BULLETIN DE LA S. M. F.

SIGERU MIZOHATA

Hypoellipticité des équations paraboliques

Bulletin de la S. M. F., tome 85 (1957), p. 15-50
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1957__85__15_0>

Bull. Soc. math. France,
85, 1957, p. 15 à 50.

HYPOELLIPTICITÉ DES ÉQUATIONS PARABOLIQUES ;

PAR

SIGERU MIZOHATA.

1. Introduction — Cet article a pour but de démontrer l'hypoellipticité des équations paraboliques au sens de Petrowsky, dans le cas où les coefficients sont indéfiniment dérivables. Nous nous appuyons sur la méthode de la paramétrix ([3], I, p. 136-139).

Nous dirons que le système

$$(1.1)\qquad \frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k)} a_{ij}^{(k_0, k_1, \ldots, k_n)}(x, t) \frac{\partial^{k_0+\ldots+k_n}}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \partial x_n^{k_n}} u_j + g_i,$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N); \qquad (k_0 < n_j,\ n_i > 0)$$

est *parabolique ou P-parabolique* dans un ouvert $\Omega \subset (x, t)$ ([2]), si :

1° il existe un nombre entier P tel que

$$k_0 P + \sum_{s=1}^{n} k_s \leqq n_j P;$$

2° les parties réelles des racines λ du déterminant de la matrice

$$\left(\sum_{((k))_P} a_{ij}^{(k_0, \ldots, k_n)}(x, t)\, \lambda^{k_0} (i\xi_1)^{k_1} \ldots (i\xi_n)^{k_n} \right) - \begin{pmatrix} \lambda^{n_1} & & & \\ & \lambda^{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{n_N} \end{pmatrix},$$

où $((k))_P$ désigne la sommation des termes tels que

$$k_0 P + \sum_{s=1}^{n} k_s = n_j P,$$

sont toujours inférieures à $-\delta$ (δ, positif quelconque) quand $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \xi$

parcourt la sphère $|\xi| = 1$, et quand (x, t) parcourt Ω. Nous supposons les coefficients *indéfiniment dérivables* en (x, t), et nous allons démontrer le

Théorème. — *Soient $g_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω, alors toute distribution $U = (u_1, \ldots, u_N)$, solution de l'équation* (**1**.1), *est une fonction indéfiniment dérivable.*

Pour simplifier, nous considérons en détail le cas $N = 1$, $n_i = 1$, et ensuite le cas général.

Nous nous servirons désormais des notations du calcul symbolique [**1**]. Nous écrirons p_i au lieu de $\frac{\partial}{\partial x_i}$, ou encore $p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n}$ au lieu de $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\nu_n}$. Les distributions que nous allons considérer ne sortent jamais du cadre des distributions tempérées [**3**] ou plutôt de celui de l'espace $\mathcal{D}'_{L^2}$, de sorte qu'on peut définir non seulement les dérivées de f : $p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} f$, mais aussi $\tau_s(p) f = (1 - p_1^2 - \ldots - p_n^2)^s f$ $(-\infty < s < +\infty)$, en s'appuyant sur la transformation de Fourier. Nous écrivons la définition de l'opérateur $\tau_s(p)$: Soit f tempéré; φ sa transformée de Fourier; alors $(1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^s \varphi \in (\mathcal{S}')_\xi$; donc, on définit $\tau_s(p) f$ comme l'image réciproque (de Fourier) de cette distribution ([**3**], [**1**]). Les notations des espaces $\mathcal{S}'$, $\mathcal{D}'_{L^2}$, $\mathcal{B}$, ..., sont celles de L. Schwartz [**3**].

Considérons maintenant le cas $N = 1$, $n_i = 1$:

$$
(\mathbf{1}.2) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|\nu| \leq p} q_\nu(x, t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n}\right] U = V.
$$

Puisque la propriété que nous allons démontrer est une propriété locale, nous pouvons supposer que :

1° les coefficients sont indéfiniment dérivables en (x, t), et de plus toutes les dérivées en t :

$$
\frac{\partial^k}{\partial t^k} q_\nu(x, t) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)
$$

sont des fonctions continues en t à valeurs dans $(\mathcal{B})_x$.

2°

$$
(\mathbf{1}.3) \qquad \text{Partie réelle} \sum_{|\nu| = p} q_\nu(x, t) (i\xi)^\nu \leq -\delta |\xi|^p \qquad (\delta > 0).
$$

Nous considérons (**1**.2) comme équation d'évolution,

$$
(\mathbf{1}.4) \qquad \frac{d}{dt} u(t) - \sum_{|\nu| \leq p} q_\nu(x, t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} u(t) = v(t),
$$

ou en notant $q(x, t, p) = \sum q_\nu(x, t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n}$,

$$(1.5) \qquad \left[\frac{d}{dt} - q(x, t, p)\right] u(t) = v(t).$$

Décomposons l'opérateur $q(x, t, p)$ en deux parties :

$$(1.6) \qquad \frac{d}{dt} u(t) - \left[\sum_{|\nu|=P} q_\nu(0, t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} + q_\varepsilon(x, t, p)\right] u(t) = v(t);$$

$$q_\varepsilon(x, t, p) = q(x, t, p) - \sum_{|\nu|=P} q_\nu(0, t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n}.$$

Considérons la suite des distributions : $f_0(t), f_1(t), \ldots, f_i(t), \ldots$ où les $f_i(t)$ sont des solutions de

$$(1.7) \qquad \left[\frac{d}{dt} - \sum_{|\nu|=P} q_\nu(t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n}\right] f_i(t) = q_\varepsilon(x, t, p) f_{i-1}(t)$$
$$(i = 1, 2, \ldots)$$

[on a écrit $q_\nu(t)$ au lieu de $q_\nu(0, t)$], avec $f_0(t) = R_x(t, 0)$, et avec les conditions initiales $f_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. $\Big[R_x(t, 0)$ est solution élémentaire de l'équation parabolique $\dfrac{d}{dt} - \sum q_\nu(t) p_1^{\nu_1} \ldots p_u^{\nu_n}\Big]$, c'est-à-dire que $R_x(t, 0)$ $(t \geqq 0)$ est la solution unique de

$$\left[\frac{d}{dt} - \sum q_\nu(t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n}\right] R_x(t, 0) = 0$$

avec la condition initiale $R_x(0, 0) = \delta_x$. En effet, nous savons déjà que, pour (1.7), le problème de Cauchy pour l'avenir est *bien posé* dans ($\mathcal{S}'$), (*voir* [2]). Alors, on a ([4], p. 31, (10.5)),

$$(1.8) \qquad f_i(t) = \int_0^t R_x(t, \tau) \underset{(x)}{\bigstar} q_\varepsilon(x, \tau, p) f_{i-1}(\tau)\, d\tau, \qquad (t \geqq 0).$$

Les $f_i(t)$ ne sont définies que pour $t \geqq 0$. On les prolonge par zéro pour $t < 0$. Nous les écrivons, par abus de langage $Y(t) f_i(t)$.

Compte tenu de ce que $f_0(0) = \delta_x$, $f_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, on voit que, en notant $D = \dfrac{\partial}{\partial t} - q(x, t, p)$,

$$(1.9) \qquad DY(t)[f_0(t) + f_1(t) + \ldots + f_i(t)] = -q_\varepsilon(x, t, p) Y(t) f_i(t) + \delta_x \times \delta_t.$$

Cette formule nous suggère une méthode pour obtenir des paramétrix. En effet, comme nous le montrerons, les $Y(t) f_j(t)$ sont des fonctions continues indéfiniment différentiables dans le complémentaire de l'origine [dans l'espace (x, t)] et de plus $f_i(t)$ devient aussi régulière (dans un sens à préciser) qu'on le veut, quand on augmente l'indice i.

Propriétés de $\mathcal{F}R_x(t, \tau)$ $(t \geqq \tau)$. — Désignons par $\mathcal{R}(\xi; t, \tau)$ $(t \geqq \tau \geqq 0)$ la transformée de Fourier (en x, pour t et τ fixés) de $R_x(t, \tau)$. Nous avons alors

$$(1.10)\qquad \mathcal{R}(\xi; t, \tau) = \exp\left(\int_\tau^t \sum_{|\nu|=P} q_\nu(t')(2\pi i\xi)^\nu\, dt'\right) \qquad (t \geqq \tau).$$

L'inégalité (1.3) entraîne alors

$$(1.11)\qquad \mathcal{R}(\xi; t, \tau) \leqq \exp[-\delta\,|2\pi\xi|^P(t-\tau)].$$

Le calcul de dérivation montre que $p_1^{\mu_1}\ldots p_n^{\mu_n}\mathcal{R}(\xi; t, \tau)$, où p_i désigne $\dfrac{\partial}{\partial\xi_i}$, est une combinaison de termes tels que

$$(1.12)\qquad \mathcal{R}(\xi; t, \tau)\prod_i\left(p_1^{k_1^{(i)}}\ldots p_n^{k_n^{(i)}}\left(\int_\tau^t \sum_{|\nu|=P} q_\nu(t')(2\pi i\xi)^\nu\, dt'\right)\right),$$

où $k^{(1)} + k^{(2)} + \ldots = \mu$, $(k^{(i)} > 0,\ i \leqq |\mu|)$. On le constate par induction mathématique.

Lemme 1.1. — *T étant fixé, alors nous avons pour $T \geqq t > \tau \geqq 0$,*

(i) $$\mathcal{R}(\xi; t, \tau) \underset{t\searrow\tau}{\longrightarrow} 1 \quad \textit{pour tout } \xi; \qquad |\mathcal{R}(\xi; t, \tau)| \leqq 1.$$

(ii) $$p_1^{\mu_1}\ldots p_n^{\mu_n}\mathcal{R}(\xi; t, \tau) \underset{t\searrow\tau}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{pour tout } \xi;$$

$$|p_1^{\mu_1}\ldots p_n^{\mu_n}\mathcal{R}(\xi; t, \tau)| \leqq \frac{c_\mu}{(1+|\xi|)^{|\mu|}},$$

où c_μ est une constante qui ne dépend que de T;

(iii) *$\mathcal{R}(\xi; t, \tau)$ est une fonction indéfiniment différentiable en t et τ,*

$$0 \leqq \tau < t \leqq T, \textit{ à valeurs dans } (\mathcal{S})_\xi.$$

Démonstration. — (i) est évident. Démontrons (ii). La première partie est une conséquence de (1.12). Démontrons la deuxième partie. Les formules (1.11) et (1.12) montrent que

$$(1.13)\qquad |p_1^{\mu_1}\ldots p_n^{\mu_n}\mathcal{R}(\xi; t, \tau)| \leqq c_\mu\left[\sum_{s=s(\mu)}^{|\mu|}(t-\tau)^s\,|2\pi\xi|^{Ps-|\mu|}\right] \times \exp[-\delta(t-\tau)\,|2\pi\xi|^P].$$

où $s(\mu)$ est le plus petit nombre entier s tel que $Ps \geqq |\mu|$.

Nous n'avons qu'à vérifier la deuxième partie de (ii) pour $|\xi| \geqq 1$, car le second membre de (1.13) est borné pour ξ borné. Pour $|\xi| \geqq 1$, posons $(t-\tau)|2\pi\xi|^p = \eta$; alors le second membre de (1.13) devient

$$c_\mu \frac{1}{|\xi|^{|\mu|}}\left[\sum_{s=s(\mu)}^{|\mu|} \eta^s\right]\exp(-\delta\eta).$$

Or, $\eta^s \exp(-\delta\eta)$ est borné pour $\eta \geqq 0$, d'où l'inégalité de (ii).

Démontrons (iii). Comme il est évident que $\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau) \in (\mathcal{S})_\xi$, ainsi que toutes les dérivées en t et τ, pour $t > \tau$, il reste à démontrer que $\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau)$ est une fonction indéfiniment différentiable en t, τ à valeurs dans $(\mathcal{S})_\xi$. Démontrons la continuité en t et τ. Prenons t_0, τ_0 tels que $t_0 > \tau_0$, alors

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau) - \mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau_0) = {} & [\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau) - \mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau)] \\ & + [\mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau) - \mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau_0)].\end{aligned}$$

Considérons le premier terme du second membre :

$$\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau) - \mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau) = \left\{\exp\left(\int_{t_0}^{t} \sum_{|\nu|=p} q_\nu(t')\,(2\pi i\xi)^\nu\, dt'\right) - 1\right\}\mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau).$$

Pour ξ borné, $\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau) - \mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau)$ tend uniformément vers zéro lorsque $t \to t_0$. D'autre part, comme

$$|t_0 - \tau| \geqq \frac{2}{3}(t_0 - \tau_0), \qquad |t - t_0| \leqq \frac{1}{3}(t_0 - \tau_0),$$

nous avons

$$\mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau) \leqq \exp\left[-\frac{2}{3}\delta\,|2\pi\xi|^p\,|t_0 - \tau_0|\right],$$

$$\left|\exp\left(\int_{t_0}^{t} \sum_{\nu} q_\nu(t')\,(2\pi i\xi)^\nu\, dt'\right) - 1\right| \leqq \exp[\delta\,|2\pi\xi|^p\,|t - t_0|] + 1,$$

donc, pour ξ non borné, $\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau) - \mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau)$ est majoré par $2\exp\left[-\frac{1}{3}\delta\,|2\pi\xi|^p\,|t_0 - \tau_0|\right]$. Cela montre que, quel que soit $k \geqq 0$, $(1 + |\xi|)^k[\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau) - \mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau)] \to 0$ uniformément par rapport à ξ lorsque $t \to t_0$, τ restant dans l'intervalle $|\tau - \tau_0| \leqq \frac{1}{3}(t_0 - \tau_0)$.

Le même raisonnement montre qu'il en est de même de $\mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau) - \mathcal{R}(\xi;\, t_0,\, \tau_0)$ lorsque $\tau \to \tau_0$. Donc, quel que soit $k \geqq 0$, $(1 + |\xi|)^k \mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau)$ est continue en t et τ, $t > \tau$, pour la topologie de la convergence uniforme sur $(R^n)_\xi$. La formule (1.12) et le raisonnement que nous avons fait montreront qu'il en est de même de $p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n}\, \mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau)$ pour $t > \tau$, ce qui démontre que $\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau)$ est une fonction continue en t et τ, $t > \tau$, à valeurs dans $(\mathcal{S})_\xi$. Il en est de même de ces dérivées en t et τ. C. Q. F. D.

2. Considérations préliminaires.

Définition de $(\mathcal{B}_0)$. — *$(\mathcal{B}_0)$ est le sous-espace de $(\mathcal{B})$ formé des fonctions $f(x)$ telles que $f(0)=0$. On munit $(\mathcal{B}_0)$ de la topologie induite par $(\mathcal{B})$.*

Définition. — *Décomposition* (N). — Soit $f(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathcal{B}_0)$. Alors en décomposant $f(x)$,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= f(x_1, 0, \ldots, 0) \\ &\quad + [f(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) - f(x_1, 0, \ldots, 0)] + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{n} [\;\; f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, 0, \ldots, 0) \\ &\qquad - f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots, 0)] \end{aligned}$$

et en posant,

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, 0, \ldots, 0) - f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots, 0) \\ & = x_i f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

nous dirons que

$$(2.2) \quad \begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= x_1 f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ &\quad + x_2 f_2(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + x_n f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

est la décomposition (N) *de $f(x) \in (\mathcal{B}_0)$.*

Nous devons démontrer le

Lemme 2.1. — *L'isomorphisme $f(x) \to (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ de $(\mathcal{B}_0)$ dans $(\mathcal{B}) \times (\mathcal{B}) \times \ldots \times (\mathcal{B})$ est une application continue.*

Démonstration. — Notre raisonnement s'appuie sur la formule de L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, t. I, p. 122 : Soit $f(x_1) \in (\mathcal{B}_0)$ alors $\varphi(x_1) = \dfrac{f(x_1)}{x_1} \in (\mathcal{B})$; de plus, on a

$$\left| \frac{d^m}{dx_1^m} \varphi(x_1) \right| \leq k_m \max_{|t| \leq |x_1|} \left| \frac{d^{m+1}}{dt_t^{m+1}} f(t) \right|,$$

où k_m est une constante qui ne dépend que de m. Donc, si $f_j(x_1) \to 0$ dans $(\mathcal{B}_0)$, alors $\varphi_j(x_1) \to 0$ dans $(\mathcal{B})$.

Cela étant, considérons $f(x_1; \lambda) \in (\mathcal{B}_0)$, où λ est un paramètre parcourant $R^k : \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in R^k$. Posons

$$(2.3) \qquad f(x_1; \lambda) = x_1 \varphi(x_1; \lambda), \qquad \varphi(x_1; \lambda) \in (\mathcal{B}).$$

Alors, si $f(x_1; \lambda)$ dépend de λ de manière indéfiniment différentiable dans $(\mathcal{B}_0)$, il en est de même de $\varphi(x_1;\lambda)$ dans $(\mathcal{B})$, et l'on a

$$(2.4)\qquad \partial_\lambda f(x_1;\lambda)=x_1\,\partial_\lambda\varphi(x_1;\lambda),\qquad \text{où}\quad \partial_\lambda=\frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_k}}{\partial\lambda_1^{\nu_1}\ldots\partial\lambda_k^{\nu_k}}.$$

Dans la formule (2.1), considérons $(x_1, \ldots, x_{i-1})$ comme paramètre; alors, nous écrivons (2.1) :

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} &f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, 0, \ldots, 0)-f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots, 0)\\ &\quad = x_i\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_i)=x_i\varphi(x_i; x_1, \ldots, x_{i-1}),\end{aligned}$$

il en résulte que $\varphi(x_i; x_1, \ldots, x_{i-1})\in(\mathcal{B})_{x_i}$ dépend de $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1})$ de manière indéfiniment différentiable. La formule (2.4) nous montre que $\partial_\lambda\varphi(x_i;\lambda)\in(\mathcal{B})_{x_i}$ dépend de λ de manière continue, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial^{\nu_i}}{\partial x_i^{\nu_i}}\dfrac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_{i-1}}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_{i-1}^{\nu_{i-1}}}\varphi(x_1, \ldots, x_i)$ sont des fonctions continues ($|\nu|\geqq 0$ quelconque). Comme les dérivations sont permutables dans ce cas,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_i)\equiv f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

est une fonction indéfiniment dérivable. Or

$$(2.6)\qquad \frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_i}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_i^{\nu_i}}\varphi(x_1, \ldots, x_i)=\frac{d^{\nu_i}}{dx_i^{\nu_i}}\frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_{i-1}}}{dx_1^{\nu_1}\ldots\partial x_{i-1}^{\nu_{i-1}}}\varphi(x_i; x_1, \ldots, x_{i-1})$$

donc, en désignant par A cette quantité :

$$\begin{aligned} |A| &\leqq k_{\nu_i}\max_{|t|\leqq|x_i|}\left|\frac{\partial^{\nu_1+\ldots+\nu_i+1}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_i^{\nu_i+1}}B\right|\\ &\leqq k_{\nu_i}\,2\sup_{x\in R^n}\left|\frac{\partial^{\nu_i+\ldots+\nu_i+1}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_i^{\nu_i+1}}f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right|,\end{aligned}$$

où

$$B=[f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, 0, \ldots, 0)-f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, \ldots, 0)]$$

c'est-à-dire, *a fortiori*

$$(2.7)\qquad |p_1^{\nu_1}\ldots p_i^{\nu_i}\ldots p_n^{\nu_n}f_i(x)|\leqq 2k_{\nu_i}\sup_{x\in R^n}|p_1^{\nu_1}\ldots p_i^{\nu_i+1}\ldots p_n^{\nu_n}f(x)|.$$

DÉFINITION. — *Espace hilbertien $D^s(-\infty<s<+\infty)$. On dit que $f\in D^s$, si f est tempérée et $\tau_{\frac{s}{2}}(p)f\equiv(1-p_1^2-p_2^2-\ldots-p_n^2)^{\frac{s}{2}}f\in L^2(R^n)$. On munit D^s du produit scalaire suivant :*

$$(f, g)_{D^s}=\left(\tau_{\frac{s}{2}}(p)f, \tau_{\frac{s}{2}}(p)g\right)=(\tau_s(p)f, g).$$

Remarquons que, si $s'<s$, D^s est contenu dans $D^{s'}$, avec une topologie plus fine.

Lemme 2.2. — *Soit s entier quelconque; $a(x) \in (\mathcal{B})$, $f \in D^s$. Alors l'application $(a(x), f) \to a(x) f$ de $(\mathcal{B}) \times D^s$ dans D^s est continue.*

Pour $s \geqq 0$, ce lemme est évident, puisque $\|f\|^{D^s}$ est équivalente à $\sum_{0 \leqq |\nu| \leqq s} \|p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} f\|_{L^2}$. Pour le cas $s < 0$, nous remarquons d'abord que D^s n'est autre que l'espace dual de D^{-s}. Alors, pour $T \in D^s$, $\varphi(x) \in D^{-s}$, $a(x) \in (\mathcal{B})$, $\langle a(x) T, \varphi(x) \rangle = \langle T, a(x) \varphi(x) \rangle$. Comme l'application $a(x) \to a(x) \varphi(x)$ est continue de $(\mathcal{B})$ dans D^{-s}, le lemme est démontré.

Nous indiquons un lemme qui sera utile dans un autre article.

Lemme 2.3. — *Soit q un entier positif quelconque, $f \in (\mathcal{D}'_{L^2})$ et $c(x) \in (\mathcal{B})$,*

$$(2.8) \qquad \tau_{-q}(p)\, c(x) f = c(x)\, \tau_{-q}(p) f + \sum_{\substack{|\nu| \leqq k \\ k = 1, 2, \ldots, q}} p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} \tau_{-k}(p)\, c'_{\nu, k}(x)\, \tau_{-q}(p) f,$$

où les $c'_{\nu, k}(x)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées de $c(x)$.

Démonstration :

$$(1 - p_1^2 - \ldots - p_n^2)\, c(x) f = c(x)\, (1 - p_1^2 - \ldots - p_n^2) f - \left[\sum_{i=1}^{n} p_i^2\, c(x)\right] f - 2 \sum_{i=1}^{n} \{p_i c(x)\}\, p_i f.$$

En remplaçant f par $(1 - p_1^2 - \ldots - p_n^2)^{-1} f$ et en appliquant $\tau_{-1}(p)$ à gauche,

$$c(x) \tau_{-1}(p) f = \tau_{-1}(p) \left[c(x) - \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i^2\, c(x) \right\} \tau_{-1}(p) - 2 \sum_{i=1}^{n} \{p_i c(x)\}\, p_i \tau_{-1}(p) \right] f.$$

Par récurrence,

$$c(x) \tau_{-q}(p) f = \tau_{-q}(p) \left[c(x) + \sum_{\substack{|\nu| \leqq k \\ k = 1, 2, \ldots, q}} c'_{\nu, k}(x)\, p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} \tau_{-k}(p) \right] f,$$

où les $c'_{\nu, k}(x)$ sont des combinaisons linéaires des dérivées de $c(x)$. Comme $f \in (\mathcal{D}'_{L^2})$, on a pour tout $\varphi(x) \in \mathcal{D}_{L^2}$, $\langle \tau_{-q} f, \varphi(x) \rangle = \langle f, \tau_{-q} \varphi(x) \rangle$. Donc, en considérant deux opérateurs transposés de la formule précédente, nous avons (2.8).

Définition. — *Espace $\mathcal{D}^s$ $(-\infty < s < +\infty)$ $f \in \mathcal{D}^s$, si $x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n} f \in D^{s+|\nu|}$ pour tout $|\nu| \geqq 0$. On munit $\mathcal{D}^s$ de la topologie suivante : $f_j \to 0$ dans $\mathcal{D}^s$, si $x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n} f_j \to 0$ dans $D^{s+|\nu|}$, pour tout $|\nu| \geqq 0$. $\mathcal{D}^s$ est un espace $(\mathcal{F})$.*

Exemples : $\delta \in \mathcal{D}^s$, où $s < -\dfrac{n}{2}$. $e^{-r} \in \mathcal{D}^s$, où $s \leqq 1$.

Proposition 2.1. — *$a(x) \in \mathcal{B}$, $f \in \mathcal{D}^s$ $(-\infty < s < +\infty)$, alors l'application $(a(x), f) \to a(x)f$ de $(\mathcal{B}) \times \mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}^s$ est continue.*

Démonstration. — Dans le cas s entier, cette proposition est évidente en vertu du lemme 2.2. Dans le cas s non entier, décomposons $a(x)$:

$$(\mathrm{N}) \qquad a(x) = a(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i\, a_i(x), \qquad a_i(x) \in (\mathcal{B}).$$

Donc,

$$a(x)f = a(0)f + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, x_i f.$$

Comme les espaces $(\mathcal{B})$ et $\mathcal{D}^s$ sont des espaces $(\mathcal{F})$, il suffit de démontrer la continuité séparée (*voir* N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques*, livre III, chapitre IX, paragraphe 5, exercice 22).

Démontrons maintenant que, si $f_j \to 0$ dans $\mathcal{D}^s$, $a(x)$ fixé, alors $a(x)f_j \to 0$ dans $\mathcal{D}^s$.

Pour $a(0)f_j$, le problème ne se pose pas. Pour les deuxièmes termes, comme $x_i f_j \to 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dans $\mathcal{D}^{s+1}$, *a fortiori* dans $\mathcal{D}^{[s]+1}$, où $[s]$ est le plus grand nombre entier tel que $[s] \leq s$, alors, la suite $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(x) x_i\right) f_j$ converge vers zéro dans $\mathcal{D}^{[s]+1}$, *a fortiori* dans $\mathcal{D}^s$. Deuxièmement supposons que $a(x) \to 0$ dans $(\mathcal{B})$, alors en vertu du lemme 2.1, $a_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n) \to 0$ dans $(\mathcal{B})$, donc, comme $x_i f \in \mathcal{D}^{s+1}$, *a fortiori* $\in \mathcal{D}^{[s]+1}$, $\sum_{i=1}^{n} a_i(x) x_i f \to 0$ dans $\mathcal{D}^{[s]+1}$, *a fortiori* dans $\mathcal{D}^s$. C. Q. F. D.

Par définition, on voit que :

a. *les applications $f \to x_i f$ $(i = 1, \ldots, n)$ de $\mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}^{s+1}$ sont continues;*

b. *les applications $f \to p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} f$ de $\mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}^{s-|\nu|}$ sont continues.*

Preuve de b :

$$x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}(p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} f) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq \lambda \\ 0 \leq i \leq \nu}} c_{i_1 \ldots i_n} p_1^{\nu_1 - i_1} \ldots p_n^{\nu_n - i_n}(x_1^{\lambda_1 - i_1} \ldots x_n^{\lambda_n - i_n} f).$$

En tenant compte du fait que $p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n}$ est une application continue de D^s dans $D^{s-|\mu|}$, on vérifie b.

Compte tenu de a, du lemme 2.1, et de la proposition 2.1, nous énonçons :

Proposition 2.2. — *Soient $a(x) \in (\mathcal{B}_0)$, $f \in \mathcal{D}^s$ $(-\infty < s < +\infty)$, alors l'application $(a(x), f) \to a(x)f$ de $(\mathcal{B}_0) \times \mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}^{s+1}$ est continue.*

Démonstration. — La décomposition (N) nous donne

$$a(x)f=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,x_i f.$$

C. Q. F. D.

Il y a une autre propriété remarquable de l'espace $\mathcal{D}^s$ que voici :

Proposition 2.3. — *Soit* ω *un ouvert tel que* $0 \notin \bar{\omega}$.

L'application : $f \xrightarrow[\text{restriction}]{} f_\omega$ *de* $\mathcal{D}^s$ (*s quelconque*) *dans* $\mathcal{D}_{L^s}(\omega)$ *est continue.*

Démonstration. — L'application $f \to r^{2k} f$ est continue de $\mathcal{D}^s$ dans $D^{[s]+2k}$. Pour $[s]+2k \geqq 0$, l'opérateur de restriction est continu. Comme $\frac{1}{r^{2k}} \in \mathcal{B}(\omega)$. $f \to f_\omega$ est continue de $\mathcal{D}^s$ dans $D^{[s]+2k}(\omega)$, et k est arbitraire.

C. Q. F. D.

3. Nouveaux espaces fonctionnels.

Définition 3.1. — *$\mathcal{D}^s[a, b]$ est l'ensemble des applications continues $t \to f(t)$ de $[a, b]$ dans $\mathcal{D}^s$. On le munit de la topologie de la convergence uniforme sur $[a, b]$. C'est un espace $(\mathcal{F})$. On désigne par $\mathcal{D}_0[a, b]$ le sous-espace de $\mathcal{D}^s[a, b]$ formé des applications telles que $f(a)=0$.*

Proposition 3.1. — *Soit*

$$g(t)=\int_0^t R_x(t, \tau) \underset{(x)}{\bigstar} q_\varepsilon(x, \tau, p) f(\tau)\, d\tau, \qquad T \geqq t \geqq 0.$$

Alors, l'application $f \to g$ de $\mathcal{D}^s[0, T]$ dans $\mathcal{D}_0^{s+\alpha}[0, T]$ est continue pour $\alpha < 1$ quelconque.

Démonstration :

$$x_1^{\lambda_1}\dots x_n^{\lambda_n} g(t)=\int_0^t \sum_{\mu} c_\mu x_1^{\mu_1}\dots x_n^{\mu_n} R_x(t,\tau) \underset{(x)}{\bigstar} x_1^{\lambda_1-\mu_1}\dots x_n^{\lambda_n-\mu_n} q_\varepsilon(x,\tau,p) f(\tau)\, d\tau.$$

Tous les cofficients de $q_\varepsilon(x, t, p)$ appartiennent à $(\mathcal{B})_x$ et sont continus en t; de plus, comme tous les coefficients correspondant aux dérivations d'ordre P appartiennent à $(\mathcal{B}_0)_x$, c'est-à-dire qu'ils s'annulent à l'origine, alors en vertu du lemme 2.1, les propositons 2.1, 2.2 et la propriété b du chapitre 2 nous montrent que l'application $f(t) \to x_1^{\lambda_1-\mu_1}\dots x_n^{\lambda_n-\mu_n} q_\varepsilon(x, t, p) f(t)$ de $\mathcal{D}^s[0, T]$ dans $\mathcal{D}^{s+1-P+|\lambda|-|\mu|}[0, T]$ est continue.

En désignant par $\mathcal{R}(\xi; t, \tau)$ $(t \geqq \tau)$ la transformée de Fourier (en x, pour t et τ fixés) de $R_x(t, \tau)$, nous avons

$$(3.1) \qquad \mathcal{R}(\xi; t, \tau)=\exp\left(\int_\tau^t \sum_\nu q_\nu(t')(2\pi i \xi)^\nu\, dt'\right) \qquad (t \geqq \tau).$$

Compte tenu de l'inégalité (1.3), nous avons

$$(3.2)\quad |(t-\tau)^{\alpha'} p_1^{\mu_1}\ldots p_n^{\mu_n}\,\mathcal{R}(\xi;t,\tau)| \leqq c_{\mu,\alpha'}(1+|2\pi\xi|)^{-\alpha' P-|\mu|}\qquad (t\geqq\tau).$$

En effet, dans la démonstration du lemme 1.1, (ii), nous avons la démonstration, compte tenu de $(t-\tau)^{\alpha'}=\eta^{\alpha'}|2\pi\xi|^{-\alpha' P}$.

Nous avons démontré (lemme 1.1) que $\mathcal{R}(\xi;t,\tau)$ est continue en t et τ, $t>\tau$, pour la topologie de $(\mathcal{S})_\xi$, donc en vertu de (3.2), $(1+|2\pi\xi|)^{\alpha' P+|\mu|}\,\mathcal{R}(\xi;t,\tau)$ est continue en t et τ et bornée $(t>\tau)$, pour la topologie de $(\mathcal{B}^0)_\xi$, où $(\mathcal{B}^0)_\xi$ est l'espace des fonctions continues bornées, muni de la topologie de la convergence uniforme sur R^n_ξ. Ce qui revient à dire que [*voir* l'étape *a* de la démonstration de la proposition 4.1, en effet, nous avons pour tout $f\in D^s$,

$$\|R\star f\|_{D^{s+\sigma}}\leqq C_\sigma \sup_{\xi\in R^n_\xi}\{(1+|\xi|)^\sigma r(\xi)\}\,\|f\|_{D^s}$$

où $r(\xi)$ est la transformée de Fourier de R], l'opérateur

$$(t-\tau)^{\alpha'} x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n} R_x(t,\tau)\underset{(x)}{\star}$$

est continu en t et τ $(t>\tau)$ est *borné* pour la topologie de $\mathcal{L}_b(D^s, D^{s+\alpha' P+|\mu|})$, où $\mathcal{L}_b(E,F)$ est l'espace des applications continues de E dans F, muni de la topologie de la convergence uniforme sur toute partie bornée de E. Sauf mention expresse, nous écrirons simplement $\mathcal{L}$ au lieu de $\mathcal{L}_b$.

Alors, l'application $f(t)\to g(t)$ de $D^s[0,T]$ dans $D^{s+\alpha' P+|\mu|}[0,T]$, $\alpha'<1$: $g(t)=\int_0^t x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n} R_x(t,\tau)\underset{(x)}{\star} f(\tau)\,d\tau$ est continue. En effet, on peut écrire,

$$g(t)=\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha'} x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n} R_x(t,\tau)\underset{(x)}{\star} f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha'}}\,d\tau\qquad(\alpha'<1).$$

Les propriétés de l'opérateur $(t-\tau)^{\alpha'} x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n} R_x(t,\tau)\underset{(x)}{\star}$, et comme $\dfrac{1}{(t-\tau)^{\alpha'}}$, $\alpha'<1$ est sommable en τ, nous montrent la propriété demandée. Cela montre que l'application $f(t)\to x_1^{\lambda_1}\ldots x_n^{\lambda_n} g(t)$ de $\mathcal{D}^s[0,T]$ dans $D^{s+1-(1-\alpha')P+|\lambda|}[0,T]$ est continue. Donc, l'application $f(t)\to g(t)$ de $\mathcal{D}^s[0,T]$ dans $\mathcal{D}^{s+1-(1-\alpha')P}[0,T]$ l'est. En posant $1-(1-\alpha')P=\alpha$, et comme $\alpha'<1$ est quelconque, on a la proposition. C. Q. F. D.

Proposition 3.2. — *Soit*

$$g(t)=\int_0^t R_x(t,\tau)\underset{(x)}{\star} q_\varepsilon(x,\tau,p) f(\tau)\,d\tau;\qquad \alpha<1.$$

Hypothèse :

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} f(t) \in \mathcal{D}_0^{s-\nu P}[0, T] \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

Conclusion :

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} g(t) \in \mathcal{D}_0^{s-\nu P+\alpha}[0, T] \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, k, k+1);$$

de plus, l'application

$$\left(f(t), \frac{d}{dt}f(t), \ldots, \frac{d^k}{dt^k}f(t)\right) \to \left(g(t), \frac{d}{dt}g(t), \ldots, \frac{d^k}{dt^k}g(t), \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}}g(t)\right)$$

est continue.

Démonstration. — Remarquons que

$$\frac{d^l}{dt^l} R_x(t, \tau) = \sum_{|\nu| \leq lP} q_{\nu,l}(t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} R_x(t, \tau), \tag{3.3}$$

où les $q_{\nu,l}(t)$ sont des polynomes en $q_\nu(t)$, $q'_\nu(t)$, ..., $q_\nu^{(l)}(t)$.
En effet,

$$\frac{d}{dt} R_x(t, \tau) = \sum_\nu q_\nu(t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} R_x(t, \tau);$$

par induction mathématique, (3.3) est évidente.
Cela étant,

$$\frac{d}{dt} g(t) = \int_0^t \frac{d}{dt} R_x(t, \tau) \underset{(x)}{\bigstar} q_\varepsilon(t, \tau, p) f(\tau)\, d\tau + R_x(t, t) \underset{(x)}{\bigstar} q_\varepsilon(x, t, p) f(t),$$

comme $R_x(t, t) = \delta$, en désignant par $g_1(t)$ le second terme, on a

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu} g_1(t) \in \mathcal{D}_0^{s-P(\nu+1)+1}[0, T] \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

Donc, il suffit qu'on considère le premier terme. Et de proche en proche, il suffit qu'on démontre que

$$\int_0^t \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} R_x(t, \tau) \underset{(x)}{\bigstar} q_\varepsilon(x, \tau, p) f(\tau)\, d\tau \in \mathcal{D}_0^{s-(k+1)P+\alpha}[0, T].$$

D'abord, $f(t) \in \mathcal{D}^s[0, T]$ entraîne

$$\int_0^t R_x(t, \tau) \underset{(x)}{\bigstar} q_\varepsilon(x, \tau, p) f(\tau)\, d\tau \in \mathcal{D}_0^{s+\alpha}[0, T],$$

d'où, compte tenu de (3.3), et de $p_1^{\nu_1}\dots p_n^{\nu_n}\int_0^t \in \mathcal{D}_0^{s+\alpha-|\nu|}[0, T]$, donc, $\in \mathcal{D}_0^{s-(k+1)P+\alpha}[0, T]$ comme les $q_{\nu,l}(t)$ sont des fonctions continues en t, nous avons donc la démonstration. C. Q. F. D.

Si $f(t)\in\mathcal{D}_0^s[0, T]$, alors en posant $\mathcal{L}f(t)=\int_0^t R_x(t, \tau)\underset{(x)}{\bigstar} q_\varepsilon f(\tau)\,d\tau$, nous avons,

$$f(t)\in\mathcal{D}_0^s[0, T]\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\mathcal{L}f(t)\in\mathcal{D}_0^{s+\alpha}[0, T]\\ \dfrac{d}{dt}\mathcal{L}f(t)\in\mathcal{D}_0^{s+\alpha-P}[0, T]\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\frac{d^\nu}{dt^\nu}\mathcal{L}^2 f(t)\in\mathcal{D}_0^{s+2\alpha-\nu P}[0, T]\quad(\nu=0, 1, 2)$$

$$\Rightarrow\dots\Rightarrow\frac{d^\nu}{dt^\nu}\mathcal{L}^k f(t)\in\mathcal{D}_0^{s+k\alpha-\nu P}[0, T],\quad(\nu=0, 1, 2, \dots, k)$$

$$\Rightarrow\dots$$

et de plus ces diverses applications sont continues.

Le lemme 1.1 donne le

LEMME 3.1. — *$R_x(t, 0)\in\mathcal{D}^s[0, T]$, où $s<-\frac{n}{2}$.*

DÉMONSTRATION. — Le lemme 1.1, (iii) montre que, pour $t>0$, $R_x(t, 0)$ est une fonction continue en t à valeurs dans $(\mathcal{S})_x$.

Il suffit donc de démontrer que, pour $s<-\frac{n}{2}$,

$$(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{R}(\xi;\, t, 0)\to(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}1\,;$$

$$(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{s}{2}+\frac{|\mu|}{2}}p_1^{\mu_1}\dots p_n^{\mu_n}\mathcal{R}(\xi;\, t, 0)\to 0,$$

lorsque $t\to 0$, pour la topologie de $L^2(R_\xi^n)$, ce qui est une conséquence immédiate de (i) et (ii) du lemme 1.1. C. Q. F. D.

On sait que $f\to f_\omega$ est continue de $\mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}_{L^2}(\omega)$ (proposition 2.3). Alors, par (3.3)

$$\frac{d^l}{dt^l}f_l(t)\in\mathcal{D}^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1-lP}[0, T],$$

et pour $t=0$, elle est concentrée à l'origine. En effet, (3.3) montre que

$$\frac{d^l}{dt^l}R_x(t, 0)=\sum q_{\nu,l}(t)p_1^{\nu_1}\dots p_n^{\nu_n}R_x(t, 0),$$

donc, comme $R_x(0, 0) = \delta$, $\frac{d^l}{dt^l} R_x(0, 0)$ a son support à l'origine.

$$f_l(t) = \int_0^t R_x(t, \tau) \underset{(x)}{\bigstar} q_\varepsilon(x, \tau, p) f_{l-1}(\tau)\, d\tau,$$

montre que, compte tenu de (3.3), si $f_{l-1}(0)$ a son support à l'origine, $f_l(0)$ l'est aussi. Donc

$$\frac{d^l}{dt^l} f_l(t) \in \mathcal{D}_{L^2,0}(\omega)[0, T].$$

Nous avons donc, en prolongeant $f_l(t)$ par zéro pour $t < 0$, la

PROPOSITION 3.3. — *Soit ω un ouvert tel que $0 \notin \bar{\omega}$, alors*

$$\left[\frac{d^l}{dt^l} f_i(t)\right]_\omega \in \mathcal{D}_{L^2}(\omega)[-\infty, T] \qquad \begin{pmatrix} l = 0, 1, 2, \ldots \\ i = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

Maintenant, pour voir une autre nature de $f_0(t)$, $f_1(t)$, ..., $t \in [0, T]$.

DÉFINITION. — *L'espace $\mathcal{E}^s[0, T]$ est l'ensemble des $f(t)$ telles que $f(t) \in \mathcal{D}^s[0, T]$ et de plus, $f(t) \in D^\infty[\varepsilon, T]$, ε positifs quelconques. On le munit de la topologie suivante : $f_j(t) \to 0$ dans $\mathcal{E}^s[0, T]$, si $f_j(t) \to 0$ dans $\mathcal{D}^s[0, T]$, et de plus, $f_j(t) \to 0$ dans $D^\infty[\varepsilon, T]$, quel que soit $\varepsilon > 0$. C'est un espace $(\mathcal{F})$.*

Remarquons que $R_x(t, 0) \in \mathcal{E}^s[0, T]$, avec $s < -\frac{n}{2}$ (lemmes 1.1 et 3.1).

On voit facilement la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4. — *Soit $g(t) = \mathcal{L} f(t)$, alors l'application $\mathcal{L} : f(t) \to g(t)$ de $\mathcal{E}^s[0, T]$ dans $\mathcal{E}^{s+\alpha}[0, T]$ $(\alpha < 1)$ est continue. En outre l'application $\left(f(t), \frac{d}{dt} f(t), \ldots, \frac{d^k}{dt^k} f(t)\right) \to \left(\mathcal{L} f(t), \frac{d}{dt} \mathcal{L} f(t), \ldots, \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \mathcal{L} f(t)\right)$, où $\frac{d^\nu}{dt^\nu} f(t) \in \mathcal{E}^{s-\nu P}[0, T]$, et $\frac{d^\nu}{dt^\nu} \mathcal{L} f(t) \in \mathcal{E}^{s-\nu P+\alpha}[0, T]$, est continue.*

DÉMONSTRATION. — Démontrons seulement le cas $f(t) \to g(t)$. Nous n'avons qu'à démontrer que $g(t) \in D^\infty[\varepsilon, T]$, et que l'application $f \to g$ de $\mathcal{E}^s[0, T]$ dans $D^\infty[\varepsilon, T]$ est continue. Décomposons l'intégrale $\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} d\tau + \int_{\frac{\varepsilon}{2}}^t d\tau$, alors, dans le premier $R_x(t, \tau) \in (\mathcal{S})$, et continue en t, τ; dans le second $f(t) \in D^\infty$.

4. Différentiabilité. — Considérons maintenant le cas où $q_\nu(t)$ $(|\nu| = P)$, et les coefficients de $q_\varepsilon(x, t, p)$ dépendent du paramètre $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1})$, où λ parcourt R^{n+1}.

1° Nous dirons que $q_\nu(t;\lambda)$ $(|\nu|=P)$ dépendent continûment (resp. de manière indéfiniment différentiable) de λ, si $q_\nu(t;\lambda)$ *gardent toujours l'inégalité* (**1**.3) et qu'elles, et toutes leurs dérivées en t, sont continues en λ (resp. indéfiniment différentiables) pour la topologie de $C[0, T]$ c'est-à-dire pour la topologie de la convergence uniforme sur $[0, T]$ de toutes les dérivées en t.

2° Nous dirons que $a(x, t; \lambda)$ dépend continûment (resp. de manière indéfiniment différentiable) de λ, si elle, et toutes ses dérivées en t, dépendent de λ continûment (resp. de manière indéfiniment différentiable) pour la topologie $(\mathcal{B})_x[0, T]$.

Alors, considérons

$$\mathcal{L}(\lambda)f(t)=\int_0^t R_x(t, \tau; \lambda)\underset{(x)}{\bigstar} q_\varepsilon(x, \tau, p; \lambda)f(\tau)\,d\tau,$$

où : 1° $q_\nu(t;\lambda)$ $(|\nu|=P)$ dépendent de λ de manière indéfiniment différentiable au sens de 1°;

2° $q_\varepsilon(x, t, p; \lambda)$: les coefficients dépendent de λ de manière indéfiniment différentiable au sens de 2°; de plus, les coefficients correspondant aux dérivées d'ordre P, s'annulent toujours à l'origine c'est-à-dire $\in(\mathcal{B}_0)_x$. Alors nous avons la

PROPOSITION **4**.**1**. — 1° *Soit* $g(t;\lambda)=\mathcal{L}(\lambda)f(t;\lambda)$, *alors si* $f(t;\lambda)$ *est une fonction indéfiniment différentiable de* λ *à valeurs dans* $\mathcal{D}^s[0, T]$, $g(t;\lambda)$ *est une fonction indéfiniment différentiable à valeurs dans* $\mathcal{D}^{s+\alpha}[0, T]$, *où* $\alpha<1$ *quelconque;* $f_0(t;\lambda)=R_x(t, 0; \lambda)$ *est une fonction indéfiniment différentiable à valeurs dans* $\mathcal{D}^s[0, T]$, $s<-\dfrac{n}{2}$.

2° *Si* $f(t;\lambda)$ *est une fonction indéfiniment différentiable de* λ *à valeurs dans* $\mathcal{D}_0^s[0, T]$, *alors de proche en proche*

$$f(t;\lambda)\in\mathcal{D}_0^s[0, T]\Rightarrow\begin{cases}\mathcal{L}(\lambda)f(t;\lambda)\in\mathcal{D}_0^{s+\alpha}[0, T]\\ \dfrac{d}{dt}\mathcal{L}(\lambda)f(t;\lambda)\in\mathcal{D}_0^{s+\alpha-P}[0, T]\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ldots\Rightarrow\frac{d^\nu}{dt^\nu}\mathcal{L}(\lambda)^k f(t;\lambda)\in\mathcal{D}_0^{s+k\alpha-\nu P}[0, T]\Rightarrow\ldots$$

$$(\nu=0, 1, 2, \ldots, k).$$

3° $\left[\dfrac{d^l}{dt^l}f_i(t;\lambda)\right]_\omega\in\mathcal{D}_{L^2}(\omega)[-\infty, T]$ *est indéfiniment différentiable en* λ, *où* $0\notin\bar{\omega}$.

4° $\dfrac{d^l}{dt^l}f_i(t;\lambda)$ *est une fonction indéfiniment différentiable de* λ *à valeurs dans* $\mathcal{E}^{-\left[\frac{n}{2}\right]-1+i\alpha-lP}[0, T]$, *où* $\alpha<1$ *quelconque.*

DÉMONSTRATION DE 1°. — Divisons la démonstration en trois étapes :

a. Soit S tempérée, telle que la transformée par Fourier soit une fonction continue, et que de plus, on ait

(4.1) $|\mathcal{S}(\xi)| \leqq c(1+2\pi|\xi|)^{-\sigma}$ [$\mathcal{S}(\xi)$ étant la transformée de S].

Alors, si $f\in D^s$ (s réel quelconque), nous avons, $S\star f\in D^{s+\sigma}$; plus précisément si l'on définit l'espace des S par la condition (4.1), avec la norme $\sup\limits_{\xi\in R^n}|(1+2\pi|\xi|)^\sigma \mathcal{S}(\xi)|$, alors, l'application $(S, f)\to S\star f$ est continue. En effet, $f\underset{\mathcal{F}}{\to}\varphi(\xi)$, alors

$$\varphi(\xi)=(1+4\pi^2|\xi|^2)^{-\frac{s}{2}}\psi(\xi), \qquad \|f\|_{D^s}=\|\psi(\xi)\|_{L^2}.$$

Or,

$$\mathcal{S}\star f\underset{\mathcal{F}}{\to}\mathcal{S}(\xi)\,\varphi(\xi)=(1+4\pi^2|\xi|^2)^{-\frac{\sigma}{2}-\frac{s}{2}}\left[(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}}\mathcal{S}(\xi)\right]\psi(\xi).$$

Compte tenu de

$$\|\mathcal{S}\star f\|^2_{D^{s+\sigma}}=\int\cdots\int\left|(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}}\mathcal{S}(\xi)\,\psi(\xi)\right|^2 d\xi,$$

et de

$$(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}}\lesseqgtr(1+2\pi|\xi|)^\sigma\lesseqgtr 2^{\frac{\sigma}{2}}(1+4\pi^2|\xi|^2)^{\frac{\sigma}{2}},$$

selon qu'on a $\sigma\geqq 0$ ou $\leqq 0$. Donc,

(4.2) $$\|S\star f\|_{D^{s+\sigma}}\leqq c_\sigma \sup_{\xi\in R^n}|(1+2\pi|\xi|)^\sigma\mathcal{S}(\xi)|\,\|f\|_{D^s},$$

où $\mathcal{S}(\xi)$ était la transformée de S.

b. Nous montrons que, pour la fonction

(4.3) $$(1+2\pi|\xi|)^{p\alpha'+|\mu|}(t-\tau)^{\alpha'}p_1^{\mu_1}\ldots p_n^{\mu_n}\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau;\, \lambda),$$

toutes les dérivées en λ sont des fonctions continues et ***bornées*** en (t, τ, λ) $(t>\tau)$, à valeurs dans $(\mathcal{B})^0_\xi$. Il y a plus. Toutes les dérivées en λ de $\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau;\, \lambda)$ sont, pour $t-\tau>\varepsilon>0$, des fonctions continues de (t,τ,λ) à valeurs dans $(\mathcal{S})_\xi$.

$p_1^{\mu_1}\ldots p_n^{\mu_n}\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau;\, \lambda)$ est une combinaison linéaire de termes tels que

(4.4) $$\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau;\, \lambda)\prod_i\left\{p_1^{k_1^i}\ldots p_n^{k_n^i}\left(\int_\tau^t\sum_{|\nu|=p}q_\nu(t';\,\lambda)\,(2\pi i\xi)^\nu\,dt'\right)\right\},$$

où $k^{(1)}+k^{(2)}+\ldots=\mu$, $(k^{(i)}>0)$ [*voir* (1.12)].

A partir de (4.4), nous aurons l'expression de chaque dérivée de λ.

Les dérivées en λ d'ordre q de $\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau;\, \lambda)$ se majorent par

$$c_q\left[\sum_{s=1}^{q}(t-\tau)^s|\xi|^{Ps}\right]\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau;\, \lambda),$$

et l'on a

$$|\mathcal{R}(\xi;\, t,\, \tau;\, \lambda)| \leqq \exp[-\delta|2\pi\xi|^P(t-\tau)].$$

D'autre part, dans (4.4) le deuxième facteur s'écrit

$$\prod_i \left\{\sum_{|\nu|=P} p^{k^{(i)}}(2\pi i\xi)^\nu \int_\tau^t q_\nu(t';\, \lambda)\, dt'\right\}.$$

Ceci montre que les dérivées en λ du deuxième facteur se majorent par

$$k_q\left[\sum_{s=s(\mu)}^{q}(t-\tau)^s|2\pi\xi|^{Ps-|\mu|}\right].$$

Ces deux majorations montrent que, en posant $(t-\tau)|2\pi\xi|^P=\eta$, par le même raisonnement que dans la proposition **3.1**, toutes les dérivées de λ de (4.3) sont des fonctions *bornées* en $(t,\, \tau,\, \lambda)$ à valeurs dans $(\mathcal{B}^0)_\xi$. Nous laissons au lecteur la démonstration de la continuité dans $(\mathcal{S})_\xi$.

c. En vertu de *a* et de *b*, l'opérateur $(t-\tau)^{\alpha'}x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n}R_x(t,\, \tau;\, \lambda)\underset{(x)}{\bigstar},(t>\tau)$, est une fonction indéfiniment différentiable de λ, et dont toutes les dérivées en λ sont des fonctions continues et bornées de $(t,\, \tau,\, \lambda)$ $(t>\tau)$, à valeurs dans $\mathcal{L}(D^s,\, D^{s+P\alpha'+|\mu|})$. Alors, si $f(t;\, \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $D^s[0,\, T]$, $(t-\tau)^{\alpha'}x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n}R_x(t,\, \tau;\, \lambda)\underset{(x)}{\bigstar}f(\tau;\, \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ, dont toutes les dérivées sont des fonctions continues et bornées en $(t,\, \tau,\, \lambda)$ à valeurs dans $D^{s+P\alpha'+|\mu|}$. Alors, nous refaisons le raisonnement de la proposition **3.1**.

$$\begin{aligned} g(t;\, \lambda) &= \int_0^t x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n}R_x(t,\, \tau;\, \lambda)\underset{(x)}{\bigstar}f(\tau;\, \lambda)\, dt \\ &= \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha'}x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n}R_x(t,\, \tau;\, \lambda)\underset{(x)}{\bigstar}f(\tau;\, \lambda)}{(t-\tau)^{\alpha'}}\, d\tau \end{aligned}$$

est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $D^{s+P\alpha'+|\mu|}[0,\, T]$. D'autre part, comme les applications $(a(x),\, f)\to a(x)f$ de $(\mathcal{B}_0)\times\mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}^{s+1}$, $f\to p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}f$ de $\mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}^{s-|\nu|}$, sont continues, l'application $(a(x),\, f)\to a(x)p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}f$ de $(\mathcal{B}_0)\times\mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}^{s+1-|\nu|}$ sont continue. Cela entraîne, si $f(t;\, \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $\mathcal{D}^s[0,\, T]$, et si $q_\varepsilon(x,\, t,\, p;\, \lambda)$ dépend de λ au sens de 2°, alors $q_\varepsilon(x, t, p; \lambda) f(t; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $\mathcal{D}^{s+1-P}[0, T]$.

Envisageons la formule

$$x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n} g(t; \lambda)$$
$$= \int_0^t \sum_\mu c_\mu x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} R_x(t, \tau; \lambda) \underset{(x)}{\bigstar} x_1^{\gamma_1-\mu_1} \ldots x_n^{\gamma_n-\mu_n} q_\varepsilon(x, \tau, p; \lambda) f(\tau; \lambda)\, d\tau.$$

Compte tenu de ce que l'application $f \to x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n} f$ de $\mathcal{D}^s[0, T]$ dans $D^{s+|\nu|}[0, T]$ est continue, la fonction à convoluter est une fonction indéfiniment différentiable à valeurs dans $D^{s+1-P+|\gamma|-|\mu|}[0, T]$. La fonction $x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n} g(t; \lambda)$ est donc une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $D^{s+1-(1-\alpha')P+|\gamma|}[0, T]$. En posant $\alpha = 1 - (1 - \alpha')P$, nous avons la démonstration.

Démontrons la deuxième partie de 1°. Il suffit de démontrer que, s étant $< -\frac{n}{2}$, $(1 + |\xi|)^{s+|\mu|} p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n} \mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $L^2(R_\xi^n)[0, T]$. Nous le montrons pour $(1 + |\xi|)^s \mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$. D'après l'expression

$$\mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda) = \exp\left(\int_0^t \sum q_\nu(t'; \lambda)(2\pi i \xi)^\nu\, dt' \right),$$

on voit facilement que les dérivées premières en λ prises pour t fixé $\in L^2(R_\xi^n)$, pour $t \geqq 0$, et de plus elles sont continues en t à valeurs dans $L^2(R_\xi^n)$. En effet, comme nous l'avons observé, quel que soit $\varepsilon > 0$, $\mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $(\mathcal{S})_\xi[\varepsilon, T]$. Il suffit donc de démontrer que, lorsque $t \to 0$, $(1 + |\xi|)^s \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$ converge vers zéro pour la topologie de $L^2(R_\xi^n)$. Or, le raisonnement que nous avons donné dans le lemme **1.1** donne cette vérification. Ensuite $(1 + |\xi|)^s \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \mathcal{R}(\xi, t, 0; \lambda)$ est une fonction continue de λ à valeurs dans $L^2(R_\xi^n)[0, T]$, ce qui implique que $(1 + |\xi|)^s \mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$ est une fonction une fois continûment différentiable à valeurs dans $L^2(R_\xi^n)[0, T]$. On voit de proche en proche que, quel que soit $k > 0$, $(1 + |\xi|)^s \mathcal{R}(\xi; t, 0; \lambda)$ est une fonction k fois différentiable à valeurs dans $L^2(R^n)[0, T]$. Pour $(1 + |\xi|)^{s+|\mu|} p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n} \mathcal{R}(\xi; t, 0; \tau)$, nous partons de l'expression de (**4**.4). Nous laissons la démonstration au lecteur.

Nous avons donc démontré que $R_x(t, 0; \lambda)$ est une fonction indéfiniment différentiable de λ à valeurs dans $\mathcal{E}^s[0, T]$, $s < -\frac{n}{2}$.

Nous ne donnons pas les démonstrations de 2°, 3° et de 4°. Le raisonnement analogue à celui de la proposition **3.2** donnera le résultat de 2°. De même, le raisonnement analogue à la proposition **3.3** (resp. la proposition **3.4**) donnera 3° (resp. 4°). C. Q. F. D.

Les propositions 3.3, 3.4 et 4.1 nous donnent

Proposition 4.2. — *Soit $\alpha(x_1, \ldots, x_n, t)$ une fonction $\in (\mathcal{D})_{x,t}$ telle que son support ne contienne pas zéro :* $0 \notin S[\alpha(x, t)]$, $[S(T)$ *désigne le support de* $T]$, *alors, les distributions* $\alpha(x_1, \ldots, x_n, t)\, Y(t) f_i(t; \lambda)\ (i = 0, 1, 2, \ldots)$ *sont des fonctions indéfiniment différentiables en* (x, t), *et dépendent de* λ *de manière indéfiniment différentiable pour la topologie* $\mathcal{E}_{x,t}$.

Nous admettrons sans démonstration le lemme suivant :

Lemme 4.1. — 1° *Si* $f \in D^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$, *où n est la dimension de l'espace, alors f est une fonction continue; plus précisément, la convergence au sens de* $D^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ *entraîne la convergence uniforme dans* R^n.

2° *Si* $f \in D^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+p}$, *alors f est une fonction continue avec ses dérivées au moins jusqu'à l'ordre p; plus précisément la convergence au sens de* $D^{\left[\frac{n}{2}\right]+1+p}$ *entraîne la convergence uniforme dans R^n avec ses dérivées jusqu'à l'ordre p.*

Ce lemme et la proposition 4.1, 2° nous donnent :

Proposition 4.3. — *Quel que soit m, il existe $i_0(m)$ tel que pour $i \geqq i_0$,* $Y(t) f_i(t; \lambda)$ *est une fonction m fois continûment différentiable au sens usuel en (x, t) et dépend de λ de manière indéfiniment différentiable pour la topologie* $\mathcal{E}^m_{x,t}$.

Avant de passer au chapitre 5, nous indiquons un lemme qu'il est facile de vérifier.

Lemme 4.2. — *Si $a(x, t)$ définit une fonction indéfiniment différentiable de t à valeurs dans $(\mathcal{B})_x$, alors, en posant* $a(x+\xi, t+\tau) = a(x, t; \xi, \tau)$, $a(x, t; \xi, \tau)$ *est une fonction indéfiniment différentiable de t, τ, ξ à valeurs dans* $(\mathcal{B})_x$.

Cela étant, le lemme 2.1 nous montre que l'application $f(x) \to (f_1(x), f_n(x))$ de $(\mathcal{B})$ dans $(\mathcal{B}) \times \ldots \times (\mathcal{B})$ est continue, où

$$\text{(N)} \qquad f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x).$$

En effet, l'application $f(x) \to [f(x) - f(0)]$ de $(\mathcal{B})$ sur $(\mathcal{B}_0)$ est continue. Cela nous montre que, en désignant par $a_i(x, t; \xi, \tau)\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ les composants de $a(x, t; \xi, \tau)$ pour la décomposition (N) :

$$\text{(N)} \qquad a(x+\xi, t+\tau) - a(\xi, t+\tau) = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i(x, t; \xi, \tau),$$

ces $a_i(x, t; \xi, \tau)$ ont la même propriété que celle de $a(x, t; \xi, \tau)$ que nous avons explicitée dans le lemme.

5. **Paramétrix.** — Revenons à l'équation (1.2). Quand on applique l'opérateur

$$(5.1)\qquad D = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|\nu|\leq p} q_\nu(x, t) p_1^{\nu_1} p_2^{\nu_2} \dots p_n^{\nu_n} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - q(x, t, p),$$

à la distribution

$$(5.2)\qquad Y(t)\,[f_0(t) + f_1(t) + \dots + f_i(t)],$$

alors, en tenant compte de $f_j(0) = 0$ $(j = 1, 2, \dots, i)$ et $f_0(0) = \delta_x$, on a

$$(5.3)\qquad DY(t)\,[f_0(t) + \dots + f_i(t)] = - q_\varepsilon(x, t, p)\, Y(t) f_i(t) + \delta_x \times \delta_t.$$

Considérons l'équation d'évolution qui dépend du paramètre (ξ, τ) :

$$(5.4)\qquad \frac{d}{dt} - \sum_{|\nu|\leq p} q_\nu(x + \xi, t + \tau) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n}.$$

Alors, en écrivant $q_\nu(x + \xi, t + \tau) = q_\nu(x, t; \xi, \tau)$, $q_\nu(\xi, t + \tau) = q_\nu(t; \xi, \tau)$, nous voyons que, en vertu du lemme 4.2, et de la remarque à la fin du chapitre 4, $q_\nu(t; \xi, \tau)$ et $q_{\varepsilon,\nu}(x, t; \xi, \tau)$:

$$(5.5)\qquad \begin{aligned} q_\varepsilon(x, t; \xi, \tau; p) &= \sum_{|\nu|\leq p} q_{\varepsilon,\nu}(x, t; \xi, \tau) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \\ &= \sum_{|\nu| = p} [q_\nu(x + \xi, t + \tau) - q_\nu(\xi, t + \tau)] p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \\ &\quad + \sum_{|\nu|\leq p-1} q_\nu(x + \xi, t + \tau) p_1^{\nu_1} \dots p_n^{\nu_n} \end{aligned}$$

dépendent de (ξ, τ) de manière indéfiniment différentiable au sens que nous avons énoncé au début du chapitre 4. Donc, nous pouvons appliquer les résultats du chapitre 4 aux $f_0(t; \xi, \tau)$, $\dots$, et nous aurons la distribution

$$(5.6)\qquad Y(t)\,[f_0(t; \xi, \tau) + \dots + f_i(t; \xi, \tau)].$$

Posons

$$(5.7)\qquad E_{x,t}(\xi, \tau) = \theta_{\xi,\tau} Y(t)\,[f_0(t; \xi, \tau) + \dots + f_i(t; \xi, \tau)],$$

où $\theta_{\xi,\tau}$ est l'opérateur de translation. Nous fixons i une fois pour toutes.

Appliquons D à gauche,

$$\begin{aligned} DE_{x,t}(\xi,\tau) &= D\theta_{\xi,\tau} Y(t)[f_0(t;\xi,\tau)+\ldots+f_i(t;\xi,\tau)] \\ &= \theta_{\xi,\tau}\left[\frac{\partial}{\partial t}-\sum q_\nu(x+\xi,t+\tau)p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}\right] \\ &\quad\times Y(t)[f_0(t;\xi,\tau)+\ldots+f_i(t;\xi,\tau)] \\ &= \theta_{\xi,\tau}[\delta_x\times\delta_t - q_\varepsilon(x,t;\xi,\tau;p)\,Y(t)f_i(t;\xi,\tau)]. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \theta_{\xi,\tau}q_\varepsilon(x,t;\xi,\tau;p) &= \sum_{|\nu|=P}[q_\nu(x,t)-q_\nu(\xi,t)]p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}\theta_{\xi,\tau} \\ &\quad+\sum_{|\nu|\leqq P-1} q_\nu(x,t)p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}\theta_{\xi,\tau} \\ &= \left[q(x,t,p)-\sum_{|\nu|=P} q_\nu(\xi,t)p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}\right]\theta_{\xi,\tau}. \end{aligned}$$

Posons

$$(5.8)\quad \begin{aligned} &L(x,t;\xi,\tau) \\ &= -\left[q(x,t,p)-\sum_{|\nu|=P} q_\nu(\xi,t)p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}\right]\theta_{\xi,\tau}[Y(t)f_i(t;\xi,\tau)]. \end{aligned}$$

Alors on a

$$(5.9)\qquad DE_{x,t}(\xi,\tau)=\delta_{x-\xi}\times\delta_{t-\tau}+L(x,t;\xi,\tau).$$

Alors, d'après la proposition 4.3, quand on prend i assez grand pour m donné, $L(x,t;\xi,\tau)$ est une fonction en $(x,t)\in(\mathcal{E})^m_{x,t}$ et dépend de (ξ,τ) de manière m fois continûment différentiable pour cette topologie.

Deuxièmement, $E_{x,t}(\xi,\tau)\in\mathcal{D}'_{x,t}$ dépend de (ξ,τ) de manière indéfiniment différentiable (proposition 4.1); de plus, si $\alpha(x,t)\in\mathcal{D}_{x,t}$, et que $(\xi,\tau)\notin S[\alpha(x,t)]$, alors $\alpha(x,t)E_{x,t}(\xi,\tau)\in\mathcal{D}_{x,t}$ et dépend de (ξ,τ) de manière indéfiniment différentiable (proposition 4.2).

Enfin, nous démontrons la semi-régularité de $E_{x,t}(\xi,\tau)$ en (x,t) (¹). Pour toute $\varphi(\xi,\tau)\in\mathcal{D}_{\xi,\tau}$, $\int E_{x,t}(\xi,\tau)\,\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\in\mathcal{E}_{x,t}$; si des $\varphi_j(\xi,\tau)$ de supports contenus dans un compact fixe convergent vers zéro dans $\mathcal{E}_{\xi,\tau}$ les intégrales $\in\mathcal{E}_{x,t}$ convergent vers zéro dans $\mathcal{E}_{x,t}$.

Nous allons démontrer que $\int E_{x,t}(\xi,\tau)\,\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\in\mathcal{E}_{x,t}$. D'abord $(\mathcal{B}^0)\subset D^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ (lemme 4.1) et $f_i(t;\xi,\tau)\in D^s[0,T]$, $s<-\frac{n}{2}$, est indéfini-

(¹) M. L. Schwartz nous a signalé que, dans son livre [3] (t. I), il a oublié de mentionner cette condition de semi-régularité. Il faut ajouter cette condition aux conditions des noyaux ou encore des paramétrix.

ment différentiable en (ξ, τ) (proposition 4.1). Comme $\tau_{-l}(p)$ est une application continue de D^s dans D^{s+2l}, $\tau_{-l}(p)f_l(t;\xi,\tau)\in D^{s+2l}[0, T]$ dépend de (ξ, τ) de manière indéfiniment différentiable. Prenons $l=\left[\frac{n}{2}\right]+1$, alors la fonction $f_l(x, t;\xi,\tau)=\tau_{-l}(p)f_l(t;\xi,\tau)$ est continue et bornée en (x, t, ξ, τ), ainsi que toutes ses dérivées (prises au sens habituel) en (ξ, τ).

Considérons, pour $\psi(x, t)\in\mathcal{D}_{x,t}$,

$$(5.10)\quad \iint \theta_{\xi,\tau}[Y(t)f_l(t;\xi,\tau)]\,\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\,\psi(x,t)\,dx\,dt$$
$$=\int \varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau \int \theta_{\xi,\tau}[Y(t)\,\tau_l(p_x)f_l(x,t;\xi,\tau)]\,\psi(x,t)\,dx\,dt]$$
$$\int \theta_{\xi,\tau}[Y(t)\ldots]\,\psi(x,t)\,dx\,dt$$
$$=\int_{t\geq 0} \tau_l(p_x)f_l(x,t;\xi,\tau)\,\psi(x+\xi,t+\tau)\,dx\,dt$$
$$=\int_{t\geq 0} f_l(x,t;\xi,\tau)\,\tau_l(p_x)\,\psi(x+\xi,t+\tau)\,dx\,dt,$$

en remarquant qu'ici $\tau_l(p_x)=\tau_l(p_\xi)$, et par Fubini,

$$(5.10)\quad =\int_{t\geq 0} dx\,dt \int \tau_l(p_\xi)[\varphi(\xi,\tau)f_l(x,t;\xi,\tau)]\,\psi(x+\xi,t+\tau)\,d\xi\,d\tau$$

Supposons maintenant qu'une suite de $\psi_j(x, t)$, des supports contenus dans un compact K, converge vers zéro au sens de $\mathcal{D}'^m$. Alors, on peut exprimer cette suite comme $\psi_j(x,t)=D_{x,t}[\tilde{\psi}_j(x,t)]$, où $S[\tilde{\psi}(x,t)]\subset\tilde{K}(\supset K)$, et $D_{x,t}$ est un polynome de dérivation d'ordre m', et $\tilde{\psi}_j(x,t)\to 0$ dans $(\mathcal{D}^0)$. Alors

$$(5.10)\quad =\int_{t\geq 0} dx\,dt \int D'_{\xi,\tau}\tau_l(p_\xi)[\varphi(\xi,\tau)f_l(x,t;\xi,\tau)]\,\tilde{\psi}_j(x+\xi,t+\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

où $D'_{\xi,\tau}$ est transposé de $D_{\xi,\tau}$. Donc

$$|(5.10)|\leq \text{volume}\,(S(\varphi)-\tilde{K}).\text{volume}\,(\tilde{K}).M.\max_{\xi,\tau}|\tilde{\psi}_j(\xi,\tau)|,$$

avec

$$M=\max|D'_{\xi,\tau}\tau_l(p_\xi)[\varphi(\xi,\tau)f_l(x,t;\xi,\tau)]|$$

pour

$$(x,t)\in S(\varphi)-\tilde{K},\quad (t\geq 0),\qquad (\xi,\tau)\in S(\varphi).$$

Donc, (5.10) converge vers zéro.

Comme K et m sont quelconques, cela montre que $\int E_{x,t}(\xi,\tau)\,\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$ appartient à $\mathcal{E}_{x,t}$. Dans ce raisonnement, on voit facilement que l'application $\varphi(\xi,\tau) \to \int E_{x,t}(\xi,\tau)\,\varphi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$ est une application continue de $(\mathcal{D}_H)_{\xi,\tau}$ dans $\mathcal{E}_{x,t}$, où H est un compact quelconque de (ξ,τ) donc de $(\mathcal{D})_{\xi,\tau}$ dans $\mathcal{E}_{x,t}$.

Considérons maintenant, l'opérateur transposé

$$(5.11) \qquad D' = -\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{|\nu|\leq P} (-1)^{|\nu|} p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n} q_\nu(x,t) \equiv -\frac{\partial}{\partial t} - {}^t q(x,t,p).$$

Or, nous voyons que l'opérateur transposé D' est un opérateur antiparabolique, c'est-à-dire que, en changeant $t \to -t$, D' devient P-parabolique. En effet, en posant $t' = -t$, (5.11) devient, compte tenu de ce que P est pair,

$$(5.11') \qquad \frac{\partial}{\partial t'} - \left\{ \sum_{|\nu|=P} q_\nu(x,-t')\,p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n} + \sum_{|\nu|\leq P-1} \tilde{q}_\nu(x,t')\,p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n} \right\}.$$

Donc, nous pouvons appliquer à cet opérateur tous les résultats que nous avons obtenus. Alors, posons

$$(5.12) \qquad E'_{x,t'}(\xi,\tau) = \theta_{\xi,\tau} Y(t')\,[f_0(t';\xi,\tau) + \ldots + f_l(t';\xi,\tau)],$$

où $f_0(t';\xi,\tau), \ldots, f_l(t';\xi,\tau)$ (on les prolonge par zéro pour $t' < 0$), sont des distributions qu'on obtiendra à partir de l'opérateur (5.11'), alors que nous sommes partis de l'opérateur D.

(5.12) s'écrit

$$(5.13) \qquad E'_{x,t}(\xi,\tau) = \theta_{\xi,\tau} Y(-t)\,[f_0(-t;\xi,\tau) + \ldots + f_l(-t;\xi,\tau)].$$

Alors, en posant,

$$(5.14) \qquad L'(x,t;\xi,\tau) = -\left[{}^t q(x,t,p) - \sum_{|\nu|=P} q_\nu(\xi,t)\,p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}\right] \theta_{\xi,\tau}[Y(-t)\,f_l(-t;\xi,\tau)],$$

nous aurons

$$(5.15) \qquad D' E'_{x,t}(\xi,\tau) = \delta_{x-\xi} \times \delta_{t-\tau} + L'(x,t;\xi,\tau).$$

Les noyaux $E'_{x,t}(\xi,\tau)$, $L'(x,t;\xi,\tau)$ ont les propriétés suivantes :

1° $E'_{x,t}(\xi,\tau)$ est une fonction indéfiniment différentiable de (ξ,τ) à valeurs dans $\mathcal{D}'_{x,t}$.

2° Si $\alpha(x,t) \in \mathcal{D}_{x,t}$, et que $(\xi,\tau) S[\alpha(x,t)]$, alors $\alpha(x,t)\,E'_{x,t}(\xi,\tau)$ est une fonction indéfiniment différentiable en (ξ,τ) à valeurs dans $\mathcal{D}_{x,t}$.

3° La semi-régularité en (x, t) : l'application

$$\varphi(\xi, \tau) \to \int E'_{x,t}(\xi, \tau)\, \varphi(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau$$

de $(\mathcal{D})_{\xi,\tau}$ dans $\mathcal{E}_{x,t}$ est continue.

4° $L'(x, t; \xi, \tau)$ est une fonction m fois continûment différentiable de ξ, τ à valeurs dans $\mathcal{E}^m_{x,t}$.

Alors, en appliquant au noyau $E'_{x,t}(\xi, \tau)$ le raisonnement de L. SCHWARTZ, (*Théorie des Distributions*, **1**, p. 136-139) (²), nous obtenons le théorème du début de l'Introduction.

COROLLAIRE DU THÉORÈME. — *Le cas elliptique n'est qu'un cas particulier* (*Méthode de descente*). *Nous dirons que l'opérateur différentiel*

$$(5.16) \qquad q(x, p) = \sum_{|\nu| \leqq P} q_\nu(x) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n}, \qquad \textit{ou encore} \quad = \sum q_\nu(x) p^\nu$$

est elliptique (*au sens de Petrowsky*) *dans un ouvert* Ω, *si*

$$(5.17) \qquad \sum_{|\nu| = P} q_\nu(x)(i\xi)^\nu \neq 0, \qquad \textit{lorsque } \xi \textit{ réel} \neq 0, \textit{ pour tout } x \in \Omega.$$

Nous supposons les coefficients $\in (\mathcal{B})$. *Nous dirons que l'opérateur* (5.16) *est hypoelliptique* (*au sens de Schwartz*), *si toute distribution* U_x, *solution de*

$$(5.18) \qquad q(x, p)\, U_x = g_x$$

est une fonction indéfiniment différentiable dans tout ouvert où g_x *l'est. De cette définition, il résulte que, si* $q_1(x, p)\, q_2(x, p)$ *est un opérateur hypoelliptique* (*au sens de Schwartz*), *alors* $q_2(x, p)$ *l'est.*

Compte tenu de cette remarque, il suffit de démontrer l'hypoellipticité de l'opérateur (5.16), sous l'hypothèse,

$$(5.17') \qquad \sum_{|\nu| = P} q_\nu(x)(i\xi)^\nu \geqq \delta |\xi|^P \qquad (\delta > 0).$$

En effet, en posant $\bar{q}(x, p) = \sum_{|\nu| = P} \overline{q_\nu(x)}\, p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n}$, nous n'avons qu'à

(²) Cela suffit pour établir le théorème. En effet, le raisonnement de SCHWARTZ nous montre que, si la solution est localement dans $\mathcal{D}'^m$, alors cette solution doit être localement dans $\mathcal{D}^m$ (ne pas confondre cette notation avec notre notation $\mathcal{D}^s$), et nous pouvons donner à m des valeurs aussi élevées qu'on le veut.

démontrer l'hypoellipticité pour l'opérateur $\bar{q}(x, p)\, q(x, p)$, et cet opérateur satisfait bien à la condition (5.17') (en remplaçant P par $2P$).

Alors, (5.17') montre que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial t} - q(x,p)$ est un opérateur parabolique. Supposons maintenant que U_x satisfait à l'équation (5.18). Or, en regardant U_x et g_x comme des distributions dans l'espace (x, t), nous avons $\left[\frac{\partial}{\partial t} - q(x, p)\right] U_x = - g_x$. Donc, si g_x est une fonction indéfiniment différentiable dans un ouvert Ω, alors, d'après le théorème, U_x est une fonction indéfiniment différentiable dans l'ouvert $\Omega \times R^1$, donc U_x l'est dans Ω. Ce qui prouve l'hypoellipticité des opérateurs elliptiques (au sens de Petrowsky).

6. **Cas général.** — Considérons maintenant le système (1.1) dans le cas homogène. Nous considérons ce système comme équation d'évolution ([3]), ([4]) :

$$\text{(6.1)} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i} u_i(t) = \sum_j \sum_{(k)} a_{ij}^{(k)}(x, t) p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} u_j(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots N),$$

$$Pk_0 + \sum k_i \leq Pn_j,$$

en décomposant les coefficients $a_{ij}^{(k)}(x, t)$ tels que $Pk_0 + \sum_{i=1}^{n} k_i = Pn_j$, en

$$\text{(N)} \qquad a_{ij}^{(k)}(x, t) = a_{ij}^{(k)}(0, t) + \sum_{l=1}^{n} x_l a_{ij;l}^{(k)}(x, t),$$

nous considérons l'équation

$$\text{(6.2)} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i} u_i(t) - \sum_{j=1}^{N} \sum_{((k))_P} a_{ij}^{(k)}(0, t) p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} u_j(t)$$
$$= \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k)} \tilde{a}_{ij}^{(k)}(x, t) p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} f_j(t)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, N).$$

Remarquons que, dans le second membre, les coefficients correspondant à la sommation $((k))_P$ s'annulent toujours à l'origine : $\in (\mathcal{B}_0)_x$.

([3]) Comme dans le cas général, nous pouvons supposer que les coefficients sont définis dans l'espace entier, et ils y satisfont à la condition 1° pour $N = 1$, $n_i = 1$, et de plus ils satisfont à la condition de parabolicité pour un δ fixé.

([4]) Comme nous le montrerons, pour notre but il suffit de considérer le cas $n_1 = n_2 = \ldots = n_N$. Dans ce cas, le raisonnement sera plus bref.

Écrivons $a_{ij}^{(k)}(t)$ au lieu de $a_{ij}^{(k)}(0, t)$ dans (6.2), nous savons déjà que l'équation (6.2) est bien posée dans $\left[\overrightarrow{a, b}\right]$. Envisageons maintenant quelques évaluations des solutions, en nous appuyant essentiellement sur le mémoire [2]. Considérons le système P-parabolique homogène :

$$(6.3)\quad \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i} u_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{((k))_P} a_{ij}^{(k)}(t) p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} u_j(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N);$$

$\left(\frac{d}{dt}\right) u_i(t), \ldots, \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1} u_i(t)$, nous les désignons par $u_i(t)$ $(i = N+1, \ldots, N_1)$, et transformons-les par Fourier en x, et désignons $u_i(t) \underset{\mathcal{F}}{\rightarrow} \mathcal{V}_i(\xi;\, t)$.

En posant

$$(6.4)\qquad \mathcal{V}_i(\xi;\, t) = \mathcal{V}_j^*(\xi;\, t)\, |\xi|^{(k_j - n_i)P},$$

où k_j et n_i signifient $\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_j} u_i(t) = u_j(t)$ $(i \leqq N)$, ce qui revient à $\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_i} \mathcal{V}_i(\xi, t) = \mathcal{V}_j(\xi;\, t)$, et en remplaçant $\mathcal{V}_j(\xi, t)$ par $\mathcal{V}_j^*(\xi;\, t)$ dans l'équation transformée, le calcul fondamental de Petrowsky donne ([2], chapitre 2, (64')).

$$(6.5)\qquad \sum_{i=1}^{N_1} |\mathcal{V}_i^*(\xi;\, t)|^2 \leqq C \sum_{i=1}^{N_1} |\mathcal{V}_i^*(\xi;\, t_0)|^2 \exp[-\delta\, |2\pi\xi|^P (t - t_0)];$$

où $T \geqq t \geqq t_0 \geqq 0$, C est une constante qui ne dépend ni de (t, t_0) ni des solutions $(\mathcal{V}_i^*(\xi;\, t))^{i=1,\ldots,N_1}$. En désignant par $R_x^{(j)}(t, \tau)$ $(t \geqq \tau)$, $(j = 1, 2, \ldots, N)$, les solutions de (6.3) satisfaisant aux conditions initiales :

$$(6.6)\qquad R_x^{(j)}(t, \tau) = \begin{pmatrix} r_1^{(j)}(t, \tau) \\ r_i^{(j)}(t, \tau) \\ r_N^{(j)}(t, \tau) \end{pmatrix};$$

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} r_i^{(j)}(t, t) = 0, \qquad \text{pour } k_0 = 0, 1, 2, \ldots, n_i - 2.$$

$$= \delta_i^j\, \delta_x, \qquad \text{pour } k_0 = n_i - 1$$

(δ_i^j, symbole de Kronecker).

Alors, nous appliquons (6.5) aux solutions $R_i^{(j)}(t, \tau)$. En omettant l'indice j, et compte tenu de $\sum_{i=1}^{N} |\mathcal{V}_i^*(\xi;\, \tau, \tau)|^2 \leqq |\xi|^{2P}$, et $|\mathcal{V}_j(\xi;\, t, \tau)| = \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_j} \mathcal{V}_i(\xi;\, t, \tau)\right|$

où $\mathcal{V}_i(\xi;\, t, \tau)$ est la transformée de $r_i(t, \tau)$, nous avons

$$(6.7)\quad \left|\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} \mathcal{V}_i^{(j)}(\xi;\, t, t_0)\right| \leq C(1+2\pi|\xi|)^{p(k_0+1-n_i)} \exp\left[-\frac{\delta}{2}|2\pi\xi|^p(t-t_0)\right];$$

$$\begin{pmatrix} k_0 = 0, 1, 2, \ldots, n_i - 1 \\ i, j = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}; \qquad \text{où} \quad r_i^{(j)}(t, t_0) \underset{\mathcal{F}}{\to} \mathcal{V}_i^{(j)}(\xi;\, t, t_0).$$

Cette formule nous donne [*voir* [2], (72)].

PROPOSITION 6.1 :

$$(6.8)\quad \left|p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} \mathcal{V}_i^{(j)}(\xi;\, t, t_0)\right|$$
$$\leq C_{|\nu|}(1+2\pi|\xi|)^{p(k_0+1-n_i)-|\nu|}$$
$$\times\left[\sum_{s=0}^{|\nu|}(t-t_0)^s(1+2\pi|\xi|)^{ps}\right]\exp\left[-\frac{\delta}{2}|2\pi\xi|^p(t-t_0)\right];$$
$$\begin{pmatrix} i, j = 1, 2, \ldots, N;\; k_0 = 0, 1, 2, \ldots, n_i - 1 \\ |\nu| = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}.$$

DÉMONSTRATION. — *Induction mathématique.* — L'équation transformée est

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i} \mathcal{V}_i^{(l)}(\xi;\, t, t_0) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{((k))} a_{ij}^{k_0,\ldots,k_n}(t)(2\pi i\xi_1)^{k_1}\ldots(2\pi i\xi_n)^{k_n}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} \mathcal{V}_j^{(l)}(\xi;\, t, t_0).$$

Nous omettons désormais (l). Nous admettons que la proposition est vraie pour $|\nu| \leq q$; en appliquant $p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}(|\nu| = q+1)$ à gauche, le second membre se compose de :

1° les termes qu'on obtient en remplaçant $\mathcal{V}_j \to p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}\mathcal{V}_j$;

2° les termes restants (Leibniz)

$$\sum_j\left[\sum_{((k))} a_{ij}^{(k)}(t) \sum_{(\mu)} C_{\nu;k}^{(\mu)} \xi_1^{k_1-\mu_1}\ldots\xi_n^{k_n-\mu_n} p_1^{\nu_1-\mu_1}\ldots p_n^{\nu_n-\mu_n}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} \mathcal{V}_j(\xi;\, t, t_0)\right]$$
$$\equiv \mathcal{W}_i(\xi;\, t, t_0),$$

Naturellement, $|\nu - \mu| \leq q$, donc, en appliquant (6.8) et compte tenu de

$$p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} \mathcal{V}_i(\xi;\, t_0, t_0) = 0 \qquad (k_0 = 0, 1, \ldots, n_i - 1),$$

la formule classique donne

$$p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} \mathcal{V}_i(\xi;\, t, t_0) = \int_{t_0}^{t} \sum_{l=1}^{N}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} \mathcal{V}_i^{(l)}(\xi;\, t, \tau)\mathcal{W}_l(\xi;\, \tau, t_0)\, d\tau;$$

et compte tenu de $Pk_0+\sum k_i = Pn_j$, on a

$$|\mathcal{V}_i(\xi;\, t,\, t_0)| \leqq \tilde{C}_q(1+2\pi|\xi|)^{P-(q+1)}\left(\sum_{s=0}^{q}(1+2\pi|\xi|)^{Ps}(t-t_0)^s\right)$$
$$\times \exp\left[-\frac{\delta}{2}|2\pi\xi|^P(t-t_0)\right].$$

On a donc

$$\left|p_1^{\nu_1}\ldots p_n^{\nu_n}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0}\mathcal{V}_i(\xi;\, t,\, t_0)\right|$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{N} C.\tilde{C}_q\int_{t_0}^{t}(1+2\pi|\xi|)^{P(k_0-n_i+1)}\exp\left[-\frac{\delta}{2}|2\pi\xi|^P(t-\tau)\right]$$
$$\times(1+2\pi|\xi|)^{P-(q+1)}\left[\sum_{s=0}^{q}(1+2\pi|\xi|)^{Ps}(\tau-t_0)^s\right]$$
$$\times\exp\left[-\frac{\delta}{2}|2\pi\xi|^P(\tau-t_0)\right]d\tau.$$
$$\leqq N.C.\tilde{C}_q(1+2\pi|\xi|)^{P(k_0-n_i+1)-(q+1)}$$
$$\times\left[\sum_{s=0}^{q+1}(1+2\pi|\xi|)^{sP}(t-t_0)^s\right]\exp\left[-\frac{\delta}{2}|2\pi\xi|^P(t-t_0)\right].$$

Ce qui établit la proposition.

DÉFINITION 6.1 :

1° $$\mathcal{D}^{(s,h)}[a,\, b] \qquad \begin{pmatrix} h=0,\, 1,\, 2,\ldots \\ -\infty<s<+\infty \end{pmatrix},$$

$$F(t)=\begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_j(t) \\ \vdots \\ f_N(t)\end{pmatrix}\in\mathcal{D}^{(s,h)}[a,\, b],$$

si

$$\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)^{l_0} f_j(t)\in\mathcal{D}^{s-l_0P}[a,\, b]\begin{pmatrix} j=1,\, 2,\, \ldots,\, N \\ l_0=0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, h\end{pmatrix}\right\};$$

2° $$\mathcal{D}^{s;h}[a,\, b], \qquad \begin{pmatrix} h=0,\, 1,\, 2,\, \ldots \\ -\infty<s<+\infty\end{pmatrix},$$

$$F(t)\in\mathcal{D}^{s;h}[a,\, b],$$

si

$$\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)^{l_0} f_j(t) \in \mathcal{D}^{s+(n_j-1-l_0)P}[a,\, b]\left(\begin{matrix} j=1,\,2,\,\ldots,\,N \\ l_0=0,\,1,\,\ldots,\,(n_j-1),\,\ldots,\,(n_j-1)+h\end{matrix}\right)\right\}.$$

On les munit de la topologie d'espace-produit. Si l'on considère $\mathcal{D}_0^\sigma[a,\, b]$ *au lieu de* $\mathcal{D}^\sigma[a,\, b]$, *on a les espaces* $\mathcal{D}_0^{(s,h)}[a,\, b]$, $\mathcal{D}_0^{s;h}[a,\, b]$.

Alors, considérons la distribution-solution

$$(6.9) \qquad g_i(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^N r_i^{(j)}(t,\, \tau) \underset{(x)}{\bigstar} f_j(\tau)\, d\tau \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,N)$$

ou encore

$$(6.9') \quad G(t) = \int_0^t R_x(t,\, \tau) \bigstar F(\tau)\, d\tau, \qquad \text{où } \mathrm{R}_x(t,\, \tau) = (r_i^{(j)}(t,\, \tau))$$

de l'équation

$$(6.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{d}{dt}\right)^{n_i} u_i(t) - \displaystyle\sum_{j=1}^N \sum_{((k))} a_{ij}^{(k)}(t) p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \left(\dfrac{d}{dt}\right)^{k_0} u_j(t) = f_i(t) \\ \qquad\qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,N). \end{array} \right.$$

Nous notons

$$(6.9'') \qquad G(t) = \mathcal{L} F(t).$$

Alors, on a la

Proposition 6.2. — *L'application :* $F(t) \underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} G(t)$ *de* $\mathcal{D}^{(s,0)}[0,\, T]$ *dans* $\mathcal{D}_0^{s+P\alpha';0}[0,\, T]$ *est continue, où* $0 < \alpha' < 1$ *quelconque.*

Démonstration. — La proposition 6.1 montre que l'application

$$(t-\tau)^{\alpha'} x_1^{\nu_1} \ldots x_n^{\nu_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} r_i^{(j)}(t,\, \tau) \underset{x}{\bigstar} \in \mathcal{L}(D^s,\, D^{s+P(n_i-1-k_0)+|\nu|+P\alpha'})$$

dépend de t et τ de manière continue et reste bornée pour $T \geqq t > \tau \geqq 0$. Donc, l'application

$$F(t) \rightarrow \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} g_i(t) \equiv \int_0^t \sum \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} r_i^{(j)}(t,\, \tau) \underset{(x)}{\bigstar} f_j(\tau)\, d\tau \qquad (k_0=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,n_i-1)$$

de $\mathcal{D}^{(s,0)}[0,\, T]$ dans $\mathcal{D}_0^{s+P(n_i-1-k_0)+P\alpha'}[0,\, T]$ $(0 < \alpha' < 1)$ est continue, ce qui établit cette proposition.

Lemme 6.1 :

1° [5] $$\left(\frac{d}{dt}\right)^{l_0} r_i^{(j)}(t, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } l_0 < n_i - 1 ; \\ \text{sinon} & \displaystyle\sum_{|\nu| \leqq (l_0 - n_i + 1)P} a_{i;l_0;\nu}^{(j)}(t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} \delta \end{cases}$$

2° $$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i+m} r_i^{(l)}(t, \tau) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{(k)} a_{ij;m}^{(k)}(t) p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0} r_j^{(l)}(t, \tau) ;$$

$$P k_0 + \sum k_i \leqq (n_j + m) P, \qquad k_0 < n_j + m ;$$

où $a_{ij;m}^{(k)}(t)$ sont des polynomes en $a_{ij}^{(k)}(t)$ et leurs dérivées jusqu'à l'ordre m.

Démonstration. — *Induction mathématique.* — Le lemme 6.1 donne, si $G(t) = \mathcal{L} F(t)$.

Lemme 6.2 :

$$(6.11) \qquad \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1+m} g_i(t)$$
$$= \int_0^t \sum_j \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1+m} r_i^{(j)}(t, \tau) \underset{(x)}{\bigstar} f_j(\tau)\, d\tau$$
$$+ \sum_{j_1(\nu)} b_{i,m;\nu}^{(j)}(t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu_0} f_j(t) ;$$
$$P \nu_0 + \sum \nu_i \leqq (m - 1) P.$$

Démonstration. — *Induction mathématique.* — Nous admettons cette égalité pour $m \leqq q$, et la démontrons pour $m = q + 1$. Appliquons $\left(\frac{d}{dt}\right)$ à gauche à (6.11) en mettant $m = q$. Alors

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1+q+1} g_i(t)$$
$$= \int_0^t \sum_j \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1+q+1} r_i^{(j)}(t, \tau) \underset{(x)}{\bigstar} f_j(\tau)\, d\tau + \sum_j \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_i-1+q} r_i^{(j)}(t, t) \underset{(x)}{\bigstar} f_j(t)$$
$$+ \sum_{j_1(\nu)} \tilde{b}_{i,q;\nu}^{(j)}(t) p_1^{\nu_1} \ldots p_n^{\nu_n} \left(\frac{d}{dt}\right)^{\nu_0+1} f_j(t) ;$$
$$P \nu_0 + \sum \nu_i \leqq (q - 1) P ;$$

---

[5] En détaillant la notation : $\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{l_0} r_i^{(j)}(t, \tau)\right]_{\tau = t}$.

en vertu du lemme **6.1**, 1° le second terme est de la forme

$$\sum_{j_1(\nu)} a_{i;n_i-1+q;\nu}^{(j)}(t)p_1^{\nu_1}\dots p_n^{\nu_n}f_j(t) \qquad |\nu|\leqq qP.$$

Ce qui prouve la proposition pour $m=q+1$. Remarquons que $b_{i,m;\nu}^{(j)}(t)$ sont des polynomes en les $a_{ij}^{(k)}(t)$ et leurs dérivées.

LEMME **6.3**. — *L'opérateur:* $(t-\tau)^{\alpha'}\left(\frac{d}{dt}\right)^{l_0} r_i^{(k)}(t,\tau)\underset{(x)}{\bigstar}$ *est une application continue de* $\mathcal{D}^s$ *dans* $\mathcal{D}^{s+P\alpha'-(l_0-n_i+1)P}$; *c'est-à-dire* $\in \mathcal{L}(\mathcal{D}^s, \mathcal{D}^{s+P\alpha'-(l_0-n_i+1)P})$; *il dépend de t et τ de manière continue et est borné pour* $0\leqq\tau<t<T$; $0<\alpha'<1$ $(l_0=0, 1, 2, \dots)$.

DÉMONSTRATION. — Nous avons démontré que c'est vrai pour $l_0<n_i-1$ (*voir* la démonstration de la proposition **6.2**). Démontrons-le maintenant par induction mathématique en nous appuyant sur le lemme **6.1**, 2°. Admettons que cette proposition est vraie pour $l_0\leqq(n_i-1)+q$, et nous la démontrons pour $l_0=(n_i-1)+q+1$. Posons dans le lemme **6.1**, 2°, $m=q$, alors, dans le second membre on a

$$l_0\leqq n_j+q-1,$$

donc en décomposant $p_1^{\nu_1}\dots p_n^{\nu_n}(t-\tau)^{\alpha'}\left(\frac{d}{dt}\right)^{l_0} r_j^{(k)}(t,\tau)\underset{(k)}{\bigstar}$ en produit

$$(t-\tau)^{\alpha'}\left(\frac{d}{dt}\right)^{l_0} r_j^{(k)}(t,\tau)\underset{(x)}{\bigstar} p_1^{\nu_1}\dots p_n^{\nu_n}\underset{(x)}{\bigstar} \qquad \text{où} \quad Pl_0+\sum \nu_i\leqq(n_j+q)P.$$

Alors $p_1^{\nu_1}\dots p_n^{\nu_n}\underset{(x)}{\bigstar}$ est une application continue de $\mathcal{D}^s$ dans $\mathcal{D}^{s-|\nu|}$. Or, comme $l_0\leqq n_j-1+q$, l'application

$$(t-\tau)^{\alpha'}\left(\frac{d}{dt}\right)^{l_0} r_j^{(k)}(t,\tau)\underset{(x)}{\bigstar}\in\mathcal{L}(\mathcal{D}^{s-|\nu|}, \mathcal{D}^{s-|\nu|+P\alpha'-(l_0-n_j+1)P})$$

a la propriété demandée. Cela entraîne la propositton, parce que

$$P(l_0-n_j)+|\nu|\leqq qP,$$

donc, chaque terme dans le second membre du lemme **6.1**, 2°

$$\in\mathcal{L}(\mathcal{D}^s, \mathcal{D}^{s+P\alpha'-(q+1)P}) \quad \text{reste borné.}$$

PROPOSITION **6.3**. — *L'application* $\mathcal{L}$: $F(t)\in\mathcal{D}_0^{(s,h)}[0, T]$ *dans*

$$G(t)\in\mathcal{D}^{s+P\alpha';h+1}[0, T]$$

est continue; s est un nombre réel; $h=0, 1, 2, \dots$; $0<\alpha'<1$.

DÉMONSTRATION. — Le cas $h=0$ a été démontré (proposition **6.2**). Le cas $h\geqq1$ se démontre en vertu des lemmes **6.2** et **6.3**. C. Q. F. D.

En revenant au début, nous considérons le second membre de (6.2). Notons,

$$(6.12)\quad \begin{cases} q_{ij}\left(x,\, t,\, p,\, \dfrac{d}{dt}\right) = \displaystyle\sum_{(k)} \tilde{a}_{ij}^{(k)}(x,\, t)\, p_1^{k_1}\ldots p_n^{k_n}\left(\dfrac{d}{dt}\right)^{k_0}, \\ \text{où} \qquad P k_0 + \sum k_i \leqq P n_j, \qquad (k_0 < n_j); \end{cases}$$

$$(6.13)\qquad Q_\varepsilon\left(x,\, t,\, p,\, \frac{d}{dt}\right) = \left(q_{ij}\left(x,\, t,\, p,\, \frac{d}{dt}\right)\right).$$

Alors, en tenant compte de ce que les coefficients $a_{ij}^{(k)}(x,\, t)$ tels que

$$P k_0 + \sum k_i = P n_j$$

appartiennent à $(\mathcal{B}_0)_x$, on voit facilement :

Lemme 6.4. — *L'opérateur* Q_ε : $G(t) = Q_\varepsilon\left(x,\, t,\, p,\, \dfrac{d}{dt}\right)F(t)$ *est une application continue de* $\mathcal{D}^{s;h}[0,\, T]$ (*resp.* $\mathcal{D}_0^{s;h}[0,\, T]$) *dans* $\mathcal{D}^{(s-P+1,h)}[0,\, T]$ (*resp.* $\mathcal{D}_0^{(s-P+1,h)}[0,\, T]$); *s nombre réel quelconque*, $h = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$.

En combinant ce lemme avec la proposition 6.3, nous avons

Proposition 6.4. — *L'application*

$$\mathcal{L}\, Q_\varepsilon\left(x,\, t,\, p,\, \frac{d}{dt}\right):\quad F_{i-1}(t) \underset{\mathcal{L} Q_\varepsilon}{\rightarrow} F_i(t),$$

de $\mathcal{D}_0^{s;h}[0,\, T]$ *dans* $\mathcal{D}_0^{s+\alpha;h+1}[0,\, T]$ *est continue;* $0 < \alpha < 1$ *quelconque;* $h = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$.

Démonstration :

$$F_{i-1}(t) \underset{Q_\varepsilon}{\rightarrow} Q_\varepsilon F_{i-1}(t) \underset{\mathcal{L}}{\rightarrow} F_i(t),$$

$$\mathcal{D}_0^{s;h}[0,\, T] \rightarrow \mathcal{D}_0^{(s-P+1,h)}[0,\, T] \rightarrow \mathcal{D}_0^{s-P+1+P\alpha';h+1}[0,\, T].$$

Comme $0 < \alpha' < 1$ quelconque, on pose $1 - (1 - \alpha')P = \alpha$.

C. Q. F. D.

Remarque. — *Cette proposition est naturellement vraie quand on remplace* $\mathcal{D}_0$ *par* $\mathcal{D}$.

Corollaire. — *En vertu de la proposition* 6.1,

$$F_0(t) = R_x^{(j)}(t,\, 0) \in \mathcal{D}^{s;0}[0,\, T],$$

en prenant $s < -\dfrac{n}{2}$. *Alors, les propositions* 6.3 *et* 6.2 *montrent que*

$$F_1(t) = \mathcal{L}\, Q_\varepsilon F_0(t) \in \mathcal{D}_0^{s+\alpha;1}[0,\, T],$$

et la proposition 6.4 *donne, de proche en proche,*

$$F_2(t) \in \mathcal{D}_0^{s+2\alpha;2}[0,\ T], \qquad F_3(t) \in \mathcal{D}_0^{s+3\alpha;3}[0,\ T],\ \ldots.$$

D'autre part, $R_x(t,\ 0) \notin \mathcal{D}_0^{s;0}[0,\ T]$, mais la formule du lemme 6.1, 2° nous montre la propriété que voici :

A. $R_x^{(j)}(t,\ 0) \in \mathcal{D}^{s;0}[0,\ T]$

$$\Rightarrow \in \mathcal{D}^{s;1}[0,\ T] \Rightarrow \in \mathcal{D}^{s;2}[0,\ T] \Rightarrow \ldots \Rightarrow R_x^{(j)}(t,\ 0) \in \mathcal{D}^{s;h}[0,\ T] \Rightarrow \ldots.$$

B. Pour tout l, $\left(\dfrac{d}{dt}\right)^l R_x(t,\ 0)$ a pour $t=0$ son support concentré à l'origine. De la formule (6.11), nous déduisons de proche en proche que cette propriétés est vraie pour $F_1(t)$, $F_2(t)$, ... Nous avons donc, comme la proposition 3.3.

Proposition 6.5. — *Soit* ω *un ouvert tel que* $0 \notin \bar{\omega}$, *alors*

$$\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^l F_i(t)\right]_\omega \in \mathcal{D}_{L^2}(\omega)[-\infty,\ T] \qquad (i,\ l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Nous définirons de même l'espace $\mathcal{E}^{s;h}[0,\ T]$, alors,

$$R_x^{(j)}(t,\ 0) \in \mathcal{E}^{s;0}[0,\ T] \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ N)$$

et l'on voit facilement que

L'opérateur $\mathcal{L}Q_\varepsilon$ *est une application continue de* $\mathcal{E}^{s;h}[0,\ T]$ *dans* $\mathcal{E}^{s+\alpha;h+1}[0,\ T]$.

Différentiabilité. — Considérons maintenant le cas où les coefficients dépendent du paramètre $\lambda \equiv (\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_{n+1})$ (qui parcourt l'espace R^{n+1}), au sens que nous avons explicité au début du chapitre 4. Alors, nous aurons une proposition correspondant à la proposition 4.1. Nous n'écrivons ni les énoncés ni les démonstrations. Nous nous bornons à remarquer que :

1° L'inégalité (6.7) est vraie quand le paramètre λ parcourt un ensemble compact; naturellement cette constante C dépend de cet ensemble, T étant fixé. En effet, nous avons supposé, comme dans le cas $N=1$, $n_i=1$; *a.* tous les coefficients $\in (\mathcal{B})_x$ avec toutes les dérivées en t; *b.* la condition de parabolicité est remplie dans l'espace entier avec le même $\delta(>0)$;

2° Le raisonnement que nous venons de faire pour déduire (6.8) à partir de (6.7) devient la base des démonstrations.

7. Paramétrix (Cas général). — Notons par D l'opérateur parabolique

$$(7.1)\quad D=\begin{pmatrix} \frac{\partial^{n_1}}{\partial t^{n_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial^{n_N}}{\partial t^{n_N}} \end{pmatrix}-\left(\sum_{(k)} a_{ij}^{(k_0k_1\ldots k_n)}(x,\,t)p_1^{k_1}\ldots p_n^{k_n}\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\right)$$

$$\equiv\begin{pmatrix} \frac{\partial^{n_1}}{\partial t^{n_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\partial^{n_N}}{\partial t^{n_N}} \end{pmatrix}-Q\left(x,\,t,\,p,\,\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

Notons,

$$(7.2)\qquad F_i(t)=(F_i^{(1)}(t),\,\ldots,\,F_i^{(j)}(t),\,\ldots,\,F_i^{(N)}(t));$$

en détaillant la notation, $F_i(t)$ est une matrice à N lignes et N colonnes :

$$F_i(t)=(f_i^{(j)}(t));\ \text{en particulier, } F_0(t)=(r_i^{(j)}(t,\,0)).$$

Alors, on a

$$(7.3)\qquad DY(t)[F_0(t)+F_1(t)+\ldots+F_i(t)]$$
$$=I.\delta_x\times\delta_t-Q_\varepsilon\left(x,\,t,\,p,\,\frac{\partial}{\partial t}\right)Y(t)F_i(t);$$

($I=$ matrice identique).

Considérons l'équation d'évolution qui dépend de $(\xi,\,\tau)$:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \left(\frac{d}{dt}\right)^{n_N} \end{pmatrix}-\left(\sum_{(k)} a_{ij}^{(k_0\ldots k_n)}(x+\xi,\,t+\tau)p_1^{k_1}\ldots p_n^{k_n}\left(\frac{d}{dt}\right)^{k_0}\right),$$

on aura les distributions, comme dans le chapitre 5, $F_0(t;\xi,\tau),\ldots,F_i(t;\xi,\tau)$, et posons,

$$(7.4)\qquad E_{x,t}(\xi,\,\tau)=Y(t)\theta_{\xi,\tau}[F_0(t;\,\xi,\,\tau)+\ldots+F_i(t;\,\xi,\,\tau)],$$

où $\theta_{\xi,\tau}$ est l'opérateur de translation. Appliquons D à gauche, alors en posant

$$(7.5)\qquad L(x,\,t;\,\xi,\,\tau)=-\left[Q\left(x,\,t,\,p,\,\frac{\partial}{\partial t}\right)-Q_0\left(\xi,\,t,\,p,\,\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]$$
$$\times\,\theta_{\xi,\tau}[Y(t)F_i(t;\,\xi,\,\tau)];$$

$$Q_0\left(\xi,\,t,\,p,\,\frac{\partial}{\partial t}\right)=\left(\sum_{((k))} a_{ij}^{(k)}(\xi,\,t)p_1^{k_1}\ldots p_n^{k_n}\frac{\partial^{k_0}}{\partial t^{k_0}}\right),$$

on aura

$$DE_{x,t}(\xi, \tau) = I.\delta_{x-\xi} \times \delta_{t-\tau} + L(x, t; \xi, \tau), \tag{7.6}$$

et les noyaux $E_{x,t}(\xi, \tau)$, $L(x, t; \xi, \tau)$ ont les mêmes propriétés que celles des noyaux que nous avons obtenus dans le cas $N = 1$, $n_i = 1$.

Nous revenons maintenant au système P-parabolique donné (1.1)

$$\left(\delta_i^j \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n_i} - \sum_k a_{ij}^{(k_0, \ldots, k_n)}(x, t) \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{k_n}\right) U = G(x, t),$$
$$(i, j = 1, 2, \ldots, N).$$

D'abord, nous pouvons supposer que $U \in (\mathcal{E}')_{x,t}$, en multipliant une fonction $\alpha(x, t) \in \mathcal{D}_{x,t}$, qui vaut 1 sur l'ouvert dans lequel nous voulons démontrer l'hypoellipticité. Dans cette condition, faisons le changement d'inconnues : Soit $\max(n_1, n_2, \ldots, n_N) = m$, alors le changement $u_j \to \overline{u}_j$ est lié par l'équation

$$u_j = \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} - (-1)^{P'-1} \Delta_x^{P'}\right)\right)^{m-n_j} \overline{u}_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, N), \qquad P' = \frac{P}{2}.$$

Nous pouvons trouver les distributions $\overline{u}_j$ ($j = 1, \ldots, N$) à l'aide de la transformation de Laplace.

Alors, $\overline{U} = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_N)$ satisfait à une équation, dont les degrés en $\overline{u}_1$, $\overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_N$ sont tous m, et dont le déterminant caractéristique remplit la condition de P-parabolicité $\left[\text{car } \left(\frac{\partial}{\partial t} - (-1)^{P'-1} \Delta_x^{P'}\right) \to \lambda + (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{P'}\right]$, et de plus, dont le transposé ([6]) est antiparabolique [c'est-à-dire que, si dans le transposé on fait le changement $t \to -t'$, alors ce système est parabolique dans le (x, t')-espace]. Pour notre but, il suffit donc, en changeant d'équation dès le début, de considérer le système où $n_1 = n_2 = \ldots = n_N$. Alors, le transposé est antiparabolique, de sorte qu'on peut construire, comme le cas $N = 1$, le noyau $E'_{x,t}(\xi, \tau)$ à partir de l'opérateur transposé.

([6]) Par définition, l'opérateur transposé D' de l'opérateur D :

$$D' = \left(\delta_i^j (-1)^{n_i} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{n_i}\right) - \left(\sum_{(k)} (-1)^{k_0 + \ldots + k_n} p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k_0} a_{ji}^{(k)}(x, t)\right).$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. LERAY, *Hyperbolic differential equations*, Cours de Princeton, 1954.

[2] I. PETROWSKY, *Über das Cauchysche Problem für ein System linear partieller Differentialgleichungen im Gebiete der nichtanalytischen Funktionen* (*Bulletin de l'Université d'État de Moscou*, fasc. 7, 1938, p. 1-74).

[3] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, t. I-II, Paris, Hermann, 1950-1951.

[4] L. SCHWARTZ, *Les équations d'évolution liées au produit de composition* (*Ann. Inst. Fourier*, t. 2, 1950, p. 19-49).

(Manuscrit reçu le 5 juin 1956.)