications du théorème de Zorn. En fait, la clôture hensélienne apparaît comme la réunion de telles extensions.

Nous avons mis en appendices des résultats techniques ou assez indirectement liés à la clôture hensélienne.

C'est ainsi que, compte tenu de la non séparation de la topologie $\mathfrak{a}$-adique de l'anneau A, nous avons construit un couple $(A^0, \mathfrak{a}^0)$ que nous appelons le complété inductif du couple $(A, \mathfrak{a})$. C'est une limite inductive d'anneaux de Zariski complets : il en possède donc les propriétés fonctorielles.

Dans certaines questions il se comporte mieux qu'un complété usuel. Nous obtenons, par exemple, une généralisation du lemme bilinéaire de P. SAMUEL sans hypothèses de type fini pour les modules.

Si A est local, intègre, intégralement clos, d'idéal maximal $\mathfrak{a}$, le complété inductif A^0 est local, intègre, intégralement clos.

On peut également introduire dans le cas général ce que M. NAGATA appelait dans [4] « hensélisation locale » comme solution d'un problème universel. Elle apparaît, d'ailleurs, dans la construction de la clôture hensélienne.

On aura, sans doute, compris tout ce que ce travail doit aux articles de M. NAGATA. Je suis très reconnaissant à P. SAMUEL, qui m'a signalé l'intérêt de ses articles, et dont les encouragements et conseils m'ont été très précieux pendant toute la réalisation de ce travail. Je dois à Pierre GABRIEL de nombreuses améliorations de fond et de forme; il m'a également expliqué le lien de cette théorie avec celle des algèbres étales. Je l'en remercie vivement.

1. La catégorie (Cou) des couples.

Un objet de (Cou) sera appelé un *couple* : c'est un couple $(A, \mathfrak{a})$ formé d'un anneau commutatif à élément unité A et d'un idéal $\mathfrak{a}$ de A.

Un morphisme $\varphi : (A, \mathfrak{a}) \to (B, \mathfrak{b})$ est un homomorphisme d'anneaux de A dans B tel que $\varphi(1) = 1$ et $\mathfrak{a} = \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$.

La composition des morphismes se fait de façon évidente.

La catégorie des couples possède des *produits fibrés :* le produit fibré du diagramme

$$\begin{tikzcd} & (B, \mathfrak{b}) \arrow[d, "\varphi"] \\ (C, \mathfrak{c}) \arrow[r, "\psi"'] & (A, \mathfrak{a}) \end{tikzcd}$$

est le couple $\left(B \underset{A}{\times} C, \mathfrak{b} \underset{\mathfrak{a}}{\times} \mathfrak{c}\right)$, les projections de $\left(B \underset{A}{\times} C, \mathfrak{b} \underset{\mathfrak{a}}{\times} \mathfrak{c}\right)$ sur $(B, \mathfrak{b})$ et $(C, \mathfrak{c})$ étant les applications naturelles [1].

---

[1] On rappelle que $B \underset{A}{\times} C$ est le sous-ensemble du produit $B \times C$ formé des couples (b, c) tels que $\varphi(b) = \psi(c)$. Si $(D, \mathfrak{d})$ est un couple tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} (D, \mathfrak{d}) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"'] & (B, \mathfrak{b}) \arrow[d, "\varphi"] \\ (C, \mathfrak{c}) \arrow[r, "\psi"] & (A, \mathfrak{a}) \end{tikzcd}$$

On déduit de là que $\varphi : (B, \mathfrak{b}) \to (A, \mathfrak{a})$ est un monomorphisme de (Cou) si et seulement si φ est une application injective (2).

On voit de façon analogue que tout système projectif de couples possède une *limite* projective. En particulier, si $(A_i, \mathfrak{a}_i)$ est une famille filtrante décroissante de sous-couples de $(A, \mathfrak{a})$,

$$\varprojlim (A_i, \mathfrak{a}_i) = (\cap A_i, \cap \mathfrak{a}_i).$$

De même, tout système inductif $(A_i, \mathfrak{a}_i)$ de couples possède une limite inductive :

$$\varinjlim (A_i, \mathfrak{a}_i) = \left(\varinjlim A_i, \varinjlim \mathfrak{a}_i\right)$$

Un couple de morphismes $\varphi, \psi : (C, \mathfrak{c}) \rightrightarrows (B, \mathfrak{b})$ possède un conoyau si et seulement si $\varphi(c) - \psi(c)$ appartient à $\mathfrak{b}$, quel que soit c de C. Dans ce cas le conoyau est le quotient $(B/\mathfrak{b}', \mathfrak{b}/\mathfrak{b}')$ où $\mathfrak{b}'$ est l'idéal engendré par les $\varphi(c) - \psi(c)$ quand c parcourt C.

Un *épimorphisme strict* de (Cou) est donc de la forme $(B, \mathfrak{b}) \to (B/\mathfrak{b}', \mathfrak{b}/\mathfrak{b}')$ où l'idéal $\mathfrak{b}'$ est contenu dans l'idéal $\mathfrak{b}$ (3).

---

soit commutatif, il existe un morphisme et un seul de $(D, \mathfrak{d})$ dans le produit fibré du diagramme du texte tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} (D, \mathfrak{d}) \arrow[drr, bend left, "u"] \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right, "v"'] & & \\ & \left(B \times_A C, \mathfrak{b} \times_{\mathfrak{a}} \mathfrak{c}\right) \arrow[r] \arrow[d] & (B, \mathfrak{b}) \arrow[d, "\varphi"] \\ & (C, \mathfrak{c}) \arrow[r, "\psi"] & (A, \mathfrak{a}) \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

(2) Le fait que φ soit un monomorphisme se traduit, en effet, en termes de produits fibrés comme suit :
φ définit de façon évidente un morphisme χ du produit fibré $\left(B \times_A B, \mathfrak{b} \times_{\mathfrak{a}} \mathfrak{b}\right)$ dans $(A, \mathfrak{a})$; φ est un monomorphisme si et seulement si pour tout couple $(C, \mathfrak{c})$ et tout couple de morphismes u, v de $(C, \mathfrak{c})$ dans $\left(B \times_A B, \mathfrak{b} \times_{\mathfrak{a}} \mathfrak{b}\right)$, l'égalité $\chi \circ u = \chi \circ v$ implique $u = v$.

(3) Un morphisme $\varphi : (B, \mathfrak{b}) \to (A, \mathfrak{a})$ est appelé un épimorphisme strict si c'est un épimorphisme, et si pour tout morphisme $u : (B, \mathfrak{b}) \to (C, \mathfrak{c})$, la condition nécessaire et suffisante pour que u se factorise par φ est que pour tout $(D, \mathfrak{d})$ et pour tout couple de morphismes v_1 et $v_2 : (D, \mathfrak{d}) \to (B, \mathfrak{b})$ tel que $\varphi \circ v_1 = \varphi \circ v_2$, on ait aussi $u \circ v_1 = u \circ v_2$.

Ceci revient à dire que le diagramme

$$\left(B \times_A B, \mathfrak{b} \times_{\mathfrak{a}} \mathfrak{b}\right) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} (B, \mathfrak{b}) \xrightarrow{\varphi} (A ; \mathfrak{a}),$$

où p_1 et p_2 sont les morphismes naturels est exact, c'est-à-dire justement que $(A, \mathfrak{a})$ est un conoyau du couple (p_1, p_2).

Un couple $(A, \mathfrak{a})$ est dit *hensélien* si les conditions suivantes sont réalisées :

($\bigstar$) Pour tout polynôme unitaire $f(X)$ à coefficients dans A et pour toute décomposition $\bar{f}(X) = \bar{g}(X)\,\bar{h}(X)$ de $f(X)$ modulo $\mathfrak{a}$ en produit de polynômes unitaires fortement étrangers $\bar{g}(X)$ et $\bar{h}(X)$ de $(A/\mathfrak{a})[X]$, il existe des représentants unitaires $g(X)$ et $h(X)$ de $\bar{g}(X)$ et $\bar{h}(X)$ tels que $f(X) = g(X)\,h(X)$.

($\bigstar\bigstar$) Si $g(X)$ et $h(X)$ sont des représentants unitaires de $\bar{g}(X)$ et $\bar{h}(X)$ tels que $f(X) = g(X)\,h(X)$, alors $g(X)$ et $h(X)$ sont fortement étrangers.

Proposition 1. — *Il y a équivalence pour un couple* $(A, \mathfrak{a})$ *entre :*

(i) $(A, \mathfrak{a})$ *est hensélien;*

(ii) $(A, \mathfrak{a})$ *satisfait à* ($\bigstar$) *et* $\mathfrak{a}$ *est contenu dans le radical de Jacobson de* A.

Si $(A, \mathfrak{a})$ *est hensélien, les représentants* $g(X)$ *et* $h(X)$ *de* ($\bigstar$) *sont uniques.*

(i) *implique* (ii). — Soit, en effet, y un élément de A congru à 1 modulo $\mathfrak{a}$, et posons $f(X) = X(X - y)$. Alors, $\bar{f}(X) = X(X - 1)$. Si $\bar{g}(X) = X$ et $\bar{h}(X) = X - 1$, on peut choisir $g(X) = X$ et $h(X) = X - y$. Comme $(g, h) = (X, y)$, $g(X)$ et $h(X)$ sont fortement étrangers si et seulement si y est inversible. D'où (ii).

(ii) *implique* (i). — Il pourra être commode de désigner par *r-couple* un couple $(A, \mathfrak{a})$ tel que l'idéal $\mathfrak{a}$ soit contenu dans le radical de Jacobson de A. Le résultat est donné par le

Lemme. — *Soient* $(A, \mathfrak{a})$ *un r-couple,* $g(X)$ *un polynôme unitaire,* $h(X)$ *un polynôme à coefficients dans* A, $\bar{g}(X)$ *et* $\bar{h}(X)$ *les polynômes réduits modulo* $\mathfrak{a}$, $\bar{A}$ *l'anneau quotient* $A/\mathfrak{a}$.

Il y a équivalence entre :

(1) $g(X)$ *et* $h(X)$ *sont fortement étrangers dans* $A[X]$.

(2) $\bar{g}(X)$ *et* $\bar{h}(X)$ *sont fortement étrangers dans* $\bar{A}[X]$.

Il suffit, évidemment, de montrer que (2) implique (1) : Or, de l'égalité

$$\bar{g}(X)\,\bar{A}[X] + \bar{h}(X)\,\bar{A}[X] = \bar{A}[X],$$

on déduit successivement

$$g(X)\,A[X] + h(X)\,A[X] + \mathfrak{a}\,A[X] = A[X],$$

$$(g(X)\,A[X] + h(X)\,A[X])/g(X)\,A[X] + \mathfrak{a}.A[X]/g(X)\,A[X] = A[X]/g(X)\,A[X].$$

Puisque $g(X)$ est unitaire, le lemme de Nakayama appliqué au A-module de type fini $A[X]/g(X)A[X]$ montre que

$$g(X)A[X] + h(X)A[X] = A[X].$$

La dernière assertion de la proposition résulte aussi du lemme ci-dessus :

Nous reprenons les notations de ($\star$); supposons que $g'(X)$ et $h'(X)$ soient d'autres représentants unitaires de $\bar{g}(X)$ et $\bar{h}(X)$ tels que $f(X) = g'(X)h'(X)$.

Si $(A, \mathfrak{a})$ est un r-couple, il résulte du lemme qu'il existe des polynômes $p(X)$ et $q(X)$ à coefficients dans A tels que $p(X)g(X) + q(X)h'(X) = 1$.

On en déduit, par multiplication par $g'(X)$,

$$(p(X)g'(X) + q(X)h(X))g(X) = g'(X).$$

Donc, $g'(X)$ est divisible par $g(X)$ et, de même, $g(X)$ est divisible par $g'(X)$. Comme $g(X)$ et $g'(X)$ sont unitaires, on a $g(X) = g'(X)$.

Par division de $f(X)$ par $g(X)$, on obtient $h(X) = h'(X)$.

Proposition 2 :

(i) *Tout produit fibré de couples henséliens est un couple hensélien. La limite projective d'un système projectif de couples henséliens est un couple hensélien. En particulier, toute intersection de couples henséliens est un couple hensélien.*

(ii) *La limite inductive d'un système inductif de couples henséliens est un couple hensélien.*

(iii) *Si $\varphi : (B, \mathfrak{b}) \to (A, \mathfrak{a})$ est une application surjective, i. e. si φ est un épimorphisme strict de* (Cou), *et si $(B, \mathfrak{b})$ est hensélien, alors $(A, \mathfrak{a})$ est hensélien.*

(iv) *Si le couple $(A, \mathfrak{a})$ vérifie ($\star$) et si l'on pose $S = 1 + \mathfrak{a}$, alors $(A_S, \mathfrak{a}_S)$ est hensélien, l'application canonique $A \to A_S$ est un morphisme de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(A_S, \mathfrak{a}_S)$ et induit un isomorphisme de $A/\mathfrak{a}$ sur $A_S/\mathfrak{a}_S$.*

Les assertions (i), (ii), (iii) sont faciles. Démontrons (iv) :

Si $1 + \dfrac{a}{1+b}$ appartient à $1 + \mathfrak{a}_S$, l'inverse de cet élément existe et coïncide avec $\dfrac{1+b}{1+a+b}$. Ceci prouve que $(A_S, \mathfrak{a}_S)$ est un r-couple.

Si x appartient à $\mathfrak{a}_S$, il existe $1 + a$ appartenant à S tel que $x(1 + a) = b$ appartienne à $\mathfrak{a}$. Alors, $x = b - xa$ appartient à $\mathfrak{a}$, ce qui prouve que l'application canonique de A dans A_S est un morphisme de (Cou).

L'égalité $\dfrac{x}{1+a} = x - \dfrac{ax}{1+a}$ entraîne que $x \equiv \dfrac{x}{1+a}$ modulo $\mathfrak{a}_S$. Autrement dit, l'application $A/\mathfrak{a} \to A_S/\mathfrak{a}_S$ est surjective. C'est donc un isomorphisme.

Enfin, $(A_S, \mathfrak{a}_S)$ satisfait à $(\bigstar)$: soit, en effet, $f(X)$ un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans A_S et $\bar{g}(X)$, $\bar{h}(X)$ des polynômes unitaires de degré p et q à coefficients dans $(A_S/\mathfrak{a}_S)$ tels que $\bar{f}(X) = \bar{g}(X)\,\bar{h}(X)$.

On peut trouver s de S tel que le polynôme $F(X) = s^n f(X/s)$ soit à coefficients dans l'image de A dans A_S :

$$F(X) = X^n + (a_1/1)\,X^{n-1} + \ldots + (a_{n-1}s^{n-2}/1)\,X + (a_n s^{n-1}/1).$$

On considère, alors, le représentant $F_1(X)$ dans $A[X]$:

$$F_1(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s^{n-2}X + a_n s^{n-1}.$$

La décomposition $\bar{F}_1(X) = \bar{g}(X)\,\bar{h}(X)$ se relève en $F_1(X) = G_1(X)\,H_1(X)$ dans $A[X]$. On prend, alors, les images canoniques $G(X)$ et $H(X)$ de $G_1(X)$ et $H_1(X)$ dans $(A_S)[X]$ et l'on pose $g(X) = (1/s^p)\,G(sX)$ et $h(X) = (1/s^q)\,H(sX)$. On a ainsi relevé la décomposition de $\bar{f}(X)$.

Remarque. — Voici une caractérisation des couples $(A, \mathfrak{a})$ satisfaisant à la condition $(\bigstar)$ et à la condition suivante plus faible que $(\bigstar\bigstar)$:

$(\bigstar\bigstar\bigstar)$ *Les représentants* $g(X)$ *et* $h(X)$ *de* $(\bigstar)$ *sont uniques.*

Soit φ l'application canonique de A dans A_S où $S = 1 + \mathfrak{a}$ et soit x un élément de $\ker(\varphi)$: il existe donc un élément a de $\mathfrak{a}$ tel que $(1 + a)\,x = 0$.

On considère le polynôme

$$f(X) = (X - 1 - a)\,(X - x) = X\,(X - 1 - a - x).$$

On obtient $\bar{f}(X) = X\,(X - 1)$. Si l'on prend $\bar{g}(X) = X$ et $\bar{h}(X) = X - 1$, on voit qu'on peut prendre pour $g(X)$ soit X, soit $X - x$ et pour $h(X)$ soit $X - 1 - a - x$, soit $X - 1 - a$. On déduit de $(\bigstar\bigstar\bigstar)$ qu'on doit avoir $x = 0$. On voit donc que le couple $(A, \mathfrak{a})$ est tel que l'application canonique de A dans $A_{1+\mathfrak{a}}$ est injective. Un tel couple sera appelé un *u-couple*. Si l'on identifie A à un sous-anneau de $A_{1+\mathfrak{a}}$ on voit que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}A_{1+\mathfrak{a}} \cap A$. La proposition 2 montre alors que si un u-couple satisfait à $(\bigstar)$, il satisfait aussi à $(\bigstar\bigstar\bigstar)$, puisque l'unicité est assurée dans $A_{1+\mathfrak{a}}[X]$.

Un couple satisfaisant à $(\bigstar)$ et $(\bigstar\bigstar\bigstar)$ sera dit *faiblement hensélien*. Nous nous intéresserons dans l'appendice 2 à de tels couples qui conduiront eux aussi à un problème universel.

2. Clôture hensélienne de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(B, \mathfrak{b})$.

Définitions. — *Soit* $\varphi : (A, \mathfrak{a}) \to (B, \mathfrak{b})$ *un morphisme de* (Cou). *On dit que* φ *est dominant, ou que* $(B, \mathfrak{b})$ *domine* $(A, \mathfrak{a})$, *si tout élément de* $\ker(\varphi)$ *est annulé par un élément de* $1 + \mathfrak{a}$.

On dit que φ est un quasi-isomorphisme si les conditions suivantes sont réalisées :

— *φ est dominant.*

— *L'application $A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{b}$ déduite de φ est un isomorphisme.*

— *Si B' est la fermeture intégrale de $\varphi(A)$ dans B, si $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} \cap B'$ et si b appartient à B, alors, il existe b' de $\mathfrak{b}'$ tel que $b(1 + b')$ appartienne à B'.*

Considérons maintenant un morphisme dominant $\varphi : (A, \mathfrak{a}) \to (B, \mathfrak{b})$ à valeurs dans un couple hensélien. L'intersection des couples henséliens contenant $(\varphi(A), \varphi(\mathfrak{a}))$ et contenus dans $(B, \mathfrak{b})$ est un couple hensélien appelé *clôture hensélienne de* $(A, \mathfrak{a})$ *dans* $(B, \mathfrak{b})$.

On remarque que la clôture hensélienne de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(B, \mathfrak{b})$ coïncide avec la clôture hensélienne de $(\varphi(A), \varphi(\mathfrak{a}))$ dans $(B, \mathfrak{b})$.

PROPOSITION 3. — *Le morphisme canonique de* $(A, \mathfrak{a})$ *dans la clôture hensélienne de* $(A, \mathfrak{a})$ *dans* $(B, \mathfrak{b})$ *est un quasi-isomorphisme.*

On peut, en effet, supposer que φ est injectif, et identifier A à un sous-anneau de B car, sinon, on remplacerait A par $\varphi(A)$.

On peut alors construire la clôture hensélienne $(A^h, \mathfrak{a}^h)$ de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(B, \mathfrak{b})$ de la façon suivante :

Soient $f(X)$ un polynôme unitaire à coefficients dans A et $\bar{f}(X) = \bar{g}(X)\,\bar{h}(X)$ une décomposition modulo $\mathfrak{a}$ en produit de polynômes unitaires étrangers. Il existe alors dans $B[X]$ des représentants $g(X)$ et $h(X)$ tels que $f(X) = g(X)\,h(X)$.

Remarquons d'abord que les coefficients de $g(X)$ et $h(X)$ sont entiers sur A : ce sont, en effet, des fonctions symétriques de racines de $g(X)$ et $h(X)$ dans un anneau A' contenant A comme sous-anneau et tel que, dans $A'[X]$, $g(X)$ et $h(X)$ se décomposent en facteurs du premier degré.

Soit $S(f)$ l'ensemble des coefficients des polynômes $g(X)$ et $h(X)$ quand on prend dans $B[X]$ les relèvements de toutes les décompositions $\bar{f}(X) = \bar{g}(X)\,\bar{h}(X)$ en produit de polynômes unitaires étrangers.

Soit S_1 la réunion des ensembles $S(f)$ quand f parcourt l'ensemble des polynômes unitaires à coefficients dans A. On pose $A_1 = A[S_1]$ et $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b} \cap A_1$.

On construit de manière analogue le couple $(A_2, \mathfrak{a}_2)$ à partir du couple $(A_1, \mathfrak{a}_1)$, puis de proche en proche $(A_n, \mathfrak{a}_n)$ et, enfin, le couple, $(A^{\omega}, \mathfrak{a}^{\omega})$ limite inductive des couples $(A_n, \mathfrak{a}_n)$.

Il est clair que $(A^{\omega}, \mathfrak{a}^{\omega})$ est un sous-couple de $(A^h, \mathfrak{a}^h)$ et, d'autre part, qu'il satisfait à la condition ($\bigstar$). On déduit, alors, de la proposition 2, que $(A^h, \mathfrak{a}^h) = (A^{\omega}_{S^{\omega}}, \mathfrak{a}^{\omega}_{S^{\omega}})$ si $S^{\omega} = 1 + \mathfrak{a}^{\omega}$.

Comme les coefficients de A_1 appartiennent à $A + \mathfrak{b}$, on voit que $A_1 = A + \mathfrak{a}_1$ et, de proche en proche, $A^{\omega} = A + \mathfrak{a}^{\omega}$ et, enfin,

$A^{\omega}/\mathfrak{a}^{\omega} = A/\mathfrak{a}$, d'où l'on déduit, compte tenu du (iv) de la proposition 2, $A^h/\mathfrak{a}^h = A/\mathfrak{a}$.

REMARQUE. — Supposons que le couple $(A, \mathfrak{a})$ soit un sous-couple du couple hensélien $(B, \mathfrak{b})$ et d'un u-couple hensélien $(A', \mathfrak{a}')$ tel que A' soit sous-anneau de B, il est immédiat que la clôture hensélienne $(A^h, \mathfrak{a}^h)$ de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(B, \mathfrak{b})$ est un sous-couple de $(A', \mathfrak{a}')$.

PROPOSITION 4. — *Soit $(A^h, \mathfrak{a}^h)$ la clôture hensélienne de $(A, \mathfrak{a})$ dans le couple hensélien $(B, \mathfrak{b})$. Soient $\mathfrak{t}$ un idéal de B contenu dans $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{t}^h$ l'idéal $\mathfrak{t} \cap A^h$ de A^h, $\mathfrak{s}$ l'idéal $\varphi^{-1}(\mathfrak{t})$ de A.*

Alors, la clôture hensélienne de $(A/\mathfrak{s}, \mathfrak{a}/\mathfrak{s})$ dans $(B/\mathfrak{t}, \mathfrak{b}/\mathfrak{t})$ est $(A^h/\mathfrak{t}^h, \mathfrak{a}^h/\mathfrak{t}^h)$.

On supposera que le morphisme dominant φ est un monomorphisme, en sorte que $\mathfrak{s}$ s'identifie à $\mathfrak{t} \cap A$. Alors, φ induit un monomorphisme dominant de $(A/\mathfrak{s}, \mathfrak{a}/\mathfrak{s})$ dans $(B, \mathfrak{b})$.

Nous allons montrer, avec les notations de la démonstration de la proposition 3, que $((A/\mathfrak{s})^{\omega}, (\mathfrak{a}/\mathfrak{s})^{\omega})$ coïncide avec $(A^{\omega}/\mathfrak{t}^{\omega}, \mathfrak{a}^{\omega}/\mathfrak{t}^{\omega})$ si $\mathfrak{t}^{\omega}$ est $\mathfrak{t} \cap A^{\omega}$.

Soit, en effet, $v(X)$ un polynôme unitaire à coefficients dans $A/\mathfrak{s}$ et soit $f(X)$ un représentant unitaire dans $A[X]$.

Avec des notations évidentes, $\bar{v}(X) = \bar{f}(X)$ dans $(A/\mathfrak{a})[X]$. Une décomposition $\bar{f}(X) = \bar{g}(X)\,\bar{h}(X)$ se relève en $f(X) = g(X)\,h(X)$ dans $B[X]$. Soient $g''(X)$ et $h''(X)$ les polynômes obtenus en réduisant $g(X)$ et $h(X)$ modulo $\mathfrak{t}$. On obtient le relèvement $v(X) = g''(X)\,h''(X)$ de la décomposition de $\bar{v}(X)$ dans $(B/\mathfrak{t})[X]$.

On voit donc que $S(v) = j(S(f))$ si j est la surjection canonique de B sur $B/\mathfrak{t}$, et, par suite, que $S_1(A/\mathfrak{s})$ est contenu dans $j(S_1(A))$.

Réciproquement, si c appartient à $j(S_1(A))$, soit c' un représentant dans $S_1(A)$. Il provient du relèvement d'une décomposition du polynôme $\bar{f}(X)$ réduit modulo $\mathfrak{a}$ du polynôme unitaire $f(X)$ à coefficients dans A. Si $v(X)$ est le polynôme à coefficients dans $A/\mathfrak{s}$ réduit modulo $\mathfrak{s}$ de $f(X)$, c apparaît dans le relèvement correspondant de la décomposition de $\bar{v}(X) = \bar{f}(X)$.

Donc,

$$S_1(A/\mathfrak{s}) = j(S_1(A))$$

et

$$(A/\mathfrak{s})_1 = (A/\mathfrak{s})[S_1(A/\mathfrak{s})] = j(A)[j(S_1(A))] = j(A_1) = A_1/\mathfrak{s}_1$$

si $\mathfrak{s}_1$ est l'idéal $\mathfrak{t} \cap A_1$ de A_1.

On voit ainsi, de proche en proche, que $(A/\mathfrak{s})_n = j(A_n)$ et donc que

$$(A/\mathfrak{s})^{\omega} = j(A^{\omega}) = A^{\omega}/\mathfrak{t}^{\omega}.$$

L'homomorphisme canonique j de A^{ω} sur $A^{\omega}/\mathfrak{t}^{\omega}$ se prolonge en un homomorphisme j de $(A^{\omega})_{S_{\omega}}$ dans $(A^{\omega}/\mathfrak{s}^{\omega})_{j(S_{\omega})}$ par $j(x/y) = j(x)/j(y)$

si x appartient à A^{ω} et y à S^{ω}. Cet homomorphisme j est évidemment surjectif. D'autre part, son noyau est l'ensemble des éléments y/x tels que $j(x) = o$, soit $\mathfrak{t}^{\omega} \cap A^h = \mathfrak{t}^h$. D'où le résultat, puisque

$$(A/\mathfrak{s})^h = (A^{\omega}/\mathfrak{s}^{\omega})_{j(S^{\omega})}.$$

3. La clôture hensélienne d'un couple.

Soit (Hens) la sous-catégorie pleine de (Cou) dont les objets sont les couples henséliens. Soit T le foncteur inclusion de (Hens) dans (Cou). Nous allons montrer l'existence d'un foncteur adjoint S : (Cou) $\rightarrow$ (Hens).

Soit $(A, \mathfrak{a})$ un couple. Si A_0 est un sous-anneau de type fini de A, soit $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a} \cap A_0$. Le complété $(\hat{A}_0, \hat{\mathfrak{a}}_0)$ de $(A_0, \mathfrak{a}_0)$ pour la topologie $\mathfrak{a}_0$-adique est un couple hensélien. Il en va de même pour le couple

$$(A^0, \mathfrak{a}^0) = \varinjlim (\hat{A}_0, \hat{\mathfrak{a}}_0),$$

la limite inductive étant prise sur les sous-anneaux de type fini A_0 de A.

Nous désignerons par *complété inductif* du couple $(A, \mathfrak{a})$ le couple $(A^0, \mathfrak{a}^0)$. Pour ne pas surcharger l'exposé, nous renvoyons à l'appendice 1 pour l'étude de certaines propriétés de ce complété inductif. Signalons toutefois, ici, quelques propriétés immédiates.

Puisque l'application naturelle de $(A_0, \mathfrak{a}_0)$ dans $(\hat{A}_0, \hat{\mathfrak{a}}_0)$ est un morphisme dominant de (Cou), il en est de même de l'application naturelle de $(A, \mathfrak{a})$ dans son complété inductif.

Puisque $\hat{A}_0$ est plat sur A_0, A^0 est plat sur A. Enfin, si $S = 1 + \mathfrak{a}$, le complété inductif de $(A, \mathfrak{a})$ coïncide avec le complété inductif de $(A_S, \mathfrak{a}_S)$. Si $(A, \mathfrak{a})$ est un r-couple, A^0 est fidèlement plat sur A.

On notera $S(A, \mathfrak{a}) = (A^*, \mathfrak{a}^*)$ la clôture hensélienne de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(A^0, \mathfrak{a}^0)$. On dira que $(A^*, \mathfrak{a}^*)$ est la *clôture hensélienne* de $(A, \mathfrak{a})$.

THÉORÈME 1. — *$(A^*, \mathfrak{a}^*)$ est un couple hensélien libre au-dessus de $(A, \mathfrak{a})$.*

Rappelons que ceci signifie qu'il existe un isomorphisme de *foncteurs* en $(B, \mathfrak{b})$ de (Hens) :

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Hens})}((A^*, \mathfrak{a}^*), (B, \mathfrak{b})) \simeq \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Cou})}((A, \mathfrak{a}), (B, \mathfrak{b})).$$

En fait, nous allons montrer que si i_A désigne le morphisme dominant de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(A^*, \mathfrak{a}^*)$, un morphisme φ de $(A, \mathfrak{a})$ dans le couple hensélien $(B, \mathfrak{b})$ se factorise de façon unique suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd} (A, \mathfrak{a}) \arrow[r, "i_A"] \arrow[dr, "\varphi"'] & (A^*, \mathfrak{a}^*) \arrow[d, "\chi"] \\ & (B, \mathfrak{b}) \end{tikzcd}$$

Nous aurons à utiliser le lemme suivant dont nous reportons la démonstration à l'appendice 1 :

LEMME. — *Soit* $\varphi : (A, \mathfrak{a}) \to (B, \mathfrak{b})$ *un morphisme de* (Cou). *Il existe un morphisme* φ^0, *et un seul, de* $(A^0, \mathfrak{a}^0)$ *dans* $(B^0, \mathfrak{b}^0)$ « *prolongeant* » φ.

Démontrons le théorème :

On commence par remarquer que φ définit de manière naturelle un morphisme de $(i_A(A), i_A(\mathfrak{a}))$ dans $(B, \mathfrak{b})$ en sorte qu'on peut considérer le cas où le morphisme dominant de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(A^0, \mathfrak{a}^0)$ est un monomorphisme.

Montrons d'abord l'existence de χ *dans le cas ou* φ *est un monomorphisme :*

Du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (A, \mathfrak{a}) & \longrightarrow & (A^0, \mathfrak{a}^0) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi^0} \\ (B, \mathfrak{b}) & \longrightarrow & (B^0, \mathfrak{b}^0) \end{array}$$

on déduit, si $\mathfrak{t}^0$ est le noyau de φ^0, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (A, \mathfrak{a}) & \longrightarrow & (A^0/\mathfrak{t}^0, \mathfrak{a}^0/\mathfrak{t}^0) \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi'} \\ (B, \mathfrak{b}) & \longrightarrow & (B^0, \mathfrak{b}^0) \end{array}$$

où φ' est le morphisme déduit de φ^0 et où, puisque $\mathfrak{t}^0 \cap A = (0)$, toutes les flèches représentent des monomorphismes.

On en déduit que la clôture hensélienne de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(A^0/\mathfrak{t}^0, \mathfrak{a}^0/\mathfrak{t}^0)$, c'est-à-dire, en vertu de la proposition 4, $(A^*/\mathfrak{t}^*, \mathfrak{a}^*/\mathfrak{t}^*)$ si $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{t}^0 \cap A^*$, est isomorphe à la clôture hensélienne $(A^h, \mathfrak{a}^h)$ de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(B, \mathfrak{b})$. En composant l'épimorphisme strict de $(A^*, \mathfrak{a}^*)$ sur $(A^h, \mathfrak{a}^h)$ ainsi défini avec le monomorphisme de $(A^h, \mathfrak{a}^h)$ dans $(B, \mathfrak{b})$, on obtient le morphisme χ cherché.

Supposons maintenant que φ *est un morphisme quelconque.* — Si $\mathfrak{s} = \ker(\varphi)$ on obtient un résultat analogue en remplaçant le couple $(A, \mathfrak{a})$ par le couple $(A/\mathfrak{s}, \mathfrak{a}/\mathfrak{s})$. Or, le complété inductif de $(A/\mathfrak{s}, \mathfrak{a}/\mathfrak{s})$ est $(A^0/\mathfrak{s}A^0, \mathfrak{a}^0/\mathfrak{s}A^0)$ et donc la clôture hensélienne de $(A/\mathfrak{s}, \mathfrak{a}/\mathfrak{s})$ est $(A^*/\mathfrak{s}^*, \mathfrak{a}^*/\mathfrak{s}^*)$ (*voir* Appendice 1). Il existe, d'après ce qui précède, un morphisme de cette clôture hensélienne dans $(B, \mathfrak{b})$. Il suffit alors, de composer l'épimorphisme strict de $(A^*, \mathfrak{a}^*)$ sur $(A^*/\mathfrak{s}^*, \mathfrak{a}^*/\mathfrak{s}^*)$ avec ce morphisme pour obtenir le morphisme χ cherché.

Reste à montrer l'unicité du morphisme χ. — On remarque que le monomorphisme déduit de φ de $(A_S, \mathfrak{a}_S)$ si $S = 1 + \mathfrak{a}$ dans $(A^*, \mathfrak{a}^*)$ se prolonge en un monomorphisme de $(A^0, \mathfrak{a}^0)$ dans $(A^{*0}, \mathfrak{a}^{*0})$: il suffit, en effet, de le montrer quand $A = A_S$ et quand A est un anneau de type fini auquel cas A^0 coïncide avec le complété $\mathfrak{a}$-adique. Or, de $\mathfrak{a}^\star = \mathfrak{a}A^0 \cap A^\star$, on déduit $(\mathfrak{a}^\star)^n \cap A \subset \mathfrak{a}^n A^0 \cap A = \mathfrak{a}^n$, d'où $\mathfrak{a}^n = (\mathfrak{a}^\star)^n \cap A$. Il en résulte que l'injection de A $\mathfrak{a}$-adique dans $A^\star$ $\mathfrak{a}^\star$-adique se prolonge en une injection des complétés correspondants, d'où le résultat.

Si φ se prolongeait de deux façons différentes en des morphismes χ et χ' de $(A^\star, \mathfrak{a}^\star)$ dans $(B, \mathfrak{b})$, ces morphismes se prolongeraient eux-mêmes en deux morphismes distincts de $(A^{\star 0}, \mathfrak{a}^{\star 0})$ dans $(B^0, \mathfrak{b}^0)$ et, par restriction à $(A^0, \mathfrak{a}^0)$ donneraient deux prolongements distincts de $(A^0, \mathfrak{a}^0)$ dans $(B^0, \mathfrak{b}^0)$.

Soit φ un morphisme de (Cou) de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(A', \mathfrak{a}')$. On déduit du fait que $(A^\star, \mathfrak{a}^\star)$ (resp. $(A'^\star, \mathfrak{a}'^\star)$) est libre au-dessus de $(A, \mathfrak{a})$ (resp. $(A', \mathfrak{a}')$), un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Hens})}((A^\star, \mathfrak{a}^\star), (B, \mathfrak{b})) & \simeq & \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Cou})}((A, \mathfrak{a}), (B, \mathfrak{b})) \\ & & \uparrow {\scriptstyle \mathrm{Hom}(\varphi, (B, \mathfrak{b}))} \\ \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Hens})}((A'^\star, \mathfrak{a}'^\star), (B, \mathfrak{b})) & \simeq & \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Cou})}((A', \mathfrak{a}'), (B, \mathfrak{b})) \end{array}$$

et donc un morphisme *fonctoriel* en $(B, \mathfrak{b})$ de (Hens)

$$(1) \qquad \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Hens})}((A'^\star, \mathfrak{a}'^\star), (B, \mathfrak{b})) \to \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Hens})}((A^\star, \mathfrak{a}^\star), (B, \mathfrak{b})).$$

On en déduit classiquement un morphisme $S(\varphi) = \varphi^\star$ de $(A^\star, \mathfrak{a}^\star)$ dans $(A'^\star, \mathfrak{a}'^\star)$ comme suit : on prend dans (1), $(B, \mathfrak{b}) = (A'^\star, \mathfrak{a}'^\star)$, et l'on a donc une application :

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{Hens})}((A'^\star, \mathfrak{a}'^\star), (A'^\star, \mathfrak{a}'^\star)) \to \mathrm{Hom}_{(\mathrm{Hens})}((A^\star, \mathfrak{a}^\star), (A'^\star, \mathfrak{a}'^\star)).$$

On prend alors pour $S(\varphi)$ le morphisme de $(A^\star, \mathfrak{a}^\star)$ dans $(A'^\star, \mathfrak{a}'^\star)$ qui correspond au morphisme identique de $(A'^\star, \mathfrak{a}'^\star)$. On vérifie que l'application $\varphi \rightsquigarrow S(\varphi)$ est fonctorielle.

Le foncteur $((A, \mathfrak{a}) \rightsquigarrow (A^\star, \mathfrak{a}^\star);\ \varphi \rightsquigarrow S(\varphi))$ est le *foncteur adjoint* S du foncteur inclusion T.

COROLLAIRE 1. — *La clôture hensélienne d'une limite inductive de couples henséliens est la limite inductive des clôtures henséliennes.*

On donnerait facilement une démonstration directe. Il vaut mieux remarquer qu'un foncteur adjoint commute aux limites inductives.

COROLLAIRE 2. — *Soient* $(A, \mathfrak{a})$ *un couple,* $\mathfrak{b}$ *un idéal contenu dans l'idéal* $\mathfrak{a}$. *Le morphisme de* $(A^\star, \mathfrak{a}^\star)$ *dans* $(A/\mathfrak{b}^\star), (\mathfrak{a}/\mathfrak{b})^\star)$ *est surjectif.*

Si l'on munit $A^\star$ *de la topologie induite par la topologie sur* A^0 *limite inductive des topologies adiques sur les complétés des sous-anneaux de type fini de* A *et si l'idéal* $\mathfrak{b}A^\star$ *est fermé dans cette topologie, le noyau de ce morphisme est* $\mathfrak{b}A^\star$.

Il existe, en effet, une suite exacte

$$(C, \mathfrak{c}) \overset{\varphi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} (A, \mathfrak{a}) \rightarrow (A/\mathfrak{b}, \mathfrak{a}/\mathfrak{b}).$$

On peut prendre, par exemple, pour C l'ensemble des couples (a, a') d'éléments de A tels que $a - a'$ appartienne à $\mathfrak{b}$ et pour $\mathfrak{c}$ l'ensemble des couples (a, a') d'éléments de $\mathfrak{a}$ tels que $a - a'$ appartienne à $\mathfrak{b}$, pour φ et ψ les applications induites sur C par les projections de $A \times A$ sur A.

On sait qu'un foncteur adjoint est exact à droite. Il résulte donc, de ce qui précède, que la suite

$$(C^\star, \mathfrak{c}^\star) \overset{\varphi^\star}{\underset{\psi^\star}{\rightrightarrows}} (A^\star, \mathfrak{a}^\star) \rightarrow ((A/\mathfrak{b})^\star, (\mathfrak{a}/\mathfrak{b})^\star)$$

est exacte.

Si l'on munit C^0 de la topologie limite inductive des topologies adiques sur les complétés des sous-anneaux de type fini de C, $C^\star$ de la topologie induite, C est partout dense dans $C^\star$; il s'ensuit que l'idéal de $A^\star$ qui est engendré par les éléments $\varphi(c) - \psi(c)$ est partout dense dans l'idéal engendré par les $\varphi^\star(x) - \psi^\star(x)$, où c et x parcourent respectivement C et $C^\star$, L'hypothèse faite sur l'idéal $\mathfrak{b}A^\star$ montre que c'est justement $\mathfrak{b}A^\star$.

Remarque. — Si nous avions montré que l'idéal $\mathfrak{a}A^\star$ satisfait à l'hypothèse du corollaire 2, nous aurions montré également la A-platitude de $A^\star$.

On considère, en effet, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (A/\mathfrak{a}^n, \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^n) & \xrightarrow{\varphi_1} & (A^\star/\mathfrak{a}^n A^\star, \mathfrak{a}A^\star/\mathfrak{a}^n A^\star) \\ & \searrow^{\varphi_2} & \downarrow \pi \\ & & (A^\star/\mathfrak{a}^n A^0 \cap A^\star, \mathfrak{a}A^\star/\mathfrak{a}^n A^0 \cap A^\star) \end{array}$$

où π est l'épimorphisme strict obtenu à partir de l'idéal $\mathfrak{a}^n A^0 \cap A^\star/\mathfrak{a}^n A^\star$.

Les deux clôtures henséliennes à droite coïncident, et donc π est l'application identique. Donc, $\mathfrak{a}^n A^\star = \mathfrak{a}^n A^0 \cap A^\star$. On en déduit, facilement, que $A^{\star 0} = A^0$. Or, A^0 est plat sur A, et $A^{\star 0}$ est plat sur $A^\star$. On en déduit, par transitivité, que $A^\star$ est plat sur A.

4. Clôture hensélienne d'un anneau local.

Soit (Loc) la sous-catégorie pleine de (Cou) dont les objets sont les couples $(A, \mathfrak{a})$ tels que A soit local et que $\mathfrak{a}$ soit l'idéal maximal $\mathfrak{m}(A)$ de A.

Il résulte de la construction de la clôture hensélienne et de la proposition 3 que *la clôture hensélienne d'un anneau local est un anneau local.*

Proposition 5. — *Soient A un anneau local, B une A-algèbre locale. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est l'anneau local d'une A-algèbre finie B' (i. e. B' est une algèbre sur A et est un A-module de type fini), B est A-plat et $B/\mathfrak{m}(A)B$ est une extension séparable de $A/\mathfrak{m}(A)$.*

(ii) *B est de la forme $(A[X]/(F(X))_{\mathfrak{n}'}$ ou $F(X)$ est un polynôme unitaire et ou $\mathfrak{n}'$ est un idéal maximal de $A[X]/(F(X))$ ne contenant pas $F'(X)$ modulo $(F(X))$* [4].

Il est classique que (ii) implique (i) [5].

(i) *implique* (ii). — Posons $k = A/\mathfrak{m}(A)$, $L = B/\mathfrak{m}(B) = B/\mathfrak{m}(A)B$. On sait que $B'/\mathfrak{m}(A)B'$ est de la forme

$$B'_{\mathfrak{n}_1}/\mathfrak{m}(A)B'_{\mathfrak{n}_1} \times \ldots \times B'_{\mathfrak{n}_r}/\mathfrak{m}(A)B'_{\mathfrak{n}_r},$$

où $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_r$ parcourent les idéaux maximaux de B'.

De plus, si $\mathfrak{n}' = \mathfrak{m}(B) \cap B' = \mathfrak{n}'_1$, $B'_{\mathfrak{n}_1}/\mathfrak{m}(A)B'_{\mathfrak{n}_1}$ est isomorphe à L.

On déduit de la décomposition ci-dessus l'existence d'un élément u de B' qui appartient à $\mathfrak{n}_2 \cap \ldots \cap \mathfrak{n}_r$ et dont l'image dans L engendre L.

Posons donc $B'' = A[u]$ et $\mathfrak{n}'' = \mathfrak{n}' \cap B''$ de sorte qu'on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B'' = A[u] \arrow[r] & B' \arrow[r] & B \\ \mathfrak{m}(A) \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{n}'' \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{n}' \arrow[u] \arrow[r] & \mathfrak{m}(B) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Nous allons d'abord montrer les égalités

$$B''_{\mathfrak{n}''} = B'_{(B''-\mathfrak{n}'')} = B.$$

---

[4] Cette proposition m'a été communiquée par Pierre Gabriel. La fin de sa démonstration est inspirée des méthodes exposées dans : Grothendiek. — *Séminaire de géométrie algébrique*, 1960, Institut des Hautes Études scientifiques.

Je dois également à Pierre Gabriel la présentation qui suit.

[5] En voici brièvement une démonstration :

Si $\overline{F}$ désigne la classe de F modulo $\mathfrak{m}(A)$, on remarque que $B/\mathfrak{m}(B) = A/\mathfrak{m}(A)[\overline{x}]$, où $\overline{F}(\overline{x}) = 0$ et $\overline{F'}(\overline{x}) \neq 0$. Donc, $B/\mathfrak{m}(B)$ est séparable sur $A/\mathfrak{m}(A)$.

Reste à montrer que $\mathfrak{m}(B) = \mathfrak{m}(A)B$. L'idéal $\mathfrak{n}'$ est de la forme $(\mathfrak{m}(A), F_i(x))A[x]$, où $F_i(X)$ est un facteur irréductible de $F(X)$ modulo $\mathfrak{m}(A)$ (Théorème de Kummer). On a une égalité $F(X) = G_i(X)F_i(X) + H(X)$, où $H(X)$ a ses coefficients dans $\mathfrak{m}(A)$. La condition « $F'(x)$ n'appartient pas à $\mathfrak{n}'$ » implique « $G_i(x)F'_i(x)$ n'appartient pas à $\mathfrak{n}'$ ». Il en résulte que $G_i(x)$ est inversible dans $\mathfrak{n}'$. D'où le résultat.

Posons, en effet, $T = B'' - \mathfrak{n}''$, de sorte qu'on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} B'' & \to & B' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B''_T & \to & B'_T \end{array}$$

Pour prouver l'égalité $B'_T = B'_{\mathfrak{n}'} = B$, il suffit de montrer que tout idéal maximal $\mathfrak{a}$ de B'_T est contenu dans $\mathfrak{n}'_T$. Or, $\mathfrak{a}B''_T$ est maximal, donc, égal à $\mathfrak{n}''_T$. Il s'ensuit que $\mathfrak{a}$ coupe B'' suivant $\mathfrak{n}''$, donc, coupe B' suivant un idéal premier prolongeant $\mathfrak{n}''$ et ne contenant pas u : ce ne peut être que $\mathfrak{n}'$.

Pour prouver l'égalité $B''_T = B'_T$, il suffit de montrer, en vertu du lemme de Nakayama, que $B''_T/\mathfrak{n}''_T \to B'_T/\mathfrak{n}''_T B'_T$ est surjectif. Mais $\mathfrak{n}''_T B'_T$ contient $\mathfrak{m}(A)B'_T$ de sorte qu'on a $B'_T/\mathfrak{n}''_T B'_T = L$, qui est engendré par l'image de u.

Prouvons maintenant l'existence de $F(X)$ tel que $F(u) = 0$ et $F'(u)$ n'appartienne pas à $\mathfrak{n}''$: soit $n = [B'' \otimes_A k : k]$; comme $B'' \otimes_A k$ est engendré sur k par l'image $\bar{u}$ de u, $B'' \otimes_A k$ est de la forme $k[X]/(f(X))$, $f(X)$ étant un polynôme de degré n. Il résulte alors du lemme de Nakayama que $1, u, \ldots, u^{n-1}$ engendrent B'' sur A, d'où l'existence d'un polynôme $F(X)$ de degré n tel que $F(u) = 0$. Il s'ensuit que $f(X)$ est la classe de $F(X)$ modulo $\mathfrak{m}(A)$. Comme $f'(u)$ n'appartient pas à $\mathfrak{n}''/\mathfrak{m}(A)B''$, $F'(u)$ n'appartient pas à $\mathfrak{n}''$.

Posons, enfin, $C = (A[X]/(F(X))_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{p}$ est l'image réciproque de $\mathfrak{n}''$ pour l'application qui applique X sur u. On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{p} & B \\ {\scriptstyle i}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle j} \\ & A & \end{array}$$

où p est surjectif, B est A-plat et C est non ramifié sur A car $F'(X)$ n'appartient pas à $\mathfrak{p}$. [Ceci signifie que $C \otimes_A C \to C$ où $(c' \otimes c'') = c'c''$ se scinde en tant qu'application de $C \otimes_A C$-modules.]

Il résulte alors du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A & \to & B & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C & \to & C \otimes_A B & \leftarrow & C \otimes_A C \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & B & \longleftarrow & C \end{array}$$

et du fait que B est A-plat, que $C \otimes_A B$ est B-plat et, il résulte d'autre part, du fait que $C \otimes_A C \to C$ se scinde, qu'il en est de même de $C \otimes_A B \to B$.

Donc, $C \underset{A}{\otimes} B$ est plat sur C, et B est plat sur $C \underset{A}{\otimes} B$; donc, B est C-plat et C-fidèlement-plat; par conséquent, p est une injection, et comme c'est une surjection, c'est un isomorphisme.

PROPOSITION 6. — *Soient A un anneau local, B une A-algèbre locale. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est l'anneau local d'une A-algèbre finie, B est A-plat et $B/\mathfrak{m}(A)B = A/\mathfrak{m}(A)B$.*

(ii) *B est de la forme $(A[X]/(F(X))_{\mathfrak{n}'}$ ou $F(X)$ est un polynôme unitaire de la forme $X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$ où a_i appartient à A, a_n à $\mathfrak{m}(A)$ et a_{n-1} n'appartient pas à $\mathfrak{m}(A)$ et où $\mathfrak{n}'$ est un idéal maximal de $A[X]/(F(X))$ contenant la classe de X modulo $(F(X))$.*

(iii) *B est l'anneau local d'une A-algèbre finie, et l'application naturelle φ de A dans B induit un isomorphisme des complétés inductifs $\varphi^0 : A^0 \simeq B^0$.*

(i) *implique* (ii). — Il résulte, en effet, de la proposition 6 que B est de la forme $(A[X]/(G(X))_{\mathfrak{n}'}$ où $G(X)$ est unitaire et où $\mathfrak{n}'$ est un idéal maximal de $A[X]/(G(X))$ ne contenant pas $G'(X)$ modulo $(G(X))$. Soit y la classe de X modulo $(G(X))$. La condition $B/\mathfrak{m}(A)B = A/\mathfrak{m}(A)$ se traduit par $B' = A + \mathfrak{n}'$ si $B' = A[X]/(G(X))$. Posons $y = a + x$ où a appartient à A et x à $\mathfrak{n}'$. On en déduit que $B' = A[X]/(F(X))$, où $F(X) = G(a + X)$. Si $F(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n$, on voit que

$$a_n = -x(x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1})$$

appartient à $\mathfrak{n}' \cap A = \mathfrak{m}(A)$.

D'autre part, $F'(x) = G'(y)$ n'appartient pas à $\mathfrak{n}'$. Comme

$$F'(x) = x(nx^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}) + a_{n-1},$$

il en résulte que a_{n-1} n'appartient pas à $\mathfrak{n}' \cap A = \mathfrak{m}(A)$. D'où (ii).

(ii) *implique* (iii). — On peut, évidemment, faire la démonstration dans le cas où A est noethérien : sinon, on considère A comme limite inductive des localisés des sous-anneaux de type fini de A contenant les coefficients de $F(X)$.

Il est clair que $\mathfrak{n}' = (\mathfrak{m}(A), x) A[x]$ si x est la classe de X modulo $(F(X))$ et que $\mathfrak{m}(B) = \mathfrak{m}(A)B$, car $x(x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}) = -a_n$ appartient à $\mathfrak{m}(A)B$ et $x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}$ est inversible dans B.

La proposition 11, chapitre, III, paragraphe 3 de BOURBAKI [1] indique alors que l'injection $A \to B$ se prolonge en un isomorphisme de $\hat{A}$ sur $\hat{B}$.

(iii) *implique* (ii). — Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \to & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A^0 & \to & B^0 \end{array}$$

et la A-platitude de A^0 (resp. la B-platitude de B^0) montrent la A-platitude de B et, donc, la A-fidèle platitude de B.

Il reste à montrer que $\mathfrak{m}(B) = \mathfrak{m}(A)B$: Ceci résulte des égalités

$$\mathfrak{m}(A) \otimes_A A^0 = \mathfrak{m}(A) \otimes_A B^0 = \mathfrak{m}(A) \otimes_A B \otimes_B B^0 = (\mathfrak{m}(A)B) \otimes_B B^0,$$
$$\mathfrak{m}(A) \otimes_A A^0 = \mathfrak{m}(B) \otimes_B B^0$$

qui entraînent

$$(\mathfrak{m}(B)/\mathfrak{m}(A)B) \otimes_B B^0 = 0,$$

soit $\mathfrak{m}(B)/\mathfrak{m}(A)B = 0$, en vertu de la B-fidèle platitude de B^0.

Définition. — *Nous appellerons extension à la Nagata de A un anneau local B qui satisfait à l'une des conditions équivalentes de la proposition* 6.

Nous aurons également besoin de

Proposition 7. — *Soit A un anneau local intègre intégralement clos. Si B est une extension à la Nagata de A, B est intègre intégralement clos.*

Il résulte, en effet, de la caractérisation (iii) que B se plonge dans A^0 qui est intègre (intégralement clos) (*voir* appendice 1). Donc, l'anneau B est intègre.

On peut se limiter à la démonstration dans le cas où A est noethérien (en considérant A comme réunion des localisés des sous-anneaux de type fini contenant les coefficients du polynôme définissant B). On utilise alors les équivalences suivantes (J.-P. Serre) [9]), pour un anneau noethérien intègre A :

(1) A est intégralement clos.

(2) Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur 1 de A, l'anneau $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation discrète et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de hauteur 2, la codimension homologique codh $(A_\mathfrak{p})$ est supérieure ou égale à 2.

Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de B, $\mathfrak{p}' = \mathfrak{q} \cap A[x]$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A$. Il est clair que ht $(\mathfrak{q})$ = ht $(\mathfrak{p}')$ = ht $(\mathfrak{p})$ (où ht désigne la hauteur).

L'anneau local $B_\mathfrak{p}$ est une extension à la Nagata de $A_\mathfrak{p}$ et, par suite, son idéal maximal est $\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}$. Il en résulte que $B_\mathfrak{p} = B_\mathfrak{q}$: en effet, $B_\mathfrak{p}$ est contenu dans $A[x]_{\mathfrak{p}'}$ et, d'autre part, de $\mathfrak{p}B_\mathfrak{p} \cap A[x] = \mathfrak{q}B_\mathfrak{p} \cap A[x] = \mathfrak{p}'$ on déduit que $A[x]_{\mathfrak{p}'}$ est contenu dans $B_\mathfrak{p}$. Or, $A[x]_{\mathfrak{p}'}$ coïncide avec $B_\mathfrak{q}$.

Supposons d'abord que ht $(\mathfrak{q}) = 1$; alors, $A_\mathfrak{p}$ est un anneau de valuation discrète. On a les égalités

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tor}_n(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})\\ &\quad = \mathrm{Tor}_n\left(B_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}, B_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}\right)\\ &\qquad = B_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} \mathrm{Tor}_n(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}, A_\mathfrak{n}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) = 0\end{aligned}$$

si $n > 1$.

On en déduit que $\mathrm{dh}(B_{\mathfrak{p}}) = 1$ et donc que $B_{\mathfrak{q}} = B_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète. Supposons que $\mathrm{ht}(\mathfrak{q}) = 2$. Alors, $\mathrm{cohd}(A_{\mathfrak{p}})$ est au moins 2.

Il existe donc des éléments b et c de l'idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$ tels que les suites

$$0 \to A_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{b} A_{\mathfrak{p}}$$
$$0 \to A_{\mathfrak{p}}/bA_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{c} A_{\mathfrak{p}}/bA_{\mathfrak{p}}$$

où les flèches de droite représentent les homothéties de rapport b et c respectivement, soient exactes.

Par tensorisation par B qui est A-plat, on obtient des suites exactes analogues en remplaçant $A_{\mathfrak{p}}$ par $B_{\mathfrak{p}} = B_{\mathfrak{q}}$. Il en résulte que $\mathrm{codh}(B_{\mathfrak{q}})$ est supérieur ou égal à 2. Ceci achève la démonstration.

Nous allons maintenant considérer un anneau local fixe. Nous allons mettre sur l'ensemble $(B_i)_{i\in I}$ des extensions à la Nagata de A une structure d'ordre. On écrira $B_i \leqq B_j$ s'il existe un homorphisme *local* de A-algèbres de B_i dans B_j. Un tel homomorphisme local est nécessairement unique car l'image de x_i dans B_j est l'unique racine dans $\mathfrak{m}(B_j)$ du polynôme $F_i(X)$.

Quels que soient i et j, il existe k tel que $B_i \leqq B_k$ et $B_j \leqq B_k$. Il suffit de choisir B_k isomorphe au localisé de $B_i \otimes_A B_j$ par rapport à l'idéal maximal

$$\mathfrak{m}(B_i) \otimes_A B_j + B_i \otimes_A \mathfrak{m}(B_j).$$

La caractérisation (i) de la proposition 6 montre que B_k est bien une extension à la Nagata de A et la A-platitude de B_i (resp. B_j) nous donne un plongement local de B_j (resp. B_i) dans B_k.

On voit, de même que si B_j est une extension à la Nagata de B_i et si B_i est une extension à la Nagata de A, alors B_j est une extension à la Nagata de A.

Puisque $B_i^0 = A^0$, on a un plongement naturel de B_i dans A^0. Un tel plongement est unique comme le montre, par exemple, la remarque de la proposition 3.

Les anneaux B_i correspondent donc, biunivoquement, aux extensions à la Nagata de A contenues dans A^0.

THÉORÈME 2. — *La clôture hensélienne A^* de A est isomorphe à la limite inductive des extensions à la Nagata de A.*

On peut, évidemment, plonger $\varinjlim B_i = \cup B_i$ dans A^0. Il est alors clair que $B = \cup B_i$ est contenu dans A^* : en effet, A^* contient l'élément x_i définissant l'extension B_i et qui relève en $F_i(X) = (X - x_i)\, G_i(X)$ la décomposition $X\overline{G}_i(X)$ du polynôme $F_i(X)$ modulo $\mathfrak{m}(A)$.

Il est alors clair que tout polynôme

$$F(X) = X^n + b_1 X^{n-1} + \ldots + b_{n-1}X + b_n$$

à coefficients dans B et tel que b_n appartienne à $\mathfrak{m}(B)$ et b_{n-1} n'appartienne pas à $\mathfrak{m}(B)$ est à coefficients dans une extension à la Nagata B_i de A plongée dans A^0 et admet donc une racine dans $\mathfrak{m}(B_j)$ pour une extension à la Nagata convenable B_j de B_i et donc de A.

On est ramené à montrer le

LEMME. — *Soit B un anneau local satisfaisant à la propriété suivante : Tout polynôme de la forme*

$$F(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1}X + a_n,$$

ou a_i appartient à B, a_n appartient à $\mathfrak{m}(B)$ et a_{n-1} n'appartient pas à $\mathfrak{m}(B)$, possède une racine dans $\mathfrak{m}(B)$.

Un tel anneau local B est hensélien.

On considère B comme quotient d'un anneau local intègre intégralement clos C par un idéal $\mathfrak{c}$ (par exemple d'un localisé d'un anneau de polynômes sur $\mathbf{Z}$). On peut également le considérer comme le quotient de l'anneau local D, réunion des extensions à la Nagata de C contenues dans C^0 par l'idéal $\mathfrak{c}D$.

Il résulte de la proposition 7 que D est intègre intégralement clos. Il satisfait à la condition du lemme.

Il suffit donc de faire la démonstration dans le cas où l'anneau local B est intègre intégralement clos.

La démonstration qui suit est due à M. NAGATA [4].

Nous ne redémontrerons pas ici la caractérisation suivante des anneaux locaux intègres intégralement clos henséliens :

Un anneau local intègre intégralement clos est hensélien si, et seulement si, toute extension entière intègre séparable est un anneau local.

Supposons donc que B ne soit pas hensélien. Il existe une extension entière intègre B' de B telle que B' ait n idéaux maximaux distincts $\mathfrak{b}'_0, \ldots, \mathfrak{b}'_{n-1}$.

On peut, évidemment, supposer que B' est intègre intégralement clos de corps des fractions K' extension algébrique finie normale séparable du corps des fractions K de B. On sait alors que les idéaux $\mathfrak{b}'_0, \ldots, \mathfrak{b}'_{n-1}$ sont conjugués.

Soit B'' l'anneau de décomposition de $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}'_0$ par rapport à B, c'est-à-dire l'ensemble des éléments x de B' tels que $s(x) = x$ pour tout K-automorphisme s de K' tel que $s(\mathfrak{b}') = \mathfrak{b}'$.

Soit x de B'' appartenant à $\mathfrak{b}'$ mais pas à $\mathfrak{b}'_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Si G est le groupe de Galois de K'/K, H le sous-groupe de décomposition de $\mathfrak{b}'$ en sorte que $G = H \cup Hs_1 \cup \ldots \cup Hs_{n-1}$, avec $s_i(\mathfrak{b}') = \mathfrak{b}'_i$.

Si, alors, $F(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$ est le polynôme unitaire à coefficients dans A admettant x et $s_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ pour racines, on déduit de

$$a_n = x \prod_{i=1}^{n-1} s_i(x)$$

et

$$a_{n-1} = xy + \prod_{i=1}^{n=1} s_i(x)$$

que a_n appartient à $\mathfrak{b}' \cap B = \mathfrak{m}(B)$ et que a_{n-1} n'appartient pas à $\mathfrak{b}'$ et, donc, pas à $\mathfrak{m}(B)$. Or, le polynôme $F(X)$ n'a évidemment pas de racines dans $\mathfrak{m}(B)$.

Remarque importante. — On obtient de manière analogue une caractérisation des couples $(B, \mathfrak{b})$ d'un anneau B intègre intégralement clos et d'un idéal premier $\mathfrak{b}$ de B faiblement henséliens, c'est-à-dire satisfaisant à $(\bigstar)$:

un tel couple est hensélien si et seulement si dans toute extension entière intègre séparable de B il n'y a qu'un seul idéal premier de trace $\mathfrak{b}$ sur B;

ou encore :

un tel couple est hensélien si et seulement si tout polynôme $F(X)$ du type ci-dessus, où a_n appartient à $\mathfrak{b}$ et a_{n-1} n'appartient pas à $\mathfrak{b}$, admet une racine dans $\mathfrak{b}$.

Les démonstrations sont identiques à celles données ou admises plus haut.

Remarque. — Dans le Séminaire de géométrie algébrique 1960 de Grothendieck, les conditions de la proposition 5 définissent les A-algèbres étales quasi isomorphes à A. Toutefois, la condition (i) doit être modifiée comme suit :

B est l'anneau local d'une A-algèbre de *présentation finie*, B est A-plat et $B/\mathfrak{m}(A)B$ est une extension séparable de $A/\mathfrak{m}(A)$.

C'est donc une condition plus forte dans le cas noethérien. Il en résulte qu'il y a coïncidence entre extensions à la Nagata et algèbres étales quasi isomorphes à A.

Dans le cas général, une algèbre étale quasi isomorphe à A est une extension à la Nagata de A mais il n'est pas sûr que toute extension à la Nagata de A soit une A-algèbre locale étale quasiisomorphe à A : on obtient, par exemple, une extension à la Nagata de A en prenant la racine dans $\mathfrak{m}(A^0)$ d'un polynôme

$$X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n,$$

où a_1 appartient à A, a_n à $\mathfrak{m}(A)$ et a_{n-1} non dans $\mathfrak{m}(A)$, et en formant

$$A[x]_{(\mathfrak{m}(A), x) A[x]}.$$

Il n'est pas évident que $A[x]$ soit une A-algèbre de présentation finie car l'idéal des relations n'est pas forcément de type fini.

C'est le cas si A est intègre intégralement clos, car il résulte, de ce que A^0 est intègre, que $A[x]$ est un A-module libre, isomorphe à $A[X]/(G(X))$ en tant que A-algèbre si $G(X)$ est le polynôme unitaire minimal pour x.

Il est clair que la caractérisation (i) de la proposition 6 des extensions à la Nagata de A est très précieuse; elle permet, par exemple, d'affirmer que le localisé du composé de deux extensions à la Nagata de A est encore une extension à la Nagata de A.

La caractérisation (iii) est très utile pour la démonstration du théorème 4.

5. **Propriétés de la clôture hensélienne d'un anneau local.**

Proposition 8. — *Soient A un anneau local, A^* sa clôture hensélienne. Alors :*

(i) $\mathfrak{m}(A^*) = \mathfrak{m}(A) A^*$

$$A^*/\mathfrak{m}(A^*) = A/\mathfrak{m}(A)$$

A^* est A fidèlement plat.

(ii) *Si la topologie $\mathfrak{m}(A)$-adique de A est séparée, il en est de même de la topologie $\mathfrak{m}(A^*)$-adique de A^*.*

Si A est noethérien, il en est de même de A^*.

(iii) *Si A n'a pas d'élément nilpotent, il en est de même de A^*.*

(iv) *Si A est intègre intégralement clos, il en est de même de A^*.*

Ces assertions résultent de la construction de A^* dans le paragraphe 4, de la proposition 5 et du lemme suivant (Grothendiek) [2], lemme 3.10.1.3.)

Lemme. — *Soit $(A_\lambda, f_{\mu\lambda})$ un système inductif filtrant d'anneaux locaux tels que les $f_{\mu\lambda}$ soient des homomorphismes locaux, soit $\mathfrak{m}_\lambda$ l'idéal maximal de A_λ, et soit $K_\lambda = A_\lambda/\mathfrak{m}_\lambda$. Alors, $A' = \varinjlim A_\lambda$ est un anneau local dont $\mathfrak{m}' = \varinjlim \mathfrak{m}_\lambda$ est l'idéal maximal et $K = \varinjlim K_\lambda$ le corps résiduel.*

En outre, si $\mathfrak{m}_\mu = \mathfrak{m}_\lambda A_\mu$ *pour tout* $\lambda < \mu$, *on a* $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_\lambda A'$ *pour tout* λ.

Si, de plus, pour $\lambda < \mu$, A_μ *est un* A_λ*-module plat et, si tous les* A_λ *sont noethériens, alors* A' *est noethérien et est un* A_λ*-module plat pour tout* λ.

L'assertion sur la séparation des topologies apparaît dans la démonstration de ce lemme.

L'assertion (iii) résulte de ce que si A n'a pas d'élément nilpotent, il en est de même de A^0, (*cf.* Appendice 1).

COROLLAIRE 1. — *Soit* A *un anneau local,* $\mathfrak{s}$ *un idéal de* A :

(i) $(A/\mathfrak{s})^* = A^*/\mathfrak{s}A.^*$

(ii) *Si l'idéal* $\mathfrak{s}$ *est premier, l'idéal* $\mathfrak{s}A^*$ *est intersection d'idéaux premiers.*

(iii) *Si l'idéal* $\mathfrak{s}$ *est premier et si l'anneau* $A/\mathfrak{s}$ *est intégralement clos, l'idéal* $\mathfrak{s}A^*$ *est premier et l'anneau* $A^*/\mathfrak{s}A^*$ *est intégralement clos.*

En effet, la A-fidèle platitude de A^* et A^0 entraîne la A-fidèle platitude de A^0 et d'ailleurs $(A^*)^0 = A^0$. On a donc l'égalité

$$\mathfrak{s}A^0 \cap A^* = (\mathfrak{s}A^*)A^0 \cap A^* = \mathfrak{s}A^*.$$

D'où (i).

Les assertions (ii) et (iii) résultent alors immédiatement de la proposition 8 appliquée à l'anneau $A/\mathfrak{s}$.

COROLLAIRE 2. — *Soit* A *un anneau local intègre intégralement clos. Si* φ *est un monomorphisme de* (Cou) *de* $(A, \mathfrak{m}(A))$ *dans le couple hensélien* $(B, \mathfrak{b})$, *l'épimorphisme strict de la clôture hensélienne de* $(A, \mathfrak{m}(A))$ *sur la clôture hensélienne de* $(A, \mathfrak{m}(A))$ *dans* $(B, \mathfrak{b})$ *est un isomorphisme de* A*-algèbres.*

Si, en effet, $\mathfrak{t}^*$ est le noyau de cet épimorphisme strict, on sait que $\mathfrak{t}^* \cap A = (0)$. Un élément de $\mathfrak{t}^*$ s'écrit x/y, où x est entier sur A.

Soit $x^n + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$ l'équation de dépendance intégrale minimale à coefficients dans A pour x.

L'égalité $\mathfrak{t}^* \cap A = (0)$ montre que $a_n = 0$. Si x était différent de 0, il satisferait à l'équation de dépendance intégrale de degré plus petit

$$x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} = 0.$$

THÉORÈME 3. — *Soient* A *un anneau local intègre intégralement clos,* L *une clôture algébrique du corps des fractions de* A, B *la clôture intégrale séparable de* A *dans* L, $\mathfrak{b}$ *un idéal maximal de* B *et* B' *l'anneau de décomposition de* $\mathfrak{b}$ *par rapport à* A.

La clôture hensélienne A^* *de* A *est isomorphe en tant que* A*-algèbre à l'anneau* $B'_{\mathfrak{b}'}$ *si* $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} \cap B'$ [4].

On commence par remarquer que le couple $(B, \mathfrak{b})$ satisfait à $(\bigstar)$. Il suffit, en effet, de montrer que tout polynôme irréductible

$X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$, où a_i appartient à B, a_n appartient à $\mathfrak{b}$ et a_{n-1} n'appartient pas à $\mathfrak{b}$, admet une racine dans $\mathfrak{b}$.

Or, si B_1 est la clôture intégrale de A dans L et si $\mathfrak{b}_1$ est un idéal maximal de B_1 de trace $\mathfrak{b}$ sur B, le couple $(B_1, \mathfrak{b}_1)$ satisfait évidemment à ($\bigstar$) puisque tout polynôme unitaire à coefficients dans B_1 est produit de facteurs du premier degré.

Le polynôme ci-dessus admet une racine dans $\mathfrak{b}_1$; cette racine est séparable sur B, donc, sur A, donc appartient à B et à $\mathfrak{b}$.

On remarque ensuite que si $(D, \mathfrak{d})$ est un sous-couple hensélien de $(B_{\mathfrak{b}}, \mathfrak{b} B_{\mathfrak{b}})$ contenant $(A, \mathfrak{a})$ et si D' est la clôture intégrale de A dans D, le couple $(D', \mathfrak{d}')$ où $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d} \cap D'$ satisfait à ($\bigstar$) et que $D = D'_{\mathfrak{d}'}$.

On est ainsi ramené à la recherche du plus petit sous-couple $(D', \mathfrak{d}')$ de $(B, \mathfrak{b})$ contenant $(A, \mathfrak{a})$, satisfaisant à ($\bigstar$) et tel que D' soit intégralement clos.

Or, un couple $(D', \mathfrak{d}')$, tel que D' soit intégralement clos, que $\mathfrak{d}'$ soit maximal et satisfaisant à ($\bigstar$), est caractérisé par le fait que toute extension entière intègre de D' n'a qu'un idéal maximal sur $\mathfrak{d}'$. Il suffit, évidemment, pour cela que $\mathfrak{b}$ soit le seul idéal maximal de B sur $\mathfrak{d}'$.

Le groupe de Galois de B/D' doit donc être un sous-groupe du groupe de décomposition de $\mathfrak{b}$ par rapport à A et le petit plus couple cherché est obtenu si l'on prend pour groupe de Galois le groupe de décomposition. C'est donc le couple $(B', \mathfrak{b}')$ de l'énoncé.

THÉORÈME 4. — *Soit A un anneau local intègre intégralement clos, Si A' est la clôture intégrale séparable de A dans A^0 et si $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}(A^0) \cap A'$, la clôture hensélienne A^* de A est $A'_{\mathfrak{m}'}$.*

Il suffit d'établir la preuve quand A est anneau local d'un anneau de type fini. Il suffit de montrer que toute extension entière séparable finie intégralement close B de A dans A^0 est contenue dans A^*.

Alors, $A^0 = \hat{A}$ complété usuel et $\hat{B} = B \underset{A}{\otimes} \hat{A}$ est le produit direct $\hat{B}_1 \times \ldots \times \hat{B}_n$ d'extensions entières intégralement closes de $\hat{A}$ car $\hat{B}_i = \hat{B}_{\mathfrak{p}_i}$ où $\mathfrak{p}_i$ est un idéal maximal de B. L'inclusion $B \to \hat{A}$ se prolonge par continuité en une application φ de $\hat{A}$-algèbres de $\hat{B}$ dans $\hat{A}$. Or, l'indécomposabilité de $\hat{A}$ montre que φ se factorise suivant

$$\begin{tikzcd} \hat{B} = \hat{B}_1 \times \ldots \times \hat{B}_n \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & \hat{A} \\ & \hat{B}_i \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

L'anneau $\hat{B}_i$ est intègre et ψ est surjectif en raison de la factorisation $\hat{A} \to \hat{B} \xrightarrow{\psi} \hat{A}$ de l'application identique de $\hat{A}$.

L'idéal ker (ψ) est premier. S'il était différent de (0), la dimension de Krull de $\hat{A}$ serait strictement inférieure à la dimension de Krull de $\hat{B}_i$, ce qui est absurde puisque $\hat{B}_i$ est extension entière de $\hat{A}$. Donc, ker $(\psi) = (0)$ et $\hat{B}_i = \hat{A}$. Donc, $B_{\mathfrak{p}_i}$ est une extension à la Nagata de A [caractérisation (iii)]. Comme A^* contient toutes les extensions à la Nagata de A, il contient $B_{\mathfrak{p}_i}$ et, *a fortiori*, B. D'où le résultat [6].

APPENDICE 1.

COMPLÉTÉ INDUCTIF D'UN COUPLE.

1. Commençons par démontrer le lemme utilisé dans la démonstration du théorème 1.

LEMME. — *Soit* $\varphi : (A, \mathfrak{a}) \to (B, \mathfrak{b})$ *un morphisme de* (Cou). *Il existe un morphisme* φ^0 *et un seul de* $(A^0, \mathfrak{a}^0)$ *dans* $(B^0, \mathfrak{b}^0)$ *prolongeant* φ.

On commence par remarquer qu'il est possible de trouver une famille filtrante croissante de sous-couples $(A_i, \mathfrak{a}_i)$ de $(A, \mathfrak{a})$ tels que A_i soit un sous-anneau de type fini de A, une famille filtrante croissante, avec le même ensemble d'indices I, de sous-couples $(B_i, \mathfrak{b}_i)$ de $(B, \mathfrak{b})$ tels que B_i soit un sous-anneau de type fini de B satisfaisant de plus aux conditions suivantes :

— A est la réunion des anneaux A_i;
— B est la réunion des anneaux B_i;
— Pour tout i de I, φ induit un morphisme de $(A_i, \mathfrak{a}_i)$ dans $(B_i, \mathfrak{b}_i)$.

On prend d'abord, par exemple, tous les sous-anneaux de type fini $(A_j)_{j\in J}$ de A et pour chaque J, $B_j = \varphi(A_j)$.

On prend, ensuite, les sous-anneaux de type fini $(B_k)_{k\in K}$ de B qui ne sont pas atteints par ce procédé et pour chaque k, le sous-anneau de type fini A_k de A engendré par les représentants éventuels dans A d'un système fini de générateurs contenant 1 de B_k. On prend, pour I la réunion de J et K.

Pour chaque i de I, φ induit un morphisme φ_i de $(A_i, \mathfrak{a}_i)$ dans $(B_i, \mathfrak{b}_i)$ qui se prolonge par continuité, *de manière unique*, en un morphisme $\hat{\varphi}_i$ de $(\hat{A}_i, \hat{\mathfrak{a}}_i)$ dans $(\hat{B}_i, \hat{\mathfrak{b}}_i)$. Le morphisme φ^0 cherché est la limite inductive des morphismes $\hat{\varphi}_i$.

---

(6) La démonstration de ce théorème est due à P. GABRIEL.
Il semble que ce résultat soit connu depuis longtemps dans le cas où A est anneau de valuation discrète. Nous ne connaissons pas la référence.

Si ψ^0 est un morphisme de $(A^0, \mathfrak{a}^0)$ dans $(B^0, \mathfrak{b}^0)$ prolongeant φ, il induit le même morphisme $\hat{\varphi}_i$ de $(\hat{A}_i, \hat{\mathfrak{a}}_i)$ dans $(\hat{B}_i, \hat{\mathfrak{b}}_i)$, et coïncide donc avec φ^0.

2. On peut *moduler* cette notion de complété inductif comme suit :

Soit $(A, \mathfrak{a})$ un couple. Soit E un A-module.

Nous désignerons par I l'ensemble des parties finies de A contenant 1, par A_i le sous-anneau de type fini de A engendré par i de I, par $(e_m)_{m \in M'}$ un système de générateurs de E sur A et par M l'ensemble des parties finies de M'.

On met sur l'ensemble produit $I \times M$ l'ordre produit qui en fait un ensemble filtrant à droite. Si μ appartient à M et i à I, on désigne par $E_{i,\mu}$ le A_i-module engendré par les éléments e_m où m parcourt μ.

Si $(i, \mu) \leqq (j, \nu)$, l'injection canonique $g_{(j,\nu),(i,\mu)}$ de $E_{i,\mu}$ $\mathfrak{a}_i$-adique dans $E_{j,\nu}$ $\mathfrak{a}_j$-adique est uniformément continue car :

$$(\mathfrak{a}_j^n E_{j,\nu}) \cap E_{i,\mu} = ((\mathfrak{a}_j^n E_{j,\nu}) \cap E_{j,\mu}) \cap E_{i,\mu},$$

et $E_{j,\mu}$ est un sous A_j-module de $E_{j,\nu}$ et l'on a, pour tout n, l'inclusion

$$(\mathfrak{a}_j^n E_{j,\mu}) \cap E_{i,\mu} \supset \mathfrak{a}_i^n E_{i,\mu}.$$

Elle se prolonge donc, par continuité, en un homomorphisme continu des complétés

$$\hat{g}_{(j,\nu),(i,\mu)} : \quad \hat{E}_{i,\mu} \to \hat{E}_{j,\nu}$$

avec les conditions naturelles de transitivité.

On peut donc définir le *complété inductif de E relativement à M'* par :

$$(E^0_{M'}, \hat{g}_{(i,\mu)}) = \varinjlim (\hat{E}_{i,\mu}, \hat{g}_{(j,\nu),(i,\mu)}).$$

C'est un A^0-module.

Des formules

$$\hat{E}_{i,\mu} = (E_{i,\mu}) \bigotimes_{A_i} \hat{A}_i,$$

on déduit

$$\hat{E}^0_{M'} = \varinjlim (E_{i,\mu} \bigotimes_{A_i} \hat{A}_i)$$

et, par commutation de $\varinjlim$ et de $\otimes$,

$$E^0_{M'} = \varinjlim (E_{i,\mu}) \bigotimes_{\varinjlim A_i} \varinjlim (\hat{A}_i),$$

soit

$$E^0_{M'} \simeq E \bigotimes_{A} A^0.$$

Cette formule montre l'indépendance de $E^0_{M'}$ vis-à-vis du choix de M'. Nous poserons donc

$$E^0 = E \bigotimes_A A^0 = E^0_{M'},$$

et nous appellerons E^0 le *complété inductif* du A-module E par rapport au couple $(A, \mathfrak{a})$. On peut prendre, en particulier, pour module E un idéal $\mathfrak{s}$ de A :

On considérera alors l'idéal $\mathfrak{s}_i = \mathfrak{s} \cap A_i$ de A_i, un système $(s_k)_{k \in \mu(i)}$ de générateurs de $\mathfrak{s}_i$ sur A_i et enfin la réunion M' des ensembles $\mu(i)$ quand i parcourt I.

Un raisonnement simple de cofinalité montre que, pour l'obtention de $\mathfrak{s}^0$, on peut se limiter aux $\hat{A}_i$-modules

$$\widehat{\mathfrak{s}_{i, \mu(i)}} = (\mathfrak{s}_i) \bigotimes_{A_i} \hat{A}_i.$$

On remarque que si $(A, \mathfrak{a})$ est un r-couple, on déduit de la A-fidèle platitude de A^0 et de la formule $\mathfrak{s}^0 = \mathfrak{s} \bigotimes_A A^0$, les formules $\mathfrak{s}^0 = \mathfrak{s}A^0$ et $(A/\mathfrak{s})^0 = A^0/\mathfrak{s}A^0$.

3. *Le lemme bilinéaire.* — On considère un couple $(A, \mathfrak{a}) = (B^0, \mathfrak{b}^0)$ où $(B, \mathfrak{b})$ est un couple. Nous allons montrer que ce couple satisfait à une forme plus générale du lemme bilinéaire de P. Samuel, c'est-à-dire une forme dans laquelle n'interviennent pas d'hypothèses de finitude pour les modules. Ceci montrera, également, que ce lemme est valable sans les hypothèses usuelles pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique de A; il n'y a, en effet, aucune raison pour que les topologies qui interviennent soient séparées ou que les modules soient complets.

Soient $(A, \mathfrak{a})$ le complété inductif d'un couple $(B, \mathfrak{b})$ E, F, G des A-modules $\mathfrak{f}$ une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, a, b_1, c_1 des éléments respectivement de E, F, G tels que :

$$a = \mathfrak{f}(b_1, c_1) \quad (\text{mod } \mathfrak{a}\, G), \tag{1}$$

$$G = \mathfrak{f}(b_1, F) + \mathfrak{f}(E, c_1). \tag{2}$$

Il existe, alors, $b \equiv b_1$ (mod $\mathfrak{a}E$), $c \equiv c_1$ (mod $\mathfrak{a}F$) tel que $a = \mathfrak{f}(b, c)$.

On choisit des parties finies $(e) = (e_j)$, $(f) = (f_k)$ de systèmes de générateurs de E et F sur A telles qu'on puisse écrire

$$b_1 = \sum \beta_{j,1} e_j,$$

$$c_1 = \sum \gamma_{k,1} f_k,$$

où $\beta_{j,1}$ et $\gamma_{j,1}$ appartiennent à A.

On choisit, ensuite, une partie finie $(g) = (g_m)$ d'un système fini de générateurs de G sur A de telle sorte qu'on puisse écrire

$$a = \sum a_m g_m,$$

où a_m appartient à A, et exprimer les éléments $\mathfrak{f}(e_j, f_k)$ comme combinaisons linéaires à coefficients dans A des g_m :

$$\mathfrak{f}(e_j, f_k) = \sum d_{m,j,k}\, g_m.$$

Soit i la partie finie de A contenant 1, les éléments $\beta_{j,1}$, $\gamma_{k,1}$, a_m, $d_{m,j,k}$ et δ_m de $\mathfrak{a}$ si $a - \mathfrak{f}(b_1, c_1) = \sum \delta_m g_m$.

Avec des notations évidentes, A est la réunion des anneaux $\hat{\varphi}_r(\hat{B}_r)$ où r désigne une partie finie de B et où $\hat{\varphi}_r$ est l'application canonique de $\hat{B}_r$ dans $B^0 = A$. Nous choisirons la partie finie r de B en sorte que i soit contenue dans $\hat{\varphi}_r(\hat{B}_r)$. Pour simplifier l'écriture, nous poserons $\hat{\varphi}_r(\hat{B}_r) = C$ et $\hat{\varphi}_r(\hat{\mathfrak{b}}_r) = \mathfrak{c}$, en sorte que $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cap C$.

Désignons par $E_{C,(e)}$, $F_{C,(f)}$, $G_{C,(g)}$ les C-modules engendrés par (e), (f), (g) respectivement, par $\mathfrak{f}_c$ la forme bilinéaire de $E_{C,(e)} \times F_{C,(f)}$ dans $G_{C,(g)}$ définie par la donnée des éléments $d_{m,j,k}$.

On a, évidemment,

$$(1') \qquad a \equiv \mathfrak{f}_C(b_1, c_1) \pmod{\mathfrak{c}\, G_{C,(g)}},$$

$$(2') \qquad G_{C,(g)} = \mathfrak{f}_C(b_1, F_{C,(f)}) + \mathfrak{f}_C(E_{C,(e)}, \mathfrak{c}_1).$$

Or, C est noethérien et complet dans la topologie $\mathfrak{c}$-adique. On peut donc appliquer le lemme bilinéaire classique. Il existe $b \equiv b_1 \pmod{\mathfrak{c}\, E_{C,(e)}}$ et $c \equiv c_1 \pmod{\mathfrak{c}\, F_{C,(f)}}$ tels que $a = \mathfrak{f}_C(b, c)$ et, donc, *a fortiori*, $a = \mathfrak{f}(b, c)$. Ceci achève la démonstration.

THÉORÈME. — *Si l'anneau local A est intègre intégralement clos d'idéal maximal $\mathfrak{a}$, le complété inductif A^0 de A est intègre intégralement clos.*

Nous appellerons anneau local géométrique (resp. arithmétique) un anneau local obtenu par localisation par rapport à un idéal premier d'un anneau de type fini intègre sur un corps ou sur l'anneau Z des entiers, (algèbre affine).

Nous rappelons les lemmes suivants avec des références :

LEMME 1. — *Soit B une algèbre affine sur un corps ou sur Z. La clôture intégrale $\bar{B}$ de B est un B-module de type fini* (M. NAGATA, [4], théorème 3).

LEMME 2. — *Le complété d'un anneau local géométrique ou arithmétique intègre intégralement clos est intègre intégralement clos* (*ibid.*, théorème 2).

LEMME 3. — *Soient A_1 et A_2 deux anneaux locaux géométriques (resp. arithmétiques) tels que A_2 domine A_1* (au sens classique, i. e. A_1 est sous-anneau de A_2 et $\mathfrak{m}(A_1) = \mathfrak{m}(A_2) \cap A_1$) *et que A_1 soit analytiquement irréductible. L'homomorphisme du complété $\hat{A}_1$ de A_1 dans le complété $\hat{A}_2$ de A_2 prolongeant l'injection de A_1 dans A_2 est injectif.*

Ce résultat est dû à O. ZARISKI dans la cas géométrique [10]. Nous en donnerons la démonstration dans le cas arithmétique en fin de démonstration. Des résultats plus généraux pourront être trouvés dans [3] (théorème 8, corollaire 2).

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME. — Soit B un sous-anneau de type fini de A. Puisque A est intégralement clos, sa clôture intégrale $\overline{B}$ est contenue dans A. En vertu du lemme 1, c'est un sous-anneau de type fini de A.

Pour la construction du complété inductif de A, nous pourrons donc nous limiter aux sous-anneaux de type fini $(B_i)_{i \in I}$ de A qui sont intégralement clos et si $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a} \cap B_i$ aux anneaux localisés $(A_i)_{i \in I}$ avec $A_i = (B_i)_{\mathfrak{b}_i}$.

En vertu du lemme 2, $\hat{A}_i$ est intègre intégralement clos. En vertu du lemme 3, si A_i est contenu dans A_j, l'homomorphisme canonique de $\hat{A}_i$ dans $\hat{A}_j$ est injectif.

On en déduit que l'anneau A^0 qui est limite inductive des anneaux $\hat{A}_i$ s'identifie à leur réunion. Il est donc intègre intégralement clos.

DÉMONSTRATION DU LEMME 3 DANS LE CAS ARITHMÉTIQUE. — Nous adoptons les notations de M. NAGATA (*opere citato*).

R désigne une algèbre affine de corps des fractions K sur un anneau de Dedekind I; $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de R que nous supposons tel que $\mathfrak{p} \cap I \neq (O)$ car sinon nous nous ramènerions au cas géométrique.

Soient $A = R_{\mathfrak{p}}$ un « spot » et $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}$. Nous posons

$$\dim_I(K) = s + 1$$

si s est le degré de transcendance de K sur I et

$$\dim_I(A) = \dim(A/\mathfrak{m} : I/\mathfrak{m} \cap I),$$

où $\dim(A/\mathfrak{m} : I/\mathfrak{m}\, I)$ désigne le degré de transcendance. On obtient alors la formule

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{ht}(\mathfrak{p}) + \dim_I A = \dim_I K,$$

où $\operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ désigne la hauteur de $\mathfrak{p}$.

On veut obtenir une valuation v de K, d'anneau K_v et d'idéal $\mathfrak{m}_v$, finie sur R et de centre $\mathfrak{p}$ sur R telle que $\dim_A v = \dim A - 1$ où $\dim A$ désigne la dimension de Krull de l'anneau local A et

$$\dim_v A = \dim (K_v/\mathfrak{m}_v : A/\mathfrak{m}).$$

Tenant compte de ce que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \dim A$, on doit donc avoir

$$(2) \qquad \dim (K_v/\mathfrak{m}_v : I/\mathfrak{m} \cap I) = \dim_I K - 1$$

déduite de (1).

La construction se fait comme dans Zariski-Samuel [11] pour le cas géométrique (chap. VI, § 14, théorème 35), par transformation monoïdale. Nous la reprenons littéralement.

Soit $w_1, \ldots, w_h$ une base de $\mathfrak{p}$. On considère les h anneaux R'_i :

$$R'_i = R[w_1/w_i, \ldots, w_h/w_i] \qquad (i = 1, \ldots, h)$$

en sorte que $\mathfrak{p}R'_i = R'_i w_i$.

On considère une valuation $\tilde{v}$ de K finie sur R et de centre $\mathfrak{p}$ dans R et l'on suppose que $\tilde{v}(w_1) = \min(\tilde{v}(w_i))$.

Il est alors clair que R'_1 est contenu dans l'anneau $K_{\tilde{v}}$ de la valuation $\tilde{v}$ et l'on en déduit que $R'_1 w_1 \cap R = \mathfrak{p}$.

Alors, w_1 est non inversible dans R'_1 et il existe au moins un idéal premier isolé $\mathfrak{p}'_1$ de R'_1 qui est tel que $\mathfrak{p}'_1 \cap R = \mathfrak{p}$ puisqu'une décomposition primaire de $R'_1 w_1$ se contracte en une décomposition primaire de $\mathfrak{p}$.

L'idéal $\mathfrak{p}'_1$ est de hauteur 1, en vertu du Hauptidealsatz. La formule

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_1) + \dim_I R'_{1\,\mathfrak{p}'_1} = \dim_I K$$

remplace alors le lemme de la page 91 de Zariski-Samuel, et donne la formule

$$\dim_I R'_{1\,\mathfrak{p}'_1} = \dim_I K - 1.$$

D'autre part, la transcription du lemme 2 du paragraphe 6, chapitre VI de Zariski-Samuel, montre que

$$\dim (K_v/\mathfrak{m}_v : I/I \cap \mathfrak{m}_v) \leqq \dim_I K - 1,$$

d'où le résultat cherché.

La démonstration de l'analogue du théorème 3 de l'article cité de O. Zariski se transpose :

Soient donc A_1 et A_2 deux « spots » sur I de corps des fractions K_1 et K_2 et tels que A_2 domine A_1.

On considère une valuation v_2 de K_2 dominant A_2 et telle que

$$\dim_{A_2}(v_2) = \dim A_2 - 1.$$

Il faut montrer que si v_1 est la valuation de K_1 induite par v_2, on a aussi

$$\dim_{A_1}(v_1) = \dim A_1 - 1.$$

Or, on obtient par transposition du corollaire 1, lemme 2, paragraphe 6, chap. VI de Zariski-Samuel, la formule

$$\dim(K_{v_2}/\mathfrak{m}_{v_2} : I/I \cap \mathfrak{m}_{v_2}) - \dim(K_{v_1}/\mathfrak{m}_{v_1} : I/I \cap \mathfrak{m}_{v_1}) \leq \dim_I K' - \dim_I K.$$

On en déduit

$$\dim(K_{v_1}/\mathfrak{m}_{v_1} : I/I \cap \mathfrak{m}_{v_1}) \geq \dim(K_{v_2}/\mathfrak{m}_{v_2} : I/I \cap \mathfrak{m}_{v_2}) + \dim_I K_1 - \dim_I K_2,$$

soit

$$\dim(K_{v_1}/\mathfrak{m}_{v_1} : I/I \cap \mathfrak{m}_{v_1}) \geq \dim_I K_1 - 1.$$

On déduit de l'inégalité contraire

$$\dim(K_{v_1}/\mathfrak{m}_{v_1} : I/I \cap \mathfrak{m}_{v_1}) = \dim_I K_1 - 1.$$

Rappelons comment s'achève alors la démonstration du lemme 3 :

On utilise le théorème suivant :

Soit A_1 un anneau local intègre de dimension r et d'idéal maximal $\mathfrak{m}(A_1)$. Soit v_1 une valuation de rang 1 *du corps des fractions de A tel que $\dim_{A_1}(v_1) = r - 1$ et de centre $\mathfrak{m}(A_1)$ sur A_1. Si A_1 est analytiquement irréductible, A_1 est un sous-espace de l'anneau K_{v_1} de la valuation v_1.*

On choisit alors les valuations v_1 et v_2 comme ci-dessus. Il est clair que K_{v_1} est un sous-espace topologique de K_{v_2}. En vertu du théorème, A_1 est un sous-espace de K_{v_1} et donc de K_{v_2}. Puisque $\mathfrak{m}(A_2)$ est contenu dans $\mathfrak{m}_{v_2}$, il en résulte *a fortiori* que des puissances suffisamment grandes de $\mathfrak{m}(A_2)$ se contractent dans A_1 en des puissances suffisamment grandes de $\mathfrak{m}(A_1)$. On en déduit que A_1 est sous-espace de A_2, d'où le lemme.

4. Théorème. — *Si l'anneau local A n'a pas d'élément nilpotent non nul, il en est de même de son complété inductif A^0.*

Il suffit de démontrer ce résultat dans le cas où A est localisé d'un anneau de type fini :

En effet, soit x un élément nilpotent de A^0, il existe un localisé A_0 d'un sous-anneau de type fini de A tel que x appartienne à $\hat{f}_0(\hat{A}_0)$ si $\hat{f}_0$ est l'application canonique de $\hat{A}_0$ dans A^0. De $x^n = 0$, on déduit, pour un représentant y de x dans $\hat{A}^0$, $\hat{f}_0(y^n) = 0$. Il existe donc un localisé B_0 d'un sous-anneau de type fini de A dominant A_0 (au sens classique) tel que $\hat{g}(y^n) = 0$ où $\hat{g}$ est l'homomorphisme prolongeant aux complétés l'injection de A_0 dans B_0. Si l'on admet que $\hat{B}_0$ n'a pas d'élément nilpotent non nul, on en déduit $\hat{g}(y) = 0$, d'où $\hat{f}_0(y) = x = 0$.

La propriété est classique dans le cas où A est localisé d'un anneau de type fini : en effet, dire que A n'a pas d'élément nilpotent, c'est dire que l'idéal (O) est intersection d'un nombre fini d'idéaux premiers $\mathfrak{p}_i$. L'idéal (O) de $\hat{A}$ est alors intersection des idéaux $\mathfrak{p}_i \hat{A}$, en raison de la platitude de $\hat{A}$. Or, chaque idéal $\mathfrak{p}_i \hat{A}$ est intersection d'idéaux premiers (non ramification analytique).

APPENDICE 2.

Nous nous proposons d'indiquer brièvement un autre problème universel, d'ailleurs étroitement lié à celui rencontré à propos de la clôture hensélienne et que M. NAGATA traitait, dans un cas particulier, dans (1).

Au lieu de considérer la catégorie (Hens) des couples henséliens, on considère la catégorie (f Hens) dont les objets sont les couples faiblement henséliens, c'est-à-dire les couples $(A, \mathfrak{a})$ satisfaisant à $(\bigstar)$ et $(\bigstar\bigstar)$.

Considérons un morphisme dominant $\varphi : (A, \mathfrak{a}) \to (B, \mathfrak{b})$ à valeurs dans un couple faiblement hensélien. L'intersection des couples faiblement henséliens contenant $(\varphi(A), \varphi(\mathfrak{a}))$ et contenus dans $(B, \mathfrak{b})$ est un couple faiblement hensélien qu'on appellera *clôture faiblement hensélienne* de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(B, \mathfrak{b})$.

Cette clôture faiblement hensélienne est le couple $(A^{(\omega)}, \mathfrak{a}^{(\omega)})$ qui apparaît dans la démonstration de la proposition 3.

On rappelle que l'*anneau $A^{(\omega)}$ est entier sur l'anneau A* et que, bien sûr, le morphisme canonique de $(A, \mathfrak{a})$ dans la clôture faiblement hensélienne de $(A, \mathfrak{a})$ dans $(B, \mathfrak{b})$ est un quasi-isomorphisme.

Les propriétés de cette clôture faiblement hensélienne sont parallèles à celles de la clôture hensélienne. Il suffirait, par exemple, de transcrire la proposition 4 en supposant toutefois que $(B, \mathfrak{b})$ est hensélien, et non pas faiblement hensélien.

On appellera *clôture faiblement hensélienne* du couple $(A, \mathfrak{a})$ la clôture faiblement hensélienne de $(A, \mathfrak{a})$ dans le complété inductif $(A^0, \mathfrak{a}^0)$, et on la notera $(A^f, \mathfrak{a}^f)$. On obtient l'analogue du théorème 1 :

$(A^f, \mathfrak{a}^f)$ *est un couple faiblement hensélien libre au-dessus de* $(A, \mathfrak{a})$.

Avec une démonstration identique, compte tenu du fait que puisque $(A^0, \mathfrak{a}^0)$ est hensélien, on peut appliquer l'analogue de la proposition 4 pour passer au quotient. Ceci permet de définir un *foncteur adjoint au foncteur inclusion de* (f Hens) *dans* (Cou).

On obtient des propriétés analogues de commutation avec les limites inductives.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre commutative*, Chap. 1-2, 3-4, Paris, Hermann, 1961 (*Act. scient. et ind.*, 1290 et 1293; *Éléments de Mathématique*, 17 et 18).

[2] GROTHENDIEK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). — *Éléments de géométrie algébrique*, III, Paris, Presses universitaires de France, 1961 (Institut des Hautes Études scientifiques, Publications mathématiques, n° 11).

[3] JAFFARD (Paul). — Valuation d'un anneau noethérien et théorie de la dimension, *Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres*, t. 13, 1959-1960, n° 12, 21 pages.

[4] NAGATA (Masayoshi). — On the theory of henselian rings. I., *Nagoya math. J.*, t. 5, 1953, p. 45-57.

[5] NAGATA (Masayoshi). — On the theory of henselian rings, II., *Nagoya math. J.*, t. 7, 1954, p. 1-19.

[6] NAGATA (Masayoshi). — On the theory of henselian rings, IV., *Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto*, Série A, *Mathematics*, t. 32, 1960, p. 93-101.

[7] NAGATA (Masayoshi). — A general theory of algebraic geometry over Dedekind domains, *I.*, *Amer. J. of Math.*, t. 78, 1956, p. 78-116.

[8] SAMUEL (Pierre). — Remarque sur le lemme de Hensel, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* [1954, Amsterdam]; vol. 2, p. 63-64, Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1954.

[9] SERRE (Jean-Pierre). — *Groupes algébriques et théorie du corps de classes*, Paris, Collège de France, 1957 (Cours du Collège de France, multigraphié).

[10] ZARISKI (Oscar). — A simple analytical proof of a fundamental property of birational transformation, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A.*, t. 35, 1949, p. 62-66.

[11] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). — *Commutative algebra*, I and II, Princeton, Toronto, London, Van Nostrand Company, 1958-1960.

(Manuscrit reçu le 14 septembre 1962.)

Jean-Pierre LAFON,
M. Conf. Fac. Sc. Montpellier,
7, rue de l'Imprimerie,
Montpellier (Hérault).