Bulletin de la S. M. F.

Jean Leray

# Uniformisation de la solution du problème linéaire analytique de Cauchy près de la variété qui porte les données de Cauchy. (Problème de Cauchy. I)

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 85 (1957), p. 389-429

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__389_0>

*Bull. Soc. Math. France*,
85, 1957, p. 389 à 429.

# UNIFORMISATION DE LA SOLUTION DU PROBLÈME LINÉAIRE ANALYTIQUE DE CAUCHY PRÈS DE LA VARIÉTÉ QUI PORTE LES DONNÉES DE CAUCHY

## (Problème de Cauchy I);

PAR

JEAN LERAY

(Paris).

## INTRODUCTION.

Nous nous proposons d'étudier globalement *le problème linéaire de Cauchy* dans le cas complexe, puis dans le cas réel et hyperbolique, en supposant les données *analytiques*. Notre principal but est la proposition suivante : *les singularités de la solution appartiennent aux caractéristiques issues des singularités des données ou tangentes à la variété qui porte les données de Cauchy*. C'est l'extension aux équations aux dérivées partielles de la propriété fondamentale des solutions des équations différentielles ordinaires, linéaires et analytiques : leurs singularités sont des singularités des données.

Le sens de la proposition précédente devra être précisé; sa démonstration sera longue, mais révélera diverses propriétés intéressantes du problème de Cauchy; elle nécessitera plusieurs articles.

Ce *premier article* étudie la solution $u(x)$ du problème de Cauchy près de la variété $S$ qui porte les données de Cauchy. On suppose que $S$ n'est pas caractéristique. Si $S$ n'est caractéristique en aucun de ses points, alors $u(x)$ est holomorphe près de $S$, vu le théorème de Cauchy-Kowalewski, et nos théorèmes n'énoncent rien de neuf. Mais nous admettons que $S$ soit caractéristique en certains de ses points : il s'agit d'*un cas sans analogue* en théorie des équations différentielles ordinaires; en théorie des équations aux dérivées partielles ce cas joue un rôle *fondamental*, parce qu'il est celui où $u(x)$ présente les singularités les plus simples : $u(x)$ peut être *uniformisé* (théorèmes 1, 2 et 3, n° 5) et, sauf dans des cas *exceptionnels*, est *algébroïde* (théorèmes 4 et 5, nos 6 et 7).

Nous nous limitons au cas d'une équation : l'extension à un système d'équations est banale.

1. **Notations.** — Soit $X$ une variété analytique complexe, de dimension complexe $l$; $x$ désigne un de ses points, dont les coordonnées locales sont notées $(x_1, \ldots, x_l)$. Soit $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel holomorphe d'ordre $m$ :

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{j_1+\ldots+j_l=j\leq m} a_{j_1\ldots j_l}(x) \frac{\partial^j}{\partial x_1^{j_1}\ldots\partial x_l^{j_l}},$$

les $a_{j_1\ldots j_l}(x)$ étant des fonctions holomorphes, à valeurs numériques complexes. Soit $S$ une sous-variété analytique complexe régulière, de dimension complexe $l-1$ : localement $S$ a pour équation

$$S:\quad s(x) = 0,$$

$s(x)$ étant une fonction holomorphe, à valeurs numériques complexes, telle que $s_x \neq 0$ sur $S$;

$$s_x = \frac{\partial s}{\partial x}$$

désigne le covecteur (c'est-à-dire vecteur covariant) de composantes

$$s_{x_1} = \frac{\partial s}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad s_{x_l} = \frac{\partial s}{\partial x_l}.$$

On suppose que $S$ n'est pas une variété caractéristique (n° 2), c'est-à-dire que $S$ a des points non caractéristiques. Soit $b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel d'ordre 1, holomorphe près de $S$ et pour lequel $S$ n'est caractéristique en aucun de ses points. Soient $v(x)$ et $w_j(x)$ des fonctions, à valeurs numériques complexes, respectivement holomorphes sur $X$ et sur $S$; $j = 0, \ldots, m-1$.

*Le problème de Cauchy* s'énonce

$$(1.1)\quad \begin{cases} a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = v(x); \\ u(x) = w_0(x), \qquad b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = w_1(x), \qquad \ldots, \\ \left[b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^{m-1} u(x) = w_{m-1}(x) \quad \text{sur } S. \end{cases}$$

Son inconnue $u(x)$ est une fonction, à valeurs numériques complexes, holomorphe près des points non caractéristiques de $S$; notre but est d'étudier, près de $S$, son prolongement analytique.

Il est évident qu'on peut modifier arbitrairement le choix de $b\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, à condition de modifier convenablement les choix des $w_l(x)$.

2. **Rappel de la définition des caractéristiques et bicaractéristiques de l'opérateur** $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$. — Un élément de contact d'ordre 1 de $X$ a les coordonnées homogènes $(x, p)$ : $p$ est un covecteur d'origine $x$, défini au produit près par un nombre complexe. La variété $S$, d'équation $s(x) = 0$, possède l'élément de contact $(x, p)$ si

$$s(x) = 0, \qquad p \text{ est parallèle à } s_x.$$

Un vecteur $dx$ d'origine $x$ appartient à cet élément de contact si

$$p.dx = 0,$$
$$p.dx = p_1\,dx_1 + \ldots + p_l\,dx_l$$

désignant le produit scalaire d'un vecteur $dx$ et d'un covecteur $p$. Notons $h(x, p)$ le polynome en $p$, *homogène* de degré $m$,

$$(2.1) \qquad h(x, p) = \sum_{j_1+\ldots+j_l=m} a_{j_1\ldots j_l}(x)\,p_1^{j_1}\ldots p_l^{j_l};$$

l'élément de contact $(x, p)$ est dit *caractéristique* pour $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ si $h(x, p) = 0$. Un point $x$ de $S$ est dit caractéristique si l'élément de contact de $S$ en $x$ est caractéristique, c'est-à-dire si

$$(2.2) \qquad h(x, s_x) = 0.$$

$S$ est dite *variété caractéristique* si tous ses éléments de contact sont caractéristiques, c'est-à-dire si (2.2) a lieu quand $s(x) = 0$.

Les bandes caractéristiques de l'équation du premier ordre (2.2) des variétés caractéristiques sont nommées bandes bicaractéristiques : *une bande bicaractéristique* est une famille d'éléments de contact ayant des coordonnées vérifiant le système différentiel

$$\frac{dx_i}{h_{p_i}} = -\frac{dp_j}{h_{x_j}}, \qquad h(x, p) = 0$$

dont l'une des équations différentielles est superflue. On choisit le paramètre complexe $t$, dont dépendent ces éléments de contact, tel que le système précédent s'écrive

$$(2.3)\quad dx = h_p(x, p)\,dt, \qquad dp = -h_x(x, p)\,dt, \qquad h(x, p) = 0.$$

L'élément de contact de paramètre $t = 0$ s'appelle l'origine de la bande; on dit que la bande en est *issue*.

Le lieu du point $x(t)$ s'appelle *courbe bicaractéristique.*

La direction $h_p(x, p)$ associée par (2.3) à l'élément de contact caractéristique $(x, p)$ s'appelle *direction bicaractéristique* de cet élément; elle lui appartient, vu la formule d'Euler relative aux fonctions homogènes :

$$(2.4)\qquad p.h_p(x, p) = 0.$$

Toutes ces notions sont invariantes relativement aux changements de coordonnées analytiques.

La théorie des équations aux dérivées partielles, non linéaires, du premier ordre fournit les trois théorèmes classiques que voici :

THÉORÈME. — La bande bicaractéristique issue d'un élément de contact d'une variété caractéristique appartient à cette variété.

Ce théorème est une conséquence aisée des définitions (2.2) et (2.3).

THÉORÈME. — $dp.dx$ est une forme invariante pour le système différentiel (2.3) des bicaractéristiques.

*Voir* [2], nos 11 et 79.

Ce théorème fournit la réciproque du précédent :

THÉORÈME. — Nommons *caractéristique* l'ensemble des éléments de contact $(x, p)$ des bandes caractéristiques issues d'une famille analytique d'éléments de contact $(x(0), p(0))$ vérifiant

$$p(0).dx(0) = 0;$$

sur toute caractéristique

$$p.dx = 0.$$

Donc, là où les points $x$ d'une caractéristique constituent une variété analytique régulière de dimension complexe $l-1$, cette variété a pour élément de contact $(x, p)$ et est donc une variété caractéristique.

En particulier les bicaractéristiques issues d'un point donné $x$ constituent une caractéristique; on la nomme *conoïde caractéristique de sommet* $x$.

Nous noterons $T$ l'ensemble des points caractéristiques de $S$ :

$$(2.5)\qquad T:\quad s(x) = 0, \qquad h(x, s_x) = 0.$$

Nous noterons $K$ *la caractéristique tangente à* $S$, c'est-à-dire le lieu des courbes bicaractéristiques issues des éléments de contact caractéristiques de $S$.

**3. Les voisinages de $S$ au-dessus de $X$.** — Une *homéomorphie ana-*

*lytique* de deux variétés analytiques complexes est une correspondance biunivoque entre les points de ces deux variétés telle que les coordonnées de l'un de ces points soient des fonctions holomorphes des coordonnées de l'autre : ces deux variétés doivent avoir *même dimension; le déterminant fonctionnel de la correspondance ne peut s'annuler*, vu un théorème classique : [1] (chap. VIII, § 10, p. 179).

DÉFINITION 3.1. — Un *voisinage de $S$ au-dessus de $X$* est constitué par :

1° une variété analytique complexe de dimension égale à la dimension $l$ de $X$; on la note $\Phi$;

2° une sous-variété analytique complexe régulière de $\Phi$, ayant la dimension $l-1$ ; on la note $\Sigma$;

3° une application, de $\Phi$ dans $X$, appelée projection, notée $x(\varphi)$ et ayant les propriétés suivantes :

$x(\varphi)$ est holomorphe;

la restriction de $x(\varphi)$ à $\Sigma$ est une homéomorphie analytique de $\Sigma$ sur $S$;

le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(x)}{D(\varphi)}$ diffère de o en certains points de $\Sigma$.

Si ce déterminant s'annule, c'est donc sur un ensemble analytique $\Delta$, de dimension $l-1$, distinct de $\Sigma$. La projection de $\Delta$ sur $X$ est notée $x(\Delta)$.

*Nous identifions $S$ à $\Sigma$, $\varphi \in \Sigma$ à $x(\varphi) \in S$*; nous disons que $\Phi$ *est ramifié au-dessus de $x(\Delta)$*.

NOTE. — Soit $\Phi$ un voisinage de $S$ au-dessus de $X$; sa projection $x(\Phi)$ peut ne pas être un voisinage de $S$ : *voir* au n° 30 un exemple très simple.

Soit $\Phi'$ un second voisinage de $S$ au-dessus de $X$; il existe au plus une homéomorphie analytique de $\Phi$ et $\Phi'$ appliquant $S$ sur elle-même et telle que

$$x(\varphi) = x(\varphi');$$

cette relation définit en effet une homéomorphie analytique d'un voisinage de $y$ dans $\Phi$ sur un voisinage de $y$ dans $\Phi'$, quand $y \in S$, $y \notin \Delta$, $y \notin \Delta'$. *Si cette homéomorphie analytique de $\Phi$ et $\Phi'$ existe*, nous convenons qu'*elle identifie $\Phi$ à $\Phi'$*; elle identifie alors $\Delta$ à $\Delta'$, $x(\varphi)$ à $x(\varphi')$.

DÉFINITION 3.2. — Si $\Phi'$ est un voisinage de $S$ dans $\Phi$ et si nous choisissons pour projection de $\Phi'$ dans $X$ la restriction à $\Phi'$ de celle de $\Phi$, alors nous disons que le voisinage caractéristique $\Phi'$ appartient à $\Phi$ et nous écrivons

$$\Phi' \subset \Phi.$$

DÉFINITION 3.3. — Étant donnée une fonction $u[\varphi]$, nous nommons *projection de $u[\varphi]$* la fonction $u(x)$ qui résulte de l'élimination de $\varphi$ entre $u[\varphi]$ et $x(\varphi)$.

En général $u(x)$ est multiforme.

Pour exprimer qu'une fonction $u(x)$ est la projection d'une fonction $u[\varphi]$ holomorphe sur $\Phi$, nous dirons : $u(x)$ *est holomorphe sur* $\Phi$.

**4. Les voisinages caractéristiques de** $S$. — Soit $g(x, p)$ une fonction, à valeurs numériques complexes, vérifiant les conditions suivantes :

1° $g(x, p)$ est, par rapport à $p$, homogène de degré 1 ;

2° $\dfrac{g(x, p)}{h(x, p)}$ est holomorphe près de chaque élément de contact de $S$ et ne s'annule en aucun d'eux.

Par exemple, on choisit $b\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ homogène en $\dfrac{\partial}{\partial x}$, puis

$$g(x, p) = h(x, p)[b(x, p)]^{1-m}.$$

Soit $t$ un paramètre numérique complexe; nommons *équation différentielle de la projection caractéristique* le système différentiel ordinaire

$$(4.1) \qquad dx = g_p(x, p)\, dt, \qquad dp = -g_x(x, p)\, dt.$$

Le n° 22 établira que ce système admet *l'intégrale première* $g(x, p)$ et *la forme différentielle invariante* $p.dx - g\,dt$. C'est d'ailleurs le seul système laissant cette forme invariante.

Les solutions de (4.1) vérifiant $g(x, p) = 0$ s'identifient aux bicaractéristiques, c'est-à-dire aux solutions de (2.3), par un changement du paramètre $t$; en effet $g = 0$ implique que

$$h = 0 \qquad (h_p, h_x) \text{ est proportionnel à } (g_p, g_x).$$

Notons $x(t, y)$, $p(t, y)$ la solution de (4.1) issue de l'élément de contact $(y, s_y)$ de $S$. On a $g(x, p) = 0$ si $y \in T$. Modifier le choix de l'équation locale $s(y) = 0$ a pour seul effet de multiplier $p(t, y)$ par une fonction de $y$; $x(t, y)$ n'est pas altéré. Nous nommerons $x(t, y)$ *projection caractéristique*; elle est définie et holomorphe pour

$$(4.2) \qquad y \in S, \qquad |t| < \rho(y),$$

$\rho(y)$ étant une fonction positive, continue de $y$.

Notons $\varphi$ tout couple $(t, y)$ vérifiant (4.2) ou une condition plus stricte du même type; soit $\Phi$ l'ensemble des $\varphi$; $x(t, y)$ est noté $x(\varphi)$.

$\Phi$ est une variété analytique complexe; la projection caractéristique $x(\varphi)$ la projette sur $X$, en appliquant identiquement $S$ sur lui-même; $\dfrac{D(x)}{D(\varphi)} \neq 0$ en les points $y$ de $S$ où $\dfrac{dx}{dt} = g_p(y, s_y)$ n'est pas parallèle à $S$, c'est-à-dire sur $S - T$. Donc $\Phi$ est un voisinage de $S$ *au-dessus* de $X$.

Définition 4. — Un tel voisinage de $S$ au-dessus de $X$ sera nommé *voisinage caractéristique de* $S$.

Le théorème 2 (n° 5) justifiera cette dénomination.

**5. Uniformisation de la solution du problème de Cauchy.** — Le principal théorème de cet article est *l'uniformisation* que voici de $u(x)$ :

THÉORÈME 1. — *La solution $u(x)$ du problème de Cauchy* (1.1) *et ses dérivées d'ordre $< m$ sont holomorphes sur un voisinage caractéristique $\Phi$ de $S$. Ce voisinage $\Phi$ ne dépend que de $X$, $S$, et $h$.*

Ce théorème sera établi au nº 25.

Le théorème suivant justifie la dénomination « voisinage caractéristique » en prouvant qu'un tel voisinage est *ramifié au-dessus de la caractéristique $K$* tangente à $S$ :

THÉORÈME 2. — *Soit $\Phi$ un voisinage caractéristique de $S$. Près de $S$, $\frac{1}{h(y, s_y)} \frac{D(x)}{D(t, y)}$ est une fonction holomorphe ne s'annulant pas. La variété de $\Phi$ où $\frac{D(x)}{D(\varphi)} = 0$ est donc l'ensemble $\Delta$ des points $\varphi = (t, y)$ tels que $y \in T$.*

*Fibrons $\Delta$ par les fibres*

$$|t| < \rho(y), \qquad y = \text{Cte};$$

*$T$ sera donc la base de cette fibration. Vu le nº 4, chaque fibre de $\Delta$ se projette dans une bicaractéristique tangente à $S$.*

*$\Delta$ se projette donc dans la caractéristique $K$ tangente à $S$.*

Ce théorème sera établi au nº 23.

Bien que $S$ ait plusieurs voisinages caractéristiques, le théorème 1 *n'est pas ambigu*, vu le

THÉORÈME 3. — *Soient $\Phi$ et $\Phi'$ deux voisinages caractéristiques de $S$; il en existe un troisième $\Phi''$ tel que*

$$\Phi'' \subset \Phi, \qquad \Phi'' \subset \Phi'.$$

*Vu le nº 4, chaque fibre de $\Delta''$ appartient à une fibre de $\Delta$ et à une fibre de $\Delta'$;*

$$\Delta'' \subset \Delta, \qquad \Delta'' \subset \Delta'.$$

Ce théorème sera établi au nº 25.

**6. Caractère algébroïde de $u(x)$ en les points ordinaires de $S$.** — Le nº 30 montrera que la projection d'un voisinage caractéristique de $S$ peut ne pas être un voisinage de $S$, que la projection caractéristique $x(\varphi)$ peut avoir une infinité d'inverses, que la solution du problème de Cauchy peut ne pas être définie sur tout un voisinage de $S$ et avoir une infinité de déterminations; mais le théorème que voici montre que de telles singularités sont exceptionnelles.

Nous nommons *exceptionnels* des points $x$ de $S$ tels que *le conoïde caractéristique de sommet $x$ touche $S$ le long d'une courbe passant par $x$;* plus précisément :

**Définition 6.** — Le point $x$ de $S$ est *exceptionnel* quand il possède un élément de contact caractéristique $(x, p(t))$, fonction holomorphe de $t$, tel que $S$ possède l'élément de contact de paramètre $t$ de la bicaractéristique issue de $(x, p(t))$; $t$ est voisin de o.

**Exemple 1.** — Le point $x$ de $S$ est exceptionnel si, en ce point, $h(x, p) = 0$ implique $h_p(x, p) = 0$. En effet toute courbe bicaractéristique issue de $x$ se réduit à $x$.

**Exemple 2.** — Si $S$ possède une bande bicaractéristique, tous les points de cette bande sont exceptionnels.

En général, $S$ n'a pas de point exceptionnel.

Nous nommons *ordinaires* les points de $S$ non exceptionnels; en ces points, la projection caractéristique est *algébroïde* :

**Théorème 4.** — *Remplaçons $X$ par un voisinage suffisamment petit d'un point ordinaire de $S$. Alors :*

1° *$K$ est un ensemble analytique;* $\dim K = \dim X - 1$; c'est-à-dire : $K$ peut être défini par une seule équation : $k(x) = 0$ ($k$ holomorphe).

2° *$\Phi$ est un revêtement fini de $X$, ramifié au-dessus de $K$ :* chaque point $x$ de $X - K$ est la projection d'un nombre constant, fini, non nul de points de $\Phi$, toujours distincts, fonctions holomorphes multiformes de $x$. Ce nombre est appelé le degré de la ramification.

3° *Une fonction $u(x)$ holomorphe sur $\Phi$ est une fonction algébroïde de $x$, dont le degré est égal au degré de ramification;* c'est-à-dire : il existe un polynome en $u$, $P[u, x]$, à coefficient principal égal à 1, à coefficients fonctions holomorphes de $x$, de degré en $u$ égal au degré de ramification et tel que

$$P[u(x), x] = 0.$$

Ce théorème sera établi au n° 28.

Les deux types les plus simples de points ordinaires sont ceux que nous étudierons d'abord, aux paragraphes 1 et 2 :

1° Les points non caractéristiques de $S$, où le degré de ramification est 1;

2° les points caractéristiques réguliers (n° 7), où ce degré est 2.

**7. Les points caractéristiques réguliers de $S$.** — Rappelons que l'ensemble $T$ des points caractéristiques de $S$ a pour équations (2.5) :

$$T: \quad s(x) = 0, \qquad h(x, s_x) = 0.$$

Un points *caractéristique* $x$ de $S$ est dit *régulier* quand *sa direction bicaractéristique* $h_p(x, s_x)$, qui appartient à $S$ (n° 2), *n'appartient pas à* $T$. Plus précisément :

Définition 7.1. — Le point *caractéristique* $x$ de $S$ est dit *régulicr* quand en ce point la variété d'équation $h(x, s_x) = 0$ est régulière et ne contient pas la direction caractéristique $h_p(x, s_x)$.

Autrement dit : *l'ensemble* $U$ *des points caractéristiques irréguliers* (c'est-à-dire non réguliers) de $S$ a pour équations :

$$U: \begin{cases} s(x) = 0, \qquad h(x, s_x) = 0, \\ \left[\sum_i h_{x_i} h_{p_i} + \sum_{ij} s_{x_i x_j} h_{p_i} h_{p_j}\right]_{p=s_x} = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Le n° 12 prouvera que la définition précédente équivaut à la suivante :

Définition. 7.2. — Le point *caractéristique* $x$ de $S$ est *irrégulier* quand la courbe bicaractéristique issue de l'élément de contact $(x, s_x)$ de $S$ est osculatrice à $S$ en $x$.

En un tel point, *le degré de ramification est* 2 ; plus précisément, les n°ˢ 13, 14 et 24 prouveront le

Théorème 5. — *Remplaçons* $X$ *par un voisinage suffisamment petit d'un point caractéristique régulier de* $S$. *Alors :*

1° $T$ *est une variété analytique complexe, régulière, de dimension* $l - 2$.

2° $K$ *est une variété analytique complexe, régulière, de dimension* $l - 1$, *ayant avec* $S$, *le long de* $T$ *un contact d'ordre* 1 *exactement. On peut donc définir* $K$ *par une équation*

$$k(x) = 0,$$

$k(x)$ *étant une fonction holomorphe, à valeurs numériques complexes, telle que* $k_x \neq 0$.

3° *Un voisinage caractéristique de* $S$ *est constitué par la variété* $\Phi$ *ayant dans l'espace de coordonnées* $(x_0, x_1, \ldots, x_l)$ *l'équation*

$$\Phi: \quad x_0^2 = k(x), \qquad \text{où} \qquad x = (x_1, \ldots, x_l);$$

*la projection de* $(x_0, x_1, \ldots, x_l) \in \Phi$ *est* $(x_1, \ldots, x_l) \in X$ ; $\Delta$ *est la variété régulière de* $\Phi$ *d'équations*

$$\Delta: \quad x_0 = k(x) = 0;$$

*les points de* $\Phi$ *se projetant sur* $S$ *constituent deux variétés régulières, dont l'une* $\Sigma$ *est celle qu'on identifie à* $S$.

4° *Une fonction* $u(x)$ *holomorphe sur* $\Phi$ *est une fonction à deux déter-*

*minations, du type*

$$u(x) = u_1(x) \pm \sqrt{k(x)}\, u_2(x),$$

*$u_1(x)$ et $u_2(x)$ étant holomorphes.*

**8. Sommaire.** — Le chapitre 1 étudie le cas ou $S$ n'a pas de point caractéristique. C'est celui qu'ont traité Cauchy et M[me] Kowalewski; Schauder [7] et Petrowsky [6] ont complété leurs conclusions en prouvant que la solution $u(x)$ du problème de Cauchy est holomorphe dans un domaine dépendant seulement de $X$, $S$, $h$; leur méthode reste celle des fonctions majorantes de Cauchy. Nous reproduisons ce raisonnement de Schauder et Petrowsky en le précisant, pour en déduire « le procédé de la variété mobile »; c'est un procédé de prolongement analytique assez puissant, sauf au voisinage des singularités de la solution.

Le chapitre 2 étudie le voisinage d'un point caractéristique régulier de $S$ : on remplace $X$ par un voisinage suffisamment petit de ce point, qu'on prend pour origine. Le procédé de la variété mobile montre la convergence d'un développement en série de $u(x)$ sur une partie du voisinage de l'origine; les termes de cette série sont solutions de problèmes de Cauchy très simples, qu'on résout par quadratures; ils sont holomorphes sur un voisinage caractéristique $\Phi$ de $S$; plus précisément : $u(x)$ est la projection d'une fonction $u[\varphi]$, somme d'une série, uniformément convergente sur l'arête d'un polycylindre centré en o, de fonctions holomorphes sur tout ce polycylindre; la propriété du maximum du module des fonctions holomorphes prouve que cette série converge sur tout ce polycylindre, où $u[\varphi]$ est donc défini et holomorphe : $u(x)$ est la projection d'une fonction $u[\varphi]$ holomorphe en o; le théorème 5 est ainsi étabti.

Le chapitre 3 énonce les conclusions des chapitres 1 et 2 comme suit : soit $\Phi$ un voisinage caractéristique de $S$; $u(x)$ est holomorphe sur $\Phi$ au voisinage de $S - U$. Donc $u(x)$ est holomorphe sur $\Phi$, au voisinage de $S$, dans le cas général où $\dim U \leqq \dim X - 3$. Le fait que deux voisinages caractéristiques de $S$ sont identiques près de $S$ résulte de la définition des voisinages caractéristiques qu'on emploie; mais cette définition suppose $\dim U \leqq \dim X - 3$ et n'est pas la définition 4. On montre son équivalence à cette définition 4, ce qui établit l'existence de voisinages caractéristiques de $S$ et permet de supprimer la restriction : $\dim U \leqq \dim X - 3$ : les théorèmes 1, 2 et 3 sont établis. L'emploi de la définition 4 repose sur l'intégrale première et la forme différentielle invariante de l'équation différentielle des projections caractéristiques.

Au chapitre 4 cette même forme invariante permet d'étudier, près d'un point ordinaire de $S$, la caractéristique $K$ tangente à $S$, la projection caractéristique et la projection d'une fonction holomorphe sur un voisinage caractéristique de $S$ : le théorème 4 est établi.

Le chapitre 5 précise les particularités qui se présentent quand l'ordre de $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ est $m = 1$; en utilisant ces particularités, il donne un exemple très simple de point exceptionnel n'ayant pas les propriétés des points ordinaires qu'énonce le théorème 4.

## Chapitre 1. — Le problème de Cauchy en un point non caractéristique de $S$.

9. **Le complément de Schauder-Petrowsky au théorème de Cauchy-Kowalewski.** — Le théorème de Cauchy-Kowalewsky a été complété par J. Schauder [7] (p. 229), dans le cas des équations linéaires d'ordre 2, puis par I. Petrowsky [6] (p. 840) dans le cas des équations linéaires d'ordre $m$ quelconque; précisons encore leurs conclusions :

Lemme 9.1. — Particularisons comme suit le problème de Cauchy (1.1) : $\mathcal{X}$ contient le polycylindre de centre $x = 0$ :

$$|x_j| \leqq R \qquad (j = 1, \ldots, l);$$

$S$ contient le polycylindre

$$x_1 = 0, \qquad |x_j| \leqq r;$$
$$s(x) = x_1, \qquad s_x = (1, 0, \ldots, 0).$$

Alors *la solution* $u(x)$ de ce problème *est holomorphe sur la boule*

$$\|x\| < \frac{1}{12lm} q \inf(qR, r) \tag{9.1}$$

où

$$q = |h(0, s_x)| [\sup |h(x, p)|]^{-1} \qquad \text{pour} \quad |x_j| = R, \qquad |p_j| = 1.$$

Preuve. — 1° *Notations.* — Nous supposons $h(0, s_x) \neq 0$, sinon le lemme est banal; nous divisons $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ et $v(x)$ par le nombre $h(0, s_x)$, ce qui n'altère pas $u(x)$ : nous voici ramenés au cas où

$$h(0, s_x) = 1;$$

alors

$$q = \frac{1}{H},$$

en notant

$$H = \sup |h(x, p)| \qquad \text{pour} \quad |x_j| = R, \qquad |p_j| = 1. \tag{9.2}$$

Si $r > R$, les hypothèses restent vérifiées et la conclusion n'est pas altérée quand on remplace $r$ par $R$, car $q < 1$; il nous suffit donc de traiter le cas

$r \leqq R$. Nous poserons

$$N = \frac{R}{r} \geqq 1.$$

Nous supposerons

$$b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}; \qquad w_j(x) \text{ indépendant de } x_1;$$

nous remplacerons l'inconnue $u(x)$ par

$$u(x) - w_0(x) - x_1 w_1(x) - \ldots - \frac{x_1^{m-1}}{(m-1)!} w_{m-1}(x)$$

et $v(x)$ par

$$v(x) - a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left[w_0(x) + x_1 w_1(x) + \ldots + \frac{x_1^{m-1}}{(m-1)!} w_{m-1}(x)\right]:$$

Nous voici ramenés au cas où les données de Cauchy sont

$$w_0(x) = 0, \qquad \ldots, \qquad w_{m-1}(x) = 0;$$

$v(x)$ n'est plus nécessairement holomorphe sur $X$; mais $v(x)$ est *holomorphe* pour

$$|x_j| \leqq r \qquad (j = 1, \ldots, l).$$

2° *La méthode des fonctions majorantes* de Cauchy est classique; *voir*, par exemple : E. Goursat [4]; chap. XIX, § 1, calcul des limites; chap. XXII, théorème général d'existence. Elle fournit les résultats suivants : introduisons une constante $\theta\,(0 < \theta < 1)$ et la variable

$$t = \frac{x_1}{\theta R} + \frac{x_2}{R} + \ldots + \frac{x_l}{R};$$

$v(x)$ admet une majorante $\dfrac{V}{1 - Nt}$ ($V = \text{Cte}$);

$a(x, p) - p_1^m$ admet une majorante $A(t, p)$ qui est un polynome en $p$ de degré $m$; soit $U(t)$ la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$(9.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^m U}{dt^m} = (\theta R)^m \left[A\left(t, p\dfrac{d}{dt}\right) U(t) + \dfrac{V}{1 - Nt}\right], \\ \text{où} \\ \qquad p = \left(\dfrac{1}{\theta R}, \dfrac{1}{R}, \ldots, \dfrac{1}{R}\right), \end{cases}$$

qui vérifie les conditions initiales

$$U(t) = \ldots = \frac{d^{m-1} U}{dt^{m-1}} = 0 \qquad \text{pour} \quad t = 0;$$

on suppose inférieur à 1 le coefficient de $\frac{d^m}{dt^m}$ dans

$$(\theta R)^m A\left(0, p\,\frac{d}{dt}\right);$$

alors $u(x)$ a pour majorante $U(t)$; donc, si $\rho$ est le rayon de convergence de $U(t)$ au point $t=0$, $u(x)$ *est holomorphe pour*

$$\frac{|x_1|}{\theta R}+\frac{|x_2|}{R}+\ldots+\frac{|x_l|}{R}<\rho. \tag{9.4}$$

La théorie des équations différentielles ordinaires donne la valeur de $\rho$, une fois $A(t, p)$ choisi.

3° *Choix de* $A(t, p)$. — On sait que $a(x, p)-h(x, p)$ admet une majorante $\frac{A_1(p)}{1-t}$, $A_1(p)$ étant un polynome de degré $<m$; de même $h(x, p)$ admet pour majorante

$$\frac{H}{(1-t)(1-p_1-\ldots-p_l)}=\frac{H}{1-t}\sum_{i\geq 0}(p_1+\ldots+p_l)^i,$$

donc

$$\frac{H}{1-t}(p_1+\ldots+p_l)^m,$$

puisque $h(x, p)$ est homogène en $p$ de degré $m$; $H$ a la valeur (9.2). Donc $a(x, p)$ a la majorante

$$\frac{H}{1-t}(p_1+\ldots+p_l)^m+\frac{A_1(p)}{1-t}.$$

Donc $a(x, p)-p_1^m$, dont le développement de Taylor n'a pas de terme en $p_1^m$ puisque $h(0, s_x)=1$, admet la majorante

$$A(t, p)=\frac{H}{1-t}(p_1+\ldots+p_l)^m-Hp_1{}^m+\frac{A_1(p)}{1-t}; \tag{9.5}$$

rappelons que $A_1(p)$ est de degré $<m$.

4° *Calcul de* $\rho$. — Ce choix de $A(t, p)$ permet d'expliciter les conclusions de 2° : on suppose

$$[1+(l-1)\theta]^m H-H<1; \tag{9.6}$$

d'après la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires (E. Goursat [4], chap. XIX), les singularités de $U(t)$ font partie des singularités des coefficients de son équation (9.3) et des zéros du coefficient principal de cette équation : vu (9.5), $U(t)$ ne peut avoir de singularités autres que

$$t=1, \qquad t=\frac{1}{N}, \qquad t=1-\frac{H}{1+H}[1+(l-1)\theta]^m.$$

La condition (9.6) signifie que ces trois valeurs sont positives; la plus petite d'entre elles est le rayon de convergence $\rho$ de $U(t)$ au point $t=0$. Puisque

$$\frac{1}{N}=\frac{r}{R}, \qquad \frac{1}{H}=q,$$

la conclusion de 2° s'énonce donc ainsi : $u(x)$ *est holomorphe pour*

$$(9.7) \quad |x_1|+\theta|x_2|+\ldots+\theta|x_l|<\theta \mathrm{R} \inf\left\{\frac{r}{R}, 1-\frac{1}{1+q}[1+(l-1)\theta]^m\right\},$$

quel que soit $\theta$ vérifiant

$$0 \leqq \theta \leqq 1.$$

5° *Choix de* $\theta$. — La convexité de la fonction exp donne

$$[1+l\theta]^m \leqq \exp(lm\theta);$$

choisissons

$$lm\theta=\log\left[(1+q)\left(1-\frac{q}{3}\right)\right];$$

on a donc

$$[1+l\theta]^m \leqq (1+q)\left(1-\frac{q}{3}\right);$$

d'où

$$(9.8) \qquad 1-\frac{1}{1+q}[1+(l-1)\theta]^m>\frac{q}{3}.$$

De ce choix de $\theta$ et de ce que $\log\left[(1+q)\left(1-\frac{q}{3}\right)\right]$ est une fonction concave de $q$, atteignant son maximum pour $q=1$, résulte que

$$q\log\frac{4}{3} \leqq lm\theta \leqq \log\frac{4}{3} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq q \leqq 1;$$

*a fortiori*

$$(9.9) \qquad \frac{5}{18}q<lm\theta<\frac{1}{3} \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq q \leqq 1;$$

d'où en utilisant la formule de Schwarz :

$$(9.10) \quad |x_1|+\theta|x_2|+\ldots+\theta|x_l|<\sqrt{1+l\theta^2}\,\|x\| \leqq \frac{\sqrt{10}}{3}\|x\|.$$

En portant dans (9.7) ces inégalités (9.8), (9.9) et (9.10), on voit que $u(x)$

est holomorphe quand

$$\|x\| < \frac{\sqrt{10}}{12\, lm} q \inf\left\{ r, \frac{qR}{3} \right\},$$

donc quand (9.1) est vérifié : C. Q. F. D.

Effectuons dans le lemme 9.1 le changement de coordonnées locales qui transforme la variété $x_1 = 0$ en une variété arbitraire; il vient :

Lemme 9.2. — Soit $S^*$ une partie compacte d'une variété analytique complexe, régulière, de dimension $l-1$, appartenant à $X$. Il existe un nombre $c > 0$, fonction continue de $S^*$ et de $h(x, p)$, ayant la propriété suivante : si $S \subset S^*$, la solution $u(x)$ du problème de Cauchy (1.1) est holomorphe à l'intérieur de toute sphère de centre $x \in S$ et de rayon

$$(9.11) \qquad c\,|h(x,p)| \inf[|h(x,p)|, r(x, S)];$$

$(x, p)$ désigne des coordonnées homogènes, telles que $\|p\| = 1$, de l'élément de contact de $S$ en $x$; $r(x, S)$ désigne la distance de $x$, au bord de $S$.

10. **Holomorphie de $u(x)$ près de $S - T$.** — Le paragraphe 3 utilisera la conséquence simple que voici du lemme 9.2 :

Proposition 10. — *La solution $u(x)$ du problème de Cauchy* (1.1) *est holomorphe sur un voisinage de $S - T$ qui dépend seulement de $X$, $S$ et $h(x, p)$.*

Ce voisinage est indépendant des choix de $v$ et des $w_j$, qui sont respectivement holomorphes sur $X$ et $S$. Rappelons que $S - T$ est l'ensemble des points non caractéristiques de $S$.

Cette proposition 10 est évidemment un cas particulier du théorème 1.

11. **Le procédé de la variété mobile** est le procédé de prolongement analytique de $u(x)$ qui résulte de (9.11); le paragraphe 2 fera un emploi très simple de ce procédé, que voici.

Notation (pour les nos 11 et 15). — $W[S, c]$ désigne le voisinage de $S - T$ que constitue la réunion des boules de centre $x \in S$, de rayon (9.11).

Lemme 11. — Soit $\theta$ un paramètre numérique réel; $0 \leqq \theta \leqq 1$. Soit une variété analytique complexe, régulière, dépendant continûment de $\theta$ et appartenant à $X$; soit $S^*(\theta)$ une partie compacte de cette variété, dépendant continument de $\theta$. Il existe un nombre $c > 0$, indépendant de $\theta$, fonction de $S^*(\theta)$ et $h(x, p)$, tel que la solution $u(x)$ du problème de Cauchy (1.1) se prolonge analytiquement à l'ensemble $S(\theta) - T(\theta)$, si $S(\theta)$ vérifie les conditions suivantes :

$S(\theta)$ est une variété analytique complexe, de dimension $l-1$, dépendant continûment de $\theta$;

$$S(0) \subset S, \qquad S(\theta) \subset S^*(\theta);$$

à tout nombre $\theta_1$, tel que $0 \leqq \theta_1 < 1$, est associé un nombre $\theta_2$ tel que

$$\theta_1 < \theta_2 \leqq 1; \qquad S(\theta) \subset W[S(\theta_1), c] \qquad \text{pour} \quad \theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2.$$

Note. — Une fonction est dite holomorphe sur un ensemble quand elle est holomorphe sur un ouvert le contenant.

Note. — $u(x)$ peut être multiforme sur la réunion des $S(\theta) - T(\theta)$.

Preuve. — Nommons lemme 9.3 la proposition que voici : Si $u(x)$ est holomorphe sur $S(\theta) - T(\theta)$, alors $u(x)$ est holomorphe sur $W[S(\theta), c]$, quand $c$ est petit. Pour déduire ce lemme 9.3 du lemme 9.2, il suffit de vérifier que

$$\inf[|h(x, p)|, r(x, \mathrm{S} - \mathrm{T})] \geqq \mathrm{Cte} \inf[|h(x, p)|, r(x, \mathrm{S})],$$

c'est-à-dire que la distance de $x$ à $T$ est minorée par $\mathrm{Cte}\,|h(x, p)|$; cela résulte de ce que $h(x, p) = 0$ sur $T$.

Choisissons $c$ indépendant de $\theta$, fonction seulement de $S^*(\theta)$ et $h(x, p)$. Notons $\Theta$ le plus grand intervalle, d'origine $\theta = 0$, tel que $u(x)$ se prolonge analytiquement à $S(\theta) - T(\theta)$ quand $\theta$ parcourt $\Theta$. Le lemme 9.3 prouve que $\Theta$ est *ouvert à droite*. Il prouve aussi que $\Theta$ est *fermé* : puisque $W[S, c]$ est un voisinage de $S$ dépendant continûment de $S$, tout point $x$ de $S(\theta)$ appartient à $W[S(\theta'), c]$ dès que $\theta'$ est suffisamment proche de $\theta$. Donc $\Theta$ est tout l'intervalle : $0 \leqq \theta \leqq 1$.

## Chapitre 2. — Le problème de Cauchy en un point caractéristique régulier de $S$.

**12. Deux définitions des points caractéristiques réguliers** furent données au n° 7; prouvons leur équivalence :

Preuve. — Considérons la bicaractéristique issue d'un élément de contact caractéristique $(x, s_x)$ de $S$ : elle est définie par le système différentiel (2.3); donc le long de cette bicaractéristique

$$\frac{ds}{dt} = s_x \cdot \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = s_x \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + \sum_{i,j} s_{x_i x_j} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt},$$

$$\frac{dx}{dt} = h_p(x, p); \qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum_j (h_{px_j} h_{p_j} - h_{pp_j} h_{x_j}).$$

Or, d'après le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes,

$$p.h_{px_i} = mh_{x_i}, \qquad p.h_{pp_j} = (m-1)h_{p_j}.$$

Donc, le long de cette bicaractéristique

$$p.\frac{d^2x}{dt^2} = h_x.h_p.$$

En particulier, en son origine où $p = s_x$,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \left[\sum_i h_{x_i}h_{p_i} + \sum_{ij} s_{x_ix_j}h_{p_i}h_{p_j}\right]_{p=s_x}$$

Donc les équations (7.1) signifient que la courbe bicaractéristique issue de $(x, s_x)$ est osculatrice à $S$ en $x$. C. Q. F. D.

**14. Propriétés de $T$ en un point caractéristique régulier.** — Le lemme suivant constitue le 1° *du théorème* 5 (n° 7).

NOTATION (pour les n$^{os}$ 13 et 14). — $V$ désignera la variété d'équation

$$V: \quad h(x, s_x) = 0;$$

elle dépend évidemment du choix de l'équation $s(x) = 0$ de $S$.

Les équations (2.5) de $T$ s'écrivent

$$T = S \cap V.$$

Rappelons la définition 7.1 des points caractéristiques réguliers : en un point caractéristique régulier, $V$ est une variété régulière; elle ne contient pas la direction bicaractéristique $h_p(x, s_x)$, qui appartient à $S$. Donc $S$ et $V$ ne se touchent pas; d'où le

LEMME 13. — En un point caractéristique régulier, $T$ est une variété analytique complexe, régulière, de dimension $l-2$.

**14. Coordonnées caractéristiques régulières.** — Construisons des coordonnées analytiques locales, adaptées à l'étude du voisinage d'un point caractéristique régulier donné :

LEMME 14. — En un point caractéristique régulier, on peut définir des coordonnées locales, dites *coordonnées caractéristiques régulières*, avec lesquelles

$$(14.1) \qquad K: \quad x_1 = 0; \qquad S: \quad x_1 = x_2^2;$$

$$(14.2) \qquad h(x, p) = p_1^{m-1}p_2 + h_1(x, p),$$

le degré de $h_1$ en $p_1$ étant $\leqq m-2$. On choisira dans (1.1) :

$$b\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}; \qquad w_j(x) \text{ indépendant de } x_1.$$

NOTA. — Ce lemme implique évidemment le 2° *du théorème* 5 (n° 7).

PREUVE. — Le point caractéristique régulier donné est choisi pour origine des coordonnées. Soit $k(x)$ la solution du problème de Cauchy non linéaire, du premier ordre :

$$(14.3)\qquad \begin{cases} h(x,\, k_x) = 0 \\ k(x) = s(x), \qquad k_x = s_x \quad \text{sur } V. \end{cases}$$

Les équations des caractéristiques de (14.3) sont les équations (2.3) des bicaractéristiques de $a\left(x,\, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ et, vu (2.4), l'équation

$$dk = 0;$$

$k$ est donc constant sur les caractéristiques de (14.3).

Le problème de Cauchy (14.3) a une solution unique, analytique, puisque la direction bicaractéristique de $(0,\, s_x(0))$ n'appartient pas à $V$.

De ces deux propriétés résulte que $K$ a pour équation

$$k(x) = 0.$$

Nous choisissons comme suit de nouvelles coordonnées :

la 1^re^ coordonnée est $k(x)$;

les 3^e^, ..., $l^{\text{ième}}$ coordonnées sont constantes sur chaque caractéristique de la solution $k(x)$ de (14.3);

la 2^e^ coordonnée s'annule sur $V$, qui ne contient pas la direction bicaractéristique, sur laquelle les autres coordonnées sont constantes.

Avec ces nouvelles coordonnées, on a

$$(14.4)\qquad h(x, p) = 0 \qquad \text{pour} \quad p = (1, 0, \ldots, 0),$$

$$(14.5)\qquad h_{p_3}(x, p) = \ldots = h_{p_l}(x, p) = 0 \qquad \text{pour} \quad p = (1, 0, \ldots, 0);$$

et les équations de $K$ et $V$ sont

$$K: \quad x_1 = 0; \qquad V: \quad x_2 = 0.$$

Puisque (n° 13)

$$T \subset K \cap V \qquad \text{et} \qquad \dim T = l - 2,$$

les équations de $T$ sont

$$T: \quad x_1 = x_2 = 0.$$

$S$ est une variété régulière, qui touche $K$ le long de $T$; elle a donc pour équation

$$S: \quad x_1 - f(x)\, x_2^2 = 0,$$

$f(x)$ étant holomorphe.

La bicaractéristique issue de $(0, s_x(0))$ a les équations

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_l = 0;$$

vu la définition 7.2 d'un point caractéristique régulier, cette bicaractéristique n'est pas osculatrice à $S$; donc

$$f(0) \neq 0.$$

Or la seconde coordonnée n'a été choisie qu'au produit près par une fonction holomorphe ne s'annulant pas pour $x = 0$; précisons son choix en prenant pour seconde coordonnée

$$\sqrt{f(x)}\, x_2.$$

L'équation de $S$ devient

$$S: \quad x_1 = x_2^2.$$

Explicitons enfin les relations (14.4) et (14.5) : $h(x, p)$ a un seul terme en $p_1^{m-1} p_j$ $(j = 1, \ldots, l)$; c'est $p_1^{m-1} p_2$. Son coefficient n'est pas nul pour $x = 0$; en effet $h_p(0, s_x(0)) \neq 0$, vu la formule (7.1), qui définit les points caractéristiques irréguliers. Nous n'altérons pas le problème de Cauchy (1.1) en divisant $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ et $v(x)$ par ce coefficient de $p_1^{m-1} p_2$; il vient (14.2).

**15. Prolongement analytique de $u(x)$ par le procédé de la variété mobile.** — Ce procédé donne le

LEMME 15. — En un point caractéristique régulier de $S$, où l'on emploie des coordonnées caractéristiques régulières, la solution $u(x)$ du problème de Cauchy (1.1) est une fonction de

$$\log x_1 = \log|x_1| + i \arg x_1, \qquad \log x_2 = \log|x_2| + i \arg x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_l$$

qui est holomorphe sur l'ensemble fermé

$$(15.1) \quad \begin{cases} 0 \leqq \arg x_1 \leqq 4\pi, & 0 \leqq \arg x_2 \leqq 2\pi \; (\arg x_1 = 2 \arg x_2 \text{ sur } S), \\ & |x_1| = \varepsilon^2, \qquad |x_2| = \ldots = |x_l| = \varepsilon, \end{cases}$$

dès que le nombre $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit. Ce choix de $\varepsilon$ est fonction de $\mathcal{X}$, $S$ et $h(x, p)$.

PREUVE. — Soit

$$|x_j| \leqq \varepsilon_j$$

un polycylindre contenu dans $\mathcal{X}$; appliquons le procédé de la variété mobile (lemme 11) en choisissant pour $S^*(\theta)$,

$$(15.2) \qquad S^*(\theta): \quad x_1 = x_2^2 \exp(4\pi i \theta), \qquad |x_j| \leqq \varepsilon_j.$$

Soit

$$s(x, \theta) = x_1 - x_2^2 \exp(4\pi i \theta);$$

nous avons

$$s_x = [1, -2x_2 \exp(4\pi i\theta), 0, \ldots, 0],$$
$$h(x, s_x) = -2x_2 \exp(4\pi i\theta) + h_1(x, s_x), \qquad \text{où} \quad |h_1| < \mathrm{Cte}\, |x_2|^2,$$

car $h_1(x, p)$ est homogène en $p$ de degré $m$ et est en $p_1$ de degré $\leqq m-2$. Nous pouvons donc choisir $\varepsilon_2$ assez petit pour avoir

$$(15.3) \qquad |h(x, p)| > |x_2| \qquad \text{quand} \quad p = \frac{s_x}{\| s_x \|}.$$

Choisissons pour $S(\theta)$ :

$$(15.4) \quad S(\theta): \quad x_1 = x_2^2 \exp(4\pi i\theta), \qquad |x_2|^2 + \ldots + |x_l|^2 < \rho^2(\theta),$$

où

$$\rho^2(0) < \varepsilon_1, \qquad \rho(0) < \varepsilon_j \qquad (j = 2, \ldots, l),$$

$\rho(\theta)$ est continue décroissante.

Le choix de $\rho(\theta)$ sera précisé plus loin.

Vu la définition de $W$ (n° **11**) et l'inégalité (15.3), $W[S(\theta_1), c]$ contient les points $x$ tels que

$$|x_1 - x_2^2 \exp(4\pi i\theta_1)| < c\, |x_2| \inf\left[|x_2|, \rho(\theta_1) - \sqrt{|x_2|^2 + \ldots + |x_l|^2}\right].$$

Si $\theta_1 \leqq \theta$, on a donc

$$(15.5) \qquad S(\theta) \subset W[S(\theta_1), c]$$

à condition que

$$|\exp(4\pi i\theta) - \exp(4\pi i\theta_1)| < c \inf\left[1, \frac{\rho(\theta_1) - \rho(\theta)}{|x_2|}\right]$$

où $|x_2| < \rho(\theta)$; cette condition est vérifiée si

$$4\pi(\theta - \theta_1) < c \inf\left[1, \frac{\rho(\theta_1)}{\rho(\theta)} - 1\right];$$

donc si $\theta - \theta_1$ est assez petit et

$$4\pi(\theta - \theta_1) < c \log \frac{\rho(\theta_1)}{\rho(\theta)};$$

cette dernière condition exprime la décroissance de

$$\rho(\theta) \exp\left(\frac{4\pi}{c}\theta\right);$$

nous la satisfaisons en choisissant

$$(15.6) \qquad \rho(\theta) = \rho(0) \exp\left(-\frac{20}{c}\theta\right).$$

Les conditions que le lemme **11** impose à $S(\theta)$ sont ainsi vérifiées; de ce lemme résulte que $u(x)$ est holomorphe sur $S(\theta) - T$ pour $0 \leqq \theta \leqq 1$; ($T : x_1 = x_2 = 0$). En particulier :

$$(15.7)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{Quand } \varepsilon_0 \text{ est assez petit, } u(x) \text{ est holomorphe sur l'ensemble, qui} \\ \quad \text{appartient à } S \text{ pour } \theta = 0 : \\ \arg \dfrac{x_1}{x_2^2} = 4\pi\theta, \qquad |x_1| = |x_2|^2 \neq 0, \qquad |x_2|^2 + \ldots + |x_l|^2 \leqq \varepsilon_0; \end{array}\right.$$

rappelons que

$$0 \leqq \theta \leqq 1.$$

En changeant dans le raisonnement précédent $4\pi i\theta$ en $-4\pi i\theta$, on constate que la proposition (15.7) vaut aussi pour

$$-1 \leqq \theta \leqq 0.$$

Cette proposition (15.7) vaut donc pour

$$-1 \leqq \theta \leqq 1,$$

ce qui entraîne le lemme 15.

**16. Développement de $u(x)$ en une série, dont les termes se définissent par une suite de problèmes de Cauchy s'intégrant par quadratures.** — Le lemme précédent donne le

LEMME 16. — Sur l'ensemble (15.1), dès que le nombre $\varepsilon > 0$ est assez petit, il y a convergence uniforme du développement

$$(16.1)\qquad u(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_j(x) + \ldots,$$

dont les termes sont définis par la suite de problèmes de Cauchy :

$$(16.2)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^m u_0}{\partial x_1^{m-1}\,\partial x_2} = v, \\ u_0 = w_0, \quad \dfrac{\partial u_0}{\partial x_1} = w_1, \quad \ldots, \quad \dfrac{\partial^{m-1} u_0}{\partial x_1^{m-1}} = w_{m-1} \quad \text{sur } S; \end{array}\right.$$

$$(16.3)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^m u_j}{\partial x_1^{m-1}\partial x_2} = a_1\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u_{j-1}, \\ u_j(x) = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_1} = \ldots = \dfrac{\partial^{m-1} u_j}{\partial x_1^{m-1}} = 0 \quad \text{sur } S \qquad (j > 0); \end{array}\right.$$

on a posé

$$(16.4)\qquad a_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial^m}{\partial x_1^{m-1}\,\partial x_2} - a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

NOTE. — Vu le lemme 14, $a_1\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ est un opérateur d'ordre $m$ sans terme en $\dfrac{\partial^m}{\partial x_1^{m-1}\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, l)$.

**Preuve.** — Envisageons le problème de Cauchy, qui dépend du paramètre numérique complexe $t$ et qui se réduit à (1.1) pour $t = 1$ :

$$(16.5) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^m u(x, t)}{\partial x_1^{m-1} \partial x_2} = t a_1\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) + v(x), \\ u(x, t) = w_0(x), \quad \dfrac{\partial u(x, t)}{\partial x_1} = w_1(x), \quad \dots, \\ \dfrac{\partial^{m-1} u(x, t)}{\partial x_1^{m-1}} = w_{m-1}(x) \quad \text{pour} \quad x_1 = x_2^2. \end{cases}$$

Appliquons le lemme 15 à ce problème, en prenant

$$|t| \leqq 2.$$

Il est évident que cette limitation de $|t|$ permet de choisir $\varepsilon$ indépendant de $t$ et que $u(x, t)$ est holomorphe aussi en $t$; pour le prouver explicitement, il suffirait de considérer $t$ comme une $(l+1)^{\text{ième}}$ coordonnée. Donc $u(x, t)$ est une fonction de

$$\log x_1, \quad \log x_2, \quad x_3, \quad \dots, \quad x_l, \quad t$$

qui est holomorphe sur l'ensemble fermé

$$(16.6) \quad \begin{cases} 0 \leqq \arg x_1 \leqq 4\pi, \quad 0 \leqq \arg x_2 \leqq 2\pi \ (\arg x_1 = 2 \arg x_2 \text{ sur } S), \\ |x_1| = \varepsilon^2, \quad |x_2| = \dots = |x_l| = \varepsilon, \quad |t| \leqq 2, \end{cases}$$

dès que le nombre $\varepsilon > 0$ est assez petit.

Développons $u(x, t)$ en série de Taylor par rapport à $t$ : quand $(x, t)$ vérifie (16.6), on a

$$(16.7) \qquad u(x, t) = u_0(x) + t u_1(x) + \dots + t^j u_j(x) + \dots;$$

ce développement a pour majorante

$$\frac{2M}{2 - t}$$

où

$$M = \sup |u(x, t)|;$$

si $x$ vérifie (15.1) et $t = 1$, il y a donc convergence uniforme de la série (16.7), qui s'identifie à (16.1). D'autre part, en substituant le développement (16.7) dans (16.5) et en ordonnant par rapport à $t$, on obtient les relations (16.2) et (16.3), qui déterminent les $u_j(x)$.

L'étude de ces relations exige la considération des voisinages caractéristiques de $S$.

**17. Les voisinages caractéristiques de $S$, en un point caractéristique régulier.** — Remplaçons $X$ par un voisinage du point caractéristique régulier étudié; choisissons ce voisinage simplement connexe et assez petit pour qu'on puisse utiliser des coordonnées caractéristiques régulières : l'équation de $K$ étant

$$k(x)=0 \qquad [k(x) \text{ holomorphe sur } X;\ k_x \neq 0 \text{ sur } K],$$

on a

$$k(x)=x_1 f(x),$$

où $f(x)$ est holomorphe et ne s'annule pas sur $X$.

Construisons dans l'espace de coordonnées $(x_0, x_1, \ldots, x_l)$ la variété $\Phi$ d'équation

$$\Phi:\quad x_0^2=k(x), \qquad \text{où} \quad x=(x_1, \ldots, x_l).$$

Nommons projection du point

$$\varphi=(x_0, \ldots, x_l)\in\Phi$$

le point

$$x(\varphi)=(x_1, \ldots, x_l)\in X,$$

La variété $\Delta$ de $\Phi$ où $\dfrac{\mathrm{D}(x)}{\mathrm{D}(\varphi)}=0$ a pour équations

$$\Delta:\quad x_0=k(x)=0.$$

Sa projection est $x(\Delta)=K$.

Les points de $\Phi$ se projetant sur $S$ sont ceux qui vérifient $x_1=x_2^2$ ; puisque $x_0^2=x_1 f(x)$ sur $\Phi$, ce sont donc les points tels que

$$x_0=\pm x_2\sqrt{f(x)}, \qquad x_1=x_2^2;$$

$\sqrt{f(x)}$ est holomorphe puisque $f(x)$ ne s'annule pas et que $X$ est simplement connexe; ces points constituent donc deux variétés de $\Phi$. Nommons $\Sigma$ l'une d'elles; par exemple, choisissons une des déterminations holomorphes de $\sqrt{f(x)}$ et

$$\Sigma:\quad x_0=x_2\sqrt{f(x)}, \qquad x_1=x_2^2.$$

La projection $x(\varphi)$ est un homéomorphisme analytique de $\Sigma$ sur $S$. Donc $[\Phi, x(\varphi), \Sigma]$ constitue, au sens du n° 3, un voisinage de $S$ *au-dessus* de $X$; ce voisinage est ramifié au-dessus de la caractéristique $K$ tangente à $S$.

Définition 17. — Un tel voisinage est nommé *voisinage caractéristique de S*.

Note. — Provisoirement, *la définition 4 des voisinages caractéristiques de S n'est pas utilisée* : le 3° et le 4° du *théorème* 5 sont vrais par définition.

Lemme 17. — Deux voisinages caractéristiques $\Phi$ et $\Phi'$ de $S$ sont identiques, au sens de la définition 3.2 (*cf.* théorème 3).

Preuve. — On a

$$\Phi: \quad x_0^2 = x_1 f(x); \qquad \Phi': \quad x_0^2 = x_1 f'(x);$$
$$\Sigma: \quad x_0 = x_2\sqrt{f(x)}, \qquad x_1 = x_2^2; \qquad \Sigma': \quad x_0 = x_2\sqrt{f(x)}, \qquad x_1 = x_2^2.$$

Il existe donc un homéomorphisme analytique de $\Phi$ sur $\Phi'$ tel que $x(\varphi') = x(\varphi)$ et que $\Sigma'$ soit l'image de $\Sigma$ : c'est celui qui applique $(x_0, x_1, \ldots, x_l) \in \Phi$ sur $\left(x_0 \dfrac{\sqrt{f'(x)}}{\sqrt{f(x)}}, x_1, \ldots, x_l\right) \in \Phi'$.

Notations. — Nous utilisons sur $X$ des *coordonnées caractéristiques régulières*; comme le lemme **17** nous y autorise, nous prenons

$$k(x) = x_1.$$

Nous utilisons sur $\Phi$ les coordonnées

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_l) = (x_0, x_2, \ldots, x_l);$$

la projection de $\Phi$ sur $X$ est

$$(17.1) \qquad x(\varphi): \quad \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l) \;\rightarrow\; x = (\varphi_1^2, \varphi_2, \ldots, \varphi_l);$$

les équations de $\Delta$ et $\Sigma$ sont

$$(17.2) \qquad \Delta: \quad \varphi_1 = 0; \qquad \Sigma: \quad \varphi_1 = \varphi_2.$$

Note. — $\Delta$ et $\Sigma$ ne se touchent pas, alors que leurs projections $K$ et $S$ se touchent le long de $T$.

**18. Allure des termes du développement** (16.1) **de** $u(x)$. — Les notations qui précèdent permettent l'énoncé du lemme suivant :

Lemme. — Supposons $v$ holomorphe sur le polycylindre de $\Phi$ :

$$(18.1) \qquad |\varphi_j| \leqq \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots, l).$$

Supposons les fonctions $w_j(x)$ indépendantes de $x_1$ et holomorphes sur le polycylindre

$$(18.2) \qquad |x_j| \leqq \varepsilon \qquad (j = 2, \ldots, l).$$

Alors le problème de Cauchy

$$(18.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^m u}{\partial x_1^{m-1}\partial x_2} = v; \\ u = w_0, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = w_1, \qquad \ldots, \qquad \dfrac{\partial^{m-1} u}{\partial x_1^{m-1}} = w_{m-1} \quad \text{sur } \Sigma; \end{cases}$$

a une solution unique, $u$, holomorphe sur $\Phi$. Ses dérivées en $x$ d'ordres $\leqq m$, sauf $\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}$, sont holomorphes sur $\Phi$.

Preuve. — Notons $\frac{\partial^j u}{\partial x_1^j} = u_{(j)}$; décomposons le problème de Cauchy (18.3), qui est d'ordre $m$, en une suite de $m$ problèmes de Cauchy d'ordre 1

$$\frac{\partial}{\partial x_2} u_{(m-1)} = v; \qquad u_{(m-1)} = w_{m-1} \quad \text{sur } \Sigma;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u_{(j)} = u_{(j+1)}; \qquad u_{(j)} = w_j \quad \text{sur } \Sigma \qquad (j = m-2, \ldots, 0).$$

Puisque $x_1 = \varphi_1^2$, $x_2 = \varphi_2$, ..., $x_l = \varphi_l$, ces problèmes s'énoncent encore :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_2} u_{(m-1)} = v; \qquad u_{(m-1)} = w_{m-1} \qquad \text{pour} \quad \varphi_1 = \varphi_2. \tag{18.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi_1} u_{(j)} = 2\varphi_1 u_{(j+1)}; \qquad u_{(j)} = w_{(j)} \qquad \text{pour} \quad \varphi_1 = \varphi_2 \qquad (j = m-2, \ldots, 0). \tag{18.5}$$

Chacun des problèmes (18.4) et (18.5) s'intègre immédiatement par une quadrature; on constate ainsi que l'holomorphie de $v$ et des $w_j$ sur les polycylindres respectifs (18.1) et (18.2) entraîne l'holomorphie, sur le polycylindre (18.2), des $u_{(j)}$ et de toutes leurs dérivées en $\varphi_2, \ldots, \varphi_l$, donc en $x_2, \ldots, x_l$. C. Q. F. D.

En appliquant le lemme précédent aux problèmes de Cauchy (16.2) et (16.3) on constate que leurs solutions $u_j$ et leurs dérivées en $x$ d'ordres $< m$ sont holomorphes sur le polycylindre (18.1) de $\Phi$; le lemme 16 se précise donc comme suit :

Lemme 18. — Près de $\Sigma$, sur *l'arête*

$$|\varphi_j| = \varepsilon \qquad (j = 1, \ldots, l)$$

du *polycylindre*

$$|\varphi_j| \leqq \varepsilon \qquad (j = 1, \ldots, l)$$

la solution $u$ du problème de Cauchy (1.1) est égale à la somme de la série $u_0 + u_1 + \ldots + u_j + \ldots$. Cette série converge uniformément sur toute cette arête; chacun de ses termes est holomorphe sur ce polycylindre. Il en va de même pour les dérivées de $u$ en $x$ d'ordres $< m$.

Le nombre $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit. Ce choix de $\varepsilon$ est fonction de $X$, $S$ et $h(x, p)$.

**19. Allure de $u(x)$ en un point caractéristique régulier.** — Un raisonnement simple et classique complète le lemme 18 :

**Lemme 19.** — La série $u_0 + u_1 + \ldots + u_j + \ldots$ converge uniformément sur tout le polycylindre

$$|\varphi_j| \leqq \varepsilon \qquad (j = 1, \ldots, l)$$

elle y est holomorphe et égale à la solution $u$ du problème de Cauchy (1.1). Les dérivées de $u$ en $x$ d'ordres $< m$ sont elles aussi holomorphes sur ce polycylindre.

**Preuve.** — Une fonction holomorphe sur un polycylindre fermé atteint son module maximum sur l'arête de ce polycylindre. La convergence uniforme sur l'arête d'un polycylindre fermé d'une série de fonctions, holomorphes sur ce polycylindre, entraîne donc la convergence uniforme de cette série sur tout ce polycylindre; elle y est holomorphe : la série $u_0 + u_1 + \ldots + u_j + \ldots$ converge uniformément et est holomorphe pour $|\varphi_j| \leqq \varepsilon (j = 1, \ldots, l)$. Elle est égale à la solution $u$ de (1.1) près de $\Sigma$, pour $|\varphi_j| = \varepsilon$; elle est donc égale à $u$ quel que soit $\varphi$ : en effet deux fonctions analytiques d'une variable qui sont égales sur une ligne sont identiques.

Nous ne retiendrons de ce lemme 19 que ceci :

**Proposition 19.** — *Remplaçons $X$ par un voisinage assez petit d'un point caractéristique régulier. Alors la solution $u(x)$ du problème de Cauchy* (1.1) *et ses dérivées d'ordres $< m$ sont holomorphes sur un voisinage caractéristique de $S$. Ce voisinage ne dépend que du point caractéristique régulier étudié, de $X$, de $S$ et de $h(x, p)$.*

Cette proposition est évidemment un cas particulier du *théorème* 1 (n° 5). Rappelons que le *théorème* 5 est établi, mais que nous utilisons *la définition* 17 *des voisinages caractéristiques de $S$*, au lieu de la définition 4.

## Chapitre 3. — Le problème de Cauchy près de $S$.

Le chapitre 3 prouve les théorèmes 1, 2 et 3 (n° 5); il prouve que le théorème 5 (n° 7) vaut quand on utilise la définition 4 des voisinages caractéristiques.

### 20. Prolongement analytique d'une fonction holomorphe près de $S - U$.

— Le chapitre 1 a construit près de $S - T$ la solution du problème de Cauchy (1.1); le chapitre 2 l'a prolongée analytiquement près de chaque point de $T - U$; le n° 21 poursuivra ce prolongement analytique en employant les lemmes suivants :

**Lemme.** — Soit $D$ un domaine d'holomorphie, étalé dans un espace vectoriel complexe $\Phi$ de dimension $l$ (c'est-à-dire : $D$ recouvre un point de $\Phi$ un nombre de fois quelconque $\geqq 0$); soit $S$ l'intersection de $D$ par une variété plane de $\Phi$, de dimension complexe $l - 1$. Alors chaque composante connexe

$S_1$ de $S$ est un domaine d'holomorphie ou le revêtement d'un domaine d'holomorphie.

PREUVE. — Nous nous référons au Mémoire classique [3] de H. CARTAN et P. THULLEN. Vu [3] (Satz 5, p. 634), le domaine d'holomorphie $D$ est convexe relativement à la classe des fonctions holomorphes sur $D$. D'où, vu la définition de la convexité [3] (p. 629) : si $\varphi$ et $\Gamma$ sont un point et un compact de $D$ tel que la distance de $\varphi$ au bord de $D$ soit moindre que celle de $\Gamma$, alors il existe au moins une fonction $f$, holomorphe dans $D$, à valeurs numériques, telle que

$$|f(\varphi)| > \sup |f(\Gamma)|.$$

Choisissons

$$\varphi \in S, \qquad \Gamma \subset S.$$

Appliquons le Beweis von Statz 4.1 (p. 631-632) de [3], en y remplaçant $\mathfrak{B}$ par la composante connexe $S_1$ de $S$ et en choisissant pour classe $\mathfrak{K}$ celle des restrictions à $S_1$ des fonctions holomorphes sur $D$ : on obtient une fonction

$$f = \prod_{\nu=1}^{\infty} [1 - \{f_\nu\}^{l_\nu}]$$

qui est holomorphe sur $S_1$ et qui n'est holomorphe en aucun point d'un système canonique de points frontières de $S_1$; vu le Satz 1.$a$ (p. 623) de [3], $S_1$ est donc ou bien le domaine d'holomorphie de $f$, ou bien un revêtement de ce domaine.

LEMME 20. — Soient une variété $\Phi$, une sous-variété $S$ de $\Phi$ et un sous-espace $U$ de $S$; supposons-les analytiques complexes; supposons $\Phi$ et $S$ réguliers, $\dim S = \dim \Phi - 1$; supposons $U$ défini dans $S$ par deux équations : $f_1 = f_2 = 0$, $f_1$ et $f_2$ étant des fonctions holomorphes à valeurs numériques; supposons que

$$\dim U \leqq \dim \Phi - 3,$$

c'est-à-dire que $f_1$ et $f_2$ n'ont de facteur commun en aucun point de $U$. Alors tout domaine d'holomorphie contenant un voisinage de $S - U$ dans $\Phi$ contient un voisinage de $S$ dans $\Phi$.

PREUVE. — Il suffit de prouver le lemme près de chaque point de $U$. Effectuons donc un changement de coordonnées locales réalisant les hypothèses du lemme précédent : $\Phi$ est un espace vectoriel; $S$ est une partie ouverte d'une variété plane de $\Phi$. Ce lemme réduit le lemme 20 au théorème de Riemann que voici : toute fonction holomorphe sur $S - U$ est holomorphe sur $S$; *voir* le traité d'OSGOOD [5] (t. II, 1, p. 191). La démonstration d'OSGOOD ne suppose pas uniforme la fonction en jeu.)

**21. Holomorphie de la solution du problème de Cauchy sur des voisi-**

**nages caractéristiques de** $S$. — Jusqu'au n° 24 nous devrons nous limiter au cas :

$$\dim U \leqq \dim X - 3.$$

Précisons le sens de cette hypothèse : $U$ est défini par les trois équations (7.1) ; elles signifient que $U$ est l'ensemble des points de $S$ où s'annulent deux fonctions holomorphes sur $S$; nous supposons qu'en chaque point de $U$ ces deux fonctions sont sans facteur commun, au sens d'Osgood [5] ou de Bochner et Martin [1] (chap. IX, § 2).

Bien entendu, $U$ peut être vide.

Définition 21. — Supposons $\dim U \leqq \dim X - 3$; nous nommons voisinage caractéristique de $S$ tout voisinage $\Phi$ de $S$ *au-dessus* de $X$ qui possède les deux propriétés suivantes :

1° près de chaque point de $S - T$, $\Phi \subset X$;

2° près de chaque point de $T - U$, $\Phi$ est un voisinage caractéristique de $S$ au sens de la définition 17.

Notes. — Nous n'utilisons pas encore la définition 4 des voisinages caractéristiques. — Tout voisinage caractéristique au sens de la définition 17 l'est au sens de la définition 21. — Nous ignorons pour l'instant si $S$ possède toujours un voisinage caractéristique.

La définition 3.1 des voisinages caractéristiques de $S$, le fait que toute intersection de domaines d'holomorphie est domaine d'holomorphie (H. Cartan et P. Thullen [3], Satz 6) et le lemme 20 ont pour conséquence immédiate le

Lemme 21.1. — Soit $\Phi$ un voisinage caractéristique de $S$. Toutes les fonctions holomorphes sur l'un des voisinages de $S - U$ dans $\Phi$ sont holomorphes sur un même voisinage caractéristique de $S$.

Ce lemme 21.1 a les deux conséquences suivantes, qui serviront à prouver les théorèmes 1 et 3 :

Lemme 21.2. — Supposons que $S$ ait des voisinages caractéristiques. Alors la solution $u(x)$ du problème de Cauchy (1.1) et ses dérivées d'ordres $< m$ sont holomorphes sur l'un d'eux; celui-ci ne dépend que de $X$, $S$, $h(x, p)$.

Preuve. — Soit $\Phi$ un voisinage caractéristique de $S$; les propositions 10, 19 et le lemme 17 prouvent que $u$ et ses dérivées d'ordres $< m$ sont holomorphes sur un voisinage de $S - U$ dans $\Phi$; ce voisinage ne dépend que de $X$, $S$, $h(x, p)$. Le lemme 21.1 achève la preuve.

Lemme 21.3. — Si $\Phi$ et $\Phi'$ sont deux voisinages caractéristiques de $S$, alors il en existe un troisième $\Phi''$ tel que

$$\Phi'' \subset \Phi, \qquad \Phi'' \subset \Phi'.$$

**Preuve.** — Les projections $x(\varphi)$ et $x(\varphi')$ de $\Phi$ et $\Phi'$ sur $X$ sont des homéomorphies analytiques près de $S - T$; la relation $x(\varphi) = x(\varphi')$ définit donc, près de $S - T$, une homéomorphie analytique $\varphi'(\varphi)$ de $\Phi$ et $\Phi'$. Le lemme **17** prolonge cette homéomorphie à un voisinage de $S - U$. Le lemme **21.1** et l'emploi de coordonnées locales la prolonge enfin à un voisinage de $S$.

Il est maintenant essentiel d'introduire la définition **4** des voisinages caractéristiques : elle montrera que $S$ a toujours un voisinage caractéristique; elle rendra superflue la restriction : $\dim U \leqq \dim X - 3$. Il nous faut étudier préalablement la projection caractéristique $x(t, y)$ que définit le n° **4**.

**22. Propriétés de l'équation différentielle de la projection caractéristique.** — Rappelons que nous nommons ainsi le système différentiel ordinaire

$$(4.1) \qquad dx = g_p(x, p)\, dt, \qquad dp = -g_x(x, p)\, dt.$$

**Lemme.** — Le système (4.1) a *l'intégrale première* $g(x, p)$.

**Note.** — Ceci signifie que $g(x, p)$ est constant sur chaque courbe $x(t)$, $p(t)$ vérifiant (4.1).

**Preuve.** — De (4.1) résulte $dg = 0$.

**Lemme.** — Le système (4.1) admet $p.dx - g\,dt$ comme forme invariante; il est le seul à laisser cette forme invariante.

**Note.** — Ceci signifie que $\int_\gamma p.dx - g\,dt$ est un invariant intégral du système (**4.1**), c'est-à-dire ne change pas de valeur quand on déplace chaque point $(x, p)$ de la courbe $\gamma$ le long d'une courbe vérifiant (4.1). Autrement dit : $p.dx - g\,dt$ s'exprime à l'aide d'intégrales premières du système (4.1).

**Preuve.** — Notons

$$\omega = p.dx - g\,dt\,;$$

notons $d\omega$ la différentielle extérieure de $\omega$, que E. Cartan note $\omega'$ et $\omega \wedge \varpi$ le produit extérieur, qu'il note $[\omega, \varpi]$. E. Cartan nomme système caractéristique d'une forme $\omega$ de degré 1 le système qui s'obtient en annulant $\omega$ et les dérivées premières de $d\omega$ par rapport aux différentielles des variables indépendantes; il prouve que $\omega$ est invariante pour un système différentiel si et seulement si ce système différentiel implique le système caractéristique de $\omega$ : [2] (n$^{os}$ **65** et **78**, p. 58 et 74). Ici

$$d\omega = \sum_j dp_j \wedge dx_j - \sum_j g_{x_j}\, dx_j \wedge dt - \sum_j g_{p_j}\, dp_j \wedge dt,$$

le système caractéristique de $\omega$ est donc

$$dx_j = g_{p_j}\, dt, \qquad dp_j = -g_{x_j}\, dt, \qquad dg = 0, \qquad p.dx - g\,dt = 0\,;$$

il est bien équivalent au système différentiel (4.1), car

$$g = p.g_p$$

d'après une formule d'Euler, puisque $g$ est homogène de degré 1.

Les nos 23, 26 et 27 utiliseront les deux lemmes précédents, sous la forme que voici :

Lemme 22. — Soit $x(t, y, q)$, $p(t, y, q)$ la solution du système (4.1) issue de l'élément de contact

$$x(0, y, q) = y, \qquad p(0, y, q) = q.$$

On a

$$g(x, p) = g(y, q), \qquad p.dx = g\,dt + q.dy.$$

**23. Ramification de la projection caractéristique.** — Le n° 4 a défini la projection caractéristique $x(t, y)$ à l'aide du système (4.1). Prouvons le lemme suivant, dont le *théorème* 2 (n° 5) résulte immédiatement :

Lemme 23. — Soit $\frac{D(x)}{D(t, y)}$ le déterminant fonctionnel de la projection caractéristique $x(t, y)$. La fonction de $(t, y)$

$$\frac{1}{h(y, s_y)} \frac{D(x)}{D(t, y)}$$

est holomorphe et ne s'annule pas, quand $t$ est suffisamment petit.

Preuve. — Quand on applique le lemme 22 aux fonctions $x(t, y)$ et $p(t, y)$ qu'utilise le n° 4, les particularités suivantes se présentent

$$s(y) = 0, \qquad q = s_y(y), \qquad q.dy = s_y.dy = 0;$$

les conclusions de ce lemme deviennent donc

$$g(x, p) = g(y, s_y), \qquad p.dx = g\,dt;$$

d'où

$$p.\frac{\partial x}{\partial t} = g(y, s_y), \qquad p.\frac{\partial x}{\partial y_j} = 0. \tag{23.1}$$

Utilisons des coordonnées locales telles que

$$s(x) = x_1;$$

le point $y$ de $S$ a les coordonnées $(y_2, \ldots, y_l)$; vu (23.1)

$$p_1 \frac{D(x)}{D(t, y)} = \begin{vmatrix} p.\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x_2}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial x_l}{\partial t} \\ p.\frac{\partial x}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_l}{\partial y_2} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p.\frac{\partial x}{\partial y_l} & \frac{\partial x_2}{\partial y_l} & \cdots & \frac{\partial x_l}{\partial y_l} \end{vmatrix} = g(y, s_y) \frac{D(x_2, \ldots, x_l)}{D(y_2, \ldots, y_l)};$$

donc

$$\text{(23.2)} \qquad \frac{1}{h(y, s_y)} \frac{D(x)}{D(t, y)} = \frac{1}{p_1} \frac{g(y, s_y)}{h(y, s_y)} \frac{D(x_2, \ldots, x_l)}{D(y_2, \ldots, y_l)}.$$

Or $\dfrac{g(y, s_y)}{h(y, s_y)}$ est holomorphe et ne s'annule pas, d'après la définition même de $g$, n° 4; $p_1$ et $\dfrac{D(x_2, \ldots, x_l)}{D(y_2, \ldots, y_l)}$ sont des fonctions holomorphes de $(t, y)$; elles valent $1$ pour $t = 0$. Par suite la fonction (23.2) est holomorphe et ne s'annule pas quand $t$ est petit.

**24. Comparaison des définitions 4 et 21 des voisinages caractéristiques.** — Continuons à utiliser les définitions 17 et 21 des voisinages caractéristiques et à supposer

$$\dim U \leqq \dim X - 3.$$

Notons $\Psi$ la variété analytique que constituent les couples $(t, y)$ vérifiant (4.2); la projection caractéristique $x(t, y)$ projette $\Psi$ sur $X$ en appliquant identiquement $S$ sur lui-même : $\Psi$ est un voisinage de $S$ *au-dessus* de $X$ (la définition 4 nomme caractéristique un tel voisinage). Nous allons prouver que c'est un voisinage caractéristique de $S$ (au sens de la définition 21).

Lemme. — En chaque point de $S - T$, $\Psi \subset X$.

Preuve. — En un point de $S - T$, $h(y, s_y) \neq 0$ par définition; donc $\dfrac{D(x)}{D(t, y)} \neq 0$, vu le lemme 23 : $x(t, y)$ est une homéomorphie analytique.

Lemme. — En chaque point de $T - U$, $\Psi$ est un voisinage caractéristique (au sens de la définition 17).

Preuve. — Choisissons un point de $T - U$, c'est-à-dire un point caractéristique régulier de $S$; remplaçons $X$ par un petit voisinage de ce point. La caractéristique tangente à $S$ est une variété analytique régulière (théorème 5, 2°, n° 14)

$$K: \quad k(x) = 0 \qquad (k_x \neq 0 \text{ sur } K);$$

d'après le n° 2, les éléments de contact de $K$ sont ceux des bicaractéristiques tangentes à $S$; ce sont donc, vu le n° 4, les éléments de contact

$$x(t, y), \quad p(t, y) \qquad \text{tels que} \quad h(y, s_y) = 0.$$

Au point $x(t, y)$ de $K$, $k_x$ est donc parallèle à $p(t, y)$; par suite les formules (23.1), où $g = 0$ puisque $h = 0$, s'écrivent

$$k_x \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = 0, \qquad k_x \cdot \frac{\partial x}{\partial y_j} = 0 \quad \text{sur } K.$$

D'où

$$(24.1) \quad \begin{cases} k(x(t,y))=0, & \dfrac{\partial}{\partial t}k(x(t,y))=0, & \dfrac{\partial}{\partial y_j}k(x(t,y))=0 \\ & \text{pour} \quad h(y, s_y)=0. \end{cases}$$

Utilisons des coordonnées caractéristiques régulières (lemme 14) :

$$k(x)=x_1; \qquad s(x)=x_1-x_2^2;$$

$\dfrac{1}{y_2}h(y, s_y)$ est une fonction holomorphe, ne s'annulant pas, de $y \in S$.

Sur $S$, utilisons $(y_2, \ldots, y_l)$ comme coordonnées du point $y$.

Les relations (24.1) et le lemme 23 s'énoncent maintenant

$$(24.2) \quad x_1=0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial t}=0, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_j}=0 \quad \text{pour} \quad y_2=0, \quad (j=2,\ldots,l),$$

$$(24.3) \quad \frac{1}{y_2}\frac{D(x)}{D(t,y)} \text{ est une fonction holomorphe, ne s'annulant pas, de } (t,y).$$

D'autre part, puisque $x(0, y) \in S$,

$$(24.4) \qquad x_1(0,y)=y_2^2$$

De (24.2) résulte

$$x_1(t,y)=y_2^2F(t,y),$$

$F(t, y)$ étant holomorphe; vu (24.4)

$$F(0,y)=1;$$

soit $f(t, y)$ la fonction holomorphe telle que

$$f(t,y)=\sqrt{F(t,y)}, \qquad f(0,y)=1;$$

on a donc

$$x_1(t,y)=[y_2f(t,y)]^2.$$

Par suite l'application $x(t, y)$ résulte de la composition des deux suivantes, où $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ désigne un point de l'espace vectoriel de dimension $l$ :

$$\begin{aligned} \varphi(t,y) &= (y_2f(t,y),\ x_2(t,y),\ \ldots,\ x_l(t,y)), \\ x(\varphi) &= (\quad \varphi_1^2, \qquad \varphi_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_l \quad); \end{aligned}$$

ces deux applications sont holomorphes; $\varphi(t, y)$ applique la variété $t=0$, $y \in S$ sur la variété de $\Phi$ :

$$\Sigma : \quad \varphi_1=\varphi_2;$$

$x(\varphi)$ applique $\Sigma$ sur $S$.

Enfin, d'après (24.3),

$$\frac{D(\varphi)}{D(t, y)} = \frac{1}{2\varphi_1} \frac{D(x)}{D(t, y)} = \frac{1}{2 y_2 f(t, y)} \frac{D(x\ )}{D(t, y)} \neq 0;$$

$\varphi(t, y)$ est donc une homéomorphie analytique.

$\Phi$, $\Sigma$ et $x(\varphi)$ constituent un voisinage de $S$ au-dessus de $X$; vu la définition 3.2, l'existence de l'homéomorphie $\varphi(t, y)$ s'énonce

$$\Psi \subset \Phi.$$

D'autre part $\Phi$ est un voisinage caractéristique de $S$ (au sens du n° 17) : *voir* (17.1), (17.2).

Donc $\Psi$ est bien un voisinage caractéristique de $S$, près de l'origine.

Des deux lemmes précédents résulte que $\Psi$ est un voisinage caractéristique de $S$, au sens de la définition 21. Donc

Lemme 24. — Si $\dim U \leqq \dim X - 3$, tout voisinage caractéristique de $S$, au sens de la définition 4, est un voisinage caractéristique de $S$, au sens de la définition 21.

Ce lemme 24 achève la preuve du *théorème* 5, dont les 3° et 4° valaient par définition depuis le n° 17, et dont le 1° et le 2° ont été établis aux n°s 13 et 14.

25. **Preuve des théorèmes 1 et 3.** — Ce même lemme 24 permet d'énoncer comme suit les lemmes 21.2 et 21.3 :

Lemme 25.1. — Les théorèmes 1 et 3 valent quand on utilise la définition 4 des voisinages caractéristiques, *à condition que* $\dim U \leqq \dim X - 3$.

Cette condition était nécessaire à l'énoncé des définitions 17 et 21 des voisinages caractéristiques; abandonnons ces définitions, *n'utilisons plus que la définition* 4 et montrons que cette condition devient superflue. Nous le ferons par *une méthode de descente*, c'est-à-dire en appliquant le lemme 25.1 à un espace de dimension supérieure à celle de $X$. Commençons par remplacer la condition précédente par une condition indépendante de $S$ :

Lemme 25.2. — Les théorèmes 1 et 3 valent *à condition que* la fonction $h(x, p)$ n'ait, en aucun de ses zéros, de facteur divisant toutes les fonctions $h_{p_j}(x, p)$.

Preuve. — Supposons d'abord que $X$ soit une boule ouverte d'un espace vectoriel et que

$$s(x) = z_0 + z_1 x_1 + \ldots + z_l x_l + \frac{1}{2} z_{11} x_1^2 + z_{12} x_1 x_2 + \ldots + \frac{1}{2} z_{ll} x_l^2;$$

$S$, $T$, $\Phi$, $u(x)$, que nous noterons $S(z)$, $T(z)$, $\Phi(z)$, $u(x, z)$ dépendent du paramètre $z = (z_0, z_1, \ldots, z_l, z_{11}, z_{12}, \ldots, z_{ll})$ qui décrit un domaine $Z$ ne contenant pas $(0, 0, \ldots, 0)$. On suppose $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ indépendant de $z$; $X$ et $Z$ assez petits pour qu'on puisse choisir indépendante de $z$ la fonction $g(x, p)$ qui sert au n° 4 à définir le voisinage caractéristique $\Phi(z)$ de $S(z)$.

La fonction $u(x, z)$ est solution du problème de Cauchy qui s'obtient en remplaçant dans (1, 1) $X$ par l'espace produit $X \times Z$ et en définissant $S$ dans $X \times Z$ par l'équation $s(x, z) = 0$; nous utiliserons les notations $S$, $T$, $U$, $\Phi$ pour ce problème de Cauchy posé dans $X \times Z$.

Les définitions de $S$, $T$, $\Phi$ (n°s 1, 2 et 4) montrent immédiatement que $S(z)$, $T(z)$, $\Phi(z)$ peuvent être identifiés aux parties de $S$, $T$, $\Phi$ dont la projection sur $Z$ est le point $z$. Par suite les théorèmes 1 et 3 valent pour $X$ quand ils valent pour $X \times Z$; donc, vu le lemme 25.1, quand

$$\dim U \leqq \dim X \times Z - 3. \tag{25.1}$$

Or, dans $X \times Z$, $S$ a pour équation

$$z_0 + z_1 x_1 + \ldots + \frac{1}{2} z_{ll} x_l^2 = 0$$

et, dans $S$, $U$ a pour équation

$$h(x, p) = 0, \qquad \sum_j h_{x_j} h_{p_j} + \sum_{ij} z_{ij} h_{p_i} h_{p_j} = 0,$$

où

$$p_i = z_i + \sum_j z_{ij} x_j.$$

L'inégalité (25.1), dont le début du n° 21 explique le sens, a donc lieu quand $h(x, p)$ n'a, en aucun de ses zéros, de facteur divisant

$$\sum_j h_{x_j} h_{p_j} + \sum_{ij} z_{ij} h_{p_i} h_{p_j}$$

quels que soient les $z_{ij}$; c'est-à-dire, quand $h(x, p)$ n'a, en aucun de ses zéros, de facteur divisant tous les $h_{p_j}(x, p)$.

Supposons cette condition remplie : les théorèmes 1 et 3 valent donc quand $s(x)$ est un polynome du second degré. Mais cette condition n'est pas altérée par un changement de coordonnées; ces deux théorèmes valent donc près de chaque point de $S$, quel que soit $S$; ils valent donc quel que soit $S$.

C. Q. F. D.

Supprimons enfin la condition qu'énonce le lemme 25.2 :

**Fin de la preuve des théorèmes 1 et 3.** — Dans l'espace produit $X \times C$, où $C$ est un espace vectoriel de dimension 1, de coordonnée $x_{l+1}$, envisageons le problème de Cauchy :

$$(25.2)\quad \begin{cases} \left[a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) + \left(\dfrac{\partial}{\partial x_{l+1}}\right)^m\right] u(x) = v(x), \\ u(x) = w_1(x), \qquad \ldots, \qquad \left[b\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right]^{m-1} u(x) = w_{m-1}(x) \\ \text{pour} \quad s(x) = 0; \end{cases}$$

$x = (x_1, \ldots, x, x_{l+1})$ ; $s(x)$, $v(x)$, $w_i(x)$, $a\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, $b\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ sont indépendantes de $x_{l+1}$. La solution $u(x)$ de (1.1) est évidemment la solution de (25.2), qui est donc indépendante elle aussi de $x_{l+1}$.

Appliquons le lemme 25.2 au problème (25.2) : $h(x, p) + p_{l+1}^m$ ne peut avoir de diviseur divisant les $h_{p_i}(x, p)$ et $p_{l+1}^{m-1}$ ; ce serait en effet $p_{l+1}$, qui ne divise pas $h(x, p)$. Les théorèmes 1 et 3 s'appliquent donc au problème de Cauchy (25.2).

Pour ce problème (25.2), limitons-nous aux voisinages caractéristiques que fournissent (n° 4) les fonctions $g(x, p)$ indépendantes de $x_{l+1}$ et $p_{l+1}$ ; l'examen de la projection caractéristique $x(t, y)$ montre immédiatement que ces voisinages sont les produits $\Phi \times C$, $\Phi$ désignant les voisinages caractéristiques de $S$ au-dessus de $X$. Donc, puisque $u(x)$ est indépendant de $x_{l+1}$, les théorèmes 1 et 3 s'appliquent aussi au problème (1.1).

## Chapitre 4. — Le problème de Cauchy en un point ordinaire de $S$.

Le chapitre 4 prouve le théorème 4 ; rappelons que les théorèmes 1, 2, 3 et 5 ont été établis.

**26. Préliminaires.** Notations (pour le chapitre 4). — Donnons-nous un point caractéristique de $S$ ; prenons-le pour origine des coordonnées locales, choisissons pour première coordonnée

$$x_1 = s(x)$$

et remplaçons $X$ par un petit voisinage de l'origine.

Notons $x = f(t, y)$ la solution du système (4.1) issue de l'élément de contact

$$y \in X, \qquad q = (1, 0, \ldots, 0).$$

Puisque $f(0, y) = y$, le système d'inconnue $y$

$$f(t, y) = x$$

a, quand $t$ est petit, une solution unique

$$y = F(t, x);$$

évidemment

$$F(0, x) = x, \qquad F(0, 0) = 0;$$

nous notons $F_1, \ldots, F_l$ les coordonnées de $F$.

La forme différentielle invariante qu'admet (4.1) (lemme 22) donne

$$p.dx = g\,dt + q.dy,$$

où

$$g = g(x, p) = g(y, q), \qquad q = (1, 0, \ldots, 0), \qquad y = F(t, x);$$

c'est-à-dire

$$(26.1) \qquad g(F(t, x), q) = -\frac{\partial \mathrm{F}_1(t, x)}{\partial t}.$$

Points de $\Phi$ se projetant en $x \in X$. — D'après la définition 4 du voisinage caractéristique $\Phi$, *les points* $(t, y)$ *de* $\Phi$ *qui se projettent au point* $x$ *de* $X$ sont les points vérifiant le système

$$(26.2) \quad F_1(t, x) = 0, \qquad y_2 = F_2(t, x), \qquad \ldots, \qquad y_l = F_l(t, x).$$

Équations de $K$. — Par définition (n° 2), $K$ est le lieu des courbes bicaractéristiques issues des éléments de contact caractéristiques de $S$; les équations de $K$ s'obtiennent donc en éliminant $(t, y)$ des équations

$$(26.3) \qquad x = f(y, t), \qquad y_1 = 0, \qquad h(y, q) = 0,$$

c'est-à-dire en éliminant $t$ des équations

$$(26.4) \qquad F_1(t, x) = 0, \qquad h(F(t, x), q) = 0.$$

Or, d'après la définition de $g$ (n° 4), $h = 0$ équivaut à $g = 0$; donc, vu (26.1) : *les équations de* K *résultent de l'élimination de t entre*

$$(26.5) \qquad F_1(t, x) = 0, \qquad \frac{\partial F_1(t, x)}{\partial t} = 0.$$

Pour prouver que $K \neq X$, nous utiliserons le

Lemme 26. — Il n'existe pas de fonction $t(x)$ holomorphe sur un domaine de $X$ et vérifiant le système (26.5).

Preuve. — Supposons qu'une telle fonction $t(x)$ existe; elle satisfait (26.4), donc (26.3), où

$$y(x) = F(t(x), x);$$

ce système (26.3) signifie ceci : $x$ est le point de paramètre $t(x)$ de la bicaractéristique issue de l'élément de contact $(y(x), q)$ de $S$; la forme différentielle invariante qu'admet (4.1) (lemme 22) donne

$$p.dx = q.dy;$$

or $q.dy = 0$; donc $p.dx = 0$; mais $dx$ est arbitraire; donc $p = 0$, ce qui n'est pas, car $p$ est voisin de $q \neq 0$.

**27. Introduction de l'hypothèse que le point étudié est ordinaire.** — Supposons *ordinaire* le point caractéristique de $S$ que le n° 26 a choisi pour origine des coordonnées.

LEMME 27. — On a l'identité

$$F_1(t, x) = P(t, x)\,Q(t, x), \tag{27.1}$$

$P$ et $Q$ ayant les propriétés suivantes :

$P(t, x)$ est un *polynome* en $t$; son coefficient principal est 1; ses autres coefficients sont des fonctions holomorphes de $x$, qui s'annulent avec $x$; $Q(t, x)$ est une fonction holomorphe;

$$Q(0, 0) \neq 0.$$

PREUVE. — D'après le Vorbereitungsatz de Weierstrass ([1] ou [5]), il suffit de prouver qu'on n'a pas

$$F_1(t, 0) = 0 \qquad \text{quel que soit } t. \tag{27.2}$$

La relation (27.2) signifie que l'élément de contact

$$y(t) = F(t, 0), \qquad q = (1, 0, \ldots, 0) \tag{27.3}$$

appartient à $S$; la définition de $F$ signifie que le point $x = 0$ est le point de paramètre $t$ de la solution de (4.1) issue de cet élément de contact. La forme différentielle invariante qu'admet (4.1) (lemme 22) donne

$$p.dx = g\,dt + q.dy$$

où

$$x = 0, \qquad dt \neq 0, \qquad q.dy = 0;$$

donc $g = 0$ : l'élément de contact (27.3) est caractéristique. Ainsi l'origine est le point de paramètre $t$ de la bicaractéristique issue de l'élément de contact (27.3) de $S$. L'origine est donc un point exceptionnel de $S$. Nous l'avons au contraire supposée ordinaire. Donc (27.2) n'a pas lieu.

**28. Preuve du théorème 4** (n° 6). — 1° Les équations de $K$ résultent de l'élimination de $t$ entre les équations (26.5), c'est-à-dire, vu le lemme 27, entre les équations

$$P(t, x) = 0, \qquad P_t(t, x) = 0.$$

Soit $k(x)$ le discriminant du polynome $P(t, x)$ de la variable numérique $t$; $k(x)$ est holomorphe; vu le lemme 26, $k(x)$ n'est pas identiquement nul; donc *$K$ est un ensemble analytique*, défini par une équation unique

$$k(x) = 0,$$

c'est-à-dire *de dimension complexe $l-1$*.

2° D'après (26.2) et le lemme 27, les points $(t, y)$ de $\Phi$ se projetant au point $x$ de $X$ sont les points vérifiant le système

$$P(t, x) = 0, \qquad y_2 = F_2(t, x), \qquad \ldots, \qquad y_l = F_l(t, x).$$

Si $k(x) \neq 0$, ces points sont distincts; leur nombre est le degré de $P(t, x)$ en $t$; ils sont fonctions holomorphes multiformes de $x \in X - K$.

Donc *$\Phi$ est un revêtement fini de $X$, ramifié au-dessus de $K$*.

3° La projection $u(x)$ sur $X$ d'une fonction $u[\varphi]$ holomorphe sur $\Phi$ s'étudie par un raisonnement classique : *voir* [1] (chap. IX, § 4). Répétons-le : $u(x)$ est holomorphe, multiforme, bornée sur $X - K$; le nombre de ses déterminations est fini : c'est le degré du polynome $P(t, x)$. Les fonctions symétriques de ses déterminations sont donc holomorphes, uniformes, bornées sur $X - K$; donc sur $X$, en vertu d'un théorème de Riem ann : [5] (t. II, 1, p. 180) ou [1] (chap. VIII, th. 5). Il en résulte que *$u(x)$ est algébroïde*.

## Chapitre 5. — Exemples.

**29. Équation du premier ordre.** — Indiquons rapidement les particularités de l'équation du premier ordre. Le problème de Cauchy s'énonce :

$$(29.1) \quad \begin{cases} a_1(x)\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1} + \ldots + a_l(x)\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_l} + a_0(x)\,u(x) = v(x), \\ u(x) = w(x) \quad \text{sur } S. \end{cases}$$

L'équation des caractéristiques est

$$a_1(x)\frac{\partial k(x)}{\partial x_1} + \ldots + a_l(x)\frac{\partial k(x)}{\partial x_l} = 0.$$

Les courbes *bicaractéristiques* sont définies par le système

$$(29.2) \qquad \frac{dx_1}{a_1(x)} = \ldots = \frac{dx_l}{a_l(x)} = dt.$$

Parmi les *voisinages caractéristiques* $\Phi$ de $S$ il y en a un dont la définition est particulièrement simple : celui qui correspond au choix $g = h$. Nous n'emploierons que celui-là.

La *projection* $x(t, y)$ de $\Phi$ sur $X$ est la solution de (29.2) définie par les conditions initiales

$$x(0, y) = y \in S.$$

La *fonction* $u$ s'obtient sur $\Phi$ par une quadrature :

$$(29.3) \quad \frac{du}{dt} + a_0(x(t, y))u = v(x(t, y)); \qquad u = w(y) \qquad \text{pour} \quad t = 0.$$

Les équations de $S$, $T$, $U$ sont

$$S: \qquad s(x) = 0;$$

$$T: \qquad s(x) = 0; \qquad a_1(x)\frac{\partial s}{\partial x_1} + \ldots + a_l(x)\frac{\partial s}{\partial x_l} = 0;$$

$$U: \begin{cases} s = 0; \quad a_1\dfrac{\partial s}{\partial x_1} + \ldots + a_l\dfrac{\partial s}{\partial x_l} = 0; \\ \left(a_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_l\dfrac{\partial}{\partial x_l}\right)\left(a_1\dfrac{\partial s}{\partial x_1} + \ldots + a_l\dfrac{\partial s}{\partial x_l}\right) = 0. \end{cases}$$

Par chaque point passe une courbe bicaractéristique, appartenant à une infinité de bandes bicaractéristiques; donc *les points exceptionnels de $S$ sont les points des courbes bicaractéristiques contenues dans $S$;* précisons que, si une courbe bicaractéristique est dans $S$, la bande, que constituent les éléments de contact de $S$ le long de cette courbe, n'est pas bicaractéristique en général.

Tout point $x$ où $a_1(x) = \ldots = a_l(x) = 0$ est exceptionnel; si $l = 2$, ces points sont évidemment les seuls points exceptionnels. L'exemple le plus simple de point exceptionnel est donc le suivant.

**30. Exemple de point exceptionnel.** — Choisissons pour $X$ l'espace vectoriel de dimension complexe 2 et pour problème de Cauchy :

$$x_1\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} = v(x); \qquad u(x) = w(x_1) \qquad \text{pour} \quad x_2 = x_1^2;$$

prenons

$$S: \quad x_2 = x_1^2; \qquad K: \quad x_2 = 0:$$

l'origine est *un point exceptionnel*.

La projection $x(t, y)$ de $\Phi$ sur $X$ est

$$x_1 = y_1 e^t, \qquad x_2 = y_1^2 e^t;$$

les points de $\Phi$ se projetant au point $x$ de $X$ sont les points :

$$t = \log\frac{x_1^2}{x_2}, \qquad y_1 = \frac{x_2}{x_1}.$$

La fonction $u(t, y)$, dont $u(x)$ est la projection, est

$$u(t, y) = w(y_1) + \int_0^t v(y_1 e^\tau, y_1^2 e^\tau)\, d\tau;$$

par exemple, si $v = 1$ et si le domaine d'holomorphie de $w(y_1)$ est $|y_1| < 1$, alors $u(t, y) = w(y_1) + t$ est holomorphe dans le domaine de $\Phi$ :

(30.1) $$|y_1| < 1;$$

$$u(x) = w\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + \log\left(\frac{x_1^2}{x_2}\right)$$

est holomorphe multiforme dans le domaine de $X$ projection du précédent :

(30.2) $$|x_2| < |x_1|, \qquad x_2 \neq 0$$

et ne peut être prolongée hors de ce domaine; *ce domaine n'est pas un voisinage de l'origine;* près de l'origine $u(x)$ a *une infinité de déterminations* et *n'est pas borné.*

*Les affirmations du théorème 4 sont donc en défaut en le point exceptionnel* qu'est l'origine.

NOTE. — La frontière du domaine d'holomorphie (30.2) de $u(x)$ se compose de $K$ et de l'hypersurface

(30.3) $$|x_2| = |x_1|.$$

Celle-ci est *le lieu des bicaractéristiques*

$$x_2 = cx_1, \qquad |c| = 1$$

*issues des singularités* de $w(x)$ :

$$x_2 = x_1^2, \qquad |x_1| = 1.$$

D'autre part *le plan tangent* à l'hypersurface (30.3) :

$$\mathrm{Re}(p.dx) = 0 \qquad \text{(Re, partie réelle)}$$

*vérifie l'équation des caractéristiques*

$$h(x, p) = 0,$$

puisque

$$p = (\bar{x}_1, -\bar{x}_2), \qquad h(x, p) = x_1 p_1 + x_2 p_2 \qquad (\bar{x}_1, \text{imag. conj. de } x_1).$$

Ce sont là deux propriétés générales des singularités des solutions du problème linéaire analytique de Cauchy : les théorèmes du présent article nous permettront de les démontrer ultérieurement.

## BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. Bochner et W. T. Martin, *Several complex variables*, Princeton, Princeton University Press, 1948.

[2] E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1922.

[3] H. Cartan et P. Thullen, *Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexen Veränderlichen* (*Math. Ann.*, t. 106, 1932, p. 617-647).

[4] Éd. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. 2, 7ᵉ édition, Paris, Gauthier-Villars, 1949.

[5] W. F. Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, Zweite Auflage, Berlin, B. G. Teubner, 1929 (*Math. Wiss.*, Band 20, nº 2).

[6] I. Petrowsky, *Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen* [*Recueil math.* (*Mat. Sbornik*), 2ᵉ série, t. 44, 1937, p. 815-868].

[7] J. Schauder, *Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen* (*Fund. math.*, t. 24, 1935, p. 213-246).

Le présent article a été résumé dans :

[8] J. Leray, *C. R. Acad. Sc.*, t. 245, 1957, p. 1483.

Manuscrit reçu le 7 octobre 1957.