BULLETIN DE LA S. M. F.

PIERRE LELONG

Intégration sur un ensemble analytique complexe

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 239-262
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__239_0>

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 239 à 262.

INTÉGRATION SUR UN ENSEMBLE ANALYTIQUE COMPLEXE;

PAR

PIERRE LELONG.

Une partie A d'une variété analytique complexe $\mathcal{X}$ est appelée un ensemble analytique complexe si A est fermé sur $\mathcal{X}$ et si chaque point $a \in A$ possède un voisinage U_a dans lequel A peut être défini en annulant un système fini de fonctions holomorphes dans U_a. Un tel ensemble n'est pas en général, une variété. On appellera *point ordinaire* de A un point au voisinage duquel A est une sous-variété régulièrement et analytiquement plongée dans $\mathcal{X}$.

L'existence de points non ordinaires conduit à chercher si un ensemble analytique complexe A se comporte comme une chaîne finie pour la définition de l'intégrale

$$t(\varphi) = \int_A \varphi. \tag{1}$$

La forme φ sera prise dans l'espace $\mathcal{D}^0(\mathcal{X})$ des formes différentielles à coefficients continus, à support $K(\varphi)$ compact dans $\mathcal{X}$; on notera que φ est donc supposée définie non seulement sur A mais sur $\mathcal{X}$. Le but de ce travail est d'établir l'existence et des propriétés de l'opérateur $t(\varphi)$, qui avaient été énoncées succinctement dans la Note [6]; $t(\varphi)$ est un courant [1] (au sens de G. DE RHAM) qui a la continuité d'ordre nul et s'étend aux formes de $\mathcal{D}^0(\mathcal{X})$. Il aura les deux propriétés essentielles :

[1] *Cf.* [2] : Rappelons qu'un courant $t(\varphi)$ défini sur l'espace $\mathcal{D}(\mathcal{X})$ des formes à coefficients indéfiniment dérivables, à support compact dans $\mathcal{X}$, est dit continu d'ordre $s \geq 0$, si $t(\varphi_n) \to 0$ pour toute suite φ_n de formes, $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathcal{X})$, qui vérifient les conditions : *a.* les supports $K(\varphi_n)$ appartiennent à un compact fixe $K \subset \mathcal{X}$; *b.* on a $\lim_n m_n^\alpha = 0$ pour $\alpha \leq s$, m_n^α désignant le maximum du module des dérivées partielles d'ordre total α des coefficients de φ_n. Un courant continu d'ordre s s'étend à l'ensemble $\mathcal{D}^s(\mathcal{X})$ des formes à support compact dans $\mathcal{X}$, dont les coefficients ont des dérivées continues dans $\mathcal{X}$ jusqu'à l'ordre total s.

a. $t(\varphi)$ est un courant fermé;

b. $t(\varphi)$ est une somme graduée de courants positifs (fermés).

La notion de courant positif, définie dans [5] et [6] est étudiée plus particulièrement dans [7]; nous en rappellerons ici quelques propriétés qui, conjointement avec les résultats d'une étude [9] de R. Remmert et K. Stein des ensembles analytiques complexes, concourent à la démonstration de l'existence et des propriétés indiquées pour $t(\varphi)$. La restriction de $t(\varphi)$ aux formes de $\mathcal{D}^0(X)$ dont le support ne contient que des points ordinaires de A étant connue, on résoudra un problème de prolongement d'un courant fermé par un courant fermé. Ce problème, intéressant en lui-même, sera étudié indépendamment de la structure complexe, mais on se limitera à l'étude d'un cas particulier seul utile ici.

Le courant $t(\varphi)$ obtenu est relatif à l'ensemble A considéré comme un ensemble de points de X : pour un diviseur $f^q = 0$, il aura la même valeur quel que soit l'entier q positif. De l'existence de $t(\varphi)$ et de ses propriétés découlent l'existence et des propriétés précises des mesures positives $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ qui sont les aires (finies sur tout compact de X) de dimensions complexes $1, \ldots, p$ qu'on peut attribuer à un ensemble analytique complexe A de dimension complexe maxima p. On avait déjà rencontré ces propriétés dans [3] pour $p = n - 1$: elles sont des conséquences directes du fait que t est la somme graduée de courants positifs fermés.

1. Prolongement d'un courant. — Soit V^m une variété à structure réelle, indéfiniment différentiable, de dimension m, à base dénombrable de voisinages. Une forme φ sera dite de classe (C^p) sur V^m si ses coefficients ont des dérivées continues, jusqu'à l'ordre p compris, par rapport aux coordonnées locales; $K(\varphi)$ désignera le support (supposé compact) d'une forme φ; $\mathcal{D}^p(\Omega)$ [respectivement $\mathcal{D}(\Omega)$] désigneront l'ensemble des formes (C^p) [respectivement (C^∞)], à support compact dans l'ouvert Ω. Un courant $t(\varphi)$ est dit défini dans Ω s'il est défini sur les formes de $\mathcal{D}(\Omega)$; on désignera par $\mathcal{D}'^p(\Omega)$ l'ensemble des courants définis et continus d'ordre p, $(p \geq 0)$, dans Ω.

Un courant défini sur V^m induit un courant sur un ouvert Ω de V^m. On est alors conduit à la définition :

Définition. — *Un courant $\tilde{t}(\varphi)$ défini dans V^m est dit un prolongement du courant $t(\psi)$ défini dans Ω si $t(\psi)$ est la restriction de $\tilde{t}$ aux formes de $\mathcal{D}(\Omega)$.*

En général, il ne sera pas possible de trouver un prolongement $\tilde{t}$ d'un courant t donné dans Ω, et si $\tilde{t}$ existe, il ne sera pas unique.

Nous ne considérerons ici que des courants et des prolongements continus d'ordre zéro. La norme $\|\psi\|$ d'une forme $\psi \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ sera définie comme le maximum du module des coefficients de ψ. La norme d'un courant $t \in \mathcal{D}'^0(\Omega)$ dans un ouvert G (non nécessairement contenu dans Ω) sera défini par

$$\| t \|_G = \sup | t(\psi) |$$

pour les formes $\psi \in \mathcal{D}(\Omega \cap G)$ pour lesquelles on a $\| \psi \| \leq 1$.

L'énoncé qui suit est classique, quand t est une mesure :

Proposition 1. — *Étant donné un ouvert Ω sur une variété V^m, pour qu'un courant $t \in \mathcal{D}'^0(\Omega)$ (c'est-à-dire défini et continu d'ordre nul dans Ω) admette un prolongement dans $\mathcal{D}'^0(V^m)$, il faut et il suffit que $\| t \|_G$ soit fini pour tout domaine G d'adhérence compacte dans V^m.*

La condition est évidemment nécessaire car si $\tilde{t} \in \mathcal{D}'^0(V^m)$ prolonge t, $\tilde{t}$ est défini sur les formes de $\mathcal{D}(\Omega \cap G)$ et l'on a

$$\tilde{t}(\psi) = t(\psi) \qquad \text{pour} \quad \psi \in \mathcal{D}(\Omega \cap G),$$

ce qui entraîne

$$\| t \|_G \leq \| \tilde{t} \|_G. \tag{2}$$

On établira la réciproque en construisant un prolongement particulier $\tilde{t}_0$ de t. Soit $\varphi \in \mathcal{D}^0(V^m)$, et G un domaine contenant le support $K(\varphi)$ et d'adhérence $\overline{G}$ compacte dans V^m. On considère un recouvrement localement fini de $\Omega \cap G$ par des ouverts U_j d'adhérence compacte dans $\Omega \cap G$; soit $\beta_j(x)$ une partition de l'unité, de classe (C^∞), subordonnée au recouvrement $\{ U_j \}$. La forme

$$\psi = \sum_1^N \varphi \beta_j$$

appartient à $\mathcal{D}(\Omega \cap G)$ et par suite

$$t\left(\sum_1^N \varphi \beta_j \right) = \sum_1^N t(\varphi \beta_j) \tag{3}$$

est défini quel que soit N. Soit S'_N la somme des termes, d'indices $j' \leq N$, qui sont positifs dans (3), S''_N la somme des termes négatifs. On a

$$S'_N = t\left(\sum_{j'} \varphi \beta_{j'} \right) \leq \| t \|_G \cdot \| \varphi \|,$$

$$| S''_N | = \left| t\left(\sum_{j''} \varphi \beta_{j''} \right) \right| \leq \| t \|_G \cdot \| \varphi \|.$$

D'où

$$\sum_{j=1}^{\infty} | t(\varphi \beta_j) | \leq 2 \| t \|_G \cdot \| \varphi \|.$$

Posons

$$\tilde{t}_0(\varphi) = \sum_j t(\varphi\beta_j), \tag{4}$$

la série étant absolument convergente. On remarque que sa somme n'est pas modifiée si on la calcule pour un autre recouvrement $\{ V_s \}$ de $\Omega \cap G$ de même nature que $\{ U_j \}$ et pour une partition de l'unité γ_s subordonnée à V_s; il suffit en effet de comparer les deux séries obtenues à la série $\sum_{j,s} t(\varphi\beta_j\gamma_s)$.

Montrons alors :

1° $\tilde{t}_0(\varphi)$ *défini par* (4) *est un courant continu d'ordre nul dans* V^m. En effet $\tilde{t}_0$ est une opération linéaire sur les formes de $\mathcal{D}(V^m)$ et l'on a de plus

$$|\tilde{t}_0(\varphi_n)| \leq \| t \|_G \cdot \| \varphi_n \| \tag{5}$$

pour une suite $\varphi_n \in \mathcal{D}(G)$, ce qui montre que $\tilde{t}_0$ est continu d'ordre zéro.

2° $\tilde{t}_0$ *prolonge* t : on a en effet pour $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\tilde{t}_0(\psi) = \sum_{j=1}^{j=\nu} \tilde{t}_0(\psi\beta_j) = t(\psi),$$

la somme étant finie puisque le support $K(\psi)$ est compact dans Ω.

Définition. — *L'ensemble E étant fermé sur V^m, nous appellerons famille (F_r) un ensemble de fonctions $\alpha_r(x)$ dépendant d'un paramètre $r > 0$ et ayant les propriétés suivantes :*

(a_1) *$\alpha_r(x)$ est défini, de classe (C^∞) pour $x \in V^m$; on a $0 \leq \alpha_r(x) \leq 1$.*

(a_2) *Il existe un ouvert ω'_r de V^m contenant E sur lequel on a $\alpha_r(x) = 1$; on a $\alpha_r(x) = 0$ hors d'un ouvert $\omega_r \supset \omega'_r$.*

(a_3) *Quand r décroît, $\alpha_r(x)$ est fonction non croissante de r; quand r tend vers zéro, l'ouvert $\omega_r(x)$ tend vers E.*

En nous servant de cette définition, nous démontrerons :

3° *On a, pour toute famille (F_r) relative à l'ensemble fermé $E = V^m - \Omega$:*

$$\tilde{t}_0 = \lim t(1 - \alpha_r). \tag{6}$$

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(V^m)$; pour tout $r > 0$, α_r appartenant à (F_r), $\varphi(1 - \alpha_r)$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$, $t[(1 - \alpha_r)\varphi]$ est défini, et le courant $t(1 - \alpha_r)$ défini par $t(1 - \alpha_r)(\varphi) = t[(1 - \alpha_r)\varphi]$ s'applique aux formes $\varphi \in \mathcal{D}(V^m)$. Posons, r_q décroissant et tendant vers zéro :

$$\gamma_1 = 1 - \alpha_{r_1} \geq 0, \quad \ldots, \quad \gamma_q = \alpha_{r_{q-1}} - \alpha_{r_q} \geq 0.$$

On a sur Ω :

$$\sum_i \gamma_i(x) = 1,$$

$\gamma_i(x)$ est une partition de l'unité; si φ est une forme de support $K(\varphi)$ compact dans V^m et $g(x)$ une fonction (C^∞) à support compact dans V^m, valant 1 sur $K(\varphi)$, on aura, d'après (4) en posant $\gamma'_q = g\gamma_q$:

$$\tilde{t}_0(\varphi) = \sum_q t(\varphi\gamma'_q) = \sum_q t(\varphi\gamma_q) = \lim_n \sum_{q \leq n} t(\varphi\gamma_q) = \lim_{n=\infty} t[\varphi(1-\alpha_{r_n})]$$

qui établit (6). L'existence de $\tilde{t}_0$ avec les propriétés 1° et 2° établit la proposition 1.

2. Extension simple d'un courant continu d'ordre nul. — Nous utiliserons les expressions suivantes :

Définition. — 1° *Un courant t défini et continu d'ordre nul dans un ouvert Ω est dit borné en un point frontière m de Ω s'il existe un voisinage U de m tel que* $\| t \|_U = \sup | t(\varphi) |$ *pour* $\| \varphi \| = 1$, $\varphi \subset \mathcal{D}(\Omega \cap U)$, *soit fini.*

2° *Soit Ω un ouvert de V^m; on appellera extension simple d'un courant t défini et continu d'ordre nul dans Ω, borné aux points de V^m qui sont points frontières de Ω, le courant $\tilde{t}_0$ défini par*

$$(7) \qquad \tilde{t}_0(\varphi) = \lim_{r=0} t[(1-\alpha_r)\varphi]$$

pour une famille (F_r) relative à une partie fermée de $E = V^m - \Omega$, contenant $E \cap K(\varphi)$.

Pour que l'extension simple $\tilde{t}_0$ existe il faut et il suffit que t soit borné en tout point frontière commun à E et à Ω sur V^m; on dit encore que t est convergent et converge selon (7) vers l'extension simple $\tilde{t}_0$.

Proposition 2. — *Pour qu'un courant $\tilde{t} \in \mathcal{D}'^0(V^m)$ qui prolonge $t \subset \mathcal{D}'^0(\Omega)$ soit l'extension simple de t, il faut et il suffit que pour tout domaine G d'adhérence compacte dans V^m, on ait*

$$(8) \qquad \| \tilde{t} \|_G = \| t \|_G,$$

c'est-à-dire que le prolongement n'augmente pas la norme.

En effet on a $\| \tilde{t} \|_G \geq \| t \|_G$ d'après (2) pour tout prolongement $\tilde{t} \in \mathcal{D}'^0(V^m)$.

Pour l'extension simple $\tilde{t}_0$, on a d'après (7) appliqué à $\varphi \in \mathcal{D}(V^m \cap G)$, satisfaisant à $\| \varphi \| < 1$:

$$\| \tilde{t}_0 \|_G = \sup_\varphi | \tilde{t}_0(\varphi) | = \sup_\varphi \left| \lim_{r=0} t[(1-\alpha_r)\varphi] \right| \leq \| t \|_G.$$

On a donc

$$\| t_0 \|_G = \| t \|_G \tag{9}$$

qui montre que l'extension simple n'accroit pas la norme. Réciproquement soit $\tilde{t} \in \mathcal{D}^0(V^m)$ un prolongement satisfaisant (8) pour tout domaine G d'adhérence $\overline{G}$ compacte dans V^m : $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe une forme $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, telle que l'on ait $\| \psi \| \leqq 1$ et

$$| t(\psi) | \geqq \| t \|_G - \varepsilon. \tag{10}$$

Soit φ une forme de $\mathcal{D}(V^m)$, G un domaine d'adhérence $\overline{G}$ compacte dans V^m et contenant le support $K(\varphi)$; soit (F_r) une famille de noyaux α_r, relative à $E_1 = \overline{G} - (\Omega \cap G)$: il existe une valeur $r_0 > 0$ telle que pour $r < r_0$, le support $K(\alpha_r)$ soit étranger à $K(\psi)$. On considère pour $r < r_0$ l'une des deux formes

$$\varphi_1 = \psi \pm \alpha_r \| \varphi \|^{-1} \varphi,$$

ψ et $\alpha_r \varphi$ ayant des supports disjoints. On a $\| \varphi_1 \| \leqq 1$, $\varphi_1 \in \mathcal{D}(V^m)$ et

$$\tilde{t}(\varphi_1) = t(\psi) \pm \tilde{t}[\alpha_r \| \varphi \|^{-1} \varphi].$$

On choisit alors le signe à prendre devant le second terme de manière que son signe soit celui de $t(\psi)$. On a dans ces conditions :

$$| \tilde{t}(\varphi_1) | = | t(\psi) | + \| \varphi^{-1} \| \, | \tilde{t}(\alpha_r \varphi) | \leqq \| t \|_G,$$

ce qui, compte tenu de (10), donne

$$| \tilde{t}(\alpha_r \varphi) | \leqq \varepsilon \| \varphi \|$$

et montre qu'on a

$$\lim_{r=0} \tilde{t}(\alpha_r \varphi) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \tilde{t}(\varphi) = \lim_{r=0} t[(1 - \alpha_r) \varphi];$$

$\tilde{t}$ coïncide donc avec l'extension simple $\tilde{t}_0$ définie par (7).

3. **Cas d'un courant fermé.** — Considérons maintenant le cas où $t \in \mathcal{D}'^0(\Omega)$, borné (donc convergent) aux points de la frontière E^* de Ω relative à V^m, est de plus un courant fermé, c'est-à-dire, vérifie

$$bt(\psi) = t(d\psi) = 0.$$

pour toute forme $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Soit $\tilde{t} \in \mathcal{D}^0(V^m)$ un prolongement de t dans V^m. On aura, $\alpha_r(x)$ étant une famille (F_r) relative à une partie fermée de $E = V^m - \Omega$ contenant $E \cap K(\varphi)$.

$$d[(1 - \alpha_r)\varphi] = -d\alpha_r \wedge \varphi + (1 - \alpha_r)\, d\varphi.$$

D'où

$$\tilde{t}(d\varphi) = \tilde{t}(\alpha_r\, d\varphi) + \tilde{t}(d\alpha_r \wedge \varphi) + \tilde{t}[d(1 - \alpha_r)\, \varphi].$$

Le dernier terme est nul car la forme $(1-\alpha_r)\varphi$ appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. On a donc

$$t(d\alpha_r \wedge \varphi) = \tilde{t}(d\varphi) - \tilde{t}(\alpha_r\, d\varphi). \tag{11}$$

En particulier, si $\tilde{t}$ est l'extension simple $\tilde{t}_0$:

$$t(d\alpha_r \wedge \varphi) = \tilde{t}_0(d\varphi) - \tilde{t}_0(\alpha_r\, d\varphi),$$
$$\lim_{r=0} t(d\alpha_r \wedge \varphi) = \tilde{t}_0(d\varphi). \tag{12}$$

Le courant $t \wedge d\alpha_r$ a son support dans Ω, pour $r > 0$; on peut l'identifier à un courant de $\mathcal{D}^0(V^m)$ nul en dehors du support de $d\alpha_r$. On obtient à partir de (12) :

Théorème 1. — *Pour qu'un courant t fermé, continu d'ordre nul dans l'ouvert Ω, borné sur tout domaine G d'adhérence $\overline{G}$ compacte dans V^m ait pour extension simple un courant fermé, il faut et il suffit que le courant*

$$\theta_r = t \wedge d\alpha_r$$

converge vers zéro sur tout domaine G quand $r \to 0$, α_r étant une famille (F_r) relative au compact $[V^m - \Omega] \cap \overline{G}$.

Il faut et il suffit encore qu'on ait dans les mêmes conditions :

$$\lim_{r=0} \| t\, d\alpha_r \|_G = 0. \tag{13}$$

Corollaire 1. — *Le courant $t \in \mathcal{D}^0(\Omega)$ étant fermé, pour qu'il ait une extension simple $\tilde{t}_0$ fermée, il faut et il suffit que $\varepsilon > 0$ étant donné, on puisse déterminer pour tout compact $\overline{G}$, et pour une famille (F_r) relative à $\overline{G} \cap E$, où $E = V^m - \Omega$, un nombre $r > 0$ tel qu'on ait :*

a. $\quad \| t(\alpha_r - \alpha_\rho) \|_G < \varepsilon$ *quel que soit* $\rho < r$;

b. $\quad \| t\, d\alpha_r \|_G < \varepsilon$.

Remarques. — 1° Le théorème 1 s'applique si V^m est supposé de classe (C^p), $p \geqq 2$, au lieu d'être (C^∞) : on choisira (F_r) de classe (C^p).

2° Si $E = V^m - \Omega$ n'est pas compact on peut le décomposer en une somme $\sum \overline{E_i}$ de compacts et écrire que les propriétés précédentes sont vérifiées séparément pour des familles $(F_{i,r})$ de noyaux $\alpha_{i,r}$ relatives aux $\overline{E_i}$, $\overline{E_i}$ étant obtenu à partir d'un recouvrement de E par des ouverts U_i et étant l'adhérence de $E_i = U_i \cap E$.

3° L'énoncé s'applique si $E = V^m - \Omega$ a un intérieur : l'extension simple y est alors un courant nul.

4. Cas où E est un sous-espace ou son image. — Interprétons la condition (13) en supposant que V^m est un domaine D de l'espace euclidien $R^m(x_1, \ldots, x_m)$, E étant un sous-espace R^s qu'on supposera défini par $[x_{s+1} = 0, \ldots, x_m = 0]$, $0 \leqq s \leqq m-1$. On prendra $\alpha_1(x_{s+1}, \ldots, x_m)$ de classe (C^∞), $0 \leqq \alpha_1 \leqq 1$, α_s étant nul en dehors de la boule unité de centre l'origine dans $R^{m-s}(x_{s+1}, \ldots, x_m)$, et valant 1 sur un voisinage de cette origine. On construira une famille (F_r) par homothétie en posant pour $0 < r < 1$:

$$\alpha_r(x_{s+1}, \ldots, x_m) = \alpha_1\left(\frac{x_{s+1}}{r}, \ldots, \frac{x_m}{r}\right). \tag{14}$$

Si L majore les modules des coefficients de la forme $d\alpha_1$, nous aurons

$$\| d\alpha_r \| \leqq L r^{-1}. \tag{15}$$

D'autre part G étant un domaine d'adhérence compacte dans D nous noterons $\| t \|_G^\rho$ la norme de $t \subset \mathcal{D}'^0(\Omega)$ dans l'ouvert des points de G dont la distance δ à R^s satisfait à $0 < \delta < \rho$. On a, d'après (15) :

$$\| t\, d\alpha_r \|_G \leqq L r^{-1} \| t \|_G^r.$$

Nous énoncerons donc :

Théorème 2. — *Pour que le courant $t \in \mathcal{D}'^0(\Omega)$, [où $\Omega = D - R^s$ s'obtient en enlevant du domaine $D \subset R^m$ $(0 \leqq s \leqq m-1)$, un sous-espace R^s], fermé dans Ω, ait une extension simple fermée dans D, il faut et il suffit que $\| t \|_G$ soit borné pour tout domaine G d'adhérence compacte dans D et qu'on ait $\lim_{r=0} \| t\, d\alpha_r \|_G = 0$, pour une famille (F_r) construite selon (14) par homothétie.*

Il suffit pour que ces conditions soient réalisées qu'on ait

$$\lim_{r=0} r^{-1} \| t \|_G^r = 0, \tag{16}$$

où $\| t \|_G^r$ est le sup *de $| t(\varphi) |$ pour $\| \varphi \| \leqq 1$, le support $K(\varphi)$ étant dans G et ne comportant que des points dont la distance δ à R^s satisfait $0 < \delta < r$.*

L'énoncé qui suit, relatif à la même configuration, sera utilisé plus loin :

Théorème 3. — *Si t est un courant fermé, continu d'ordre nul, dans l'ouvert $\Omega = D - R^s$ $(0 \leqq s \leqq m-1)$ de R^m, si à tout domaine G d'adhérence compacte dans D, on peut associer un nombre fini $k(G)$, tel qu'on ait pour toute boule $B \subset G$:*

$$\| t \|_B \leqq k(G)\, r^\gamma, \tag{17}$$

r étant le rayon de B, et si $\gamma > s+1$, la simple extension de t existe et est un courant fermé dans D.

En effet recouvrons R^m par un pavage dont les éléments sont des cubes (à m dimensions) égaux, de côté $2r$, le sommet d'un des éléments étant un point O pris dans R^s, et indépendant de r. Le nombre des éléments qui contiennent un point de $G \cap R^s$ est $N_r < L_1 r^{-s}$, L_1 étant indépendant de r pour r inférieur à une valeur r_0. Les boules égales $\beta_i^{(r)}$ circonscrites à ces éléments ont une somme $\sum_i \beta_i^{(r)}$ qui appartient à un domaine G_1 compact dans D. On a alors d'après (17) :

$$\| t \|_G \leqq \sum_i \| t \|_{\beta_i^{(r)}} \leqq N_r . k(G_1) \left(r\sqrt{m}\right)^\gamma \leqq k'(G_1)\, r^{\gamma - s}.$$

La condition (16) est donc satisfaite pour $\gamma > s+1$, ce qui établit l'énoncé.

On appliquera plus généralement en opérant une application biunivoque de classe (C^p) $(p \geqq 2)$. L'image d'un courant t continu d'ordre nul, par une telle application $\xi = \mu(x)$ est le courant défini par $\mu t[\psi_\xi] = t[\mu^* \psi]$ où $\mu^* \psi$ est obtenu en substituant x à ξ dans la forme ψ; μt est continu d'ordre nul et fermé si t l'est. On supposera que l'ensemble E^* des points frontières (relatifs à V^m) de Ω peut localement être appliqué par une transformation de classe (C^p) dans un sous-espace R^s de l'espace euclidien R^m. On obtient ainsi :

Théorème 4. — *Soit V^m une variété de classe (C^p), $(p \geqq 2)$, à base dénombrable de voisinages ouverts, Ω un ouvert de V^m, $E = V^m - \Omega$, E^* étant l'ensemble des points frontières de Ω sur V^m. Pour que le courant fermé t, continu d'ordre nul dans Ω se prolonge par extension simple en un courant fermé sur V^m, il suffit :*

a. qu'il existe un recouvrement de E^* par des ouverts U_i, U_i étant appliqué par un homéomorphisme μ_i de classe C^p dans un domaine D de R^m, et $E^* \cap U_i$ étant appliqué dans un sous-espace $R^s (0 \leqq s \leqq m-1)$.

b. que les courants t_i images par μ_i de t dans D satisfassent à la majoration (16) *ou à la majoration* (17) *pour tout domaine G d'adhérence compacte dans D.*

4. Courants positifs. — Nous supposerons maintenant que V^m est un domaine D de l'espace numérique complexe $C^n (m = 2n)$.

Définition. — *Un courant t dans D sera dit positif de degré q, de dimension complexe $n - q (0 \leqq q \leqq n)$ si :*

1° *Il est homogène, de degré (q, q) par rapport aux dz_i, $d\bar{z}_j$, c'est-à-dire nul sur les formes homogènes de $\mathcal{D}(D)$ qui ne sont pas de degré $(n-q, n-q)$.*

2° *Pour tout système de formes*

$$\omega_k = \sum_{i=1}^{n} a_k^i(M)\, dz_i \qquad (k = 1, \ldots, n-q)$$

à coefficients $a_k^i(M)$ (C^∞) *dans* D, *le courant* (*de degré maximum*)

$$t \wedge \left(\frac{i}{2}\right)^{n-q} \omega_1 \wedge \bar{\omega}_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{n-q} \wedge \bar{\omega}_{n-q}$$

est une mesure positive.

On désignera par Θ_q^+ la classe des courants positifs de degré q : Θ_n^+ est l'ensemble des mesures positives. Une forme sera dite positive si elle a des coefficients continus et si elle représente un courant positif; les formes positives de degré zéro sont les fonctions continues positives. Les courants positifs sont réels.

Un *p-vecteur complexe* A^p par le point $z^0 = (z_i^0)$ est la variété analytique complexe d'équations

$$z_i = z_i^0 + \sum_{1}^{p} a_i^k u_k \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{18}$$

Les a_i^k sont les *coordonnées* de A^p, les déterminants

$$\alpha_{(i)} = |a_i^k|_{i=i_1,\ldots,i_p}^{k=1,\ldots,p} \qquad [(i) = (i^1 < i_1 < \ldots < i_p)]$$

sont les *paramètres* de A^p. Un changement de représentation : $u_k = \sum_{j=1}^{j=p} c_k^j v_j$ donne les nouveaux paramètres

$$\beta_{(i)} = \gamma \cdot \alpha_{(i)}$$

où γ est le déterminant $|c_k^j|$; s'ils correspondent à une représentation unitaire de (18) on aura $\sum_{(i)} |\beta_{(i)}|^2 = 1$, d'où

$$\beta_{(i)} = \alpha_{(i)} \sigma_\alpha^{-1},$$

où $\sigma_\alpha^2 = \sum_{(i)} |\alpha_{(i)}|^2$. Au p-vecteur A^p nous ferons correspondre la forme différentielle suivante, égale sur A^p à l'élément d'espace $d\tau_{2p}(A^p)$ de A^p :

$$\omega(A^p) = \left(\frac{i}{2}\right)^p dv_1 \wedge d\bar{v}_1 \wedge \ldots \wedge dv_p \wedge d\bar{v}_p$$

$$= k_p \sum_{(i)(\bar{j})} \beta_{(i)} \bar{\beta}_{(j)} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_p}$$

où l'on pose $k_p = \left(\frac{i}{2}\right)^p (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$; c'est une forme positive; son adjointe est ${}^*\omega(A^p) = \omega(B^{n-p})$, B^{n-p} étant le $(n-p)$-vecteur complexe orthogonal à A^p. On établit [6] et [7] :

Pour qu'un courant t homogène de degré (p, p) soit positif, il faut et il suffit que pour tous les p-vecteurs A^p, la distribution (au sens de L. Schwartz) *:*

$$(19) \qquad T(A^p)(f) = \int t \wedge {}^*\omega(A^p) f = \int k_p^{-1} \left[\sum_{(i)(\bar{j})} t_{(i)(\bar{j})} \beta_{(i)} \bar{\beta}_{(j)} \right] f \, d\tau_{2n}$$

soit une mesure positive sur les $f \in \mathcal{D}(D)$; dans (19) on suppose le courant t écrit sous la forme

$$t = \sum_{(i)(\bar{j})} t_{(i)(\bar{j})} dz_{i_1} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_p}.$$

A un courant $t \in \Theta_p^+$ dans D correspond donc une mesure positive dans D, soit $T(A^p)$ donnée par (19), et fonction du p-vecteur A^p considéré.

Un système (Σ) de $N = (C_n^p)^2$ p-vecteurs A_s^p, $s = 1, 2, \ldots, N$, $[A_s^p = (a_{j,s}^k)]$, sera dit *régulier* si le déterminant, d'ordre N :

$$\Delta = \left| \alpha_{(i),s} \cdot \bar{\alpha}_{(j),s} \right|_{(i)(j)}^{1 \leq s \leq N}$$

n'est pas nul. On montre (*cf.* [7]) que $\Delta = 0$ définit une variété algébrique dans l'espace des coordonnées $a'^{\,k}_{j,s}$, $a''^{\,k}_{j,s}$, où l'on écrit $a_{j,s}^k = a'^{\,k}_{j,s} + i a''^{\,k}_{j,s}$. On en déduit :

Proposition 3. — *Les nombres $(a_{i,0}^k)$ $(1 \leq k \leq p, 1 \leq i \leq n)$ ainsi que $\varepsilon > 0$ étant donnés, on peut toujours trouver un système régulier (Σ) de N p-vecteurs $A_s^p(a_{i,s}^k)$ pour lesquels on a*

$$|a_{i,s}^k - a_{i,0}^k| < \varepsilon.$$

Si les $a_{i,0}^k$ correspondent à une représentation unitaire d'un p-vecteur A_0^p non dégénéré, on pourra choisir les $a_{i,s}^k$ de manière qu'ils correspondent à des représentations unitaires des A_s^p d'un système régulier (Σ).

A un système régulier (Σ) il correspond des coefficients numériques $h_{(i)(\bar{j})}^s$ tels qu'on ait par la résolution des N équations analogues à (18) :

$$(20) \qquad T_{(i)(\bar{j})}(f) = \int t_{(i)(\bar{j})} f \, d\tau_{2n} = \sum_s h_{(i)(\bar{j})}^s T[A_s^p](f).$$

Un courant positif est donc continu d'ordre nul; les distributions $T_{(i)(\bar{j})}$ relatives à ses coefficients $t_{(i)(\bar{j})}$ sont des mesures complexes; de plus elles sont majorées d'après (20) en fonction des mesures positives $T(A^p_\zeta)$. On obtient alors l'énoncé suivant :

PROPOSITION 4. — *A un système régulier* (Σ) *de p-vecteurs* A^p_ζ *il correspond un nombre* C_Σ *fini, tel que pour tout courant positif dans D et de degré p on ait*

$$\| t \|_D \leq C_\Sigma \sup_s \| T(A^p_\zeta) \|_D. \tag{21}$$

6. Intégration aux points ordinaires d'un ensemble analytique de dimension homogène. — Soit A un ensemble analytique complexe dans un domaine D de C^n : $a \in A$ sera dit point ordinaire de A s'il existe un voisinage U_a de a et une transformation biunivoque analytique complexe $\zeta = F(z)$ telle que $F[A \cap U_a]$ soit l'intersection de $F(U_a)$ avec un sous-espace complexe $C^{s(a)}$. L'ensemble des points ordinaires de A sera désigné par A^*.

La *dimension complexe* $d(a)$ de A en $a \in A$ est définie (*cf.* [9]) par $d(a) = n - q_a$, où q_a est le maximum de l'entier q tel qu'il passe par a un q-vecteur A^q non dégénéré, et que a soit point isolé de l'intersection $A \cap A^q$. En un point ordinaire, $d(a) = s(a)$. On peut encore définir (²) $d(a)$ comme une fonction à valeurs entières positives, semi-continue supérieurement sur A et valant $s(a)$ aux points ordinaires de A. Le maximum de $d(a)$ pour $a \in A$ est appelé la *dimension* (*complexe*) *de A; A* est dit de *dimension homogène p*, si $d(a) = p$ en tout point a de A. Nous étudierons d'abord l'intégration d'une forme φ sur un tel ensemble. L'ensemble $E = A - A^*$ des points non ordinaires de A est fermé et constitue (³) un ensemble analytique dans D, de dimension au plus $p - 1$.

DÉFINITION. — *Soit A un ensemble analytique de dimension homogène p, dans D et* $\Omega = D - [A - A^*] = D - E$ *l'ouvert de D obtenu en retirant de D les points non ordinaires de A. On appellera courant d'intégration sur les points ordinaires de A dans D le courant*

$$t_0(\varphi) = \int_{A^*} \varphi$$

défini sur les formes $\varphi \in \mathcal{D}^0(\Omega)$, *à support compact dans* $D - E = \Omega$.

La définition précédente est justifiée par le fait que le support $K(\varphi)$ étant compact dans Ω, $A^* \cap K(\varphi)$ se compose d'une réunion *finie* de variétés. Soit $\{ U_j \}$ un recouvrement localement fini de Ω par des domaines d'adhérence compacte dans Ω, les U_j qui intersectent A^* étant choisis de manière qu'il existe un isomorphisme analytique $\zeta = \mu_j(z)$ appliquant $l_j = U_j \cap A$ sur un ouvert $l'_j = \mu_j(l_j)$ d'un sous-espace C^p_ζ. Alors on a pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, α_j étant une

(²) *Cf.* [9] : c'est une conséquence du théorème 3 de [9].
(³) *Cf.* [1], exposé IX: ainsi que [8] et [9].

partition (C^∞) de l'unité dans Ω subordonnée à $\{U_j\}$:

$$(22) \qquad t_0(\varphi) = \sum_j \int_{l_j} \varphi \alpha_j = \sum_j \int_{l'_j} \mu_j^*(\alpha_j \varphi) = \sum_j \int_{l'_j} \alpha'_j \varphi'_j,$$

où $\alpha'_j = \mu_j^* \alpha_j$, $\varphi'_j = \mu_j^* \varphi$. La somme ne comprend qu'un nombre fini de termes non nuls. De (22) résulte alors :

1° t_0 *est un courant homogène de degré* $(n-p,\ n-p)$. En effet il en est ainsi de chacun des termes qui figurent au second membre de (22);

2° t_0 *est un courant fermé :* en effet on a

$$t_0(d\psi) = \sum_j \int_{l_j} \alpha_j d\psi = \sum_j \int_{l_j} d(\alpha_j \psi) - \sum_j \int_{l_j} d\alpha_j \wedge \psi.$$

Les termes de la première somme sont nuls d'après

$$\int_{l_j} d(\alpha_j \psi_j) = \int_{l'_j} d(\alpha'_j \psi'_j) = 0.$$

Ceux de la seconde le sont dans leur ensemble d'après

$$\sum_j \alpha_j = 1 \qquad \sum_j d\alpha_j = 0;$$

3° t_0 *est un courant positif.* En effet de la définition donnée plus haut il résulte (*cf.* [7]) que l'image d'un courant positif par un isomorphisme analytique complexe est un courant positif. Il suffit alors de montrer que le courant

$$\int_{l'_j} \mu_j^*(\alpha_j \varphi)$$

qui figure dans (22) appartient à Θ^+_{n-p} : il consiste à intégrer la forme φ, multipliée par une fonction $\alpha'_j \geqq 0$, à support compact, sur le sous-espace C^p_ζ. On a bien

$$\int_{C^p} \alpha'_j \varphi \geqq 0$$

pour $\alpha'_j \geqq 0$, $\varphi = \left(\dfrac{i}{2}\right)^p \omega_1 \wedge \bar\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p \wedge \bar\omega_p$, les $\omega_k (1 \leqq k \leqq p)$ ayant l'expression $\omega_k = \sum_{i=1}^{n} a^i_k\, d\zeta_i$, où les coefficients a^i_k sont des fonctions complexes continues, et C^p_ζ est défini par $\zeta_{p+1} = 0, \ldots, \zeta_n = 0$.

7. **Majoration du courant** t_0. — Les hypothèses demeurant les mêmes

sur A, on va majorer le courant

$$t_0(\varphi)=\int_{A^*}\varphi$$

défini, fermé, positif (donc continu d'ordre nul) dans l'ouvert $\Omega=D-E$, où $E=A-A^*$. Soit m_0 un point de A (non nécessairement dans A^*). Il existe un $(n-p)$-vecteur complexe A_0^{n-p} par m_0 tel que $A\cap A_0^{n-p}$ ait m_0 comme point isolé. Si m_0 est pris pour origine, A_0^{n-p} étant défini par $z_1=z_2=\ldots=z_p=0$, il existe un voisinage (U_0) de m_0 et un ensemble analytique A' défini par $n-p$ équations dans (U_i) :

$$(23)\qquad f_{p+j}(z_1, z_2, \ldots, z_n)=0 \qquad (j=1, \ldots, n-p),$$

les f_{p+j} étant holomorphes dans (U_0), de manière qu'on ait $(A\cap U_0)\subset A'$.

Les f_{p+j} peuvent être pris égaux à des pseudo-polynomes

$$f_{p+j}\equiv(z_{p+j})^{\lambda_j}+\sum_{s=\lambda_j-1}^{0} C_{p+j}^{s}(z_1, \ldots, z_p)\, z_{p+j}^{s}=0,$$

les coefficients C_{p+j}^{s} étant holomorphes au voisinage de l'origine et s'annulant en celle-ci. Il en résulte que $m_0\subset A'$ est *point isolé* de $A'\cap A_0^{n-p}$. Nous supposerons maintenant l'origine quelconque, m_0 ayant des coordonnées z_i^0 et A_0^{n-p} étant représenté par des équations

$$(24)\qquad z_i=z_i^0+\sum_k \alpha_{i,0}^{k}\, u_k \qquad (1\leqq k\leqq n-p),$$

où les $a_{i,0}^{k}$ correspondent à une représentation unitaire de A_0^{n-p}. Étudions alors l'intersection de A$'$ avec un $(n-p)$-vecteur A^{n-p} défini par

$$(24')\qquad z_i=z_i'+\sum_k a_i^k u_k$$

sous les hypothèses

$$(25)\qquad |a_i^k-a_{i,0}^{k}|<\varepsilon; \qquad |z_i'-z_i^0|<\varepsilon'$$

qui définissent une famille $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ de A^{n-p} voisins de A_0^{n-p}.

Par substitution dans (23) des expressions (24$'$) on obtient un système

$$(26)\qquad \psi_j(z_i' ; a_i^k ; u_k)=0 \qquad (j=1, \ldots, n-p)$$

où les ψ_j sont continus des variables indiquées. Pour les valeurs $z_i'=z_i^0$, $a_i^k=a_{i,0}^{k}$, ce système admet par rapport aux inconnues $u_1, \ldots, u_{n-p}$, la solution isolée $u_k=0$; il existe alors une boule $b:\sum_1^{n-p}|u_k|^2<\rho^2, \rho>0$ telle qu'on

(¹) *Cf.* [9], théorème 1.

ait $\sum_j |\psi_j|^2 \geqq m > 0$ sur la frontière de b pour les valeurs $[z'_i = z_i^0 ;\ a_i^k = a_{i0}^k,]$ des z'_i, et des a_i^k considérées comme des paramètres, et que $u_k = 0$ soit la seule solution du système dans b. Il existe donc une famille $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ définie par (25), $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$, de $(n-p)$-vecteurs définis par (24') tels qu'on ait $\sum_j |\psi_j|^2 \geqq \frac{m}{2} > 0$ pour $\sum_1^{n-p} |u_k|^2 = \rho^2$, c'est-à-dire sur la frontière de b considérée dans les A^{n-p} appartenant à $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$. Dans ces conditions pour $A^{n-p} \in \Phi(\varepsilon, \varepsilon')$, $A^{n-p} \cap A'$ est un ensemble analytique dans b qui ne contient pas de points dans un voisinage de la frontière de b : c'est alors un ensemble analytique de dimension zéro ([5]), donc constitué de points isolés. Leur nombre, chacun d'eux étant affecté d'une multiplicité positive, peut être calculé par l'intégrale de Kronecker du système (26) dans b; ce nombre est constant et égal à la multiplicité $N'(m_0)$ du point m_0 sur $A' \cap A_0^{n-p}$. On obtient donc :

Proposition 5. — *Si m_0 appartient à un ensemble analytique A, de dimension p en m_0, il existe un $(n-p)$-vecteur A_0^{n-p}, une famille $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ définie par (25) de A^{n-p} voisins, un nombre $\rho > 0$, tels que l'intersection $A^{n-p} \cap A'$ ne contienne dans b définie par les équations (24) et $\sum_1^{n-p} |u_k|^2 < \rho^2$, que des points isolés dont le nombre est borné [par $N'(m_0)$ défini plus haut].*

On en déduit :

Proposition 6. — *Si m_0 appartient à l'ensemble analytique A, de dimension homogène p dans D, il existe une boule B_0 de centre m_0, un nombre $k_1(B_0)$ fini et une famille $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ de $(n-p)$-vecteurs complexes A^{n-p} tels que $t_0(\varphi)$ étant le courant d'intégration sur les points ordinaires de A, on ait*

$$\| T_0(A^{n-p}) \|_{B'} < k_1(B_0)\, r'^{2p} \tag{27}$$

pour la mesure positive $T_0(A^{n-p})$ associée à t_0 et à un $(n-p)$-vecteur quelconque de $\Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ et pour toute boule B', de rayon r' contenue dans B_0.

Faisons la démonstration pour la boule B_0 elle-même : la configuration étant celle de la proposition 5, on choisira son rayon r satisfaisant à

$$0 < r < \inf\left(\varepsilon', \frac{\rho}{2}\right)$$

et assez petit pour que B_0 soit dans (u_0). Cela fait, si le point q de coordonnées $z_i^{(q)}$ appartient à B_0, les $A^{n-p} \in \Phi(\varepsilon, \varepsilon')$ pour lesquels on choisit $z'_i = z_i^{(q)}$

([5]) *Cf.* [9], théorème 7.

dans (24′) coupent B_0 en des points pour lesquels on a $\sum |u_k|^2 < \rho^2$. On a donc

$$[A^{n-p} \cap B_0 \cap A] \subset [A^{n-p} \cap B_0 \cap A'],$$

où la seconde intersection comprend au plus $N'(m_0)$ points.

Il est alors aisé d'en déduire (27) pour B_0. Fixons $A^{n-p} \subset \Phi(\varepsilon, \varepsilon')$; si A^{n-p} est la direction de $(n-p)$-vecteur $[z_1 = z_1^0, \ldots, z_p = z_p^0]$, on a, pour $f \in \mathcal{D}(B_0 \cap \Omega)$:

$$(28) \qquad T_0(A^{n-p})(f) = \int_\sigma \left(\frac{i}{2}\right)^p f\, dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_p \wedge d\bar{z}_p$$

où $\sigma = A^* \cap K(f)$ est une somme finie de variétés. Au-dessus d'un point $\zeta = (z_1, \ldots, z_p)$ de C^p (on pose $C^n = C^p \times C^{n-p}$), il y a au plus $N'(m_0)$ points de σ, et ceci pour $|\zeta| < r$. Or ζ parcourt dans C^p une boule de rayon r, de mesure $r^{2p}\tau_{2p}(1)$, où $\tau_{2p}(1)$ est la mesure de la boule unité de C^p. On a donc pour $|f| \leqq 1$,

$$(29) \qquad \| T_0(A^{n-p}) \| \leqq N'(m_0)\, \tau_{2p}(1)\, r^{2p} = k_1(B_0)\, r^{2p},$$

ce qui établit (27) pour B_0, et aussi pour toute boule $B' \subset B_0$, le nombre des points de $\sigma \cap B'$ projetés en ζ étant *a fortiori* borné par $N'(m_0)$.

En utilisant alors les propositions 3 et 4 on obtient :

COROLLAIRE 2. — *Sous les hypothèses de la proposition* 6, *il existe une boule B_0 de centre m_0, et un nombre fini $k(B_0)$ tel que pour toute boule $B' \subset B_0$ le courant d'intégration sur A^* satisfasse à*

$$(30) \qquad \| t_0 \|_{B'} \leqq k(B_0)\, r'^{2p},$$

r' étant le rayon de B'.

On arrive alors à l'énoncé suivant qui joue un rôle essentiel :

THÉORÈME 5. — *Soit A un ensemble analytique complexe dans un domaine D de C^n, de dimension homogène p, $(1 \leqq p \leqq n-1)$. A tout domaine G d'adhérence $\overline{G} \subset D$, il correspond un nombre fini $k(G)$ tel qu'on ait :*

$$(31) \qquad \| t_0 \|_B \leqq k(G)\, r^{2p}$$

pour toute boule $B \subset G$, t étant le courant d'intégration sur A^* et r le rayon de B.

En effet recouvrons le compact $\overline{G} \cap A$ par des boules ouvertes de rayons r_i, centrées sur A, notées $\beta_1, \ldots, \beta_\nu$; complétons par des boules $\beta_{\nu+1}, \ldots, \beta_\mu$ de manière à recouvrir $\overline{G}$, ces dernières étant prises d'adhérence compacte dans $D - A$. Soit $\sum_i \beta_i = G'$. On a

$$(32) \qquad \| t_0 \|_{G'} \leq \sum_i \| t_0 \|_{\beta_i} < \infty.$$

Si l'énoncé était en défaut, il existerait une suite $B_j \subset G$ de boules tendant vers une boule $B_l \subset \overline{G}$, et pour lesquelles $r_j^{-2p} \| t_0 \|_{B_j} \to +\infty$. Si le rayon r de B_l n'est pas nul, on aboutit à une contradiction avec (32). Si $r_j \to 0$, on a $B_l = m_0 \subset A \cap \overline{G}$, B_l étant réduite à un point m_0 ; alors, d'après le corollaire 2, B_j appartient à partir d'un certain rang j à une boule B_0 centrée en m_0 sur A, compacte dans D, pour laquelle (30) est vérifiée. On aboutit ainsi à une contradiction. L'énoncé est donc établi.

Résumons alors les propriétés du courant $t_0 \in \mathcal{D}'^0(\Omega)$, $\Omega = D - (A - A^*)$ sur les points ordinaires d'un ensemble analytique A de dimension homogène p défini dans un domaine D de C^n :

a. t_0 est un courant positif et fermé ;

b. $\| t_0 \|_G < \infty$;

c. $r^{-2p} \|_G t_0 \|_B < k(G)$

pour G d'adhérence compacte dans D et toute boule $B \in G$, r étant le rayon de B.

8. Intégration sur un ensemble analytique de dimension homogène. — Nous aurons à considérer des ensembles analytiques, réunions finies $\eta = \sum_i A_i$ d'ensembles analytiques dans D. La dimension de η sera le maximum de la dimension (complexe) des A_i. Un tel ensemble η est une réunion finie d'ensembles analytiques irréductibles dans G, pour tout domaine G d'adhérence compacte dans D.

DÉFINITION. — *Soit $\eta = \sum_i A_i$ une réunion finie d'ensembles analytiques irréductibles dans G sur lesquels on suppose : a. ils sont distincts ; b. aucun d'entre eux n'est contenu dans un autre ensemble de la réunion. Nous appellerons alors point ordinaire de η tout point m qui n'appartient qu'à un A_i et est point ordinaire sur cet A_i. Nous dirons que les A_i (irréductibles dans G) sont séparés s'ils satisfont aux conditions a et b.*

PROPOSITION 7. — *L'ensemble des points non ordinaires d'une réunion finie d'ensembles analytiques irréductibles dans D, de dimension complexe p au plus est contenu dans un ensemble analytique de dimension complexe p — 1 au plus dans D.*

Écrivons en effet

$$\eta = \sum_{i,k} A_i^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, p\,;\; i = 1, \ldots, i = i_k) \tag{33}$$

les A_i^k étant des ensembles irréductibles dans D, de dimension (homogène) k. A l'ensemble A_i^p associons l'ensemble $A_i'^{p-1}$ des points non ordinaires de A_i^p : c'est un ensemble analytique dans D de dimension au plus $p-1$. Considérons d'autre part l'intersection de deux composantes de (33), A_i^p, A_j^p, de même dimension : elle est un ensemble analytique A_{ij}^{p-1} de dimension complexe ([6]) $p-1$ au plus. Ainsi l'ensemble η' des points non ordinaires de η satisfait à

$$\eta' \subset \sum_{i,s} A_i^s + \sum_{i,j} A_{ij}^{p-1} + \sum_i A_i'^{p-1},$$

la première somme au second membre étant relative aux valeurs $0 \leqq s \leqq p-1$ de l'indice ; l'énoncé est donc établi.

Nous démontrerons maintenant :

Théorème 6. — *Soit η un ensemble analytique dans D, de dimension maxima $d \leqq p-1$ $(p \geqq 1)$; soit $\Omega = D - \eta$ et soit $t \in \mathcal{D}'^0(\Omega)$ un courant continu d'ordre nul, défini et fermé dans Ω. Si à tout domaine G d'adhérence compacte dans D il correspond un nombre fini $k(G)$ tel que pour toute boule $B \subset G$, on ait*

$$\| t \|_B < k(G)\, r^{2p-1+\lambda} \qquad (\lambda > 0) \tag{34}$$

alors la simple extension $\tilde{t}_0$ de t existe dans D et est un courant fermé.

En effet l'énoncé est vrai pour $d = 0$; η est alors formé de points isolés sur G; soit m_0 l'un d'entre eux, G_1 une boule de centre m_0, de rayon r_0 assez petit pour ne pas contenir d'autre point de η et être contenue dans G. Alors la norme $\| t \|_{G_1}^r$ de t dans l'ouvert constitué des points de G_1 pour lesquels la distance δ à m_0 vérifie $0 < \delta < r < r_0$, satisfait à $\| t \|_{G_1}^r \leqq k(G)\, r^{1+\lambda}$ et l'énoncé actuel découle du théorème 3, appliqué pour $s = 0$, $\gamma = 1 + \lambda$.

Procédons alors par récurrence en montrant que si le théorème 6 est vrai pour $d = k - 1$, il est vrai pour $d = k (\leqq p - 1)$.

Soit m_0 un point ordinaire de η où η est de dimension maxima $d = k$. Soit U_0 un domaine contenant m_0, choisi de manière qu'il existe un isomorphisme analytique $\zeta = \mu(z)$ tel que $\mu[\eta \cap U_0] \subset \mu[U_0] \cap C_\zeta^k$, où C_ζ^k est le sous-espace complexe $\zeta_{k+1} = 0, \ldots, \zeta_n = 0$, μ amenant m_0 à l'origine de C_ζ^n. Si g est un domaine contenant m_0, compact dans U_0, il existe deux nombres positifs finis, $0 < a < b$, tels que le rapport de la distance des images $\zeta^{(1)} = \mu(z^{(1)})$,

([6]) *Cf.* [8], p. 416.

$\zeta^{(2)} = \mu(z^{(2)})$ à la distance $|z^{(1)} - z^{(2)}|$ demeure compris entre a et b pour $z^{(1)}$ et $z^{(2)}$ pris dans g. Alors $t' = \mu t$ étant l'image du courant t dans $g' = \mu(g)$, on a $t'(\psi) = t(\mu^{\star}\psi.)$ Pour $\psi \in \mathcal{D}(g')$ on a par un calcul facile en supposant $b > 1$:

$$\| \mu^{\star}\psi \| \leqq [b^n n!]^2 \| \psi \| = L \| \psi \|;$$

$\mu^{\star}\psi$ appartient à $\mathcal{D}(g)$. De plus les points d'une boule de rayon r' dans g' proviennent d'une boule de rayon $r \leqq r' a^{-1}$.

Finalement l'image t' donnée par μ du courant t est un courant défini dans $g' - C_{\zeta}^{k}, (k \leqq p - 1)$, fermé, continu d'ordre nul et à tout domaine Γ d'adhérence compacte dans g', correspond $k(\Gamma)$ fini, tel qu'on ait

$$\| t' \|_{B'} \leqq k(\Gamma) r'^{2p-1+\lambda},$$

pour toute boule $B' \subset \Gamma$, r' étant le rayon de B'. Le théorème 3 (appliqué ici pour les valeurs $\gamma = 2p - 1 + \lambda$ et $s = 2k \leqq 2p - 2$) montre alors que t' a une extension simple à g' et que cette extension est un courant fermé de même norme que t' dans g'. Revenant à t par l'image μ^{-1}, on voit que t se prolonge par extension simple en un courant fermé en tout point ordinaire de η, où η est de dimension k. L'extension simple $\tilde{t}_0$ de t est donc connue et a même norme que t dans $D - \eta'$, où η' est l'ensemble des points non ordinaires des A_i^k de la décomposition (33), augmenté des A_j^q pour lesquels on a $q \leqq k - 1$; η' appartient à une réunion finie d'ensembles analytiques dans D de dimension au plus $k - 1$, et est une somme finie d'ensembles analytiques irréductibles, de dimension au plus $k - 1$ sur tout domaine d'adhérence compacte dans D. D'autre part les extensions simples successives n'augmentent pas la norme du courant, ceci d'après la proposition 2. La propriété à démontrer, supposée établie pour $d = k - 1$, est donc encore vraie pour $d = k (\leqq p - 1)$, ce qui établit l'énoncé par récurrence.

Nous donnerons alors la définition :

DÉFINITION. — *Soit A un ensemble analytique de dimension complexe homogène p, défini dans un domaine D. On appellera intégration sur A, d'une forme $\varphi \in \mathcal{D}^0(D)$, le courant positif, fermé, homogène de dimension complexe p, qui est l'extension simple du courant*

$$t_0(\varphi) = \int_{A^{\star}} \varphi \tag{35}$$

défini dans $\Omega = D - (A - A^{\star})$.

THÉORÈME 7 (*théorème d'existence*). — *Le courant* (35) *a une extension simple qui est un courant positif, homogène de dimension complexe p et fermé.*

En effet le théorème 6 s'applique ici car $E = A - A^{\star}$ est un ensemble analytique dans D de dimension $d \leqq p - 1$, et l'on a établi pour $t_0(\varphi)$ la propriété (34), λ ayant la valeur 1. De plus l'extension simple d'un courant positif est évidemment un courant positif de même dimension.

Remarque. — Si deux courants t et t' continus d'ordre nul, coïncident dans $D - \eta$, η étant une réunion d'ensembles analytiques de dimension maxima $d \leqq p - 1$, et si t et t' satisfont à (34), leurs extensions simples coïncident. On obtient donc, comme conséquence de la proposition 6 :

Théorème 8. — *Soit $A = \sum_i A_i$ un ensemble analytique dans D de dimension homogène p, décomposé en somme d'ensembles analytiques irréductibles (et séparés) dans D. Alors le courant d'intégration t sur A est la somme des courants t_i d'intégration relatifs aux A_i.*

9. **Cas général.** — Soit A un ensemble analytique de dimension maxima p dans D. Nous désignerons par A^{*s} l'ensemble des points ordinaires de A où la dimension de A est s.

Définition. — *On appelle courant d'intégration de la dimension (complexe) s $(1 \leqq s \leqq p)$, sur A l'extension simple $\tilde{t}^{(s)}$ du courant*

$$t^{(s)}(\varphi) = \int_{A^{*s}} \varphi. \tag{36}$$

où φ est pris dans $\mathcal{D}^0(\Omega)$, avec $\Omega = D - (\overline{A^{*s}} A'^s)$, $\overline{A^{*s}}$ étant l'ensemble des points non ordinaires de A adhérents à A^{*s}.

Théorème 9 (*théorème d'existence*). — *Soit*

$$A = \sum_i A_i^q \qquad (i = 1, 2, \ldots, i_q, \ 0 \leqq q \leqq p) \tag{37}$$

la décomposition de A en ensembles irréductibles dans un domaine G d'adhérence compacte dans D; nous supposons les éléments de la décomposition (37) séparés : ils sont distincts et un élément n'est pas contenu dans un autre élément. Alors $\tilde{t}^{(s)}(\varphi)$ existe et est dans G égal à la somme des courants d'intégration $\tilde{t}_i^{(s)}$ sur les A_i^q de la décomposition (37) qui sont de dimension $q = s$.

Soit en effet m_0 un point non ordinaire de A, limite de points de A^{*s} : il appartient à un A_i^s de (37) et alors, ou bien il appartient à l'ensemble $A_i'^{(s-1)}$ des points non ordinaires de A_i^s, ou bien il appartient à l'intersection $A_i^s \cap A_j^q$ de deux éléments de la décomposition (37). Mais $A_i^s \cap A_j^q$ est un ensemble analytique de dimension $s - 1$ au plus. Un point non ordinaire de A, limite de points de A^{*s} appartient ainsi dans G, à un ensemble analytique η dans G, de dimension $s-1$ au plus.

Les courants $t^{(s)}(\varphi)$ définis par (36) d'une part et la somme $\sum_l t_l^{(s)}$ des courants d'intégration sur les A_l^s d'autre part coïncident dans $G-\eta$ et vérifient les hypothèses du théorème 6 pour $\lambda=1$, $p=s$. D'après la remarque faite plus haut leurs extensions simples coïncident dans D, ce qui établit l'énoncé.

On peut encore énoncer pour des ensembles de dimension non homogène :

DÉFINITION. — *On appellera courant d'intégration sur un ensemble analytique A défini dans D l'extension simple $\tilde{t}$ du courant*

$$t(\varphi)=\int_{A^*}\varphi$$

qui est l'intégration sur les points ordinaires de A.

THÉORÈME 10 (*théorème d'existence*). — *Le courant $\tilde{t}(\varphi)$ existe, est fermé et est la somme*

$$\tilde{t}(\varphi)=\sum_{s=1}^{s=p}\tilde{t}^{(s)}(\varphi) \tag{38}$$

de courants positifs fermés $\tilde{t}^{(s)}$ de dimension complexe s, $(1\leqq s\leqq p)$, p étant la dimension complexe maxima de A.

En effet on a

$$\int_{A^*}\varphi=\sum_s\int_{A^{*s}}\varphi=\sum_s t^{(s)}(\varphi)$$

et l'on sait que chacun des termes $t^{(s)}$ a une extension simple $\tilde{t}^{(s)}$ qui est un courant positif fermé.

10. Applications. — Pour obtenir des propriétés métriques d'un ensemble analytique complexe A à partir des énoncés précédents, nous considérerons les formes différentielles

$$\beta_1=\frac{i}{2}\sum_j dz_j\wedge d\bar{z}_j=\frac{i}{2}d_z\,d_{\bar{z}}\Big[\sum_j z_j\bar{z}_j\Big], \tag{39}$$

$$\alpha=\frac{i}{2}d_z\,d_{\bar{z}}\log\Big[\sum_j z_j\bar{z}_j\Big], \tag{40}$$

où d_z, $d_{\bar{z}}$ sont les différentiations extérieures par rapport aux z_j (respectivement aux $\bar{z}_j$) seuls ; α et β_1 sont des formes *positives* comme on le vérifie aisément; pour α cela résulte aussi du fait que $\log\left[\sum_j z_j\bar{z}\right]$ est une fonction plurisousharmonique (*cf.* [4]). Le produit d'un courant $t\in\Theta_p^+$ par une forme $\varphi\in\Theta_1^+$ est un courant de Θ_{p+1}^+ (*cf.* [7]. Il en résulte que les puissances β_1^p, α^p sont des formes positives; $\beta_p=\frac{1}{p!}\beta_1^p$ n'est autre que l'élément de volume $d\tau_{2p}$ sur une variété complexe de dimension complexe p.

Nous démontrerons alors :

Théorème 11. — *Si t est un courant positif fermé dans un domaine D, et de degré $(n-p)$, la mesure positive*

$$d\sigma = t\wedge\beta_p$$

possède de la propriété suivante : si $\sigma(R)$ est la mesure contenue dans une boule $B(O, R)$, de centre l'origine de rayon R, intérieure à D, le quotient $R^{-2p}\sigma(R)$ est fonction croissante de R.

La mesure positive

$$d\nu = \pi^{-p}t\wedge\alpha^p$$

définie dans l'ouvert $B^*(O, R)$ obtenu à partir de la boule $B(O, R)$ par suppression du centre O, a une norme finie dans $B^*(O, R)$.

En effet supposons d'abord t égal à une forme : puisqu'on a $dt=0$ dans $B(O, R)$, il existe une forme θ telle que

$$t=d\theta.$$

Soient $0<r_1<r_2<R$ et $B_2=B(O, r_2)$, $B_1=B(O, r_1)$ les deux boules de centre O, de rayons r_1 et r_2. On a

$$\begin{aligned}\nu_{r_1}^{r_2}=\int_{B_2-B_1}d\nu &= \pi^{-p}\int_{B_2-B_1}d\theta\wedge\alpha^p\\ &=\pi^{-p}\int_{B_2-B_1}d(\theta\wedge\alpha^p)=\pi^{-p}\left[\int_{B_2'}\theta\wedge\alpha^p-\int_{B_1'}\theta\wedge\alpha^p\right],\end{aligned}$$

en appelant B'_2, B'_1 les frontières de B_1 et B_2. Or on a en calculant α^p :

$$\alpha^p=\left[\sum_j z_j\bar{z}_j\right]^{-p}\beta_1^p-p\left[\sum_j z_j\bar{z}_j\right]^{-p-1}\beta_1^{p-1}\wedge\sum_i\bar{z}_j\,dz_j\wedge\sum_j z_j\,d\bar{z}_j.$$

Sur B'_1 et B'_2, $\sum_j z_j\bar{z}_j$ est constant et l'on a

$$\sum_j\bar{z}_j\,dz_j\wedge\sum_j z_j\,d\bar{z}_j=0.$$

On en déduit sur B'_1 :

$$\alpha^p = r_1^{-2p}\beta_1^{\prime p}.$$

D'où

$$\nu_{r_1}^{r_2} = \pi^{-p}\left[\int_{B'_2}\theta \wedge r_2^{-2p}\beta_1^{\prime p} - \int_{B'_1}\theta \wedge r_1^{-2p}\beta_1^{\prime p}\right].$$

D'autre part, on a

$$\sigma(r_2) = \int_{B_2} d\sigma = \frac{1}{p\,!}\int_{B'_2}\theta \wedge \beta_1^{\prime p}.$$

On a donc

$$\nu_{r_1}^{r_2} = p\,!\,\pi^{-p}\left[\frac{\sigma(r_2)}{r_2^{2p}} - \frac{\sigma(r_1)}{r_1^{2p}}\right] \geqq 0, \tag{41}$$

ce qui établit la première partie du théorème 11. De plus si laissant r_2 fixe, on fait tendre r_1 vers zéro, $\nu_{r_1}^{r_2}$ croît et est borné, donc $\nu_{r_1}^{r_2}$ a une limite, ce qui établit la seconde partie. On a alors dans une boule B^*, de rayon R, pointée au centre o :

$$\nu_0^R = \int_{B^*} d\nu = \tau_{2p}^{-1}(1)\,\frac{\sigma(R)}{R^{2p}}, \tag{42}$$

où $\tau_{2p}(1)$ est la mesure de la boule unité à $2p$ dimensions.

Si maintenant t est un courant positif qui n'est pas représenté par une forme, on procèdera en approchant t par son produit de composition avec une suite de noyaux dérivables positifs. On obtient un courant positif fermé pour lequel (41) est établi : l'énoncé en résultat en passant à la limite, au sens de la convergence faible, pour les suites de mesures σ et ν obtenues.

L'application du théorème 11 aux ensembles analytiques complexes donne alors.

Corollaire 3. — *Soit A un ensemble analytique complexe dans D : les mesures $d\sigma_s = t^{(s)} \wedge \beta_s$ définissent les aires (à s dimensions complexes) de A, finies sur tout compact de D. Si l'on considère des boules concentriques $B(r)$ de rayon r, et si l'on pose*

$$\sigma(R) = \int_{B(R)} d\sigma_s$$

le rapport $\dfrac{\sigma(R)}{R^{2s}}$ est une fonction croissante de R.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] H. CARTAN, *Séminaire Éc. Norm. Sup.*, t. 6, 1953-1954.

[2] G. DE RHAM, *Variétés différentiables* (*Actualités scientifiques*, n° 1222, 1955, Hermann, Paris).

[3] P. LELONG, *Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 67, 1950, p. 393-419).

[4] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées* (*Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, Bruxelles, 1953, p. 22-40).

[5] P. LELONG, *Sur les dérivées d'une fonction plurisousharmonique* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 238, 1954, p. 2276-2278).

[6] P. LELONG, *Integration of a differential form on an analytic subvariety* (*Proc. nat. Acad. Sc.*, t. 43, 1957, p. 246-248).

[7] P. LELONG, *Fonctions plurisousharmoniques et courants positifs* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, à paraître prochainement).

[8] R. REMMERT, *Projektionen analytischer Mengen* (*Math. Ann.* t. 130, 1956, p. 410-441).

[9] R. REMMERT et K. STEIN, *Ueber die wesentlichen singularitäten analytischer Mengen* (*Math. Ann.*, t. 126, 1953, p. 263-305).

[10] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, t. I (1950), t. II (1951), Hermann, Paris,

Manuscrit reçu le 5 mai 1957.