BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 113-121

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__113_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 113 à 121.

L'APPLICATION EXPONENTIELLE DANS LES GROUPES DE LIE RÉSOLUBLES;

PAR

J. DIXMIER.

Soient G un groupe de Lie simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. L'application exponentielle (*cf.* [3]) est une application analytique de $\mathfrak{g}$ dans G. Si G est nilpotent, cette application est même un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{g}$ sur la variété analytique G; mais il est loin d'en être ainsi en général.

Nous étudions dans ce Mémoire le cas où G est *résoluble*. Dans le cas où G est un groupe complexe, l'application exponentielle ne peut être un isomorphisme que si G est nilpotent; si G est réel, elle peut être un isomorphisme dans des cas plus étendus, et par exemple s'il existe dans G une suite de sous-groupes distingués décroissants tels que les quotients successifs soient de dimension 1. Dans tous les cas, l'application exponentielle possède des propriétés qui, on le verra, la rapproche d'un isomorphisme.

1. Cas des groupes résolubles complexes. — Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble de dimension n sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Toute représentation irréductible de $\mathfrak{g}$ est de dimension 1, donc s'identifie à une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Soit ρ une représentation de $\mathfrak{g}$ dans un espace vectoriel V de dimension p sur $\mathbf{C}$. Soit $V = V_0 \supset V_1 \supset \ldots \supset V_p = 0$ une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module V. Les quotients V_i/V_{i+1} sont de dimension 1, et la représentation déduite de ρ dans V_i/V_{i+1} s'identifie à une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$. Si l'on prend pour ρ la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$, les n formes linéaires obtenues s'appellent les *racines* de $\mathfrak{g}$. Elles sont nulles sur le plus grand idéal nilpotent $\mathfrak{n}$ de $\mathfrak{g}$. Soit φ une racine non nulle. L'équation $\varphi(a) = 0$ définit un hyperplan $\mathfrak{g}_\varphi$ de $\mathfrak{g}$ contenant $\mathfrak{n}$ et *a fortiori* $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, donc un idéal de $\mathfrak{g}$. Pour tout entier rationnel l distinct de 0, soit $\mathfrak{g}_{\varphi,l}$ la variété linéaire non homogène de $\mathfrak{g}$ définie par l'équation $\varphi(a) = 2i\pi l$. Les $\mathfrak{g}_{\varphi,l}$ seront appelées les *variétés linéaires exceptionnelles* de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est non nilpotent, il existe des racines non nulles, donc il existe des variétés linéaires exceptionnelles.

Soit G le groupe de Lie complexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit N le sous-groupe distingué de G correspondant à $\mathfrak{n}$; il est fermé et simplement connexe, et $G'=G/N$ est un groupe de Lie complexe abélien simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ (*cf.* [2]); soit r la dimension complexe de G'. Soient θ l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}'$, η l'application canonique de G sur G', Ω l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G, Ω' l'application exponentielle de $\mathfrak{g}'$ dans G'. Alors, Ω' est un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{g}'$ sur la variété analytique G', et l'on a $\eta\circ\Omega=\Omega'\circ\theta$. Si φ est une racine non nulle de $\mathfrak{g}$, le sous-groupe distingué G_φ de G correspondant à $\mathfrak{g}_\varphi$ est un sous-groupe fermé simplement connexe contenant N, de dimension complexe $n-1$, égal à $\overset{-1}{\eta}(\Omega'(\theta(\mathfrak{g}_\varphi)))$. Soit $G_{\varphi,l}=\overset{-1}{\eta}(\Omega'(\theta(\mathfrak{g}_{\varphi,l})))$; les $G_{\varphi,l}$ sont des classes de G suivant G_φ, et seront appelées *sous-variétés exceptionnelles* de G. Soit $a\in\mathfrak{g}$. Pour que $\Omega(a)\in G_{\varphi,l}$, il faut et il suffit que $\eta(\Omega(a))=\Omega'(\theta(a))$ appartienne à $\Omega'(\theta(\mathfrak{g}_{\varphi,l}))$, donc que $\theta(a)$ appartienne à $\theta(\mathfrak{g}_{\varphi,l})$, donc que $a\in\mathfrak{g}_{\varphi,l}$.

Pour énoncer commodément les résultats, disons qu'une application f d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est localement injective (resp. surjective) en un point x_0 de X s'il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que la restriction de f à V soit injective [resp. si, pour tout voisinage W de x_0 dans X, $f(W)$ est un voisinage de $f(x_0)$ dans Y]. On rappelle qu'une application g d'un ensemble A dans un ensemble B est dite injective si elle est biunivoque, surjective si $g(A)=B$, bijective si elle est injective et surjective.

Théorème 1. — *Soient G un groupe de Lie résoluble complexe simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, Ω l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. Soient $\mathfrak{s}$ la réunion (fermée) des variétés linéaires exceptionnelles de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{r}$ le complémentaire de $\mathfrak{s}$ dans $\mathfrak{g}$, S la réunion (fermée) des sous-variétés exceptionnelles de G, R le complémentaire de S dans G.*

1° $\Omega(\mathfrak{s})\subset S$.

2° *La restriction de Ω à $\mathfrak{r}$ est un isomorphisme de la variété analytique complexe $\mathfrak{r}$ sur la variété analytique complexe R.*

3° *Si $a\in\mathfrak{s}$, Ω n'est ni localement injective, ni localement surjective en a.*

Démonstration. — On a vu que $\Omega(\mathfrak{g}_{\varphi,l})\subset G_{\varphi,l}$; donc $\Omega(\mathfrak{s})\subset S$.

Il existe une suite d'idéaux $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\supset\mathfrak{g}_1\supset\ldots\supset\mathfrak{g}_n=0$ de $\mathfrak{g}$ tels que $\mathfrak{g}_j$ soit de dimension $n-j$, et tels que $\mathfrak{g}_r=\mathfrak{n}$. Soit $(a_1,\ldots,a_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ telle que $a_j\in\mathfrak{g}_{j-1}$, $a_j\notin\mathfrak{g}_j$. On a $[a_j,a_k]=\Sigma_{h=1}^n\gamma_{jkh}a_h$ avec des constantes de structure γ_{jkh} qui possèdent les propriétés suivantes :

$\gamma_{jkh}=0$ sauf si $h\geq j$, $h\geq k$, $h>r$;

si $j>r$ et $k>r$, alors $\gamma_{jkh}=0$ sauf si $h>j$ et $h>k$.

On déduit de là que, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des nombres complexes, on a

$$[\Sigma_{j=1}^n \alpha_j, a_j, a_k] = \Sigma_{j=1}^n \Sigma_{h=1}^n \alpha_j \gamma_{jkh} a_h \equiv (\Sigma_{j=1}^n \alpha_j \gamma_{jkk}) a_k \qquad (\mathrm{mod}\ \mathfrak{g}_k).$$

Les racines de $\mathfrak{g}$ sont donc les formes linéaires $\varphi_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ définies par

$$\varphi_k(\Sigma_{j=1}^n \alpha_j a_j) = \Sigma_{j=1}^n \gamma_{jkk} \alpha_j = \Sigma_{j=1}^r \gamma_{jkk} \alpha_j = \psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r).$$

On a

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_r = 0.$$

Soit $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire l'espace des covecteurs tangents à G en e (élément neutre de G). Soit $(a_1^*, \ldots, a_n^*)$ la base de $\mathfrak{g}^*$ duale de la base $(a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathfrak{g}$. Si la base $(a_1, \ldots, a_n)$ est bien choisie, il existe, d'après [**1**], un système de fonctions coordonnées $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dans G possédant les propriétés suivantes :

1° l'application $g \rightarrow (\xi_1(g), \ldots, \xi_n(g))$ est un isomorphisme de la variété analytique G sur la variété analytique $\mathbf{C}^n$ qui transforme e en $(0, \ldots, 0)$; nous identifierons désormais G et $\mathbf{C}^n$ par cet isomorphisme; autrement dit, nous transportons à $\mathbf{C}^n$ par cet isomorphisme la structure de groupe de G;

2° il existe n formes différentielles invariantes à gauche

$$\omega_1(\xi_1, \ldots, \xi_n, d\xi_1, \ldots, d\xi_n), \quad \ldots, \quad \omega_n(\xi_1, \ldots, \xi_n, d\xi_1, \ldots, d\xi_n) \quad \text{sur } \mathbf{C}^n,$$

linéairement indépendantes en tout point de $\mathbf{C}^n$, et telles que la valeur en e de ω_j soit a_j^*;

3° on a

$$\omega_1 = d\xi_1, \qquad \ldots, \qquad \omega_r = d\xi_r,$$
$$\omega_k = e^{\psi_k(\xi_1, \ldots, \xi_r)}[d\xi_k + \Sigma_{s=1}^{k-1} P_{ks}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})\, d\xi_s] \qquad (k = r+1, \ldots, n),$$

où les P_{ks} sont des polynomes.

Ceci posé, soient $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ des nombres complexes. Soit $(\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t))$ la solution du système différentiel

$$(1) \qquad \omega_1 = \alpha_1\, dt, \qquad \ldots, \qquad \omega_n = \alpha_n\, dt$$

qui s'annule pour $t = 0$ (t est une variable réelle). On sait que $\Omega(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n)$ est le point de G de coordonnées $\xi_1(1), \ldots, \xi_n(1)$.

Les r premières équations de (1) donnent $\xi_1 = \alpha_1 t, \ldots, \xi_r = \alpha_r t$. Les suivantes s'écrivent alors

$$(2) \qquad e^{\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)t}[d\xi_k + \Sigma_{s=1}^{k-1} P_{ks}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1})\, d\xi_s] = \alpha_k\, dt \qquad (k = r+1, \ldots, n).$$

Soient z une variable complexe, et $\tau(z)$ la fonction de z égale à 1 pour $z = 0$ et à $\dfrac{e^z - 1}{z}$ pour $z \neq 0$. C'est une fonction entière, dont les zéros sont les nombres $2i\pi l$, l entier rationnel $\neq 0$. Ceci posé, montrons que les solutions des équations (2) sont de la forme

$$(3) \qquad \xi_k = \alpha_k t \tau(-\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)t) + F_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, t),$$

où F_k est une fonction entière de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, t s'annulant pour $t = 0$. Procédant par récurrence sur k, supposons ceci établi pour les entiers $< k$. Alors, l'équation $\omega_k = \alpha_k \, dt$ s'écrit

$$(4) \qquad \frac{d\xi_k}{dt} = \alpha_k e^{-\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)t} + G_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, t),$$

où G_k est une fonction entière de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, t. Soit $F_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, t)$ la primitive de G_k par rapport à la dernière variable qui s'annule pour $t = 0$. C'est une fonction entière de $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, t. Suivant que $\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ est nul ou non nul, l'équation (4) s'intègre sous la forme suivante :

$$\xi_k = \alpha_k t + F_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, t)$$

ou sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \xi_k &= \alpha_k \frac{e^{-\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)t} - 1}{-\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)} + F_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, t) \\ &= \alpha_k t \tau(-\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)t) + F_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, t) \end{aligned}$$

de sorte que la formule (3) est bien établie dans tous les cas. Donc les coordonnées de $\Omega(\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_n a_n)$ sont données par les formules

$$(5) \quad \begin{cases} \xi_1 = \alpha_1, \quad \ldots, \quad \xi_r = \alpha_r, \\ \xi_k = \alpha_k \tau(-\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)) + F_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, 1) \qquad (k = r+1, \ldots, n). \end{cases}$$

Le jacobien de la transformation définie par (5) est $\Pi_{k=r+1}^{n} \tau(-\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r))$. L'ensemble des points de $\mathfrak{g}$ où il s'annule est donc l'ensemble des points de $\mathfrak{g}$ où s'annule l'un des nombres $\tau(-\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r))$, c'est-à-dire $\mathfrak{s}$.

Les coordonnées $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ (resp. $\xi_1, \ldots, \xi_r$) définissent par passage au quotient des coordonnées dans $\mathfrak{g}'$ (resp. G') que nous noterons $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r$ (resp. $\xi'_1, \ldots, \xi'_r$). Comme l'application exponentielle commute aux homomorphismes, l'application exponentielle Ω' de $\mathfrak{g}'$ dans G' est définie, en vertu de (5), par les formules $\xi'_1 = \alpha'_1, \ldots, \xi'_r = \alpha'_r$. La variété $\theta(\mathfrak{g}_{\varphi_k, l})$ a pour équation $\psi_k(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r) = 2i\pi l$, donc la variété $\Omega'(\theta(\mathfrak{g}_{\varphi_k, l}))$ a pour équation $\psi_k(\xi'_1, \ldots, \xi'_r) = 2i\pi l$. Donc $G_{\varphi_k, l}$ a pour équation $\psi_k(\xi_1, \ldots, \xi_r) = 2i\pi l$. L'ensemble S du théorème est donc défini par l'équation

$$\Pi_{k=r+1}^{n} \tau(-\psi_k(\xi_1, \ldots, \xi_r)) = 0.$$

Si $\Pi_{k=r+1}^{n} \tau(-\psi_k(\xi_1, \ldots, \xi_r)) \neq 0$, il est clair que le système (5), où l'on considère $\xi_1, \ldots, \xi_n$ comme donnés, admet une solution et une seule en $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Donc la restriction de Ω à $\mathfrak{r}$ est une bijection de $\mathfrak{r}$ sur R. Comme le jacobien de (5) est non nul sur $\mathfrak{r}$, cette restriction est un isomorphisme analytique complexe. Ainsi, les assertions 1° et 2° du théorème sont démontrées.

Soit $a=\Sigma_{j=1}^{n}\alpha_j a_j\in\mathfrak{s}$. Soit h le plus *grand* indice tel que $\tau(\varphi_h(a))=0$. Quel que soit le nombre complexe β, il existe des nombres complexes uniques $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$ tels que : 1° $\alpha'_1=\alpha_1, \ldots, \alpha'_{h-1}=\alpha_{h-1}$; 2° $\alpha'_h=\beta$; 3° $\Omega(\Sigma_{j=1}^{n}\alpha_j a_j)=\Omega(\Sigma_{j=1}^{n}\alpha'_j a_j)$. En effet, $\alpha'_{h+1}, \ldots, \alpha'_n$ sont définis par les conditions

$$\begin{aligned}\alpha_k\tau(-\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r))+F_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, 1)&=\alpha'_k\tau(-\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r))\\ &+F_k(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k-1}, 1)\qquad (k=h+1, \ldots, n);\end{aligned}$$

et, comme $\tau(-\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r))\neq 0$ pour $k>h$, on voit aussitôt par récurrence l'existence et l'unicité des α'_k. En outre, par récurrence également, on voit que $\alpha'_k\to\alpha_k$ si $\beta\to\alpha_h$. Ceci prouve que Ω n'est pas localement injective en a.

Soit toujours $a=\Sigma_{j=1}^{n}\alpha_j a_j\in\mathfrak{s}$, et montrons que Ω n'est pas localement surjective en a. Désignons cette fois par h le plus *petit* indice tel que $\tau(\varphi_h(a))=0$. Soit l l'entier rationnel non nul tel que $a\in\mathfrak{g}_{\varphi_h,l}$. Soient $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les coordonnées de $\Omega(a)$. Si $\varepsilon>0$ est assez petit, les conditions $|\alpha'_k-\alpha_k|<\varepsilon$ pour $k=1, \ldots, h-1$ entraînent

$$\tau(-\psi_k(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r))\neq 0\qquad \text{pour}\quad k=1, \ldots, h-1.$$

Alors, les équations

$$(6)\qquad\left\{\begin{aligned}&\xi'_1=\alpha'_1, \quad \ldots, \quad \xi'_r=\alpha'_r,\\ &\xi'_k=\alpha'_k\tau(-\psi_k(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r))+F_k(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{k-1}, 1)\\ &\qquad (k=r+1, \ldots, h-1)\end{aligned}\right.$$

définissent une transformation birégulière. Il existe donc un nombre $\varepsilon'>0$ et des fonctions holomorphes $F'_k(\xi'_1, \ldots, \xi'_k)(k=r+1, \ldots, h-1)$ définies pour $|\xi'_1-\xi_1|<\varepsilon', \ldots, |\xi'_{h-1}-\xi_{h-1}|<\varepsilon'$ telles qu'on ait les propriétés suivantes : 1° en réduisant au besoin ε, les conditions $|\alpha'_k-\alpha_k|<\varepsilon$ pour $k=1, \ldots, h-1$ entraînent $|\xi'_k-\xi_k|<\varepsilon'$ pour $k=1, \ldots, h-1$; 2° on a alors

$$\begin{gathered}\alpha'_1=\xi'_1, \qquad \ldots, \qquad \alpha'_r=\xi'_r,\\ \alpha'_k=F'_k(\xi'_1, \ldots, \xi'_k)\qquad (k=r+1, \ldots, h-1).\end{gathered}$$

Soit maintenant $a'=\Sigma_{j=1}^{n}\alpha'_j a_j\in\mathfrak{g}_{\varphi_h,l}$, tel que

$$|\alpha'_1-\alpha_1|<\varepsilon, \qquad \ldots, \qquad |\alpha'_{h-1}-\alpha_{h-1}|<\varepsilon.$$

Soient $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$ les coordonnées de $\Omega(a')$. Les nombres $\xi'_1, \ldots, \xi'_{h-1}$ sont liés aux nombres $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{h-1}$, par les formules (6). D'autre part

$$\xi'_h=F_h(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_{h-1}, 1)=K(\xi'_1, \ldots, \xi'_{h-1}),$$

K étant une certaine fonction holomorphe de $\xi'_1, \ldots, \xi'_{h-1}$ définie pour $|\xi'_1 - \xi_1| < \varepsilon', \ldots, |\xi'_{h-1} - \xi_{h-1}| < \varepsilon'$. Donc il existe un voisinage de a dans $\mathfrak{g}_{\varphi_h, l}$ dont l'image par Ω n'est pas un voisinage de $\Omega(a)$ dans $G_{\varphi_h, l}$. Comme les points de $\mathfrak{g}$ qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{g}_{\varphi_h, l}$ ont une image par Ω qui n'appartient pas à $G_{\varphi_h, l}$, il existe un voisinage de a dans $\mathfrak{g}$ dont l'image par Ω n'est pas un voisinage de $\Omega(a)$ dans G, de sorte que Ω n'est pas localement surjective en a. Le théorème est démontré.

Remarque. — Ce dernier raisonnement prouve le résultat suivant dont nous aurons besoin plus loin : soit $a \in \mathfrak{s}$; alors, Ω applique $a + \mathfrak{n}$ dans $\Omega(a)N$, et il existe un voisinage V de a dans $a + \mathfrak{n}$ tel que les points de $\Omega(V)$ appartiennent tous à une sous-variété de codimension 1 dans $\Omega(a)N$.

Corollaire du théorème 1. — *Soient G un groupe de Lie résoluble complexe simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, Ω l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *Ω est injective.*

2° *Ω est surjective.*

3° *Ω est un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{g}$ sur la variété analytique G.*

4° *G est nilpotent.*

Démonstration. — Les implications 4° $\Rightarrow$ 3°, 3° $\Rightarrow$ 2°, 3° $\Rightarrow$ 1° sont claires; 1° $\Rightarrow$ 4° résulte du théorème 1. Pour montrer que (non 4°) $\Rightarrow$ (non 2°), on utilise la fin de la démonstration précédente, quelque peu simplifiée, en considérant cette fois le plus petit indice h tel que $\varphi_h \neq 0$.

2. **Cas des groupes résolubles réels.** — Soient G un groupe de Lie résoluble réel simplement connexe de dimension n, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{n}$ le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, N le sous-groupe correspondant de G. On désignera par $\tilde{\mathfrak{g}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}$) l'algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{n}$), par $\tilde{G}$ (resp. $\tilde{N}$) le groupe de Lie complexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$ (resp. $\tilde{\mathfrak{n}}$). Alors, $\tilde{\mathfrak{n}}$ s'identifie au plus grand idéal nilpotent de $\tilde{\mathfrak{g}}$, et $\mathfrak{g}$ s'identifie à une sous-algèbre de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Le sous-groupe de Lie réel de $\tilde{G}$ correspondant à $\mathfrak{g}$ est fermé et simplement connexe. Donc il existe un isomorphisme canonique de G sur ce sous-groupe. On peut donc identifier canoniquement G à un sous-groupe fermé de $\tilde{G}$.

On appelle *racines* de $\mathfrak{g}$ les restrictions à $\mathfrak{g}$ des racines de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Soit φ une racine non nulle, restriction à $\mathfrak{g}$ d'une racine non nulle $\tilde{\varphi}$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Alors, le noyau $\mathfrak{g}_\varphi = \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\varphi}} \cap \mathfrak{g}$ de φ est un idéal de $\mathfrak{g}$ qui contient $\mathfrak{n}$. Si l est un entier rationnel non nul, soit $\mathfrak{g}_{\varphi, l} = \tilde{\mathfrak{g}}_{\tilde{\varphi}, l} \cap \mathfrak{g}$ la variété linéaire dans $\mathfrak{g}$ définie par l'équation $\varphi(x) = 2i\pi l$. D'autre part, soient $G_\varphi = \tilde{G}_{\tilde{\varphi}} \cap G$ et $G_{\varphi, l} = \tilde{G}_{\tilde{\varphi}, l} \cap G$; désignant par θ l'application canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{n}$, par η l'application canonique de G sur $G' = G/N$, par Ω (resp. Ω') l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G (resp. de $\mathfrak{g}'$ dans G'), on a

$$G_\varphi = \overset{-1}{\eta}(\Omega'(\theta(\mathfrak{g}_\varphi))), \qquad G_{\varphi,l} = \overset{-1}{\eta}(\Omega'(\theta(\mathfrak{g}_{\varphi,l}))).$$

Écrivant $\varphi = \varphi' + i\varphi''$, où φ' et φ'' sont des formes linéaires réelles sur $\mathfrak{g}$, trois cas sont possibles :

1° $\varphi'' = \alpha\varphi'$, où α est une constante réelle; alors, $\mathfrak{g}_\varphi$, G_φ sont de dimension réelle $n-1$, et les $\mathfrak{g}_{\varphi,l}$, $G_{\varphi,l}$ sont vides;

2° $\varphi' = 0$; alors $\mathfrak{g}_\varphi$, G_φ, les $\mathfrak{g}_{\varphi,l}$ et les $G_{\varphi,l}$ sont de dimension réelle $n-1$;

3° $\varphi' \neq 0$, $\varphi'' \neq 0$, et les noyaux de φ', φ'' sont distincts; alors, $\mathfrak{g}_\varphi$, G_φ, les $\mathfrak{g}_\varphi$, et les $G_{\varphi,l}$ sont de dimension réelle $n-2$.

On appellera *variétés linéaires exceptionnelles* de $\mathfrak{g}$ les $\mathfrak{g}_{\varphi,l}$, et *sous-variétés exceptionnelles* de G les $G_{\varphi,l}$. Dire que les variétés linéaires exceptionnelles de $\mathfrak{g}$ sont toutes vides revient donc à dire que toutes les racines non nulles sont du premier type envisagé ci-dessus.

THÉORÈME 2. — *Le théorème* 1 *est valable pour les groupes résolubles réels simplement connexes.*

DÉMONSTRATION. — Les deux premières assertions à établir résultent aussitôt des assertions correspondantes du théorème 1. Soit a un point appartenant à l'une des variétés linéaires exceptionnelles de $\mathfrak{g}$. D'après une remarque antérieure, il existe un voisinage V de a dans $a + \mathfrak{n}$ et une hypersurface H de codimension 1 dans $\Omega(a)\tilde{N}$ tels que $\Omega(V) \subset H$. Si $\Omega(V)$ était un voisinage de $\Omega(a)$ dans $\Omega(a)N$, H contiendrait un voisinage de $\Omega(a)$ dans $\Omega(a)N$ donc serait un voisinage de $\Omega(a)$ dans $\Omega(a)\tilde{N}$, ce qui est absurde. Donc $\Omega(V)$ n'est pas un voisinage de $\Omega(a)$ dans $\Omega(a)N$. Par ailleurs, l'image par Ω d'un point qui n'est pas dans $a + \mathfrak{n}$ n'appartient pas à $\Omega(a)N$ (par exemple, parce que l'application exponentielle Ω' est un isomorphisme). Donc Ω n'est pas localement surjective en a. Si Ω était localement injective en a, Ω appliquerait homéomorphiquement tout voisinage compact de a dans $\mathfrak{g}$ suffisamment petit sur une partie compacte de G qui, d'après l'invariance du domaine, serait un voisinage de $\Omega(a)$ dans G. Donc, Ω serait localement surjective en a, ce qui n'est pas. Donc, Ω n'est pas localement injective en a. Le théorème est démontré.

Nous désignerons par $\mathfrak{d}$ l'algèbre de Lie de dimension 3 définie par la table de multiplication suivante :

$$[x, y] = -z, \qquad [x, z] = y, \qquad [y, z] = 0.$$

Il est immédiat que $\mathfrak{d}$ est résoluble, et que les racines de $\mathfrak{d}$ sont

$$\varphi_1(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0,$$
$$\varphi_2(\alpha x + \beta y + \gamma z) = i\alpha,$$
$$\varphi_3(\alpha x + \beta y + \gamma z) = -i\alpha.$$

Il existe donc dans $\mathfrak{d}$ des variétés linéaires exceptionnelles de sorte que l'application exponentielle n'est pas injective.

THÉORÈME 3. — *Soient G un groupe de Lie réel résoluble simplement connexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, Ω l'application exponentielle de $\mathfrak{g}$ dans G. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *Ω est bijective.*

2° *Ω est un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{g}$ sur la variété analytique G.*

3° *Toute racine de $\mathfrak{g}$ est de la forme $\varphi' + i\varphi''$, avec φ' et φ'' réelles et φ'' proportionnelle à φ'.*

4° *Il n'existe pas d'algèbre quotient de $\mathfrak{g}$ admettant une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{d}$.*

DÉMONSTRATION. — Le théorème 2 et les remarques qui le précèdent prouvent les implications $3° \Rightarrow 2°$, $1° \Rightarrow 3°$; comme on a évidemment $2° \Rightarrow 1°$, les conditions 1°, 2°, 3° sont équivalentes.

Considérons une suite de Jordan-Hölder du $\mathfrak{g}$-module $\mathfrak{g}$: c'est une suite décroissante d'idéaux $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_{p-1} \supset \mathfrak{g}_p = 0$, où les quotients $\mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1}$ sont de dimension 1 ou 2. Soit $\tilde{\mathfrak{g}}_j$ le complexifié de $\mathfrak{g}_j$, qui est un idéal de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Si $\dim \mathfrak{g}_j/\mathfrak{g}_{j+1} = 2$, il existe un idéal $\mathfrak{b}_j$ de $\tilde{\mathfrak{g}}$ tel que

$$\tilde{\mathfrak{g}}_j \supset \mathfrak{b}_j \supset \tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}, \qquad \dim \tilde{\mathfrak{g}}_j/\mathfrak{b}_j = \dim \mathfrak{b}_j/\tilde{\mathfrak{g}}_{j+1} = 1.$$

Toute racine de $\tilde{\mathfrak{g}}$ correspond, soit à un quotient $\tilde{\mathfrak{g}}_k/\tilde{\mathfrak{g}}_{k+1}$ de dimension 1, soit à un quotient $\tilde{\mathfrak{g}}_j/\mathfrak{b}_j$, soit à un quotient $\mathfrak{b}_j/\tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}$. Les racines du premier type sont réelles sur $\mathfrak{g}$. Soit $y + iz$ un élément de $\mathfrak{b}_j$ n'appartenant pas à $\tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}$, avec $y \in \mathfrak{g}_j$, $z \in \mathfrak{g}_j$. On a, pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

$$[x, y + iz] = \varphi(x)(y + iz) + u + iv,$$

φ désignant la racine correspondant à $\mathfrak{b}_j/\tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}$, et u, v désignant des éléments de $\mathfrak{g}_{j+1}$. Si φ' et φ'' sont les parties réelle et imaginaire de φ, on en déduit

$$(7) \qquad \begin{cases} [x, y] = \varphi'(x)y - \varphi''(x)z + u, \\ [x, z] = \varphi''(x)y + \varphi'(x)z + v. \end{cases}$$

Si y et z étaient proportionnels modulo $\mathfrak{g}_{j+1}$, on déduirait de là l'existence d'un idéal de $\mathfrak{g}$ strictement compris entre $\mathfrak{g}_j$ et $\mathfrak{g}_{j+1}$, de sorte que $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_p)$ ne serait pas une suite de Jordan-Hölder. Donc, en désignant par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels, on a $\mathfrak{g}_j = \mathfrak{g}_{j+1} + \mathbf{R}y + \mathbf{R}z$. Comme

$$[x, y - iz] = (\varphi'(x) - i\varphi''(x))(y - iz) + u - iv,$$

et que $y - iz$ n'appartient pas à $\mathfrak{b}_j$, on voit que la racine correspondant à $\tilde{\mathfrak{g}}_j/\mathfrak{b}_j$ est $\bar{\varphi} = \varphi' - i\varphi''$.

Ceci posé, supposons que la condition 3° du théorème ne soit pas satisfaite. Il existe donc une racine ψ de $\mathfrak{g}$ qui n'est pas de la forme indiquée dans cette condition 3°. Cette racine correspond à un quotient $\mathfrak{b}_j/\tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}$ ou à un quotient $\tilde{\mathfrak{g}}_j/\mathfrak{b}_j$. Comme $\bar{\psi}$ ne vérifie pas non plus la condition 3° du théorème, on peut supposer que ψ est égale à la racine φ de l'alinéa précédent. Il existe $x \in \mathfrak{g}$ tel que $\varphi'(x) = 0$, $\varphi''(x) \neq 0$. En multipliant x par un scalaire convenable, on peut supposer $\varphi''(x) = 1$. Alors, les formules (7) deviennent

$$[x, y] = -z + u, \qquad [x, z] = y + v,$$

avec $u \in \mathfrak{g}_{j+1}$, $v \in \mathfrak{g}_{j+1}$. Comme $2i[z, y] = [y + iz, y - iz] \in \tilde{\mathfrak{g}}_{j+1}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_{j+1}$ possède une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{d}$. On voit donc que la condition 4° du théorème implique la condition 3°.

Enfin, supposons que la condition 3° du théorème soit satisfaite. Soient $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, H le sous-groupe distingué de G correspondant à $\mathfrak{b}$. Il existe une suite de Jordan-Hölder de $\mathfrak{g}$ dont l'un des termes est $\mathfrak{b}$. Donc toute racine de $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ se déduit d'une racine de $\mathfrak{g}$ par passage au quotient, de sorte que toute racine de $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ vérifie la condition 3° du théorème. L'application exponentielle de $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ dans G/H est donc injective. Sa restriction à toute sous-algèbre de $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ est également injective. Il ne peut donc exister dans $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ de sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{d}$. Ainsi, la condition 3° implique la condition 4°, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *S'il existe dans $\mathfrak{g}$ une suite décroissante d'idéaux de dimensions n, $n-1$, $n-2$, ..., l'application exponentielle est un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{g}$ sur la variété analytique G.*

Démonstration. — Toutes les racines de $\mathfrak{g}$ sont alors réelles.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] E. Cartan, *Les représentations linéaires des groupes de Lie* (*J. Math. pures et appl.*, t. 17, 1938, p. 1-12).

[2] C. Chevalley, *On the topological structure of solvable groups* (*Ann. Math.*, t. 42, 1941, p. 668-675).

[3] C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, Princeton, 1946.

Manuscrit reçu le 15 novembre 1956.