ROBERT PALLU DE LA BARRIÈRE

Sur les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens

Bulletin de la S. M. F., tome 82 (1954), p. 1-52

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1954__82__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LES ALGÈBRES D'OPÉRATEURS DANS LES ESPACES HILBERTIENS;

PAR M. ROBERT PALLU DE LA BARRIÈRE.

INTRODUCTION.

Le présent travail a pour but de généraliser certains résultats de M. J. Murray et J. von Neumann sur les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens. On sait que les quatre premiers Mémoires principaux de ces auteurs ([16], [17], [22] et [18]) (¹) se rapportent à la théorie des facteurs. Dans un cinquième Mémoire ([23]), von Neumann montre comment on peut passer de l'étude des facteurs à l'étude d'une ★-algèbre faiblement fermée quelconque $\mathbf{M}$ en effectuant une décomposition de l'espace en une somme mesurable d'espace hilbertiens permettant la décomposition de $\mathbf{M}$ en facteurs opérant dans chaque « espace tangent ». Dans une autre direction, J. Dixmier a inauguré l'étude globale des ★-algèbres faiblement fermées dans [3] en définissant pour une ★-algèbre de classe finie une application $A \to A^\natural$ de $\mathbf{M}$ sur son centre dite application $\natural$ canonique, généralisant convenablement la trace définie sur les facteurs de classe finie. Dans [4], Dixmier montre en particulier comment on peut décomposer une ★-algèbre faiblement fermée en composantes de classe finie, de classe proprement infinie et purement infinie. Dans [6], [7] et [8], Dixmier aborde l'étude des traces (numériques) et des applications $\natural$ dans les ★-algèbres non nécessairement de classe finie. Enfin I. Kaplansky dans [14] définit un invariant $C(\chi)$ lié à une ★-algèbre de classe finie utilisant l'application canonique et généralisant l'invariant c considéré par Murray et von Neumann dans le cas des facteurs.

Dans ces conditions la généralisation des résultats de Murray et von Neumann pouvait être poursuivie suivant deux méthodes, d'une part par une étude « locale » à l'aide d'une décomposition de l'espace en somme mesurable, d'autre part par une étude globale par les méthodes de Dixmier.

Nous avons choisi la seconde méthode. La première en effet présente deux inconvénients. Tout d'abord elle ne s'applique (actuellement) que dans le cas d'un espace hilbertien séparable. D'autre part elle donne lieu pour chaque

(¹) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

problème étudié à des problèmes techniques relevant de la théorie de la mesure quand on veut composer en un champ mesurable de vecteurs ou d'opérateurs certains vecteurs ou opérateurs définis dans chaque espace tangent pour l'étude du facteur correspondant. Il nous a semblé au contraire qu'en ayant à sa disposition un maximum d'outils provenant de l'étude globale l'étude locale s'en trouvait grandement facilitée. Nous en donnerons un exemple dans un article ultérieur.

Le premier chapitre de ce travail est consacré à des généralités sur les $\star$-algèbres d'opérateurs. Nous y complétons des résultats antérieurs et introduisons certaines définitions. Notons en particulier au paragraphe II, la proposition 1 établissant la réciproque d'un résultat de Dixmier : toute mesure normale sur le spectre d'une $\star$-algèbre faiblement fermée commutative est une mesure spectrale, au paragraphe III la notion de sous-espace simple relativement à une $\star$-algèbre faiblement fermée commutative, enfin au paragraphe V l'étude des sous-espaces uniformes relativement à une $\star$-algèbre faiblement fermée de classe proprement infinie sans composante purement infinie. Cette dernière notion permet d'introduire un invariant algébrique qui joue un rôle essentiel dans la suite.

Le deuxième chapitre a trait aux $\star$-algèbres faiblement fermées de classe finie et a pour but de donner une forme explicite de l'application $\natural$ canonique dans le cas où $C(\chi) \geqq 1$. Dans ce cas il existe des projecteurs P dits projecteurs-$\natural$ tels que l'application $A \to PAP$ ait toutes les propriétés algébriques de l'application $\natural$ canonique. Les propriétés des projecteurs-$\natural$ généralisent celles données par von Neumann dans le cas des facteurs pour les éléments a tels que la trace T soit de la forme $T(A) = (Aa, a)$. Enfin ces résultats permettent d'étudier la forme des traces numériques.

Le troisième Chapitre est relatif aux isomorphismes des $\star$-algèbres faiblement fermées sans composante purement infinie. Nous avons donné incidemment la forme générale de traces. Trois problèmes principaux sont ensuite étudiés :

1° Condition nécessaire et suffisante pour qu'un isomorphisme algébrique soit un isomorphisme spatial;

2° Condition nécessaire et suffisante pour qu'un isomorphisme algébrique d'une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$ sur une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}_1$ soit équivalent à un isomorphisme de la forme $A \to A_{\mathfrak{M}}$ où $A_{\mathfrak{M}}$ est l'opérateur induit par $A (\in \mathbf{M})$ sur un sous-espace vectoriel fermé $\mathfrak{M} \eta \mathbf{M}$;

3° Pour quelles topologies (autres que la topologie uniforme pour laquelle la réponse est trivialement positive) un isomorphisme est-il continu?

Les principaux résultats de ce travail ont fait l'objet de Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, [24], [26]. Depuis leur parution certains résultats voisins ont été publiés par H. A. Dye [10]. D'une part on trouvera dans l'article de Dye la forme des traces finies sur une $\star$-algèbre faiblement fermée de classe finie, résultat qui pourrait servir de point de départ de l'étude de la forme explicite de l'application $\natural$, au même titre que la proposition 2 de [14] qui nous a servi ici. D'autre part en ce qui concerne la continuité des isomorphismes d'une

★-algèbre faiblement fermée de classe finie sur une ★-algèbre faiblement fermée, Dye rectifie le théorème 5 de Kaplansky dans [14], théorème erroné sauf hypothèses supplémentaires.

Pour alléger la rédaction du présent travail nous avons supprimé la démonstration du théorème suivant qu'on trouvera dans [10] : *si* $\mathbf{M}$ *est de classe finie et opère sur* H, *tout* x *appartenant au sous-espace vectoriel fermé engendré par les éléments* Aa *où* $a \in H$ *et* A *parcourt* $\mathbf{M}$ *est de la forme* Xa, X *étant un opérateur fermé appartenant au sens large à* $\mathbf{M}$ $(X \eta \mathbf{M})$.

Pour terminer notons que Dye n'utilise pas l'invariant $C(\chi)$ de Kaplansky. Nous avons donc cru utile de donner en appendice la démonstration du théorème d'existence de cet invariant, cette démonstration n'ayant pas été publiée jusqu'à présent.

Nous tenons à exprimer ici notre vive gratitude à MM. H. Cartan, L. Schwartz et Godement pour leurs conseils toujours judicieux et les encouragements qu'ils nous ont donnés. Nous remercions tout spécialement M. J. Dixmier dont les méthodes ont été continuellement utilisées ici et dont les remarques nous ont permis d'importantes améliorations. Nous exprimons également nos remerciements à M. A. Lichnerowicz qui a bien voulu accepter ce Mémoire dans le présent *Bulletin*.

NOTATIONS ET DÉFINITIONS.

Étant donné un espace vectoriel V nous appelons involution sur V toute application semi-linéaire S de V sur V vérifiant $S^2 = 1$. Quand V est un espace hilbertien nous supposons de plus $(Sx, Sy) = (y, x)$. Quand V est une algèbre, nous supposons que l'on a $S(xy) = Sy.Sx$. Une algèbre A munie d'une involution est dite algèbre involutive ou en abrégé ★-algèbre. Toute sous-algèbre de A stable pour l'involution est alors dite sous-★-algèbre. Nous appelons d'autre part idéal d'une ★-algèbre A tout idéal à gauche ou à droite de l'algèbre A, stable pour l'involution. Tout idéal d'une ★-algèbre A est un idéal bilatère de l'algèbre A.

Soit H un espace hilbertien. Nous supposons toujours H muni de la topologie forte définie par la norme. Étant donné une famille quelconque de sous-espaces vectoriels fermés $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$, nous notons $\sup_{i \in I} \mathcal{M}_i$ le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant les sous-espaces $\mathcal{M}_i$. Nous sous-entendons souvent le qualificatif « fermé » pour les sous-espaces de H, quand aucune confusion ne nous paraît à craindre, quitte à signaler au lecteur l'introduction de sous-espaces non-fermés.

Soit H un espace hilbertien et A un opérateur linéaire dans H. Nous notons D_A l'ensemble de définition de A. Nous appelons zéro de A tout élément $x \in H$ tel que $Ax = 0$. Nous notons $\mathcal{D}_A$ le sous-espace (fermé) formé des éléments de H orthogonaux à tous les zéros de A, et Δ_A le sous-espace fermé engendré par les éléments de la forme Ax pour $x \in D_A$.

Pour tout opérateur continu A, $|||A|||$ désigne la quantité $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$. Soit $\mathfrak{B}$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus (partout définis) dans H. Muni de la structure d'algèbre évidente et de l'involution $A \to A^*$ (A^* désigne l'adjoint de A), $\mathfrak{B}$ est une $\star$-algèbre. Nous aurons à considérer dans $\mathfrak{B}$ différents types d'éléments. Précisons qu'un opérateur $A \in \mathfrak{B}$ est dit positif, si l'on a $(Ax, x) \geqq 0$ pour tout $x \in H$ (ceci entraîne $A = A^*$). Étant donné un sous-espace fermé $\mathcal{M}$, nous notons $P_{\mathcal{M}}$ le projecteur sur $\mathcal{M}$. Inversement si P est un projecteur, Δ_P désigne conformément à nos notations, le sous-espace sur lequel il projette. Plus généralement, si V est un opérateur partiellement isométrique, $\mathcal{D}_V$ et Δ_V sont ses sous-espaces « initial » et « final ».

Nous considérons sur $\mathfrak{B}$ différentes topologies. Les topologies uniforme, forte et faible sont classiques. La topologie ultraforte, moins classique est définie de la façon suivante : un voisinage ultrafort de zéro dans $\mathfrak{B}$ est déterminé par une suite $\{x_n\}$ d'éléments de H telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \| x_n \|^2 < \infty$ et est constitué par l'ensemble des opérateurs A vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} \| A x_n \|^2 < 1$. La topologie ultraforte est plus fine que la topologie forte (et *a fortiori* que la topologie faible) et moins fine que la topologie uniforme.

Toute sous-$\star$-algèbre de $\mathfrak{B}$ est dite sous-$\star$-algèbre d'opérateurs. Les $\star$-algèbres d'opérateurs que nous considérons sont supposées fermées pour l'une des topologies de $\mathfrak{B}$. Rappelons que toute $\star$-algèbre d'opérateurs ultrafortement fermée est fortement et faiblement fermée (et inversement). Nous dirons « $\star$-algèbre faiblement fermée (resp. uniformément fermée) » pour « $\star$-algèbre faiblement fermée (resp. uniformément fermée) d'opérateurs ». Les $\star$-algèbres faiblement fermées sont supposées contenir l'opérateur unité, sauf une exception signalée plus loin.

Étant donné une $\star$-algèbre d'opérateurs $\mathbf{M}$, nous désignons par $\mathbf{M}'$ l'ensemble des opérateurs de $\mathfrak{B}$ permutant à tout opérateur de $\mathbf{M}$. L'ensemble $\mathbf{M}'$ est une $\star$-algèbre faiblement fermée. Si $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ sont deux $\star$-algèbres d'opérateurs, $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ est une $\star$-algèbre d'opérateurs.

Si $\mathbf{M}$ est faiblement fermée, on note $\mathbf{M}^\natural$ l'$\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$. C'est le centre commun de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$.

Si $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ sont deux $\star$-algèbres faiblement fermées, nous notons $\mathbf{M} \smile \mathbf{N}$ la plus petite $\star$-algèbre faiblement fermée contenant $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$.

Étant donné une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$, nous désignons par $\mathbf{M}_U$, $\mathbf{M}_P$, $\mathbf{M}_{p.I.}$, $\mathbf{M}_+$ l'ensemble des opérateurs unitaires, des projecteurs, des opérateurs partiellement isométriques et des opérateurs positifs de $\mathbf{M}$. Un sous-espace vectoriel $\mathcal{M}$ sera dit appartenir au sens large à une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$, si l'on a $U(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ pour tout $U \in \mathbf{M}'_U$. Nous écrirons alors $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}$. Si $\mathcal{M}$ est fermé, ceci équivaut à $P_{\mathcal{M}} \in \mathbf{M}$.

Un opérateur linéaire A (borné ou non) sera dit appartenir à $\mathbf{M}$ au sens large, si $UAU^{-1} = A$ pour tout $U \in \mathbf{M}'_U$. Nous écrirons alors $A \eta \mathbf{M}$. Si A est continu (et partout défini) ceci équivaut à $A \in \mathbf{M}$.

Étant donné deux $\star$-algèbres $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, on appelle homomorphisme φ de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$ tout homomorphisme de l'algèbre $\mathbf{A}$ dans l'algèbre $\mathbf{B}$, vérifiant

$(\varphi(x))^* = \varphi(x^*)$. Si φ est biunivoque, φ est appelé isomorphisme de l'$\bigstar$-algèbre $\mathbf{A}$ dans l'$\bigstar$-algèbre $\mathbf{B}$.

Soit A un opérateur $\in \mathfrak{B}$ et $\mathcal{M}$ un sous-espace vectoriel fermé. Nous appelons opérateur induit par A sur $\mathcal{M}$ et nous désignons par $A_{\mathcal{M}}$ l'opérateur opérant dans $\mathcal{M}$, défini pour tout $x \in \mathcal{M}$ par $A_{\mathcal{M}} x = P_{\mathcal{M}} A x$. Si $\mathbf{M}$ est une $\bigstar$-algèbre faiblement fermée et $\mathcal{M}$ un sous-espace vectoriel fermé $\eta \mathbf{M}'$, l'ensemble $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ des opérateurs $A_{\mathcal{M}}$ constitue une $\bigstar$-algèbre faiblement fermée et l'application $A \to A_{\mathcal{M}}$ est un homomorphisme de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$. Cet homomorphisme est noté $\varphi_{\mathcal{M}}$ s'il n'existe aucune ambiguïté sur l'$\bigstar$-algèbre $\mathbf{M}$ constituant son ensemble de définition.

Supposons maintenant $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}$. L'ensemble $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ des opérateurs $A_{\mathcal{M}}$ pour $A \in \mathbf{M}$ est également une $\bigstar$-algèbre faiblement fermée. L'application $A \to A_{\mathcal{M}}$ n'est en général pas un homomorphisme. Il existe par contre un isomorphisme ψ de $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ sous la sous-$\bigstar$-algèbre faiblement $\mathbf{M}_{\langle \mathcal{M} \rangle}$ de $\mathbf{M}$ constituée par les opérateurs $A \in \mathbf{M}$ tels que $P_{\mathcal{M}} A P_{\mathcal{M}} = A$ (les $\bigstar$-algèbres de ce type sont les seules $\bigstar$-algèbres faiblement fermées sans élément unité considérées dans ce travail). D'après un résultat de Murray et von Neumann on a pour $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}$ (ou $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}'$) : $(\mathbf{M}_{\mathcal{M}})' = (\mathbf{M}')_{\mathcal{M}}$ et d'après un résultat de J. Dixmier [14] : $(\mathbf{M}^\natural)_{\mathcal{M}} = (\mathbf{M}_{\mathcal{M}})^\natural$. Si $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}$ et $\mathcal{N} \eta \mathbf{M}'$, nous posons $(\mathbf{M})_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}} = (\mathbf{M}_{\mathcal{M}})_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}$.

Soit $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$ deux $\bigstar$-algèbres d'opérateurs dont les éléments opèrent dans deux espaces hilbertiens H et H_1. Un isomorphisme φ de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{M}_1$ sera dit isomorphisme spatial, s'il existe un isomorphisme (isométrique) U de H sur H_1 tel que l'on ait $\varphi(A) = UAU^{-1}$. Un tel isomorphisme sera noté φ_U s'il n'existe aucune ambiguïté sur l'$\bigstar$-algèbre constituant son ensemble de définition. Pour éviter certaines confusions, un isomorphisme quelconque sera désigné souvent par isomorphisme algébrique. Des exemples élémentaires montrent que tout isomorphisme algébrique n'est pas un isomorphisme spatial. De plus deux $\bigstar$-algèbres faiblement fermées peuvent être spatialement isomorphes sans que tout isomorphisme algébrique de l'une sur l'autre soit spatial.

Soit $\mathbf{M}$ une $\bigstar$-algèbre faiblement fermée. Nous utilisons les notations de Dixmier ([2]) en ce qui concerne la relation d'équivalence $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$ et la relation d'ordre $\mathcal{M} \prec \mathcal{H}$ entre les sous-espaces vectoriels fermés $\eta \mathbf{M}$. Nous utilisons de même toutes les définitions de cet auteur en ce qui concerne les qualificatifs applicables aux sous-espaces fermés $\eta \mathbf{M}$ et les partitions ([3]). Nous appelons de plus partition centrale toute famille $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels fermés $\eta \mathbf{M}^\natural$, différents de zéro et deux à deux orthogonaux. Si l'on a de plus $\bigoplus_{i \in I} \mathcal{M}_i = H$, cette partition sera dite partition centrale de H.

Pour tout sous-espace fermé $\mathcal{M}$, nous notons $\mathcal{M}^\natural$ le plus petit sous-espace fermé $\eta \mathbf{M}^\natural$ contenant $\mathcal{M}$ (cette notation généralise celle de Dixmier dans [4]). Nous dirons qu'une $\bigstar$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$ est de classe proprement infinie si H est un sous-espace proprement infini pour $\mathbf{M}$.

([2]) [3] et [4]. Certaines notations de [3] ont été modifiées dans [4].

([3]) A l'exclusion de la définition 3.2 de [4], la notion de sous-espace simple étant ici différente e celle de Dixmier.

Rappelons enfin quelques notions relatives aux mesures de Radon sur un espace compact. Étant donné deux mesures $d\mu$ et $d\nu$ sur un espace compact Ω, la notation $d\mu \prec d\nu$ signifie que tout ensemble de mesure nulle par rapport à $d\nu$ est de mesure nulle par rapport à $d\mu$. Il existe alors une fonction φ intégrable par rapport à $d\nu$ telle que $d\mu = \varphi\, d\nu$. Si la fonction φ est essentiellement bornée, nous écrivons $d\mu \prec\prec d\nu$.

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ALGÈBRES D'OPÉRATEURS.

I. — Ensembles générateurs et séparateurs.

Étant donné une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$ et un ensemble E d'éléments de H, on notera $\mathbf{M}(E)$ le sous-espace vectoriel *fermé* sous-tendu par les éléments Ax pour $A \in \mathbf{M}$ et $x \in E$. On posera

$$\mathbf{M}(a) = \mathbf{M}(\{a\}) \quad \text{pour } a \in H.$$

Pour tout E, on a $\mathbf{M}(E)\,\eta\,\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}(E)$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé $\eta\,\mathbf{M}'$ contenant E. Si $\mathfrak{M}$ est le sous-espace vectoriel sous-tendu par E, on a $\mathbf{M}(E) = \mathbf{M}(\mathfrak{M})$. Pour un sous-espace vectoriel fermé $\eta\,\mathbf{M}$, on a $\mathbf{M}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}^{\natural}$.

Définition 1. — *Un ensemble* E *est dit générateur pour une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$ si $\mathbf{M}(E) = H$.*

Définition 2. — *Un ensemble* E *est dit séparateur pour une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$ si $\mathbf{M}'(E) = H$ (c'est-à-dire si* E *est générateur pour $\mathbf{M}'$).*

Lemme 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *soit séparateur pour une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$ est que tout opérateur $A \in \mathbf{M}$ tel que $Ax = 0$ pour tout $x \in E$, soit nul.*

Démonstration. — La condition proposée s'écrit : tout sous-espace de zéros d'un opérateur $A \in \mathbf{M}$ qui contient E est identique à H. Comme tout sous-espace vectoriel fermé $\eta\,\mathbf{M}$ peut être considéré comme le sous-espace des zéros d'un opérateur $A\,\eta\,\mathbf{M}$ (par exemple le projecteur sur le sous-espace orthogonal), la condition s'écrit encore : tout sous-espace vectoriel fermé $\eta\,\mathbf{M}$ contenant E est identique à H, c'est-à-dire $\mathbf{M}'(E) = H$.

Soit $\mathbf{M}$ une $\star$-algèbre faiblement fermée et $\mathfrak{M}$ un sous-espace $\eta\,\mathbf{M}'$. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'homomorphisme canonique $\varphi_{\mathfrak{M}}$ de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$ soit un isomorphisme est que $\mathfrak{M}$ soit séparateur pour $\mathbf{M}$. Dans le cas général $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$ est isomorphe à $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}^{\natural}}$. Le noyau de $\varphi_{\mathfrak{M}}$ est donc l'idéal des éléments A vérifiant $AP_{\mathfrak{M}^{\natural}} = 0$.

Nous aurons constamment à utiliser le cas où $\mathbf{M}$ est commutative. Tout ensemble générateur pour $\mathbf{M}$ est alors également générateur pour $\mathbf{M}'$. Rappelons le lemme suivant ([27], lemme 25) :

Lemme 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une $\star$-algèbre* *faiblement fermée commutative* $\mathbf{M}$ *admette un élément séparateur est que toute partition* $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}(\mathfrak{M}_i\eta\mathbf{M})$ *soit dénombrable.*

L'existence d'un élément séparateur est donc une propriété purement algébrique dans le cas d'une $\bigstar$-algèbre faiblement fermée commutative. On peut donc en particulier énoncer le corollaire suivant :

Corollaire. — *Si* $\mathbf{M}$ *est commutative et possède un élément séparateur tout sous-espace* $\eta\mathbf{M}'$, *séparateur pour* $\mathbf{M}$ *contient un élément séparateur pour* $\mathbf{M}$. *Tout sous-espace* $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}'$ *contient un élément séparateur pour* $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$.

II. — $\bigstar$-Algèbres commutatives.

Soit $\mathbf{M}$ une $\bigstar$-algèbre commutative uniformément fermée contenant l'opérateur unité, Ω le spectre de $\mathbf{M}$, c'est-à-dire l'espace compact des caractères de l'$\bigstar$-algèbre $\mathbf{M}$ ([11], [12]). Pour $\chi\in\Omega$, nous désignerons par $\langle\chi, \mathrm{A}\rangle$ ou $\chi(\mathrm{A})$ suivant les commodités de notations, la valeur du caractère χ pour l'élément A de $\mathbf{M}$. L'application faisant correspondre à tout élément A de $\mathbf{M}$ la fonction continue $\chi\to\langle\chi, \mathrm{A}\rangle$ sur Ω est un isomorphisme de $\mathbf{M}$ sur $\mathrm{C}(\Omega)$. Pour tout $\mathrm{F}\in\mathrm{C}(\Omega)$ nous désignerons par $\mathrm{A_F}$ l'opérateur de $\mathbf{M}$ tel que

$$\langle\chi, \mathrm{A_F}\rangle = \mathrm{F}(\chi) \qquad \text{pour tout} \quad \chi\in\Omega.$$

A tout couple d'éléments x, $y\in\mathrm{H}$ est associée une mesure de Radon $d\mu_{x,y}$ sur Ω, dite mesure spectrale, telle que pour tout $\mathrm{F}\in\mathrm{C}(\Omega)$ on ait

$$(\mathrm{A_F}x, y) = \int \mathrm{F}(\chi)\, d\mu_{x,y}(\chi),$$

c'est-à-dire pour tout $\mathrm{A}\in\mathbf{M}$:

$$(\mathrm{A}x, y) = \int \langle\chi, \mathrm{A}\rangle\, d\mu_{x,y}(\chi).$$

La condition nécessaire et suffisante pour que deux $\bigstar$-algèbres uniformément fermées $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ contenant 1 soient algébriquement isomorphes est que leurs spectres soient homéomorphes. D'une façon plus précise, soit φ un isomorphisme de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{N}$. Soit Ω et Ω' les spectres de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$. L'application φ^* de Ω' sur Ω définie par $\langle\varphi^*(\chi'), \mathrm{A}\rangle = \langle\chi', \varphi(\mathrm{A})\rangle$ pour tout $\mathrm{A}\in\mathbf{M}$ et tout $\chi'\in\Omega'$, est un homéomorphisme de Ω' sur Ω, appelé homéomorphisme canonique défini par φ. On pourra identifier Ω et Ω' à l'aide de cet isomorphisme, c'est-à-dire poser $\chi(\varphi(\mathrm{A})) = \chi(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A}\in\mathbf{M}$.

Nous aurons plus spécialement à utiliser le cas où $\mathbf{M}$ est faiblement fermée. Nous nous conformerons dans ce cas aux définitions de J. Dixmier que nous rappellerons [5], avant de démontrer quelques compléments (lemme 4 et la suite).

Définition 3. — *Un espace compact* Ω *est dit stonien s'il vérifie l'une des propriétés suivantes équivalentes :*

(i) *Tout ensemble ouvert a une adhérence ouverte.*

(ii) *L'espace* $C(\Omega)$ *est complètement réticulé c'est-à-dire : toute famille filtrante croissante bornée supérieurement d'éléments de* $C(\Omega)$ *admet une borne supérieure dans* $C(\Omega)$ (4).

Si Ω est stonien tout ensemble fermé a un intérieur fermé. Tout point admet un système fondamental de voisinages ouverts et fermés.

DÉFINITION 4 (J. Dixmier). — *Si* Ω *est un espace stonien, une mesure de Radon* $d\mu$ *sur* Ω *est dite normale, si pour toute famille filtrante croissante* $\{F_i\}_{i\in I}$ *d'éléments de* $C(\Omega)$ *de borne supérieure* F *dans* $C(\Omega)$, *on a*

$$\int F(\chi)\, d\mu(\chi) = \sup_{i\in I} \int F_i(\chi)\, d\mu(\chi).$$

Soit Ω un espace stonien. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure de Radon positive sur Ω soit normale est que tout ensemble rare soit μ-négligeable (5). Le support de toute mesure normale est un ensemble ouvert et fermé. Si E est un ensemble et $d\mu$ une mesure normale de support K, la condition nécessaire et suffisante pour que E soit μ-négligeable est que $E \cap K$ soit rare.

LEMME 3. — *Soit* Ω *un espace stonien,* $d\mu_1$ *et* $d\mu_2$ *deux mesures normales positives de supports* K_1 *et* K_2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait* $d\mu_1 \prec d\mu_2$ (*resp.* $d\mu_1 \sim d\mu_2$) *est qu'on ait* $K_1 \subset K_2$ (*resp.* $K_1 = K_2$).

Démonstration. — La condition est visiblement nécessaire. Supposons donc $K_1 \subset K_2$. Soit E un ensemble μ_2-négligeable. L'ensemble $E \cap K_2$ est rare, il en est donc de même de $E \cap K_1$. Par suite E est μ_2-négligeable.

DÉFINITION 5. — *Un espace stonien* Ω *est dit hyperstonien si la réunion des supports des mesures normales positives est dense dans* Ω.

Si Ω est superstonien, nous dirons qu'une fonction est mesurable si elle est mesurable par rapport à toute mesure normale. Un ensemble sera dit négligeable, s'il est négligeable par rapport à toute mesure normale. Il faut et il suffit pour cela qu'il soit rare. Toute fonction mesurable bornée f coïncide sauf sur un ensemble rare avec une fonction $F \in C(\Omega)$ dite régularisée de f, déterminée univoquement par f.

J. Dixmier a démontré que le spectre Ω d'une $\star$-algèbre faiblement fermée commutative $\mathbf{M}$ est hyperstonien et que toutes les mesures spectrales sont des mesures normales. A tout projecteur $P \in \mathbf{M}$ correspond biunivoquement un ensemble ouvert et fermé K de Ω, support de la fonction $\langle \chi, P \rangle$. Inversement à tout ensemble ouvert et fermé K de Ω, nous ferons correspondre le projecteur E_K tel que $\langle \chi, E_K \rangle$ soit la fonction caractéristique de K. Il existe en particulier une

(4) Cette borne supérieure devra être distinguée de l'enveloppe supérieure de la famille.
(5) [5], proposition 1.

correspondance biunivoque entre les partitions $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ et les familles $\{K_i\}_{i\in I}$ d'ensembles ouverts et fermés non vides de Ω, deux à deux disjoints. Aux partitions de H correspondent les familles d'ensembles ouverts et fermés de Ω, non vides, deux à deux disjoints, dont la réunion est dense dans Ω. Si Ω est de genre dénombrable ([6]), une telle partition est dénombrable.

Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace vectoriel fermé $\eta\mathbf{M}$, et K l'ensemble ouvert fermé de Ω associé à $P_{\mathcal{M}}$. L'$\bigstar$-algèbre $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ est isomorphe à la sous-$\bigstar$-algèbre (ici idéal) des opérateurs $A\in\mathbf{M}$ tels que $AP_{\mathcal{M}}=A$. Cette dernière $\bigstar$-algèbre est elle-même algébriquement isomorphe à l'idéal de $C(\Omega)$ constitué par les fonctions nulles sur $\complement K$, c'est-à-dire à $C(K)$. On peut donc identifier K avec le spectre de $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$.

La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbf{M}$ possède un élément séparateur est que Ω soit de genre dénombrable. Les éléments séparateurs sont alors les éléments a tels que $d\mu_{a,a}$ ait pour support Ω. Dans le cas général on pourra effectuer une partition $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ de H telle qu'en appelant K_i l'ensemble ouvert fermé correspondant à $\mathcal{M}_i$ on ait les deux groupes de propriétés suivantes équivalentes :

(i) $\mathbf{M}_{\mathcal{M}_i}$ possède un élément séparateur x_i et $\bigoplus_{i\in I}\mathcal{M}_i=H$.

(ii) Chaque ensemble K_i est de genre dénombrable et $\bigcup_{i\in I}K_i$ est dense dans Ω.

Chaque ensemble K_i est alors le support de $d\mu_{x_i,x_i}$ et le spectre de $\mathbf{M}_{\mathcal{M}_i}$.

Lemme 4. — *Soit $x\in H$ et $d\nu$ une mesure de Radon positive sur Ω telle que $d\nu \prec d\mu_{x,x}$. Il existe $y\in H$ tel que $d\nu=d\mu_{y,y}$.*

Démonstration. — D'après les remarques faites, on peut supposer que $d\mu_{x,x}$ a pour support Ω. Posons $d\nu=\varphi(\chi)\,d\mu_{x,x}$, $\varphi(\chi)$ étant sommable par rapport à $d\mu_{x,x}$, ≥ 0. Soit $\{K_n\}$ une famille dénombrable d'ensembles ouverts et fermés de Ω tels que $\bigcup_n K_n$ soit dense dans Ω et telle que $\varphi(\chi)$ soit essentiellement bornée sur chaque K_n. Soit $\psi(\chi)=\varphi^{\frac{1}{2}}(\chi)$ pour $\chi\in\bigcup_n K_n$. Définissons pour tout n les opérateurs A_n par les formules $\chi(A_n)=\varepsilon_n(\chi)\,\psi(\chi)$, $\varepsilon_n(\chi)$ étant la fonction caractéristique de K_n. On a

$$\|A_n x\|^2=\int|\psi(\chi)|^2\varepsilon_n(\chi)\,d\mu_{x,x}=\int_{K_n}\psi(\chi)\,d\mu_{x,x}.$$

On peut donc former $y=\sum_n A_n x$. Pour tout n on a

$$d\mu_{A_n x,A_n x}=|\chi(A_n)|^2\,d\mu_{x,x}=\varepsilon_n(\chi)\,\varphi(\chi)\,d\mu_{x,x}=\varepsilon_n(\chi)\,d\nu$$

([6]) C'est-à-dire s'il existe une mesure normale de support Ω.

et par suite pour toute $F \in C(\Omega)$:

$$\int F(\chi)\,d\mu_{y,y} = \sum_n \int \varepsilon_n(\chi)\,F(\chi)\,d\mu_{y,y} = \sum_n \int F(\chi)\,d\mu_{A_n x, A_n x}$$
$$= \sum_n \int F(\chi)\,\varepsilon_n(\chi)\,d\nu = \int F(\chi)\,d\nu.$$

On a donc bien $d\nu = d\mu_{y,y}$.

Proposition 1. — *Toute mesure normale positive est une mesure spectrale de la forme $d\mu_{a,a}$.*

Démonstration. — Soit $d\nu$ une mesure normale positive. Il existe une mesure spectrale $d\mu_{x,x}$ de même support que $d\nu$. On a alors $d\nu \sim d\mu_{x,x}$ et par suite d'après le lemme 4, il existe y tel que $d\mu_{y,y} = d\nu$.

Lemme 5. — *Si* $\mathbf{M}$ *admet un élément générateur* a, *la condition nécessaire et suffisante pour que* $x\,(\in H)$ *soit de la forme* Aa avec $A \in \mathbf{M}$ *est que* $d\mu_{x,x} \prec\!\prec d\mu_{a,a}$. *L'opérateur* A *est bien déterminé par la relation* $d\mu_{x,a} = \chi(A)\,d\mu_{a,a}$.

Démonstration. — La condition est nécessaire, car si $x = Aa$, on a

$$d\mu_{x,x} = |\chi(A)|^2\,d\mu_{a,a}.$$

Inversement supposons qu'il existe $c \geqq 0$ tel que $\int F(\chi)\,d\mu_{x,x} \leqq c\int F(\chi)\,d\mu_{a,a}$ pour $F(\chi) \in C_+(\Omega)$. L'inégalité $|(A_F x, a)| \leqq \|A_{F^{1/2}} x\|\,\|A_{F^{1/2}} a\|$ donne

$$\left|\int F(\chi)\,d\mu_{x,a}\right|^2 \leqq \int F(\chi)\,d\mu_{x,x} \int F(\chi)\,d\mu_{a,a} \leqq c\left|\int F(\chi)\,d\mu_{a,a}\right|^2.$$

On a donc $d\mu_{x,a} \prec\!\prec d\mu_{a,a}$. Il existe donc $A \in \mathbf{M}$ tel que $d\mu_{x,a} = \chi(A)\,d\mu_{a,a}$. Montrons que l'on a $Aa = x$. On a, en effet, $d\mu_{x,a} = d\mu_{Aa,a}$ et par suite pour tout $B \in \mathbf{M}$:

$$\int \chi(B)\,d\mu_{x,a} = \int \chi(B)\,d\mu_{Aa,a},$$

c'est-à-dire

$$(Bx, a) = (BAa, a) \qquad \text{ou enfin} \qquad (x, B^* a) = (Aa, B^* a),$$

ce qui entraîne (les éléments de la forme $B^* a$ étant denses dans H) $x = Aa$.

Corollaire 1. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre commutative faiblement fermée quelconque. Si* $y \in \mathbf{M}(x)$ *et si* $d\mu_{y,y} \prec\!\prec d\mu_{x,x}$, *il existe un opérateur* $A \in \mathbf{M}$ *tel que* $y = Ax$.

Démonstration. — Il suffit d'utiliser l'homomorphisme canonique de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{M}_{\mathbf{M}(x)}$.

Corollaire 2. — *Si* $d\mu_{x,x} = d\mu_{y,y}$ *et si* $y \in \mathbf{M}(x)$, *il existe* $U \in \mathbf{M}_U$ *tel que* $y = Ux$.

Démonstration. — On a $y = Ax$ avec $d\mu_{y,y} = |\chi(A)|^2\, d\mu_{x,x}$ et par suite $|\chi(A)|^2 = 1$ sur le support de $d\mu_{x,x}$, ce qui entraîne que A peut être pris unitaire.

III. — Sous-espaces irréductibles.

Soit $\mathbf{M}$ une $\star$-algèbre faiblement fermée. On pose $\mathbf{A} = \mathbf{M} \smile \mathbf{M}'$.

LEMME 6. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-espace* $\mathcal{M}\eta\mathbf{M}$, $\neq 0$ *soit irréductible* [7] *est que pour tout sous-espace* $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ *on ait* $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}^\natural$.

Démonstration. — La condition est nécessaire d'après [4] (lemme 3.3). Montrons qu'elle est suffisante. Supposons $\mathcal{M}$ non irréductible. Soit $\{\mathcal{M}_i\}_{i=1,2}$ une partition homogène majorée par $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_1$. On a $\mathcal{N}^\natural = \mathcal{M}^\natural$ et par suite $\mathcal{N} \neq \mathcal{M} \cap \mathcal{N}^\natural = \mathcal{M}$.

Remarque 1. — Si $\mathbf{M}$ est commutative (c'est-à dire si $\mathbf{M}^\natural = \mathbf{M}$) tout *sous-*espace $\eta\mathbf{M}$ est irréductible.

LEMME 7. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-espace* $\mathcal{M}\eta\mathbf{M}$, $\neq 0$ *soit irréductible est que* $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ *soit commutative.*

Démonstration. — La condition est nécessairé d'après [4] (lemme 3.2). Inversement si $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ est commutative, $\mathcal{M}$ est irréductible relativement à $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ donc relativement à $\mathbf{M}$.

La définition des sous-espaces irréductibles au sens de Dixmier coïncide donc avec la définition des sous-espaces abéliens au sens de Kaplansky dans [15]. On peut donc énoncer le théorème 1 de [14] sous la forme suivante : La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbf{M}(x)$ soit fini (resp. irréductible) est que $\mathbf{M}'(x)$ soit fini (resp. irréductible) pour $\mathbf{M}$ [8].

Ceci entraîne en particulier que si $\mathbf{M}$ ne possède aucun sous-espace irréductible, il en est de même de $\mathbf{M}'$ et que tout sous-espace $\mathbf{M}^\natural$ purement infini pour $\mathbf{M}$ est purement infini pour $\mathbf{M}'$.

Nous dirons que $\mathbf{M}$ est de type I si tout sous-espace $\eta\mathbf{M}^\natural$ contient un sous-espace $\eta\mathbf{M}$ irréductible, de type II s'il n'existe aucun sous-espace irréductible ni aucun sous-espace purement infini, de type III si H est un sous-espace purement infini (auquel cas Dixmier dit que $\mathbf{M}$ est purement infinie).

---

(7) Rappelons qu'un sous-espace $\mathcal{M}\eta\mathbf{M}$ est dit irréductible si $\mathcal{M} \neq 0$ et s'il n'existe aucune partition homogène d'ordre 2 majorée par $\mathcal{M}$ ([4], définition 3.1).

(8) Le théorème 1 de [14] est démontré dans [10] (théorème 2) en ce qui concerne les sous-espaces finis. Démontrons d'autre part que si $\mathbf{M}'(x)$ n'est pas irréductible il en est de même de $\mathbf{M}(x)$. Par une partition centrale, on peut se ramener au cas où il existe un sous-espace $\mathcal{N}\eta\mathbf{M}$ tel que $\mathcal{N}^\natural = (\mathbf{M}'(x))^\natural$ et $\mathcal{N} \subsetneqq \mathbf{M}'(x)$. Soit $y = P_{\mathcal{N}}x$. On a

$$\mathcal{N} = \mathbf{M}'(y), \qquad (\mathbf{M})(y))^\natural = (\mathbf{M}'(y))^\natural \qquad \text{et} \qquad \mathbf{M}(y) \subsetneqq \mathbf{M}(x).$$

Par suite $\mathbf{M}(x)$ n'est pas irréductible.

D'après les remarques précédentes, pour que $\mathbf{M}$ soit de type I (resp. II, III) il faut et il suffit que $\mathbf{M}'$ soit de type I (resp. II, III). Pour toute $\star$-algèbre $\mathbf{M}$, il existe trois sous-espaces H_{I}, H_{II}, $H_{III}\,\eta\,\mathbf{M}^{\natural}$ tels que $\mathbf{M}_{H_I}$, $\mathbf{M}_{H_{II}}$, $\mathbf{M}_{H_{III}}$ soient respectivement de type I, II, III. Ces $\star$-algèbres seront dites composantes de types I, II, III de $\mathbf{M}$.

Lemme 8. — *La borne supérieure d'une famille filtrante croissante de sous-espaces irréductibles est un sous-espace irréductible.*

Démonstration. — Soit $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ une famille filtrante croissante de sous-espaces $\eta\,\mathbf{M}$ irréductibles. Posons

$$P_i = P_{\mathcal{M}_i}, \qquad P = P_{\mathcal{M}} = \sup_{i\in I} P_i.$$

Soit A, $B \in \mathbf{M}$. Pour tout i, $j \in I$ les opérateurs P_iAP_i et P_jBP_j sont permutables. Il existe en effet $k \in I$ tel que $P_k \geqq P_i$ et $P_k \geqq P_j$. On peut écrire

$$P_iAP_i = P_kP_iAP_iP_k \qquad \text{et} \qquad P_jAP_j = P_kP_jAP_jP_k.$$

Par suite quels que soient i, $j \in I$ et A, $B \in \mathbf{M}$, les opérateurs P_iAP_i et P_jBP_j appartiennent à une même $\star$-algèbre faiblement fermée commutative $\mathbf{N}$. Comme PAP est faiblement adhérent à l'ensemble des opérateurs P_iAP_i et PBP à l'ensemble des opérateurs P_jBP_j, on a PAP, $PBP \in \mathbf{N}$. Les opérateurs PAP et PBP sont donc permutables pour A, $B \in \mathbf{M}$ ce qui démontre le lemme.

Lemme 9. — *Soit $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}\,\eta\,\mathbf{M}$ deux sous-espaces irréductibles tels que $\mathcal{M}^{\natural} \cap \mathcal{N}^{\natural} = 0$. Le sous-espace $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ est irréductible.*

Démonstration. — La relation $P_{\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}} = P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}AP_{\mathcal{N}}$ $(A \in \mathbf{M})$ entraîne que $P_{\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}}$ et $P_{\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}}BP_{\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}}$ permutent pour A, $B \in \mathbf{M}$.

Lemme 10. — *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace $\eta\,\mathbf{M}$, irréductible et $\mathcal{N}$ un sous-espace $\eta\,\mathbf{M}$ tel que $\mathcal{N}^{\natural} \supset \mathcal{M}^{\natural}$. On a $\mathcal{N} \succ \mathcal{M}$.*

Démonstration. — Raisonnons par l'absurde. Par une partition centrale de H, on peut éventuellement se ramener au cas où l'ont aurait $\mathcal{N} \prec \mathcal{M}$ et $\mathcal{N} \not\sim \mathcal{M}$. Il existe alors $U \in \mathbf{M}_U$ tel que $\mathcal{N}_1 = U(\mathcal{N}) \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{N}_1 \neq \mathcal{M}$. Comme on a $\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}^{\natural} = \mathcal{M}^{\natural}$, ceci est absurde.

Lemme 11. — *Soit* $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ *deux $\star$-algèbres faiblement fermées de type* I. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour un sous-espace $\mathcal{M}\,\eta\,\mathbf{M}'$:*

(i) *$\mathcal{M}$ est maximal parmi les sous-espaces irréductibles.*
(ii) *$\mathcal{M}$ est irréductible pour $\mathbf{M}'$ et séparateur pour $\mathbf{M}$.*
(iii) *$\mathcal{M}$ est minimal parmi les sous-espaces $\eta\,\mathbf{M}'$ séparateurs pour $\mathbf{M}$.*

Démonstration. — Supposons $\mathcal{M}$ irréductible maximal et $\mathcal{M}^{\natural} \neq H$. Considérons un sous-espace $\mathcal{N}_1 \subset H \ominus \mathcal{M}^{\natural}$, $\eta\,\mathbf{M}'$ et irréductible. Le sous-espace

$\mathcal{M} \oplus \mathcal{M}_1$ est irréductible (lemme 9) contrairement à l'hypothèse. Par suite (i) entraîne (ii). Inversement si $\mathcal{M}$ est irréductible avec $\mathcal{M}^\natural = H$, $\mathcal{M}$ est irréductible maximal d'après le lemme 10. Supposons (ii) réalisée. Soit $\mathcal{N}$ un sous-espace $\eta \mathbf{M}'$, séparateur pour $\mathbf{M}$ et contenu dans $\mathcal{M}$. On a $\mathcal{N}^\natural = H = \mathcal{M}^\natural$ et par suite $\mathcal{N} = \mathcal{M}$. (ii) entraîne donc (iii).

Supposons enfin (iii) réalisée. Soit $\mathcal{M}_1$ un sous-espace $\eta \mathbf{M}'$ irréductible maximal. Comme on a $\mathcal{M}^\natural = \mathcal{M}_1^\natural = H$, on a $\mathcal{M} \succ \mathcal{M}_1$. Il existe donc $U' \in \mathbf{M}'_U$ tel que $\mathcal{M}_2 = U'(\mathcal{M}_1) \subset \mathcal{M}$. Le sous-espace $\mathcal{M}_2$ est irréductible et $\mathcal{M}_2^\natural = H$. Le sous-espace $\mathcal{M}$ étant minimal parmi les sous-espaces $\eta \mathbf{M}'$, séparateurs pour $\mathbf{M}$, on a donc $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$, ce qui entraîne (ii).

Remarque 2. — Si deux sous-espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont irréductibles maximaux pour $\mathbf{M}$, on a $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$.

LEMME 12. — *Si* $\mathbf{M}$ *est une* $\star$*-algèbre faiblement fermée et si* $\mathbf{M}^\natural$ *possède un élément séparateur, tout sous-espace* $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}$ *irréductible est de la forme* $\mathbf{M}'(x)$.

Démonstration. — On peut se ramener au cas ou $\mathcal{M}^\natural = H$. Le sous-espace $\mathcal{M}$ est alors séparateur pour $\mathbf{M}'$ donc pour $\mathbf{M}^\natural$. Il existe donc un élément $x \in \mathcal{M}$ séparateur pour $\mathbf{M}^\natural$ (corollaire du lemme 2). Soit $\mathcal{M}_1 = \mathbf{M}'(x)$. On a $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_1^\natural = \mathbf{M}(\mathcal{M}_1) = \mathbf{A}(x) = H$. Par suite $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$.

COROLLAIRE. — *Si* $\mathbf{M}$ *est une* $\star$*-algèbre faiblement fermée, tout sous-espace* $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}$ *irréductible est de la forme* $\bigoplus_{i \in I} \mathbf{M}'(x_i)$ *avec* $\mathbf{A}(x_i) \perp \mathbf{A}(x_j)$ *pour* $i \neq j$.

Le lemme 12 et son corollaire admettent les réciproques dans le cas important des $\star$-algèbres commutantes d'une $\star$-algèbre commutative. Nous introduirons une définition spéciale dans ce cas.

DÉFINITION 6. — *Étant donné une* $\star$*-algèbre faiblement fermée commutative un sous-espace* $\mathcal{M}$ *sera dit simple pour* $\mathbf{M}$, *si* : (i) $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}'$; (ii) $\mathcal{M}$ *est irréductible pour* $\mathbf{M}'$.

LEMME 13. — *Étant donné une* $\star$*-algèbre faiblement fermée commutative* $\mathbf{M}$, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-espace* $\mathcal{M}$ *soit simple pour* $\mathbf{M}$ *est qu'il soit de la forme* $\bigoplus_{i \in I} \mathbf{M}(x_i)$ *avec* $\mathbf{M}'(x_i) \cap \mathbf{M}'(x_j) = 0$ *pour* $i \neq j$. *Dans le cas où* $\mathbf{M}$ *admet un élément séparateur la condition est que* $\mathcal{M}$ *soit de la forme* $\mathbf{M}(x)$.

Démonstration. — La condition est nécessaire en raison du corollaire du lemme 12. Pour démontrer qu'elle est suffisante, on peut, en raison des lemmes 8 et 9, supposer que $\mathcal{M} = \mathbf{M}(x)$, auquel cas l'assertion découle du fait que $\mathbf{M}'(x)$ est un sous-espace irréductible pour $\mathbf{M}$.

Si $\mathbf{M}$ est commutative, il existe d'après le lemme 13, des sous-espaces simples séparateurs pour $\mathbf{M}$. Deux sous-espaces simples séparateurs sont équivalents mod $\mathbf{M}'$. Si H lui-même est simple pour $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ est commutative et par suite $\mathbf{M}$ est commutative maximale ($\mathbf{M} = \mathbf{M}'$). Dans le cas général. si $\mathcal{M}$ est un sous-espace simple séparateur, $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ est commutative maximale et comme l'application $A \to A_{\mathcal{M}}$ de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme, nous voyons que toute $\bigstar$-algèbre commutative faiblement fermée est isomorphe à une $\bigstar$-algèbre commutative maximale.

IV. — $\bigstar$-Algèbres faiblement fermées de classe finie.

Rappelons que les $\bigstar$-algèbres de classe finie $\mathbf{M}$ sont caractérisées par l'existence d'une application linéaire de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{M}^{\natural}$, notée $A \to A^{\natural}$, appelée application $\natural$ canonique, vérifiant :

(1) $$A^{\natural} = A \quad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M}^{\natural};$$

(2) $$(AB)^{\natural} = (BA)^{\natural} \quad \text{pour} \quad A, B \in \mathbf{M} \quad (^9)$$

(3) $$A^{\natural} \in \mathbf{M}^{\natural}_{+} \quad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M}_{+}.$$

Quand aucune confusion ne sera à craindre, le même signe $\natural$ sera utilisé pour désigner les applications $\natural$ canoniques dans différentes $\bigstar$-algèbres faiblement fermées de classe finie.

Dans le cas où $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ sont deux $\bigstar$-algèbres faiblement fermées de classe finie le rapport $\dfrac{\chi(P^{\natural}_{\mathbf{M}'(x)})}{\chi(P^{\natural}_{\mathbf{M}(x)})}$ lorsqu'il a un sens en un point de Ω, est indépendant de l'élément $x \in H$ (Ω désigne le spectre de $\mathbf{M}^{\natural}$) (¹⁰). Kaplansky [14], a été amené ainsi à introduire une fonction $C(\chi)$ telle que $\chi(P^{\natural}_{\mathbf{M}'(x)}) = C(\chi)\chi(P^{\natural}_{\mathbf{M}(x)})$. La fonction $C(\chi)$ est définie pour tout $\chi \in \Omega$ tel qu'il existe un élément $x \in H$ avec $\chi(P^{\natural}_{\mathbf{M}(x)}) \neq 0$. Pour x donné, l'ensemble des points $\chi \in \Omega$ tels que $\chi(P^{\natural}_{\mathbf{M}(x)}) \neq 0$ est un ensemble ouvert. Par suite $C(\chi)$ est défini sur un ensemble ouvert Z. Cet ensemble est dense dans Ω et $C(\chi)$ est continue sur Z. On peut du reste définir $C(\chi)$ sur tout Ω en posant $C(\chi) = +\infty$ pour $\chi \in \complement Z$ et l'on vérifie aisément que $C(\chi)$ est alors fonction continue sur Ω à valeurs dans $[0, +\infty]$.

---

(9) Cette propriété est équivalente à la propriété $(UAU^{-1})^{\natural} = A^{\natural}$ pour $U \in \mathbf{M}_U$. D'une façon générale soit $A \to T(A)$ une application linéaire d'une $\bigstar$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$ dans un espace vectoriel. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $$T(AB) = T(BA) \quad \text{pour} \quad A, B \in \mathbf{M};$$

(2) $$T(UAU^{-1}) = T(A) \quad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M} \quad \text{et} \quad U \in \mathbf{M}_U.$$

En effet la propriété (1) entraine (2) immédiatement. Inversement, si la propriété (2) est vérifiée, on a en remplaçant A par AU :

$$T(UA) = T(AU) \quad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M} \quad \text{et} \quad U \in \mathbf{M}_U;$$

d'où l'on passe à la propriété (1) puisque tout opérateur de $\mathbf{M}$ est combinainon linéaire d'opérateurs unitaires de $\mathbf{M}$. On peut même *a priori* ne supposer la relation (2) vérifiée que pour $A \in \mathbf{M}$ et $U \in \mathbf{M}_U$.

(10) On trouvera en appendice la démonstration de cette propriété énoncée dans [14] mais dont la démonstration n'a pas été publiée.

Dans le paragraphe suivant nous définirons l'invariant $C(\chi)$ indépendamment de toute hypothèse sur $\mathbf{M}'$ (définition 9).

Lemme 14. — *Soit* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}'$ *deux* $\bigstar$*-algèbres faiblement fermées de classe finie*, $C(\chi)$ *l'invariant de* $\mathbf{M}$. *Pour tout sous-espace* $\mathfrak{M}$ *simple pour* $\mathbf{M}^\natural$, *on a*

$$\chi\left(P^\natural_{\mathbf{M}'(\mathfrak{M})}\right) = C(\chi)\,\chi\left(P^\natural_{\mathbf{M}(\mathfrak{M})}\right) \qquad [\textit{pour tout } \chi \textit{ tel que } C(\chi) \neq +\infty].$$

Démonstration. — Le sous-espace $\mathfrak{M}$ étant simple pour $\mathbf{M}^\natural$, on a pour $x \in \mathfrak{M}$

$$\mathbf{M}^\natural(x) = \mathfrak{M} \cap (\mathbf{M}^\natural(x))^\natural = \mathfrak{M} \cap \mathbf{A}(x) \qquad (\text{en posant } \mathbf{A} = \mathbf{M} \smile \mathbf{M}')$$

et par suite

$$\mathbf{M}(x) = \mathbf{M}(\mathbf{M}^\natural(x)) = \mathbf{M}(\mathfrak{M} \cap \mathbf{A}(x)) = \mathbf{M}(\mathfrak{M}) \cap \mathbf{A}(x).$$

On a de même $\mathbf{M}'(x) = \mathbf{M}'(\mathfrak{M}) \cap \mathbf{A}(x)$. Ceci permet d'écrire

$$\chi\left(P^\natural_{\mathbf{M}'(x)}\right) = \chi\left(P^\natural_{\mathbf{M}'(\mathfrak{M})}\right)\chi\left(P_{\mathbf{A}(x)}\right) \qquad \text{et} \qquad \chi\left(P^\natural_{\mathbf{M}(x)}\right) = \chi\left(P^\natural_{\mathbf{M}(\mathfrak{M})}\right)\chi\left(P_{\mathbf{A}(x)}\right).$$

Pour tout $\chi \in \Omega$ tel que $C(\chi) \neq \infty$, on a donc

$$\chi\left(P^\natural_{\mathbf{M}'(\mathfrak{M})}\right)\chi\left(P_{\mathbf{A}(x)}\right) = C(\chi)\,\chi\left(P^\natural_{\mathbf{M}(\mathfrak{M})}\right)\chi\left(P_{\mathbf{A}(x)}\right).$$

Les fonctions $\chi(P_{\mathbf{A}(x)})$ n'étant autres que les fonctions caractéristiques des supports des mesures spectrales, supports dont la réunion est dense dans Ω, la relation est démontrée.

Lemme 15. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée de classe finie. Soit* $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ *une famille de sous-espaces différents de zéro*, $\eta\mathbf{M}$, *tels que* $\sum_{i\in I} P^\natural_{\mathfrak{M}_i} \leq 1$. *Il existe une partition* $\{\mathfrak{N}_i\}_{i\in I}$ *telle que* $\mathfrak{N}_i \sim \mathfrak{M}_i$.

Démonstration. — Par une partition centrale, on peut sera mener au cas où $\mathbf{M}^\natural$ a un élément séparateur, auquel cas les sous-espaces $\mathfrak{M}_i$ sont réduits à zéro, sauf un ensemble dénombrable d'entre eux. On a en effet

$$\mu_{a,a}\left(\chi\left(\sum_{i\in I} P^\natural_{\mathfrak{M}_i}\right)\right) = \sum_{i\in I} \mu_{a,a}\left(\chi\left(P^\natural_{\mathfrak{M}_i}\right)\right) \leq \int a\,\mu_{a,a},$$

ce qui entraîne $\chi\left(P^\natural_{\mathfrak{M}_i}\right) = 0$ sauf pour un ensemble dénombrable d'indices. Nous pouvons alors supposer que I est l'ensemble des entiers positifs. Construisons les sous-espaces $\mathfrak{N}_i$ par récurrence. Soit $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}_1$. Supposons les sous-espaces $\mathfrak{N}_i$ construits pour $i < j$. On a

$$P_{H \ominus \bigoplus_{i<j} \mathfrak{N}_i} = 1 - \sum_{i<j} P^\natural_{\mathfrak{N}_i} = 1 - \sum_{i<j} P^\natural_{\mathfrak{M}_i} \geq P^\natural_{\mathfrak{M}_j}$$

et par suite $\mathfrak{M}_j \prec \bigoplus_{i<j} \mathfrak{N}_i$. Il existe donc un sous-espace $\mathfrak{N}_j \subset H \ominus \bigoplus_{i<j} \mathfrak{N}_i$ avec $\mathfrak{N}_j \sim \mathfrak{M}_j$. La suite $\{\mathfrak{N}_j\}$ constitue la partition demandée.

LEMME 16. — *Soit* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}'$ *deux* $\bigstar$*-algèbres faiblement fermées de classe finie. Si* $\mathbf{M}^{\natural}$ *possède un élément séparateur, il en est de même de* $\mathbf{M}$ *si* $C(\chi) \geqq 1$.

Démonstration. — Considérons une famille $\{a_i\}_{i\in I}$ d'éléments de H, différents de zéro, tels que $\sum_{i\in I} P^{\natural}_{\mathbf{M}'(a_i)} \leqq 1$. Soit $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ une partition vérifiant $\mathfrak{M}_i \sim \mathbf{M}'(a_i)$. On vérifie immédiatement qu'on a $\mathfrak{M}_i = \mathbf{M}'(b_i)$ avec $b_i = U_i a_i$, si $U_i \in \mathbf{M}_U$ et vérifie $U_i(\mathbf{M}'(a_i)) = \mathfrak{M}_i$.

Considérons alors les sous-espaces $\mathbf{M}(b_i)$. Comme on a $P^{\natural}_{\mathbf{M}(b_i)} \leqq P^{\natural}_{\mathbf{M}'(b_i)}$ et par suite $\sum_{i\in I} P^{\natural}_{\mathbf{M}(b_i)} \leqq 1$, il existe une partition $\{\mathfrak{N}_i\}_{i\in I}$ telle que $\mathfrak{N}_i \sim \mathbf{M}(b_i)$. Soit $U'_i \in \mathbf{M}'_U$ tel que $U'_i(\mathbf{M}(b_i)) = \mathfrak{N}_i$. On vérifie immédiatement qu'on a en posant $c_i = U'_i b_i$:

$$\mathfrak{M}_i = \mathbf{M}'(a_i) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{N}_i = \mathbf{M}(c_i).$$

Supposons que la famille $\{a_i\}_{i\in I}$ soit maximale parmi les familles d'éléments non nuls vérifiant $\sum_{i\in I} P^{\natural}_{\mathbf{M}'(a_i)} \leqq 1$ (l'existence d'une telle famille est assurée par le théorème de Zorn). La famille $\{c_i\}_{i\in I}$ est alors également une famille maximale. On a donc $H = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{M}'(c_i)$, [si cela n'était pas réalisé, en prenant $x \in H \ominus \bigoplus_{i\in I} \mathbf{M}'(c_i)$, on aurait $\sum_{i\in I} P^{\natural}_{\mathbf{M}'(c_i)} + P^{\natural}_{\mathbf{M}'(x)} \leqq 1$ et la famille $\{c_i\}_{i\in I}$ ne serait pas maximale]. L'ensemble I étant dénombrable, on peut supposer la famille $\{c_i\}_{i\in I}$ sommable [sans modifier les sous-espaces $\mathbf{M}(c_i)$ et $\mathbf{M}'(c_i)$]. On a alors en posant $c = \sum_{i\in I} c_i$: $c_i = P_{\mathfrak{N}_i} c$ et par suite $\mathbf{M}'(c_i) = \mathbf{M}'(P_{\mathfrak{N}_i} c) \subset \mathbf{M}'(c)$ et par suite $\mathbf{M}'(c) = H$.

COROLLAIRE. — *Si* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}'$ *sont deux* $\bigstar$*-algèbres de classe finie avec* $C'(\chi) \geqq 1$, *il existe un sous-espace* $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbf{A}$ *séparateur pour* $\mathbf{M}$ *et simple pour* $\mathbf{M}^{\natural}$.

LEMME 17. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre de classe finie de type II. Soit* Ω *le spectre de* $\mathbf{M}^{\natural}$ *et* $F \in C(\Omega)$ *telle que* $F(\chi) \leqq 1$. *Il existe un sous-espace* $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbf{M}$ *tel que* $\chi(P^{\natural}_{\mathfrak{M}}) = F(\chi)$.

Démonstration. — Soit $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ une famille maximale de sous-espaces $\eta\,\mathbf{M}$ tels que $\chi\left(\sum_{i\in I} P^{\natural}_{\mathfrak{M}_i}\right) \leqq F(\chi)$. Montrons qu'on a

$$\chi\left(\sum_{i\in I} P^{\natural}_{\mathfrak{M}_i}\right) = F(\chi).$$

Si cela n'était pas réalisé, considérons $\chi_0 \in \Omega$ tel que $\chi_0\left(\sum_{i\in I} P^{\natural}_{\mathfrak{M}_i}\right) < F(\chi)$ et soit

ε positif tel que $\varepsilon < F(\chi_0) - \chi_0\left(\sum_{i\in I} P^{\natural}_{\mathcal{M}_i}\right)$. Il existe un voisinage ouvert et fermé V de χ_0 tel que $F(\chi) - \chi\left(\sum_{i\in I} P^{\natural}_{\mathcal{M}_i}\right) \leq \varepsilon$ pour $\chi \in V$ et par suite ([11]) un sous-espace $\mathcal{M} \neq 0$ tel que $\chi\left(P^{\natural}_{\mathcal{M}}\right) < \varepsilon$ pour $\chi \in V$ et $\chi\left(P^{\natural}_{\mathcal{M}}\right) = 0$ pour $\chi \notin V$. On a alors $\chi\left(\sum_{i\in I} P^{\natural}_{\mathcal{M}_i} + P^{\natural}_{\mathcal{M}}\right) \leq F(\chi)$. La famille $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ ne serait pas maximale. D'après le lemme 15, on peut supposer les sous-espaces $\mathcal{M}_i$ deux à deux orthogonaux. Posons alors $\mathcal{M} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$. On a

$$\chi\left(P^{\natural}_{\mathcal{M}}\right) = \chi\left(\sum_{i\in I} P^{\natural}_{\mathcal{M}_i}\right) = F(\chi).$$

Tout isomorphisme algébrique φ de deux $\star$-algèbres faiblement fermées $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$ induit un isomorphisme algébrique de leurs centres $\mathbf{M}^{\natural}$ et $\mathbf{M}_1^{\natural}$ lequel définit canoniquement un homéomorphisme des spectres Ω et Ω_1 de $\mathbf{M}^{\natural}$ et $\mathbf{M}_1^{\natural}$. Nous identifierons alors Ω et Ω_1 par cet homéomorphisme, ce qui revient à poser $\chi(\varphi(A)) = \chi(A)$ pour tout $A \in \mathbf{M}^{\natural}$.

D'autre part, si $\mathbf{M}$ est de classe finie, nous considérerons souvent $A^{\natural}$ comme un élément de $C(\Omega)$ au lieu de le considérer comme un élément de $\mathbf{M}^{\natural}$. L'application $A \to A^{\natural}$ sera alors caractérisée comme une application linéaire de $\mathbf{M}$ sur $C(\Omega)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\qquad A^{\natural}(\chi) = \chi(A) \quad$ pour $\quad A \in \mathbf{M}^{\natural}$;

(2) $\qquad (AB)^{\natural} = (BA)^{\natural}$;

(3) $\qquad A^{\natural} \in C_{+}(\Omega) \quad$ pour $\quad A \in \mathbf{M}_{+}$.

Cette identification nous sera utile dans l'énoncé de certains résultats relatifs aux isomorphismes algébriques d'$\star$-algèbres faiblement fermées de classe finie. Nous la supposerons faite dans la suite de ce paragraphe. On peut alors énoncer le lemme suivant dont la démonstration est immédiate en raison de la caractérisation purement algébrique de l'application $\natural$ canonique.

Lemme 18. — *Soit φ un isomorphisme algébrique de deux $\star$-algèbres faiblement fermées de clase finie $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$. Pour tout $A \in \mathbf{M}$ on a $(\varphi(A))^{\natural} = A^{\natural}$.*

Corollaire. — *Soit $\mathbf{M}$ une $\star$-algèbre faiblement fermée de classe finie et $\mathcal{M}$ un sous-espace $\eta\mathbf{M}'$, séparateur pour $\mathbf{M}$. On a $A^{\natural}_{\mathcal{M}} = A^{\natural}$.*

Lemme 19. — *Soit $\mathbf{M}$ une $\star$-algèbre faiblement fermée de classe finie et $\mathcal{M}$ un sous-espace $\eta\mathbf{M}$, générateur pour $\mathbf{M}$. Soit φ l'isomorphisme canonique de $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ sur $\mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$, (sous-$\star$-algèbre de $\mathbf{M}$ formée des opérateurs A tels que $P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}} = A$).*

([11]) D'après [3], lemme 6.2.

Pour tout $A \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}}$, *on a*

$$(\varphi(A))^{\natural} = A^{\natural} P^{\natural}_{\mathcal{M}}.$$

Démonstration. — L'application $A \to (\varphi(A))^{\natural}$ et une application $\natural$ « générale » ([7]) définie sur $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$. D'après [7] (proposition 1), on a

$$(\varphi(A))^{\natural} = A^{\natural}(\varphi(1_{\mathcal{M}}))^{\natural},$$

$1_{\mathcal{M}}$ désignant l'opérateur unité sur $\mathcal{M}$. Comme on a $\varphi(1_{\mathcal{M}}) = P_{\mathcal{M}}$ le lemme est démontré.

Corollaire. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée de classe finie et* $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}$. *Soit* φ *l'isomorphisme canonique de* $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ *sur* $\mathbf{M}_{\langle\mathcal{M}\rangle}$ *et* $\Omega_{\mathcal{M}}$ *le spectre de* $\mathbf{M}^{\natural}_{\mathcal{M}}$ $\left(\text{\textit{ou de} } \mathbf{M}^{\natural}_{\mathcal{M}^{\natural}}\right)$. *Pour tout* $\chi \in \Omega_{\mathcal{M}}$ *on a*

$$\varphi(A)^{\natural}(\chi) = A^{\natural}(\chi)\, P^{\natural}_{\mathcal{M}}(\chi).$$

Proposition 2. — *Soit* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}'$ *deux* $\bigstar$*-algèbres faiblement fermées de classe finie,* $C(\chi)$ *l'invariant de* $\mathbf{M}$. *Soit un sous-espace* $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}'$ *et* $C_{\mathcal{M}}(\chi)$ *l'invariant de* $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ $\left(\text{\textit{défini sur le spectre} } \Omega_{\mathcal{M}} \text{ \textit{de} } \mathbf{M}^{\natural}_{\mathcal{M}}\right)$. *On a*

$$C_{\mathcal{M}}(\chi) = P^{\natural}_{\mathcal{M}}\, C(\chi) \qquad [\text{\textit{pour tout} } \chi \in \Omega_{\mathcal{M}} \text{ \textit{tel que} } C(\chi) \neq \infty].$$

Démonstration. — Soit $x \in \mathcal{M}$. Le sous-espace $\mathbf{M}'_{\mathcal{M}}(x)$ est sous-tendu par les éléments de la forme $P_{\mathcal{M}} A' P_{\mathcal{M}} x = P_{\mathcal{M}} A' x$ pour $A' \in \mathbf{M}'$. On a donc $\mathbf{M}'_{\mathcal{M}}(x) = \mathcal{M} \cap \mathbf{M}'(x)$. Le projecteur $P_{\mathbf{M}'_{\mathcal{M}}(x)}$ opérant dans H est donc égal à $P_{\mathcal{M}} P_{\mathbf{M}'(x)}$. Opérant dans $\mathcal{M}$, il est donc la partie induite par $P_{\mathbf{M}'(x)}$ sur $\mathcal{M}$. On a donc $P^{\natural}_{\mathbf{M}'_{\mathcal{M}}(x)} = P^{\natural}_{\mathbf{M}'(x)}$. On a d'autre part $\mathbf{M}(x) \subset \mathcal{M}$ et par suite $P_{\mathcal{M}} P_{\mathbf{M}(x)} P_{\mathcal{M}} = P_{\mathbf{M}(x)}$. Comme $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}(x) = \mathbf{M}(x)$, on a avec les notations du lemme 19 transposées à $\mathbf{M}'$: $\varphi\left(P_{\mathbf{M}_{\mathcal{M}}(x)}\right) = P_{\mathbf{M}(x)}$ $\left(P_{\mathbf{M}_{\mathcal{M}}(x)}\right.$ est considéré comme opérant dans $\left.\mathcal{M}\right)$ ce qui entraîne

$$P^{\natural}_{\mathbf{M}(x)}(\chi) = P^{\natural}_{\mathbf{M}_{\mathcal{M}}(x)}(\chi)\, P^{\natural}_{\mathcal{M}}(\chi) \qquad \text{pour } \chi \in \Omega_{\mathcal{M}}.$$

Soit Z l'ensemble rare de Ω formé des χ tels que $C(\chi) = \infty$. Pour tout $\chi \notin Z$, on a

$$P^{\natural}_{\mathbf{M}'(x)}(\chi) = C(\chi)\, P^{\natural}_{\mathbf{M}(x)}(\chi)$$

et par suite

$$P_{\mathbf{M}'_{\mathcal{M}}(x)}(\chi) = C(\chi) P^{\natural}_{\mathcal{M}}(\chi)\, P^{\natural}_{\mathbf{M}_{\mathcal{M}}(x)}(\chi) = C_{\mathcal{M}}(\chi)\, P^{\natural}_{\mathbf{M}_{\mathcal{M}}(x)}(\chi).$$

Par suite pour tout $\chi \in \complement Z \cap \Omega_{\mathcal{M}}$, on a

$$C_{\mathcal{M}}(\chi) = C(\chi) P^{\natural}_{\mathcal{M}}(\chi)$$

ce qui démontre la proposition.

([12]) *Cf.* Définitions et Notations.

V. — Sous-espaces uniformes.

Dans ce paragraphe, $\mathbf{M}$ désignera une $\star$-algèbre faiblement fermée *de classe proprement infinie* ([12]) *sans composante purement infinie.*

LEMME 20. — *S'il existe deux partitions homogènes* $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in \mathrm{I}}$ *et* $\{\mathcal{M}'_j\}_{j\in \mathrm{J}}$ *de* H, *les sous-espaces* $\mathcal{M}_i$, $\mathcal{M}'_j$ *étant finis, les ensembles* I *et* J *ont même puissance.*

Démonstration. — Pour démontrer le lemme, il suffit de se placer dans le cas où $\mathbf{M}'$ est de classe finie. Par une partition centrale de H, on peut alors se ramener au cas où les deux conditions suivantes sont remplies :

(a) $\mathbf{M}^{\natural}$ possède un élément séparateur ;

(b) $C_{\mathcal{M}_i}(\chi)$, $C_{\mathcal{M}'_j}(\chi)$ étant les invariants de $\mathbf{M}'_{\mathcal{M}_i}$ et $\mathbf{M}'_{\mathcal{M}'_j}$, on a

$$\sup_{\chi\in\Omega} C_{\mathcal{M}_i}(\chi) < \infty \qquad \text{et} \qquad \sup_{\chi\in\Omega} C_{\mathcal{M}'_j}(\chi) < \infty.$$

Soit $i_0 \in \mathrm{I}$, il existe une partition homogène finie $\{\mathcal{N}_k\}_{k\in\mathrm{K}}$ de $\mathcal{M}_{i_0}$ telle que $C_{\mathcal{N}_k}(\chi)$ étant l'invariant de $\mathbf{M}'_{\mathcal{N}_k}$, on ait $C_{\mathcal{N}_k}(\chi) \leq 1$. Soit $V_i \in \mathbf{M}_{\mathrm{p.I.}}$ tel que $\mathcal{O}_{V_i} = \mathcal{M}_{i_0}$ et $\Delta_{V_i} = \mathcal{M}_i$. Posons $\mathcal{N}_{k,i} = V_i(\mathcal{N}_k)$. La famille $\{\mathcal{N}_{k,i}\}_{k\in\mathrm{K},\, i\in\mathrm{I}}$ constitue une partition homogène de H avec $C_{\mathcal{N}_{k,i}}(\chi) \leq 1$. Autrement dit, on peut toujours se ramener au cas où $C_{\mathcal{M}_i}(\chi) \leq 1$. Par un raisonnement analogue, nous pouvons supposer $C_{\mathcal{M}'_j}(\chi) \leq 1$. Il existe alors des éléments $\{x_i\}_{i\in\mathrm{J}}$ et $\{y_j\}_{j\in\mathrm{J}}$ tels que $\mathcal{M}_i = \mathbf{M}'(x_i)$ et $\mathcal{M}'_j = \mathbf{M}'(y_j)$ (d'après le lemme 16). Pour $i \in \mathrm{I}$ donné, x_i est orthogonal à tous les sous-espaces $\mathcal{M}'_j$ à l'exception d'une famille dénombrable $\{\mathcal{M}'_j\}_{j\in\mathrm{K}}$ d'entre eux. On a par suite $\mathcal{M}_i \subset \bigoplus_{j\in\mathrm{K}} \mathcal{M}'_j$. D'autre part, pour tout $j \in \mathrm{J}$, il existe au moins un sous-espace $\mathcal{M}_{i_j}$ non orthogonal à $\mathcal{M}'_j$ (sinon $\mathcal{M}'_j$ serait orthogonal à tous les sous-espaces $\mathcal{M}_i$ donc à H et serait par suite réduit à zéro). L'indice i_j ne peut être le même que pour au plus une infinité dénombrable d'indices j. On a donc

$$\text{puissance de J} \leq \text{puissance de I} \times \aleph_0 = \text{puissance de I}.$$

Compte tenu de la symétrie entre I et J, le lemme est démontré.

DÉFINITION 7. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée de classe proprement infinie, sans composante purement infinie. Un sous-espace* $\mathcal{M}\,\eta\,\mathbf{M}^{\natural}$, $\neq 0$, *sera dit uniforme, s'il existe une partition homogène* $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in\mathrm{I}}$ *de* $\mathcal{M}$, *les sous-espaces* $\mathcal{M}_i$ *étant finis. La puissance de* I (*indépendante de la partition considérée*) *s'appelle l'ordre de* $\mathcal{M}$ ([13]).

Remarquons que si $\mathcal{M}\,\eta\,\mathbf{M}^{\natural}$ est uniforme d'ordre α, il en est de même de tout sous-espace $\mathcal{N}\,\eta\,\mathbf{M}^{\natural}$, contenu dans $\mathcal{M}$.

([13]) Si $\mathbf{M}$ est de type I (et de classe proprement infinie) tout sous-espace uniforme d'ordre α est homogène de degré α ([4], définition 3.3) et inversement. Les résultats qui suivent peuvent donc être considérés comme une généralisation de la théorie des sous-espaces homogènes.

Lemme 21. — *Soit α un nombre cardinal. S'il existe des sous-espaces uniformes d'ordre α, il en existe un H_α les contenant tous. Tout sous-espace $\eta \mathbf{M}^\natural$ contenu dans H_α est alors uniforme d'ordre α.*

Démonstration. — Soit (d'après le théorème de Zorn) une partition maximale $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ parmi les partitions dont les éléments sont des sous-espaces uniformes d'ordre α. Soit $H_\alpha = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$. Pour chaque $i \in I$ posons $\mathcal{M}_i = \bigoplus_{i\in J} \mathcal{M}_{i,j}$, les sous-espaces $\mathcal{M}_{i,j}$ étant finis (J peut être pris indépendant de i et est de puissance α). Soit $\mathcal{N}_j = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_{i,j}$. Le sous-espace $\mathcal{N}_j$ est fini et l'on a $H_\alpha = \bigoplus_{i\in J} \mathcal{N}_j$. Donc H_α est uniforme d'ordre α.

Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace $\eta \mathbf{M}^\natural$, uniforme α. Si $\mathcal{M} \ominus (\mathcal{M} \cap H_\alpha)$ n'est pas réduit à zéro, c'est un sous-espace uniforme d'ordre α, ce qui est impossible puisque la partition $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ est maximale. On a donc $\mathcal{M} \subset H_\alpha$. D'autre part si $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}^\natural$ et est contenu dans H_α, il est uniforme d'ordre α.

Lemme 22. — *Si $\alpha \neq \beta$, H_α est orthogonal à H_β.*

Démonstration. — $H_\alpha \cap H_\beta$, n'était par réduit à zéro, ce serait un sous-espace uniforme d'ordre α et uniforme d'ordre β ce qui est impossible.

Le but des considérations qui suivent est de résoudre le problème de l'existence des sous-espaces uniformes. Auparavant un lemme nous sera utile.

Lemme 23. — *Soit $\mathbf{M}$ une $\star$-algèbre faiblement fermée, $\mathcal{M}$ un sous-espace $\eta \mathbf{M}$, proprement infini, $\mathcal{N}$ un sous-espace $\eta \mathbf{M}$, fini, tel que $\mathcal{M}^\natural = \mathcal{N}^\natural$. On a $\mathcal{M} \succ \mathcal{N}$.*

Démonstration. — Raisonnant par l'absurde, on pourrait par une partition centrale se ramener au cas ou $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$, ce qui entraîne que $\mathcal{M}$ est fini contrairement à l'hypothèse.

Lemme 24. — *Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace $\eta \mathbf{M}$, fini. Il existe un sous-espace $\mathcal{N} \eta \mathbf{M}^\natural$, $\neq 0$, et une partition homogène de $\mathcal{N}$ dont $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ est élément.*

Démonstration. — Considérons d'après le théorème de Zorn une partition homogène $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ maximale parmi les partitions homogènes dont $\mathcal{M}$ est élément. Soit $H_1 = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i$ et $H_2 = \mathcal{M}^\natural \ominus H_1$. Si $H_2^\natural \neq \mathcal{M}^\natural$, le sous-espace $\mathcal{M}^\natural \ominus H_2^\natural$ et la partition $\{\mathcal{N}_i\}_{i\in I}$ avec $\mathcal{N}_i = \mathcal{M}_i \cap (\mathcal{M}^\natural \ominus H_2^\natural)$ satisfont aux conditions de l'énoncé.

Supposons maintenant $H_2^\natural = \mathcal{M}^\natural$. Le sous-espace H_2 ne peut être proprement infini car il contiendrait un sous-espace équivalent à $\mathcal{M}$, et la partition $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ ne serait pas maximale. On peut supposer H_2 fini (il existe en effet dans tous les cas un sous-espace $H_3 \eta \mathbf{M}^\natural$ tel que $H_3 \cap H_2$ soit fini et différent de zéro : il suffirait de raisonner dans H_3). On a alors $H_1 \sim \mathcal{M}^\natural$ et $H_1 \ominus \mathcal{M} \sim \mathcal{M}^\natural \ominus \mathcal{M}$. Soit $V \in \mathbf{M}_{p.I.}$ tel que $\mathcal{D}_V = H_1 \ominus \mathcal{M}$ et $\Delta_V = \mathcal{M}^\natural \ominus \mathcal{M}$. Si i_0 est l'indice tel que

$\mathfrak{M}_{i_0} = \mathfrak{M}$, posons $\mathfrak{N}_i = \mathrm{V}(\mathfrak{M}_i)$ pour $i \neq i_0$ et $\mathfrak{N}_{i_0} = \mathfrak{M}_{i_0} = \mathfrak{M}$. On a $\mathfrak{M}^\natural = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i$. La partition $\{\mathfrak{M}_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ est homogène et $\mathfrak{M}_{i_0} = \mathfrak{M}$. Le lemme est donc démontré dans tous les cas.

Théorème 1. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée de classe proprement infinie sans composante purement infinie. Soit* X *l'ensemble des nombres transfinis* α *pour lesquels il existe des sous-espaces* $\eta\,\mathbf{M}^\natural$ *uniformes d'ordre* α. *Il existe une partition centrale unique* $\{\mathrm{H}_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{X}}$ *de* H *telle que chaque sous-espace* H_α *soit uniforme d'ordre* α.

Démonstration. — Soit $\mathrm{H}_1 = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{X}} \mathrm{H}_\alpha$. D'après le lemme 24, si $\mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_1 \neq 0$, $\mathrm{H} \ominus \mathrm{H}_1$ contient un sous-espace $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbf{M}^\natural$ uniforme, ce qui est absurde.

Proposition 3. — *Si* H *est uniforme d'ordre* α, *et si* $\mathfrak{M}$ *est un sous-espace* $\eta\,\mathbf{M}$, *fini, il existe une partition de* $\mathfrak{M}^\natural$ *dont* $\mathfrak{M}$ *est élément.*

Démonstration. — Soit $\{\mathfrak{N}_j\}_{j \in \mathrm{J}}$ une partition maximale parmi les partitions centrales vérifiant la condition suivante : il existe pour chaque $j \in \mathrm{J}$ une partition homogène $\{\mathfrak{M}_{j,i}\}_{i \in \mathrm{I}}$ dont $\mathfrak{N}_j \cap \mathfrak{M}$ est élément. D'après le lemme 24, on a nécessairement $\bigoplus_{j \in \mathrm{J}} \mathfrak{N}_j = \mathrm{H}$. L'ensemble I peut être pris indépendant de j (et de puissance α) ainsi que l'indice i_0 tel que $\mathfrak{N}_j \cap \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{j,i_0}$. Posons $\mathfrak{M}_i = \bigoplus_{j \in \mathrm{J}} \mathfrak{M}_{j,i}$. La partition $\{\mathfrak{M}_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ satisfait aux conditions de l'énoncé.

L'étude des sous-espaces uniformes permet de définir un invariant algébrique des $\star$-algèbres faiblement fermées de classe proprement infinie (sans composante purement infinie).

Définition 8. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée de classe proprement infinie sans composante purement infinie. Soit* $\{\mathrm{H}_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{X}}$ *la partition centrale de* H *en sous-espaces uniformes définie par le théorème* 1, *et* K_α *l'ensemble ouvert et fermé du spectre* Ω *de* $\mathbf{M}^\natural$ *associé à* K_α. *On appelle invariant algébrique de* $\mathbf{M}$, *la fonction* $\mathrm{P}(\chi)$ *définie sur* $\bigcup_{\alpha \in \mathrm{X}} \mathrm{K}_\alpha$ *par la relation* $p(\chi) = \alpha$ *pour* $\chi \in \mathrm{K}_\alpha$.

Remarque 3. — La fonction $p(\chi)$ est définie sur un ensemble ouvert dense de Ω.

Remarque 4. — La fonction $p(\chi)$ est bien invariante par les isomorphismes algébriques, tout isomorphisme algébrique d'une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$ de classe proprement infinie (sans composante purement infinie) sur une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}_1$ appliquant un sous-espace uniforme d'ordre α sur un sous-espace uniforme d'ordre α et permettant d'identifier canoniquement les spectres de $\mathbf{M}^\natural$ et $\mathbf{M}_1^\natural$.

Nous pouvons maintenant définir l'invariant $\mathrm{C}(\chi)$ d'une $\star$-algèbre faiblement fermée de classe finie dans le cas général, sans supposer $\mathbf{M}'$ de classe finie. Il existe deux sous-espaces complémentaires orthogonaux H_f et $H_i \eta \mathbf{M}^\natural$ respectivement fini et proprement infini pour $\mathbf{M}'$. Soit K_f et K_i les ensembles ouverts et fermés de Ω définis par H_f et H_i. Rappelons que K_f (resp. K_i) s'identifie canoniquement au spectre de $\mathbf{M}^\natural_{H_f}$ (resp. $\mathbf{M}^\natural_{H_i}$).

Définition 9. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée de classe finie* H_f, H_i, K_f, K_i *définis comme précédemment. On appelle invariant de* $\mathbf{M}$ *la fonction définie sur* Ω *sauf sur un ensemble rare, par les formules*

$$C(\chi) = C_{H_f}(\chi) \quad \textit{pour} \quad \chi \in K_f,$$
$$C(\chi) = p(\chi) \quad \textit{pour} \quad \chi \in K_i;$$

où $p(\chi)$ *est l'invariant algébrique de* $\mathbf{M}'_{H_i}$.

Remarque 5. — Il est immédiat de voir que $C(\chi)$ est invariant par tout isomorphisme spatial.

Nous utiliserons cette définition au chapitre III. Au chapitre II, il suffirait de poser $C(\chi) = \infty$ pour $\chi \in K_i$.

CHAPITRE II.

$\bigstar$-ALGÈBRES FAIBLEMENT FERMÉES DE CLASSE FINIE.

I. — Sous-espaces-$\natural$.

Dans ce paragraphe, $\mathbf{M}$ désignera une $\bigstar$-algèbre faiblement fermée, $\mathbf{M}'$ l'algèbre commutante, $\mathbf{A}$ l'algèbre faiblement fermée $\mathbf{M} \smile \mathbf{M}'$. Nous noterons Ω le spectre de $\mathbf{M}^\natural$.

Définition 1. — *Un élément* $x \in H$ *sera dit élément-trace pour* $\mathbf{M}$ *si pour tous* $A, B \in \mathbf{M}$, *on a*

$$(\alpha) \qquad (ABx, x) = (BAx, x).$$

Un projecteur P [14] *sera dit projecteur-trace pour* $\mathbf{M}$, *si pour tous* $A, B \in \mathbf{M}$, *on a*

$$(\beta) \qquad PABP = PBAP.$$

Dans ce dernier cas, le sous-espace $\mathfrak{M}$ *correspondant à* P *est dit sous-espace-trace.*

Remarque 1. — Les deux membres des relations (α) et (β) étant séparément faiblement continus par rapport à A et B, il suffira de vérifier ces relations pour

---

[14] On ne fait pas l'hypothèse $P \in \mathbf{M}$ ni aucune hypothèse analogue.

des opérateurs A, B appartenant à un ensemble faiblement dense dans $\mathbf{M}$. On peut d'autre part remplacer ces relations par les suivantes :

$$(\alpha') \qquad (U^{-1}AUx, x) = (Ax, x) \text{ pour } A \in \mathbf{M} \text{ et } U \in \mathbf{M}_U,$$

$$(\beta') \qquad PU^{-1}AUP = PAP \quad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M} \quad \text{et} \quad U \in \mathbf{M}_U.$$

Remarque 2. — Si $x \in H$ est élément-trace pour $\mathbf{M}$, on a $(Ax, x) = (A^{\natural}x, x)$ pour tout $A \in \mathbf{M}$ ([15]) et inversement.

LEMME 1. — *La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{M}$ soit sous-espace-trace (pour $\mathbf{M}$) est que pour tout $x \in \mathcal{M}$ soit élément-trace (pour $\mathbf{M}$)*

Démonstration. — La condition est nécessaire. Soit en effet $\mathcal{M}$ un sous-espace-trace et $x \in \mathcal{M}$. On a

$$(ABx, x) = (ABPx, Px) = (PABPx, x) = (PBAPx, x) = (BAx, x).$$

L'élément x est donc élément-trace.

La condition est suffisante. Supposons que tout $x \in \mathcal{M}$ soit élément-trace. On a alors pour tout $y \in H$:

$$(PABPy, y) = (ABPy, y) = (BAPy, Py) = (PBAPy, y).$$

Comme H est complexe, cette égalité entraîne $PABP = PBAP$. Le sous-espace $\mathcal{M}$ est donc sous-espace-trace.

Remarque 3. — Pour que $\mathcal{M}$ soit sous-espace-trace, il suffit que $\mathcal{M}$ contienne un ensemble dense dans $\mathcal{M}$, dont les éléments soient éléments-trace.

PROPOSITION 1. — *Si x est élément-trace, le sous-espace $\mathbf{M}^{\natural}(x)$ est un sous-espace-trace.*

Démonstration. — Le sous-espace $\mathbf{M}^{\natural}(x)$ étant engendré par les éléments de la forme Zx pour $Z \in \mathbf{M}^{\natural}$, il suffit de vérifier que si x est élément-trace, il en est de même de Zx pour $Z \in \mathbf{M}^{\natural}$. Or on a

$$(ABZx, Zx) = (Z^*ABZx, x) = (BZZ^*Ax, x) \ ({}^{16}) = (BAZx, Zx) \quad ({}^{17}).$$

Ceci montre que Zx est élément-trace.

DÉFINITION 2. — *Un sous-espace $\mathcal{M}$ est dit sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{M}$ si :*

(i) *$\mathcal{M}$ est un sous-espace-trace pour $\mathbf{M}$.*
(ii) *$\mathcal{M}$ est simple ([18]) et séparateur pour $\mathbf{M}^{\natural}$.*

Si $\mathcal{M}$ est un sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{M}$, le projecteur $P_{\mathcal{M}}$ sur $\mathcal{M}$ sera dit projecteur-$\natural$ pour $\mathbf{M}$.

([15]) [13 a], démonstration du lemme 12.
([16]) Du fait que x est élément-trace.
([17]) Du fait que $Z \in \mathbf{M}^{\natural}$.
([18]) Chapitre I, définition 6. Ceci entraîne en particulier $\mathcal{M}\,\eta\,\mathbf{A}$.

Théorème 1. — *Si* P *est un projecteur-*$\natural$ *pour* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}$ *est de classe finie et pour tout* $A \in \mathbf{M}$, *l'on a* $PAP = A^{\natural}P$. *Cette relation caractérise* $A^{\natural}$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{M} = \Delta_P$ et $A^{\#}$ la restriction de PAP à $\mathcal{M}$. Remarquons tout d'abord que $A^{\#} \in (\mathbf{M}^{\natural})_{\mathcal{M}}$. On a en effet $P, A \in \mathbf{A}$ et par suite $PAP \in \mathbf{A}$ et $A^{\#} \in \mathbf{A}_{\mathcal{M}}$. Or, du fait que $\mathcal{M}$ est simple pour $\mathbf{M}^{\natural}$, l'on a $(\mathbf{M}^{\natural})_{\mathcal{M}} = (\mathbf{M}^{\natural})'_{\mathcal{M}} = \mathbf{A}_{\mathcal{M}}$. Soit alors A^+ l'opérateur de $\mathbf{M}^{\natural}$ tel que l'opérateur induit par A^+ sur $\mathcal{M}$ soit $A^{\#}$. Cet opérateur existe, et est unique puisque $\mathcal{M}$ est séparateur pour $\mathbf{M}^{\natural}$. Nous allons démontrer les propriétés suivantes :

(1) $$\text{Si } A \in \mathbf{M}^{\natural}, \quad \text{on a } A^+ = A,$$

(2) $$(\lambda A)^+ = \lambda A^+,$$

(3) $$(A + B)^+ = A^+ + B^+,$$

(4) $$(AB)^+ = (BA)^+,$$

(5) $$\text{Si } A \in \mathbf{M}_+, \quad \text{on a } A^+ \in \mathbf{M}^{\natural}_+.$$

Les propriétés (1), (2) et (3) découlent de la définition de A^+. La propriété (4) découle du fait que $PABP = PBAP$ pour $A, B \in \mathbf{M}$ c'est-à-dire que $(AB)^{\#} = (BA)^{\#}$. Si d'autre part $A \in \mathbf{M}_+$, PAP est autoadjoint positif, il en est donc de même de $A^{\#}$ et également de A^+.

Les propriétés démontrées permettent d'affirmer que $\mathbf{M}$ est de classe finie et que l'on a $A^{\natural} = A^+$, ce qui démontre le théorème.

Corollaire. — *Si* $\mathcal{M}$ *est un sous-espace-trace pour* $\mathbf{M}$, $\mathcal{M}^{\natural}$ *est un sous-espace fini pour* $\mathbf{M}$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{N}$ un sous-espace simple pour $\mathbf{M}^{\natural}$, contenu dans $\mathcal{M}$ et tel que $\mathcal{M}^{\natural} = \mathcal{N}^{\natural}$. Le sous-espace $\mathcal{N}$ est un sous-espace-$\natural$ pour l'algèbre $\mathbf{M}_{\mathcal{N}^{\natural}}$. Cette $\bigstar$-algèbre est donc de classe finie.

Proposition 2. — *Si* $\mathcal{M}$ *est un sous-espace-*$\natural$ *pour* $\mathbf{M}$, $\mathcal{M}$ *est séparateur pour* $\mathbf{M}$.

Démonstration. — On a $\mathbf{M}'(\mathcal{M}) \supset \mathcal{M}$, d'où $P_{\mathcal{M}} P_{\mathbf{M}'(\mathcal{M})} P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}$ et par suite $P_{\mathbf{M}'(\mathcal{M})} = 1$ ou $\mathbf{M}'(\mathcal{M}) = H$. Le sous-espace $\mathcal{M}$ est donc séparateur pour $\mathbf{M}$.

Corollaire. — *Si* $\mathcal{M}$ *est un sous-espace-*$\natural$ *et si* $\mathbf{M}^{\natural}$ *possède un élément séparateur, il existe un élément* $x \in H$ *tel que* $\mathcal{M} = \mathbf{M}^{\natural}(x)$ *et* x *est séparateur pour* $\mathbf{M}$.

Lemme 2. — *Si* $\mathcal{M}$ *est un sous-espace-*$\natural$ *pour* $\mathbf{M}$ *et si* $\mathbf{M}'$ *est de classe finie,* on a $C(\chi) \geqq 1$.

Démonstration. — On a $P^{\natural}_{\mathbf{M}'(\mathcal{M})} = C(\chi) P^{\natural}_{\mathbf{M}(\mathcal{M})}$ (chap. I, lemme 14), avec $P^{\natural}_{\mathbf{M}'(\mathcal{M})} = 1$ et $P^{\natural}_{\mathbf{M}(\mathcal{M})} \leqq 1$.

Les considérations qui suivent ont pour but d'étudier dans quelles conditions le théorème 1 admet une réciproque.

PROPOSITION 3. — *Si* $\mathbf{M}$ *est de classe finie et d'invariant* $C(\chi) \geqq 1$; *il existe un élément-trace non nul.*

Démonstration. — En raison du théorème 2 de [14] [19], il suffit de démontrer la proposition si $\mathbf{M}'$ est de classe proprement infinie. Soit alors $\mathcal{M}\eta\mathbf{M}'$ un sous-espace fini non réduit à zéro. Adoptons les conventions du chapitre I (p. 6). Soit $C_{\mathcal{M}}(\chi)$ l'invariant de $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ défini sur le spectre Ω' de $\mathbf{M}^{\natural}_{\mathcal{M}}$. On peut toujours supposer $\inf\limits_{\chi\in\Omega'} C_{\mathcal{M}}(\chi) \neq 0$, sinon il suffirait de considérer un ensemble ouvert et fermé contenu dans Ω' tel que $\inf\limits_{\chi\in K} C_{\mathcal{M}}(\chi) \neq 0$ et de remplacer $\mathcal{M}$ par $E_K(\mathcal{M})$. Supposons donc qu'il existe un entier n tel que $nC_{\mathcal{M}}(\chi) \geqq 1$.

On peut construire une partition homogène $\{\mathcal{M}_i\}_{i\leqq i\leqq n}$ avec $\mathcal{M}_i\eta\mathbf{M}'$ et $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$. Supposons en effet les sous-espaces $\mathcal{M}_i$ construits pour $i<j$. Le sous-espace $\bigoplus\limits_{i<j}\mathcal{M}_i$ étant fini, il existe un sous-espace $\mathcal{M}_j \subset H \ominus \bigoplus\limits_{i<j}\mathcal{M}_i$ équivalent à $\mathcal{M}_1$ [20]. Les sous-espaces $\mathcal{M}_i$ ainsi construits forment, pour $i \leqq n$, la partition demandée [21]. Posons $\mathcal{N} = \bigoplus\limits_{1\leqq i\leqq n} \mathcal{M}_i$. Considérons l'invariant $C_{\mathcal{N}}(\chi)$ de $\mathbf{M}_{\mathcal{N}}$. On a en appliquant dans $\mathcal{N}$ la proposition 2 du chapitre I : $C_{\mathcal{M}}(\chi) = C_{\mathcal{N}}(\chi)\frac{1}{n}$, soit $C_{\mathcal{N}}(\chi) = nC_{\mathcal{M}}(\chi)$ et par suite $C_{\mathcal{N}}(\chi) \geqq 1$. Il existe alors dans $\mathcal{N}$ un élément $x \neq 0$, élément-trace pour $\mathbf{M}_{\mathcal{N}}$ donc pour $\mathbf{M}$.

LEMME 3. — *Si* $\mathbf{M}$ *est de classe finie, d'invariant* $C(\chi) \geqq 1$, *tout sous-espace-trace* $\mathcal{N}$ *pour* $\mathbf{M}$, *simple pour* $\mathbf{M}^{\natural}$ *est contenu dans un sous-espace-*$\natural$.

Démonstration. — Considérons la famille Φ de projecteurs-trace P tels que Δ_P soit simple pour $\mathbf{M}^{\natural}$ et contienne $\mathcal{N}$. La famille Φ n'est pas vide et est ordonnée par la relation d'ordre usuelle des projecteurs (relation d'inclusion des sous-espaces correspondants). Soit $\{P_i\}_{i\in I}$ une partie totalement ordonnée de Φ. Soit $P = \sup\limits_{i\in I} P_i$ la borne supérieure des projecteurs P_i dans l'ensemble des projecteurs. Rappelons que le sous-espace $\mathcal{M} = \Delta_P$ est simple. Il est sous-tendu par les sous-espaces $\mathcal{M}_i$ correspondant aux projecteurs P_i. En vertu de la remarque 3, $\mathcal{M}$ est un sous-espace-trace. L'ensemble est donc inductif.

Soit alors P un projecteur maximal de Φ et $\mathcal{M} = \Delta_P$. On a $\mathcal{M} \supset \mathcal{N}$. Montrons que $\mathbf{A}(\mathcal{M}) = H$. En effet, si l'on avait $\mathbf{A}(\mathcal{M}) \neq H$, il existerait $x \in H \ominus \mathbf{A}(\mathcal{M}) \neq 0$, élément-trace pour $\mathbf{M}_{H\ominus\mathbf{A}(\mathcal{M})}$. On vérifie alors immédiatement que le projecteur sur $\mathcal{M} \oplus \mathbf{M}^{\natural}(x)$ appartient à Φ. Le projecteur P ne serait pas un élément maximal de Φ. On a donc $\mathbf{A}(\mathcal{M}) = H$ et $\mathcal{M}$ est un sous-espace-$\natural$.

---

[19] **La démonstration du théorème 2 de [14] n'ayant pas été publiée par son auteur, signalons que ce théorème est une conséquence du théorème 2 ou du corollaire 5.1 de [10].**

[20] [4], lemme 1.8.

[21] **On pourrait utiliser également les résultats plus fins du lemme 24, ou de la proposition 3 du chapitre I.**

Théorème 2. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathbf{M}$ *étant une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée, il existe un sous-espace-*$\natural$ *pour* $\mathbf{M}$ *est que* $\mathbf{M}$ *soit de classe finie et d'invariant* $C(\chi) \geqq 1$.

Démonstration. — La condition est nécessaire d'après le théorème 1 et le lemme 2. Elle est suffisante d'après le lemme 3.

Proposition 4. — *Soit* $U \in \mathbf{M}_U$. *Si* $\mathcal{M}$ *est un sous-espace-trace,* $U(\mathcal{M})$ *est un sous-espace-trace. Si* $\mathcal{M}$ *est un sous-espace-*$\natural$, $U(\mathcal{M})$ *est un sous-espace-*$\natural$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace-trace et P son projecteur. Soit $U \in \mathbf{M}_U$ et P_1 le projecteur sur $U(\mathcal{M})$. On a $P_1 = UPU^{-1}$ et pour tout $A \in \mathbf{M}$:

$$P_1 AP_1 = UPU^{-1} AUPU^{-1} = UPAPU^{-1}.$$

On a par suite pour A, $B \in \mathbf{M}$:

$$P_1 ABP_1 = UPABPU^{-1} = UPBAPU^{-1} = P_1 BAP_1.$$

Le projecteur P_1 est donc un projecteur-trace. Ceci démontre la première partie de la proposition. La deuxième découle du fait que si $\mathbf{M}$ est un sous-espace simple séparateur pour $M^\natural$, il en est de même de $U(\mathcal{M})$ si $U \in \mathbf{A}_U$.

Proposition 5. — *Soit* $U' \in \mathbf{M}'_U$. *Si* $\mathcal{M}$ *est un sous-espace-trace,* $U'(\mathcal{M})$ *est un sous-espace-trace. Si* $\mathcal{M}$ *est un sous-espace-*$\natural$, *il en est de même de* $U'(\mathcal{M})$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{M}$ un sous-espace-trace, P le projecteur sur $\mathcal{M}$, $U' \in \mathbf{M}'_U$ et P_1 le projecteur sur $U'(\mathcal{M})$. On a $P_1 = U'PU'^{-1}$ et par suite pour tout $A \in \mathbf{M}$:

$$P_1 AP_1 = U'PU'^{-1} AU'PU'^{-1} = U'PAPU'^{-1}.$$

Donc pour $A, B \in \mathbf{M}$,

$$P_1 ABP_1 = U'PABPU'^{-1} = U'PBAPU'^{-1} = P_1 BAP_1.$$

Le projecteur P_1 est donc un projecteur-trace, ce qui démontre la première partie de la proposition. La deuxième partie découle de la même remarque que pour la proposition 4.

Par la suite nous supposerons $\mathbf{M}$ de classe finie avec $C(\chi) \geqq 1$.

Lemme 4. — *Si* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{M}_1$ *sont deux sous-espaces-*$\natural$ *et si* $U \in \mathbf{A}_U$ *est tel que* $\mathcal{M}_1 = U(\mathcal{M})$, *il existe* $U' \in \mathbf{M}'_U$ *tel que* $Ux = U'x$ *pour tout* $x \in \mathcal{M}$.

Démonstration. — Par une partition centrale de H, on peut se ramener au cas où $\mathbf{M}^\natural$ possède un élément séparateur. Il existe alors un élément $x \in \mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} = \mathbf{M}^\natural(x)$. A tout élément $\xi = Ax$ avec $A \in \mathbf{M}$, faisons correspondre l'élément $\eta = AUx$. L'opérateur A est unique pour ξ donné (x étant élément séparateur pour $\mathbf{M}$). L'application $\xi \rightarrow \eta$ est univoque et par suite linéaire. Le fait que x et Ux soient éléments-trace permet d'écrire pour A, $B \in \mathbf{M}$:

$$(Ax, Bx) = (B^{*}Ax, x) = ((B^{*}A)^{\natural}x, x) = (U(U(B^{*}A)^{\natural}x, Ux)$$
$$= ((B^{*}A)^{\natural}Ux, Ux) = (B^{*}AUx, Ux) = (AUx, BUx).$$

L'application $\xi \rightarrow \eta$ est donc isométrique. Il existe donc un opérateur partiellement isométrique V prolongeant l'application $\xi \rightarrow \eta$ [avec $\mathcal{D}_V = \mathbf{M}(x)$ et $\Delta_V = \mathbf{M}(Ux)$] c'est-à-dire vérifiant $AUx = VAx$ pour $A \in \mathbf{M}$ et par suite pour A, $B \in \mathbf{M}$:

$$VABx = ABUx = AVBx.$$

ce qui [les éléments Bx pour $B \in \mathbf{M}$ étant denses dans $\mathbf{M}(x)$] montre que $V \in \mathbf{M}'$. Enfin les sous-espaces $\mathbf{M}(x)$ et $\mathbf{M}(Ux)$ étant finis, il existe $U' \in \mathbf{M}'_U$ tel que $U'y = Vy$ pour tout $y \in \mathbf{M}(x)$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 1. — *Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_1$ sont deux sous-espaces-$\natural$, il existe $U' \in \mathbf{M}'_U$ tel que $\mathcal{M}_1 = U'(\mathcal{M})$.*

Démonstration. — On a en effet $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}$ (mod $\mathbf{A}$) (chap. I, remarque 2).

Corollaire 2. — *Si $\mathcal{M}$ est un sous-espace-$\natural$ et si $U \in \mathbf{M}_U$, il existe $U' \in \mathbf{M}'_U$ tel que $Ux = U'x$ pour tout $x \in \mathcal{M}$.*

Démonstration. — Le sous-espace $\mathcal{M}_1 = U(\mathcal{M})$ est un sous-espace-$\natural$. Comme $U \in \mathbf{A}'_U$, il existe $U' \in \mathbf{M}'_U$, tel que $Ux = U'x$ pour tout $x \in \mathcal{M}$.

II. — Cas où $C(\chi) = 1$.

Proposition 6. — *Si $C(\chi) = 1$, tout sous-espace-$\natural$ $\mathcal{M}$ est générateur pour $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$.*

Démonstration. — On a vu que $\mathcal{M}$ est générateur pour $\mathbf{M}'$. Or, on a ($\mathcal{M}$ étant simple pour $\mathbf{M}^{\natural}$). $P^{\natural}_{\mathbf{M}(\mathcal{M})} = P^{\natural}_{\mathbf{M}'(\mathcal{M})} = 1$, ce qui entraîne $\mathbf{M}(\mathcal{M}) = H$.

Proposition 7. — *Si $C(\chi) = 1$ et si $\mathcal{M}$ est un sous-espace-$\natural$, il existe pour tout $U' \in \mathbf{M}'_U$, un opérateur $U \in \mathbf{M}_U$ tel que $Ux = U'x$ pour tout $x \in \mathcal{M}$.*

Démonstration. — Par une partition centrale de H, on se ramènera au cas où $\mathcal{M} = \mathbf{M}^{\natural}(x)$. Posons alors $U'x = Xx$ avec $X \eta \mathbf{M}$ (22), et (X étant fermé) $X = AU$, $U \in \mathbf{M}_U$, $A \eta \mathbf{M}$, $A \geqq 0$, $A = \int_0^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)$ et soit $y = Ux$. Soit $\lambda_1 < 1$. On a

$$\| E(\lambda_1)y \|^2 = (E(\lambda_1)y, y) = (E(\lambda_1)Ux, Ux) = (E(\lambda_1)x, x) \text{ (23)}$$
$$= (E(\lambda)U'x, U'x) = (E(\lambda_1)Ay, Ay) \leqq \lambda_1 \| E(\lambda_1)y \|^2.$$

(22) [10], théorème 2.

(23) Car x est élément-trace.

Donc $E(\lambda_1)y = 0$ et $E(\lambda_1) = 0$. Soit maintenant $\lambda_1 > 1$. Par des calculs analogues on démontre l'inégalité

$$\|(1 - E(\lambda_1))y\|^2 = ((1 - E(\lambda_1))Ay, Ay) \geqq \lambda_1 \|(1 - E(\lambda_1))y\|^2.$$

Donc $(1 - E(\lambda_1))y = 0$ et $E(\lambda_1) = 1$. On en déduit que $A = 1$. Ayant $U'x = Ux$, on a pour tout $Z \in \mathbf{M}^\natural$:

$$U'Zx = ZU'x = ZUx = UZx.$$

L'ensemble des éléments Zx étant dense dans $\mathfrak{M}$, la proposition est démontrée.

Corollaire. — *Si* $\mathfrak{M}$ *et* $\mathfrak{M}_1$ *sont deux sous-espaces-*$\natural$, *il existe* $U \in \mathbf{M}_U$, *tel que* $\mathfrak{M}_1 = U(\mathfrak{M})$.

Jusqu'à présent tous les sous-espaces-$\natural$ considérés étaient des sous-espaces-$\natural$ relativement à $\mathbf{M}$. Or on a la proposition suivante :

Proposition 8. — *Si* $C(\chi) = 1$, *tout sous-espace-*$\natural$ *relativement à* $\mathbf{M}$ *est un sous-espace-*$\natural$ *relativement à* $\mathbf{M}'$ (*et inversement*).

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace-$\natural$ relativement à $\mathbf{M}$. Il suffit de démontrer que tout $x \in \mathfrak{M}$ est élément-trace relativement à $\mathbf{M}'$. Soit $A' \in \mathbf{M}$ et $U' \in \mathbf{M}'_U$. Il existe $U \in \mathbf{M}_U$ tel que $Ux = U'x$. On a alors

$$(U'^{-1}A'U'x, x) = (A'U'x, U'x) = (A'Ux, Ux) = (A'x, x).$$

Corollaire. — *Si* $C(\chi) = 1$, *tout élément-trace* (*resp. tout sous-espace-trace*) *relativement à* $\mathbf{M}$ *est élément-trace* (*resp. sous-espace-trace*) *relativement à* $\mathbf{M}'$.

Démonstration. — Soit x un élément-trace relativement à $\mathbf{M}$. Le sous-espace $\mathbf{M}^\natural(x)$ est un sous-espace-trace pour $\mathbf{M}$, simple pour $\mathbf{M}^\natural$ et par suite contenu dans un sous-espace-$\natural$ $\mathfrak{M}$ pour $\mathbf{M}$. Le sous-espace $\mathfrak{M}$ étant également sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{M}'$, l'élément x est donc élément-trace pour $\mathbf{M}'$. En ce qui concerne les sous-espaces-trace, il suffit d'appliquer le lemme 1.

Théorème 1. — *Si* $C(\chi) = 1$, *pour tout sous-espace-*$\natural$ $\mathfrak{M}$ (*relativement à* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}'$), *il existe un anti-isomorphisme unique* $A \to A'$ *de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}'$ *tel que pour tout* $x \in \mathfrak{M}$, *on ait* $Ax = A'x$.

Démonstration. — D'après le corollaire 2 du lemme 4, il existe pour tout $U \in \mathbf{M}_U$, $U' \in \mathbf{M}'_U$ tel que $U'x = Ux$ pour tout $x \in \mathfrak{M}$. L'hypothèse $C(\chi) = 1$ entraîne que l'opérateur U' est unique (puisque $\mathfrak{M}$ est séparateur pour $\mathbf{M}'$) et qu'inversement il existe pour tout $U' \in \mathbf{M}'_U$, $U \in \mathbf{M}_U$ tel que $Ux = U'x$ pour tout $x \in \mathfrak{M}$. L'application biunivoque $U \to U'$ de $\mathbf{M}_U$ sur $\mathbf{M}'_U$ ainsi définie se prolonge par linéarité en une application $A \to A'$ de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{M}'$ telle que $Ax = A'x$ pour tout $x \in \mathfrak{M}$. Le sous-espace $\mathfrak{M}$ étant séparateur pour $\mathbf{M}$ et pour $\mathbf{M}'$, cette application est biunivoque et par suite linéaire. Montrons que cette application $A \to A'$ est un anti-isomorphisme, c'est-à-dire qu'on a

$$(AB)' = B'A' \quad \text{et} \quad (A^*)' = (A')^*.$$

En effet pour tout $x \in \mathcal{M}$, on a

$$(AB)'x = ABx = AB'x = B'Ax = B'A'x.$$

D'autre part les relations

$$\left(\sum_i \lambda_i U_i\right)^{*\prime} = \left(\sum_i \bar{\lambda}_i U_i^{-1}\right)' = \sum_i \bar{\lambda}_i U_i^{-1\prime} = \sum_i \bar{\lambda}_i U_i'^{*} = \sum_i \bar{\lambda}_i U_i'^{*} = \left(\sum_i \lambda_i U_i'\right)^{*} = \sum (\lambda_i U_i)'^{*}$$

entraînent que pour tout $A \in \mathbf{M}$, on a $(A^*)' = (A')^*$.

Remarque 4. — Supposons que $\mathbf{M}^\natural$ possède un élément séparateur et soit $e \in \mathcal{M}$ un tel élément séparateur. A tout $x = Me$ pour $M \in \mathbf{M}$, faisons correspondre l'élément $Sx = M^*x$. L'application S est biunivoque, semi-linéaire et involutive. On a de plus si $y = Ne$ ($N \in \mathbf{M}$) :

$$(x, y) = (Me, Ne) = (N^*e, M^*e) = (Sy, Sx).$$

L'application S peut donc se prolonger en une involution sur H. Pour tout $A \in \mathbf{M}$, on a $SAS = A'^*$. Vérifions en effet que $SASx = A'^*x$ pour $x = Me$ ($M \in \mathbf{M}$). Il vient

$$SASMe = SAM^*e = MA^*e = MA'^*e = A'^*Me.$$

L'involution échange donc $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$. L'existence d'une telle involution se généralise au cas où $\mathbf{M}^\natural$ ne possède pas d'élément séparateur par une partition centrale de H. On voit donc que si $C(\chi) = 1$, il existe sur H une involution S telle que $\mathbf{M}' = S\mathbf{M}S$.

Proposition 9. — *Si* A *et* A′ *sont deux éléments homologues de* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}'$ *dans un anti-isomorphisme défini par le théorème* 3, *on a* $A^\natural = A'^\natural$.

Démonstration. — On a $Ax = A'x$ pour tout $x \in \mathcal{M}$ d'où l'on tire

$$P_{\mathcal{M}} A P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}} A' P_{\mathcal{M}} \qquad \text{et} \qquad A^\natural = A'^\natural.$$

Proposition 10. — *Si* $A \to A'$ *est l'anti-isomorphisme défini par un sous-espace-*$\natural$ $\mathcal{M}$, *l'anti-isomorphisme défini par un sous-espace-*$\natural$ $\mathcal{M}_1$ *tel que* $\mathcal{M}_1 = U(\mathcal{M}) = U'(\mathcal{M})$ ($U \in \mathbf{M}_U$, $U' \in \mathbf{M}'_U$) *est l'anti-isomorphisme*

$$A' \to (U^{-1}AU)' = U'A'U'^{-1}.$$

Démonstration. — Soit $A \to A''$ l'anti-isomorphisme défini par $\mathcal{M}_1$. On doit avoir $Ax = A''x$ pour tout $x \in \mathcal{M}_1$, c'est-à-dire pour tout $x \in \mathcal{M}$:

$$AUx = A''Ux = UA''x \qquad \text{ou} \qquad U^{-1}AUx = A''x,$$

ce qui prouve que

$$A'' = (U^{-1}AU)' = U'A'U'^{-1}.$$

III. — Traces.

Définition 3. — *Étant donné une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée, on appelle trace* [24] *sur* $\mathbf{M}_+$ *toute application* T *de* $\mathbf{M}_+$ *dans* $[0, \infty]$ *possédant les propriétés suivantes :*

(i) *Si* $A, B \in \mathbf{M}_+$, *on a* $T(A+B) = T(A) + T(B)$;

(ii) *Si* $A \in \mathbf{M}_+$ *et si* λ *est un nombre positif, on a* $T(\lambda A) = \lambda T(A)$;

(iii) *Si* $A \in \mathbf{M}_+$ *et si* $U \in \mathbf{M}_U$, *on a* $T(U^{-1}AU) = T(A)$;

(iv) *Si* $\{A_i\}_{i\in I}$ *est une famille filtrante croissante bornée d'opérateurs* $A_i \in \mathbf{M}_+$, *on a* $T\left(\sup_{i\in I} A_i\right) = \sup_{i\in I} T(A_i)$.

Désignons par $\mathfrak{m}$ l'idéal engendré par les éléments $A \in \mathbf{M}_+$ tels que $T(A) < \infty$. D'après les résultats de Dixmier, on peut prolonger T par linéarité à $\mathfrak{m}$. On a alors $T(AB) = T(BA)$ pour $A \in \mathfrak{m}$ et $B \in \mathbf{M}$. Par abus de notation nous considérerons T comme définie sur $\mathbf{M}_+ \cup \mathfrak{m}$ et nous dirons que T est une trace sur $\mathbf{M}$.

Nous utiliserons les qualificatifs « essentiel » et « fidèle » dans le sens que leur a donné Dixmier dans [7] (définition 5.2). Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace fermé $\eta\mathbf{M}'$, nous appellerons composante de T sur $\mathfrak{M}$ la restriction de T à $\mathbf{M}_{\langle\mathfrak{M}\rangle}$.

Notation. — Nous noterons $\mathbf{M}^2(T)$ l'ensemble des éléments $A \in \mathbf{M}$ tels que $T(A^\star A) < \infty$ (c'est-à-dire l'ensemble des éléments $A \in \mathbf{M}$ tels que $A^\star A \in \mathfrak{m}$).

Proposition 11. — *L'ensemble* $\mathbf{M}^2(T)$ *est un idéal de l'*$\bigstar$*-algèbre* $\mathbf{M}$.

Démonstration. — Si $A, B \in \mathbf{M}^2(T)$ et si λ est un nombre complexe, on a $\lambda A \in \mathbf{M}^2(T)$ et $A + B \in \mathbf{M}^2(T)$ [en vertu de la relation $(A+B)^\star(A+B)^\star \leq 2(A^\star A + B^\star B)$]. Soit $A \in \mathbf{M}^2(T)$ et $B \in \mathbf{M}$. Considérons l'expression

$$|||B|||^2 T(A^\star A) - T(A^\star B^\star BA) = T(|||B|||^2 A^\star A - A^\star B^\star BA) = T(A^\star(|||B|||^2 - B^\star B)A) \geq 0$$
$$[\text{car } A^\star(|||B|||^2 - B^\star B)A \geq 0].$$

On a donc

$$T(A^\star B^\star BA) \leq |||B|||^2 T(A^\star A),$$

ce qui démontre que $\mathbf{M}^2(T)$ est un idéal à gauche de l'algèbre $\mathbf{M}$. L'ensemble $\mathbf{M}^2(T)$ étant autoadjoint [d'après l'égalité $T(A^\star A) = T(AA^\star)$ [25]], $\mathbf{M}^2(T)$ est un idéal de $\mathbf{M}$.

Notons le résultat suivant obtenu incidemment dans la démonstration précédente :

Lemme 5. — *Pour* $A \in \mathbf{M}^2(T)$ *et* $B \in \mathfrak{m}$, *on a* $T(A^\star B^\star BA) \leq |||B|||^2 T(A^\star A)$.

Lemme 6. — *Si* $A, B \in \mathbf{M}^2(T)$, *on a* $BA \in \mathfrak{m}$, $AB \in \mathfrak{m}$ *et* $T(AB) = T(BA)$.

---

[24] Pseudo-trace normale au sens de Dixmier ([17], définition 5.1).

[25] Cette égalité peut se démontrer de la façon suivante : Poser $A = VB$ $V \in \mathbf{M}_{\text{p.i.}}$, $B \in \mathbf{M}_+$ donc $A^\star A = B^2$, $AA^\star = VB^2V^\star$. Si $T(A^\star A) < \infty$, on a $T(B^2) < \infty$ et par suite $T(AA^\star) < \infty$ et $T(AA^\star) = T(VB^2V^\star) = T(B^2V^\star V) = T(A^\star A)$. De même $T(AA^\star) < \infty$ entraîne $T(A^\star A) = T(AA^\star)$.

Démonstration. — L'opérateur BA est combinaison linéaire d'éléments de $\mathfrak{m} \cap \mathbf{M}^2(\mathrm{T})$, en vertu de l'identité

$$\begin{aligned} 4\mathrm{BA} &= (\mathrm{A}+\mathrm{B}^*)^*(\mathrm{A}+\mathrm{B}^*) \\ &\quad -(\mathrm{A}-\mathrm{B})^*(\mathrm{A}-\mathrm{B})+i(\mathrm{A}+i\mathrm{B}^*)^*(\mathrm{A}+i\mathrm{B}^*)-i(\mathrm{A}-i\mathrm{B}^*)^*(\mathrm{A}-i\mathrm{B}^*). \end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{BA} \in \mathfrak{m}$ et de même $\mathrm{AB} \in \mathfrak{m}$. L'égalité précédente entraîne $\mathrm{T}(\mathrm{AB}) = \mathrm{T}(\mathrm{BA})$ en vertu de l'égalité $\mathrm{T}(\mathrm{A}^*\mathrm{A}) = \mathrm{T}(\mathrm{AA}^*)$ pour $\mathrm{A} \in \mathfrak{m}$.

Remarque 5. — Inversement il est facile de vérifier que tout élément de $\mathfrak{m}$ est une combinaison linéaire finie d'opérateurs de la forme AB avec $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{M}^2(\mathrm{T})$.

Nous supposerons désormais $\mathbf{M}$ de classe finie. Nous désignerons par Ω le spectre de $\mathbf{M}^\natural$. Si a est un élément-trace pour $\mathbf{M}$, l'application $\mathrm{A} \to (\mathrm{A}a, a)$ est une trace essentielle finie sur $\mathbf{M}$.

Proposition 12. — *Pour toute trace* T *sur* $\mathbf{M}$, *on a* $\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{T}(\mathrm{A}^\natural)$.

Démonstration. — D'après [7] (théorème 3) il existe une trace T_1 sur $\mathbf{M}^\natural$ telle que $\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{T}_1(\mathrm{A}^\natural)$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_+$. En remplaçant A par $\mathrm{A}^\natural$ il vient $\mathrm{T}(\mathrm{A}^\natural) = \mathrm{T}_1(\mathrm{A}^\natural)$ ce qui entraîne $\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \mathrm{T}(\mathrm{A}^\natural)$ pour $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_+$. Cette relation s'étend par linéarité au cas où $\mathrm{A} \in \mathfrak{m}$ ce qui démontre la proposition.

L'étude d'une trace sur $\mathbf{M}$ se ramène donc à l'étude de sa restriction à $\mathbf{M}^\natural$. L'étude des traces essentielles sur une $\star$-algèbre faiblement fermée commutative (où ce qui est équivalent l'étude des pseudomesures positives normales sur son spectre) est faite dans [5]. On en déduit le résultat suivant :

Lemme 7. — *Soit* T *une trace essentielle sur une* $\star$*-algèbre faiblement fermée de classe finie* $\mathbf{M}$. *Il existe sur le spectre* Ω *de* $\mathbf{M}$ *une famille* $\{d\mu_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ *de mesures normales positives* $d\mu_i$ *dont les supports sont deux à deux disjoints, telle que pour tout* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_+$, *on ait*

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \int \chi(\mathrm{A}^\natural)\, d\mu_i(\chi).$$

On peut encore dire qu'il existe une partition centrale $\{\mathfrak{M}_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ de H telle que les composantes de T sur chaque sous-espace $\mathfrak{M}_i$ soient finies. Pour tout $\mathrm{A} \in \mathbf{M}_+$, on a

$$\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{T}(\mathrm{AP}_{\mathfrak{M}_i}).$$

Proposition 13. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée de classe finie et* T *une trace essentielle sur* $\mathbf{M}$. *Il existe une famille* $\{a_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ *d'éléments* $a_i \in \mathrm{H}$, *tels que*

(i) $$\mathbf{A}(a_i) \cap \mathbf{A}(a_j) = 0 \qquad \textit{pour} \quad i \neq j;$$

(ii) $$\mathrm{T}(\mathrm{A}) = \sum_{i \in \mathrm{I}} (\mathrm{A}^\natural a_i, a_i) \qquad \textit{pour} \quad \mathrm{A} \in \mathbf{M}_+.$$

Si T *est finie, il existe un élément* a *tel que* $\mathrm{T}(\mathrm{A}) = (\mathrm{A}^\natural a, a)$ *pour tout* $\mathrm{A} \in \mathbf{M}$.

Démonstration. — Supposons T finie. Il existe alors une mesure normale positive sur Ω telle que

$$T(A) = \int \chi(A^{\natural})\, d\mu(\chi) \qquad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M}_+.$$

D'après la proposition 1 du chapitre I, il existe $a \in H$ tel que $d\mu_{a,a} = d\mu$. On a donc $T(A) = (A^{\natural} a, a)$, pour $A \in \mathbf{M}_+$, relation que l'on étend par linéarité au cas où $A \in \mathbf{M}$, si T est finie et d'où l'on déduit la première partie de la proposition par une partition centrale de H.

THÉORÈME 4. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée de classe finie, avec* $C(\chi) \geqq 1$. *Pour toute trace essentielle* T *sur* $\mathbf{M}$, *il existe une famille* $\{a_i\}_{i \in I}$ *d'éléments-trace tels que*

$$\text{(i)} \qquad \mathbf{A}(a_i) \cap \mathbf{A}(a_j) = 0 \qquad \textit{pour} \quad i \neq j,$$

$$\text{(ii)} \qquad T(A) = \sum_{i \in I} (A a_i, a_i) \qquad \textit{pour} \quad A \in \mathbf{M}_+.$$

Si T *est finie, il existe un élément-trace* a *tel que* $T(A) = (Aa, a)$ *pour* $A \in \mathbf{M}$.

Démonstration. — Supposons T finie. Posons

$$T(A) = \int \chi(A^{\natural})\, d\mu(\chi) \qquad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M}_+,$$

$d\mu$ étant une mesure normale. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{M}$. Le sous-espace $\mathfrak{M}$ étant séparateur pour $\mathbf{M}^{\natural}$, il existe un élément $a \in \mathfrak{M}$ tel que $d\mu = d\mu_{a,a}$. On a alors

$$T(A) = \int \chi(A^{\natural})\, d\mu_{a,a}(\chi) = (A^{\natural} a, a) = (A a, a).$$

Cette relation s'étend par linéarité au cas où $A \in \mathbf{M}$ (T étant supposée finie) et entraîne la première partie de la proposition si T est quelconque grâce à une partition centrale de H.

PROPOSITION 14. — (1) *Si* $C(\chi) \geqq 1$ *une condition nécessaire et suffisante pour que les éléments-trace* a *et* a_1 *définissent la même trace est qu'il existe* $U' \in \mathbf{M}'_U$ *tel que* $a_1 = U'a$.

(2) *Une condition suffisante est qu'il existe* $U \in \mathbf{M}_U$ *tel que* $a_1 = Ua$.
(3) *Cette dernière condition est également nécessaire si* $C(\chi) = 1$.

Démonstration. — Si $a_1 = U'a$ avec $U' \in \mathbf{M}'_U$ on a

$$(A a_1, a_1) = (AU'a, U'a) = (U'Aa, U'a) = (Aa, a) \qquad \text{pour tout} \quad A \in \mathbf{M}.$$

Inversement si $(Aa, a) = (Aa_1, a_1)$, on a $d\mu_{a,a} = d\mu_{a_1,a_1}$ et l'on peut se ramener au cas où ces mesures ont Ω pour support, c'est-à-dire au cas où a et a_1 sont éléments séparateurs pour $\mathbf{M}^{\natural}$. Il existe alors $V' \in \mathbf{M}'_U$, tel que $V'(\mathbf{M}(a)) = \mathbf{M}(a_1)$

et comme $d\mu_{V'a, V'a} = d\mu_{a_1, a_1}$ il existe (chap. I, lemme 5, corollaire 2) $W \in \mathbf{M}_U^\natural$ tel que $a_1 = W(V'a)$, ce qui donne $a_1 = U'a$ pour $U' = WV'$.

Si $a_1 = Ua$, on a

$$(A a_1, a_1) = (AU a, U a) = (U^{-1} AU a, a) = (A a, a).$$

Les éléments a et a_1 définissent donc la même trace.

Si $C(\chi) = 1$, a et a_1 sont éléments-trace pour $\mathbf{M}'$. Il existe $U' \in \mathbf{M}'_U$ tel que $a_1 = U'a$ donc d'après (2) appliqué à $\mathbf{M}'$, a et a_1 déterminent la même trace pour $\mathbf{M}'$. Il existe donc d'après (1) appliqué à $\mathbf{M}'$, $U \in \mathbf{M}_U$ tel que $a_1 = Ua$.

CHAPITRE III.

ISOMORPHISMES DES ★-ALGÈBRES FAIBLEMENT FERMÉES ET SANS COMPOSANTE PUREMENT INFINIE.

Le but de ce chapitre est de donner certaines propriétés générales des isomorphismes algébriques, de caractériser les isomorphismes spatiaux et d'étendre certains résultats déjà obtenus à des cas plus généraux grâce à des isomorphismes algébriques. Étant donné des ★-algèbres d'opérateurs $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, nous noterons en général H, H_1, H_2 les espaces sur lesquels elles opèrent.

I. — Notions préliminaires.

Nous allons tout d'abord définir l'invariant $C(\chi)$ d'une ★-algèbre faiblement fermée sans composante purement infinie.

Définition 1. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une ★-algèbre faiblement fermée de classe proprement infinie, sans composante purement infinie,* $\mathbf{M}'$ *étant également de classe proprement infinie. Soit* $p(\chi)$ *et* $p'(\chi)$ *les invariants algébriques* ([26]) *de* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}'$. *On appelle invariant de* $\mathbf{M}$ *et l'on note* $C(\chi)$ *le quotient symbolique* $\dfrac{p'(\chi)}{p(\chi)}$, *défini sur un ensemble ouvert dense du spectre* Ω *de* $\mathbf{M}^\natural$.

Le quotient sera effectué pour tout χ *tel que* $p'(\chi) \geqq p(\chi)$. *Pour tout* χ *tel que* $p(\chi) = p'(\chi)$, *on posera* $C(\chi) = 1$. *Pour tout* χ *tel que* $p(\chi) > p'(\chi)$, *on aura* $C(\chi) = p(\chi)$.

Remarque 1. — Soit φ un isomorphisme d'une ★-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$ sur une ★-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}_1$. Supposons $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}'_1$ de classe proprement infinie. Nous pourrons comparer les invariants $C(\chi)$ et $C_1(\chi)$ de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$ (après identification des spectres de $\mathbf{M}^\natural$ et $\mathbf{M}_1^\natural$). Nous écrirons $\bar{C}(\chi) = C_1(\chi)$. $C(\chi) \leqq C_1(\chi)$ si ces relations sont vérifiées sur un ensemble ouvert dense de Ω.

([26]) Chapitre I, définition 8.

Si $p'(\chi)$ et $p'_1(\chi)$ sont les invariants algébriques de $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}'_1$, $C(\chi) \leq C_1(\chi)$ sera équivalent à $p'(\chi) \leq p'_1(\chi)$.

Définition 2. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée de classe proprement infinie,* $\mathbf{M}'$ *étant de classe finie. L'invariant* $C(\chi)$ *de* $\mathbf{M}$ *sera par définition égal à zéro sur tout* Ω.

Définition 3. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée sans composante purement infinie. Soit* H_f, H'_i, H'_f *les sous-espaces fermés* $\eta\mathbf{M}^\natural$ *définis de la façon suivante* ($H = H_f \oplus H'_i \oplus H'_f$) :

(i) H_f *est fini pour* $\mathbf{M}$.
(ii) $H'_i \oplus H'_f$ *est proprement infini pour* $\mathbf{M}$.
(iii) H'_i *est proprement infini pour* $\mathbf{M}'$.
(iv) H'_f *est fini pour* $\mathbf{M}'$.

Soit K_f, K'_i, K'_f *les ensembles compacts ouverts de* Ω *associés à* H_f, H'_i *et* H'_f. *L'invariant* $C(\chi)$ *de* $\mathbf{M}$ *sera défini de la façon suivante : Sur* K_f *(resp.* K'_i, K'_f*)* $C(\chi)$ *coïncide avec l'invariant de* $\mathbf{M}_{H_f}$ *(resp.* $\mathbf{M}_{H'_i}$, $\mathbf{M}_{H'_f}$*).*

Remarque 2. — La remarque 1 s'appliquera également dans le cas général où $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$ sont deux $\star$-algèbres faiblement fermées quelconques, sans composante purement infinie.

Remarque 3. — Soit $\mathbf{M}$ une $\star$-algèbre faiblement fermée sans composante purement infinie et $\mathfrak{M}$ un sous-espace $\eta\mathbf{M}'$. Nous continuerons à noter $C_{\mathfrak{M}}(\chi)$ l'invariant de $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$ défini sur le spectre de $\mathbf{M}^\natural_{\mathfrak{M}}$.

Définition 4. — *Soit* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ *trois* $\star$*-algèbres faiblement fermées. Un homomorphisme* φ_1 *de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_1$ *est dit équivalent à un homomorphisme* φ_2 *de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_2$, *s'il existe un isomorphisme spatial* φ_U *de* $\mathbf{M}_1$ *sur* $\mathbf{M}_2$ *tel que* $\varphi_2 = \varphi_U \circ \varphi_1$.

Remarque 4. — Deux homomorphismes équivalents ont même noyau.

Lemme 1. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée et* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *deux sous-espaces* $\eta\mathbf{M}'$. *La condition nécessaire et suffisante pour que les homomorphismes* $\varphi_{\mathfrak{M}}$ *et* $\varphi_{\mathfrak{N}}$ [27] *soient équivalents est que* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ (mod $\mathbf{M}'$).

Démonstration. — Supposons $\varphi_{\mathfrak{M}}$ et $\varphi_{\mathfrak{N}}$ équivalents. Ils ont même noyau. On peut donc supposer pour simplifier que $\mathfrak{M}^\natural = \mathfrak{N}^\natural = H$. Soit W un isomorphisme de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{N}$ tel que $\varphi_{\mathfrak{N}} = \varphi_W \circ \varphi_{\mathfrak{M}}$. On a alors pour tout $A \in \mathbf{M}$, $A_{\mathfrak{N}} = WA_{\mathfrak{M}}W^{-1}$ c'est-à-dire pour tout $x \in \mathfrak{M}$, $A_{\mathfrak{N}}Wx = WA_{\mathfrak{M}}x$ ou encore $AWx = WAx$. Soit V l'opérateur partiellement isométrique défini par $Vx = Wx$

(27) *Cf.* Notations et Définitions.

pour $x \in \mathcal{M}$ et $Vx = 0$ pour $x \in H \ominus \mathcal{M}$. On a $AVx = VAx$ pour tout $x \in \mathcal{M}$ et les deux membres étant nuls pour $x \in H \ominus \mathcal{M}$, l'égalité est vraie pour tout $x \in H$. On a donc $V \in \mathbf{M}'$ et par suite $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$.

Inversement supposons $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$. Soit $V \in \mathbf{M}'_{p.\mathrm{I}}$ tel que $\mathcal{O}_V = \mathcal{M}$ et $\Delta_V = \mathcal{N}$. On a pour tout $A \in \mathbf{M}$, $AV = VA$ et par suite pour tout $x \in \mathcal{M}$, $A_{\mathcal{N}} Vx = VA_{\mathcal{M}} x$. Soit W la restriction de V à $\mathcal{M}$, W est un isomorphisme de $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{N}$ et l'on a $A_{\mathcal{N}} W = WA_{\mathcal{N}}$ c'est-à-dire $A_{\mathcal{N}} = WA_{\mathcal{M}} W^{-1}$ ou encore $\varphi_{\mathcal{N}} = \varphi_W \circ \varphi_{\mathcal{M}}$. Les homomorphismes $\varphi_{\mathcal{M}}$ et $\varphi_{\mathcal{N}}$ sont donc équivalents.

Lemme 2. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée sans composante purement infinie,* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{N}$ *deux sous-espaces fermés* $\eta\,\mathbf{M}'$ *tels que* $\mathcal{M}^\natural = \mathcal{N}^\natural$, $C_{\mathcal{M}}(\chi)$ *et* $C_{\mathcal{N}}(\chi)$ *les invariants de* $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ *et* $\mathbf{M}_{\mathcal{N}}$ *(définis sur le spectre de* $\mathbf{M}^\natural_{\mathcal{M}}$*). Si* $C_{\mathcal{M}}(\chi) \neq 0$ *sur un ensemble (ouvert) dense de* Ω [28], *la condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ (resp. $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$) *est que* $C_{\mathcal{M}}(\chi) \leq C_{\mathcal{N}}(\chi)$ [*resp.* $C_{\mathcal{M}}(\chi) = C_{\mathcal{N}}(\chi)$].

Démonstration. — La relation $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$ entraîne que les isomorphismes $\varphi_{\mathcal{M}}$ et $\varphi_{\mathcal{N}}$ sont équivalents et par suite que $C_{\mathcal{M}}(\chi) = C_{\mathcal{N}}(\chi)$.

Supposons maintenant $C_{\mathcal{M}}(\chi) \leq C_{\mathcal{N}}(\chi)$. Nous examinerons différents cas auxquels on pourra se ramener par une partition centrale. On pourra supposer de plus $\mathcal{M}^\natural = \mathcal{N}^\natural = H$.

(α) $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont finis. Dans ce cas $\mathbf{M}$ doit être de classe finie [sinon on aurait $C_{\mathcal{N}}(\chi) = 0$]. Le sous-espace $\mathcal{L} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ est fini. Introduisons l'application $\natural$ canonique dans $\mathbf{M}'_{\mathcal{L}}$. D'après la proposition 2 (chap. I), on a

$$C_{\mathcal{M}}(\chi) = \chi\left(P^\natural_{\mathcal{M}}\right) C_{\mathcal{L}}(\chi) \qquad \text{et} \qquad C_{\mathcal{N}}(\chi) = \chi\left(P^\natural_{\mathcal{N}}\right) C_{\mathcal{L}}(\chi).$$

Par suite on a $P^\natural_{\mathcal{M}} \leq P^\natural_{\mathcal{N}}$ ce qui entraîne $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ $(\mathrm{mod}\, \mathbf{M}'_{\mathcal{L}})$ et par suite $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$ $(\mathrm{mod}\, \mathbf{M}')$.

(β) $\mathcal{M}$ est fini et $\mathcal{N}$ est proprement infini. On a alors immédiatement $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

(γ) $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont proprement infinis. Dans ce cas $\mathbf{M}'$ est de classe proprement infinie. Par une partition centrale de H, on se ramènera au cas où les invariants algébriques de $\mathbf{M}'_{\mathcal{M}}$ et $\mathbf{M}'_{\mathcal{N}}$ sont égaux respectivement à deux cardinaux α et β. Soit alors $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ une partition homogène de $\mathcal{M}$ en sous-espaces $\mathcal{M}_i \eta\, \mathbf{M}'_{\mathcal{M}}$ finis (I ayant pour puissance α), c'est-à-dire une partition homogène de $\mathcal{M}$ en sous-espaces $\mathcal{M}_i \eta\, \mathbf{M}'$ finis. Soit $i_0 \in \mathrm{I}$. Il existe $V \in \mathbf{M}'$ tel que $\mathcal{O}_V = \mathcal{M}_{i_0}$ et $\Delta_V \subset \mathcal{N}$. On a $\Delta_V \eta\, \mathbf{M}'_{\mathcal{M}}$. Soit $\{\mathcal{N}_j\}_{j \in \mathrm{J}}$ une partition homogène de $\mathcal{N}$ en sous-espaces $\mathcal{N}_j \eta\, \mathbf{M}'_{\mathcal{N}}$ finis dont Δ_V est élément (J a pour puissance β). Soit $i \to j_i$ une application de I dans J. On a $\mathcal{M}_i \sim \mathcal{M}_{i_0} \sim \Delta_V \sim \mathcal{N}_{j_i}$ et par suite $\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{M}_i \sim \bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{N}_{j_i}$, ce qui entraîne $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$.

Par suite $C_{\mathcal{M}}(\chi) \leq C_{\mathcal{N}}(\chi)$ entraîne $\mathcal{M} \prec \mathcal{N}$. L'énoncé du lemme se déduit des résultats démontrés par les considérations habituelles.

---

[28] Cette hypothèse exclut le cas où $\mathbf{M}$ serait de classe proprement infinie et $\mathcal{M}$ fini, cas où le lemme est faux.

Définition 5. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée sans composante purement infinie. Un sous-espace* $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbf{M}'$, $\neq 0$ *sera dit normal si* $C_{\mathfrak{M}}(\chi) = 1$.

Remarque 5. — Un sous-espace normal $\mathfrak{M}\,(\eta\,\mathbf{M}')$ est fini (resp. infini) suivant que $\mathbf{M}$ est de classe finie (resp. de classe proprement infinie).

Remarque 6. — Soit $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ une famille de sous-espaces normaux tels que $\mathfrak{M}_i^\natural \cap \mathfrak{M}_j^\natural = 0$ pour $i \neq j$. Le sous-espace $\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ est normal.

Remarque 7. — Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace normal et $\mathfrak{N}$ un sous-espace $\eta\,\mathfrak{M}^\natural$. Le sous-espace $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ est normal s'il est $\neq 0$.

Lemme 3. — *Supposons* $\mathbf{M}$ *de classe finie. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-espace* $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbf{M}'$ *soit normal est qu'il existe un sous-espace-trace* $\mathfrak{N}$ *pour* $\mathbf{M}$, $\neq 0$ *simple pour* $\mathbf{M}^\natural$ *et tel que* $\mathfrak{M} = \mathbf{M}(\mathfrak{N})$.

Démonstration. — Considérons un sous-espace $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbf{M}'$, normal. Soit $\mathfrak{N}$ un sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$ (donc contenu dans $\mathfrak{M}$). Le sous-espace $\mathfrak{N}$ est un sous-espace-trace pour $\mathbf{M}$, simple pour $\mathbf{M}^\natural$ et l'on a $\mathfrak{M} = \mathbf{M}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N}) = \mathbf{M}(\mathfrak{N})$.

Inversement supposons $\mathfrak{M} = \mathbf{M}(\mathfrak{N})$ où $\mathfrak{N}$ est un sous-espace-trace pour $\mathbf{M}$, $\neq 0$, simple pour $\mathbf{M}^\natural$. On a $\mathfrak{M} = \mathbf{M}_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{N})$. Comme $\mathfrak{N}$ est également sous-espace-trace pour $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$ et est simple pour $\mathbf{M}^\natural_{\mathfrak{M}}$, c'est un sous-espace-$\natural$ pour $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$ et l'on a par suite $C_{\mathfrak{M}}(\chi) = 1$.

Corollaire. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée de classe finie. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des sous-espaces* $\eta\,\mathbf{M}'$, *normaux et séparateurs pour* $\mathbf{M}$ *est que* $C(\chi) \geqq 1$.

Le lemme 2 permet d'énoncer immédiatement la propriété suivante :

Lemme 4. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée sans composante purement infinie,* $\mathfrak{M}$ *un sous-espace* $\eta\,\mathbf{M}'$ *normal et* $\mathfrak{N}$ *un sous-espace* $\eta\,\mathbf{M}'$ *tel que* $\mathfrak{N}^\natural = \mathfrak{M}^\natural$. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\mathfrak{N}$ *soit normal est que* $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$ (mod $\mathbf{M}'$).

Proposition 1. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée sans composante purement infinie. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des sous-espaces normaux séparateurs pour* $\mathbf{M}$ *est que* $C(\chi) \geqq 1$.

Démonstration. — Par une partition centrale, on peut séparer le cas ou $\mathbf{M}$ est de classe finie et le cas où $\mathbf{M}$ est de classe proprement infinie. Dans le premier cas la proposition a déjà été énoncée (corollaire du lemme 3). Si $\mathbf{M}$ est de classe proprement infinie et si $\mathfrak{M}$ est un sous-espace normal, $\mathfrak{M}$ est proprement infini pour $\mathbf{M}'$. Par suite $\mathbf{M}'$ est de classe proprement infinie. Soit $C(\chi)$ et $C_{\mathfrak{M}}(\chi)$ les invariants de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$. D'après le lemme 2, on a alors $C_{\mathfrak{M}}(\chi) \leqq C(\chi)$, c'est-à-dire $C(\chi) \geqq 1$. Inversement supposons $\mathbf{M}$ de classe proprement infinie et $C(\chi) \geqq 1$.

Par une partition centrale, on pourra se ramener au cas où $p(\chi)=\alpha$, $p'(\chi)=\beta\geqq\alpha$, $C(\chi)=\beta$. Soit $\{\mathcal{N}_j\}_{j\in J}$ une partition de H en sous-espaces $\mathcal{N}_j\eta\mathbf{M}'$ finis, J ayant pour puissance β. Soit I un sous-ensemble de J de puissance α. Le sous-espace $\bigoplus_{j\in I}\mathcal{N}_j$ est normal.

PROPOSITION 2. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée sans composante purement infinie. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une partition* $\{\mathcal{N}_j\}_{j\in J}$ *de* H *en sous-espaces* $\mathcal{N}_j\eta\mathbf{M}'$ *normaux est que* $C(\chi)=\beta$, β *étant la puissance de* J (*finie ou transfinie*).

Démonstration. — Par une partition centrale de H, on pourra séparer le cas où $\mathbf{M}$ est de classe finie et le cas où $\mathbf{M}$ est de classe proprement infinie. Supposons $\mathbf{M}$ de classe finie. Si $C(\chi)=\beta$, β étant fini et entier, il existe un sous-espace $\mathcal{N}\eta\mathbf{M}'$ normal. D'après la proposition 2 (chap. I), on a $P^{\natural}_{\mathcal{N}}=\frac{1}{\beta}\cdot$ D'après le lemme 15 (chap. I), il existe une partition homogène $\{\mathcal{N}_i\}_{1\leqq i\leqq\beta}$ de H, d'ordre β dont $\mathcal{N}$ est élément et les sous-espaces $\mathcal{N}_i$ sont normaux. Si $C(\chi)=\beta$, β étant transfini, le lemme 24 (chap. I) permet de conclure.

Supposons maintenant $\mathbf{M}'$ de classe proprement infinie. Par une partition centrale, on pourra se ramener au cas où l'invariant algébrique $p(\chi)$ de $\mathbf{M}$ est égal à α ($\leqq\beta$). Soit $\{\mathcal{M}_k\}_{k\in K}$ une partition de H en sous-espaces $\eta\mathbf{M}'$, finis, K ayant pour puissance β. Soit $\{K_j\}_{j\in J}$ une partition de K en sous-ensembles K_j, de puissance α, J ayant pour puissance β. Posons $\mathcal{N}_j=\bigoplus_{k\in K_j}\mathcal{M}_k$. Les sous-espaces $\mathcal{N}_j$ sont normaux et la partition $\{\mathcal{N}_j\}_{j\in J}$ est la partition demandée.

Nous allons rappeler un procédé général permettant de construire des $\star$-algèbres faiblement fermées isomorphes algébriquement à une $\star$-algèbre faiblement fermée donnée $\mathbf{M}$.

DÉFINITION 6. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée d'opérateurs dans* H. *Soit* α *un cardinal* (*fini ou transfini*), I *un ensemble d'indices de puissance* α, $\{\mathcal{H}_i\}_{i\in I}$ *une famille d'espaces hilbertiens*, U_i *des isomorphismes de* H *sur* $\mathcal{H}_i$ *et* $H^{(\alpha)}=\bigoplus_{i\in}\mathcal{H}_i$. *Pour tout* $A\in\mathbf{M}$ *considérons l'opérateur* $\tilde{A}$ *opérant dans* $H^{(\alpha)}$ *réduit par les sous-espaces* $\mathcal{H}_i$ *et induisant sur* $\mathcal{H}_i$ *l'opérateur* $U_iAU_i^{-1}$. *Les opérateurs* $\tilde{A}$ *forment une* $\star$*-algèbre* $\mathbf{M}^{(\alpha)}$ *et l'application* $A\to\tilde{A}$ *est un isomorphisme algébrique de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}^{(\alpha)}$ *appelé ampliation d'ordre* α *et noté* $\mathfrak{I}^{(\alpha)}$.

Il est immédiat de vérifier que $\mathfrak{I}^{(\alpha)}$ est défini à une équivalence près par la donnée de $\mathbf{M}$ et de α. On pourra de plus identifier H à l'un des espaces $\mathcal{H}_i$.

LEMME 5. — *Les notations étant celles de la définition* 6, *les relations entre* $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M}^{(\alpha)}$ *et* $(\mathbf{M}^{(\alpha)})'$ *sont les suivantes :*

(i) *Si* $\mathbf{M}'$ *est de classe proprement infinie sans composante purement infinie*, *il en est de même de* $(\mathbf{M}^{(\alpha)})'$. *Si* $p(\chi)$ *est l'invariant algébrique de* $\mathbf{M}'$, *l'invariant algébrique de* $(\mathbf{M}^{(\alpha)})'$ *est* $p'(\chi) = \alpha p(\chi)$.

(ii) *Si* $\mathbf{M}'$ *est de classe finie et* α *fini*, $(\mathbf{M}^{(\alpha)})'$ *est de classe finie. Si* α *est transfini*, $(\mathbf{M}^{(\alpha)})'$ *est de classe proprement infinie sans composante purement infinie et a pour invariant algébrique* α.

(iii) *Si* $\mathbf{M}$ *a pour invariant* $C(\chi) \neq 0$, *et si* $\mathbf{M}^{(\alpha)}$ *a pour invariant* $C_1(\chi)$ *on a* $C_1(\chi) = \alpha C(\chi)$ ([29]) (*sur un ensemble ouvert partout dense de* Ω).

(iv) *Si* $\mathbf{M}$ *est de classe proprement infinie et* $\mathbf{M}'$ *de classe finie, l'invariant de* $\mathbf{M}^{(\alpha)}$ *est zéro, si* α *est fini et* $\frac{\alpha}{p(\chi)}$, *si* α *est transfini* [$p(\chi)$ *désigne l'invariant algébrique de* $\mathbf{M}$].

Démonstration. — Remarquons que, dans tous les cas, $(\mathbf{M}^{(\alpha)})'$ est sans composante purement infinie du moment que $\mathbf{M}^{(\alpha)}$ c'est-à-dire $\mathbf{M}$ est sans composante purement infinie. Pour démontrer (i), nous pouvons nous ramener au cas où H est uniforme d'ordre β par rapport à $\mathbf{M}'$ [$p(\chi) = \beta$]. Soit $\{\mathfrak{M}_j\}_{j\in J}$ une partition homogène de H en sous-espaces $\mathfrak{M}_j \eta \mathbf{M}'$ finis. Posons $\mathfrak{M}_{i,j} = U_i(\mathfrak{M}_j)$. La famille $\{\mathfrak{M}_{i,j}\}_{i\in I, j\in J}$ forme une partition homogène d'ordre $\alpha\beta$ de $H^{(\alpha)}$ en sous-espaces $\mathfrak{M}_{i,j} \eta (\mathbf{M}^{(\alpha)})'$ finis. L'espace $H^{(\alpha)}$ est donc uniforme d'ordre $\alpha\beta$ par rapport à $(\mathbf{M}^{(\alpha)})'$.

Pour démontrer (ii), il suffit de remarquer que $\mathcal{H}_i$ est un sous-espace $\eta(\mathbf{M}^{(\alpha)})$ fini, ce qui entraîne que $(\mathbf{M}^{(\alpha)})'$ est de classe finie si α est fini et a pour invariant algébrique α si α est transfini.

La propriété (iii) découle immédiatement de (i) et (ii) sauf dans le cas où $\mathbf{M}'$ est de classe finie et où α est fini. Dans ce cas la proposition 2 (chap. I) permet de conclure.

Enfin la propriété (iv) découle immédiatement de (i) et (ii).

Remarque 8. — D'après [21], l'isomorphisme $\mathfrak{I}^{(\alpha)}$ est ultrafortement continu. Il est de plus faiblement et fortement continu si α est fini.

THÉORÈME 1. — (i) *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$-*algèbre faiblement fermée de classe finie de type* II ([30]) *et* $F(\chi)$ *une fonction continue sur* Ω *à valeurs dans* $[0, \infty]$, *différente de zéro sur un ensemble dense de* Ω. *Il existe une* $\star$-*algèbre faiblement fermée* $\mathbf{M}_1$ *et un isomorphisme de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_1$ *tels que* $\mathbf{M}_1$ *ait pour invariant* $F(\chi)$.

(ii) *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$-*algèbre faiblement fermée de classe finie et* α *un cardinal. Il existe une* $\star$-*algèbre* $\mathbf{M}_1$ *algébriquement isomorphe à* $\mathbf{M}$ *et dont l'invariant* $C_1(\chi)$ *est égal à* α.

(iii) *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$-*algèbre faiblement fermée de classe proprement infinie. Il existe une* $\star$-*algèbre faiblement fermée* $\mathbf{M}_1$ *algébriquement isomorphe à* $\mathbf{M}$ *ayant pour invariant zéro.*

([29]) Nous posons $\lambda\alpha = \alpha$ pour α transfini et λ fini, $\neq 0$.

([30]) *cf.* la définition du chapitre I (§ 3) à la suite du lemme 7.

(iv) *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée de classe proprement infinie d'invariant algébrique* $p(\chi)$, *et* α *un cardinal transfini. Il existe une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée et un isomorphisme de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_1$ *tels que* $\mathbf{M}_1$ *ait pour invariant* $C_1(\chi) = \frac{\alpha}{p(\chi)}$.

Démonstration. — Pour (i) on pourra se ramener au cas où $\mathbf{M}'$ est de classe finie (en remplaçant éventuellement $\mathbf{M}$ par $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M}$ étant un sous-espace $\eta\mathbf{M}'$ fini et séparateur pour $\mathbf{M}$) puis par une partition centrale au cas où $\sup\limits_{\chi \in \Omega} \frac{F(\chi)}{C(\chi)} < \infty$. Par une ampliation d'ordre fini, on pourra alors se ramener au cas où $F(\chi) \leqq C(\chi)$, $\mathbf{M}'$ étant encore de classe finie. D'après la proposition 2 (chap. I), on a alors à déterminer un sous-espace $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}'$ tel que $P^{\natural}_{\mathfrak{M}} = \frac{F(\chi)}{C(\chi)}$. Ce qui est possible si $\mathbf{M}$ est de type II d'après le lemme 17 (chap. I). Ceci inclut (ii) avec α fini.

Pour (ii) avec α transfini, on pourra se ramener au cas où $\mathbf{M}'$ est de classe finie. Soit $\mathfrak{J}^{(\alpha)}$ l'ampliation d'ordre α. Comme $\mathbf{M}^{(\alpha)}$ a pour invariant $\alpha C(\chi)$, le théorème est démontré.

Passons à (iii). Il suffira de choisir un sous-espace $\mathfrak{M}\eta\mathbf{M}'$ fini et essentiel pour $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$ satisfera à la condition ($\mathbf{M}'_{\mathfrak{M}}$ sera de classe finie).

Pour (iv), on pourra se ramener au cas où $\mathbf{M}'$ est de classe finie [d'après (iii)]. Si $\mathfrak{J}^{(\alpha)}$ est l'ampliation d'ordre α. $\mathbf{M}^{(\alpha)}$ a pour invariant $\frac{\alpha}{p(\chi)}$. Le théorème est donc démontré dans tous les cas.

II. — Forme générale des traces. Applications.

Théorème 2. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée et* T *une trace essentielle sur* $\mathbf{M}$. *Il existe une famille* $\{e_i\}_{i\in I}$ *d'éléments de* H *telle que pour tout* $A \in \mathbf{M}_+$ *on ait*

$$T(A) = \sum_{i \in I} (Ae_i, e_i).$$

La famille $\{e_i\}_{i\in I}$ *peut être choisie telle que les sous-espaces* $\mathbf{M}'(e_i)$ *soient deux à deux orthogonaux.*

Si $C(\chi) = 1$ *et si* T *est fidèle, la famille* $\{e_i\}_{i\in I}$ *peut être choisie telle que*

$$\mathbf{M}'(e_i) \cap \mathbf{M}'(e_j) = \mathbf{M}(e_i) \cap \mathbf{M}(e_j) = 0 \quad \text{pour } i \neq j,$$
$$\bigoplus_{i \in I} \mathbf{M}'(e_i) = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{M}(e_i) = H.$$

Démonstration. — La première partie du théorème a été démontrée si $\mathbf{M}$ est de classe finie et si $C(\chi) \geqq 1$. Si $C(\chi) \leqq 1$, on peut effectuer une partition de H en sous-espaces $\mathfrak{M}_i\eta\mathbf{M}$ tels que $C_{\mathfrak{M}_i}(\chi) \geqq 1$ [on effectuera d'abord une partition centrale de façon à se ramener au cas où $\inf\limits_{\chi \in \Omega} C(\chi) > 0$]. Une partition homo-

([31]) On peut naturellement combiner les différents énoncés grâce à des partitions centrales.

gène $\{\mathcal{M}_i\}_{1\leq i\leq n}$ de H, d'ordre n permet alors de réaliser la condition indiquée si $\frac{1}{n} \leq \inf_{\chi\in\Omega} C(\chi)$. On aura en effet d'après la proposition 2 du chapitre I appliquée à $\mathbf{M}'$,

$$\frac{1}{C_{\mathcal{M}_i}(\chi)} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{C(\chi)}, \qquad \text{soit} \quad C_{\mathcal{M}_i}(\chi) = n\, C(\chi).$$

Donc si $\mathbf{M}$ est de classe finie il existe une partition $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ de H $(\mathcal{M}_i \eta \mathbf{M})$ telle que $C_{\mathcal{M}_i}(\chi) \geq 1$.

Dans le cas général où aucune hypothèse n'est faite sur $\mathbf{M}$ on pourra toujours supposer $\mathbf{M}$ sans composante purement infinie, le théorème étant trivial si $\mathbf{M}$ est de classe purement infinie (toute trace essentielle est alors identiquement nulle). On peut alors construire une partition $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ de $H(\mathcal{M}_i \eta \mathbf{M})$ telle que les sous-espaces $\mathcal{M}_i$ soient finis et telle que $C_{\mathcal{M}_i}(\chi) \geq 1$. En effet, on peut construire une partition $\{\mathcal{N}_j\}_{j\in J}$ telle que les sous-espaces $\mathcal{N}_j$ soient finis. Il suffit d'appliquer alors à chaque sous-espace $\mathcal{N}_j$ les remarques faites précédemment dans le cas où $\mathbf{M}$ est de classe finie.

La trace T définit canoniquement sur $\mathbf{M}_{\mathcal{M}_i}$ une trace T_i par la formule

$$T_i(A_{\mathcal{M}_i}) = T(P_{\mathcal{M}_i} A P_{\mathcal{M}_i}) \qquad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M}_+.$$

Il existe alors dans $\mathcal{M}_i$ une famille $\{e_{i,j}\}_{j\in J_i}$ d'éléments telle que

$$T_i(A_{\mathcal{M}_i}) = \sum_{j\in J_i} (A_{\mathcal{M}_i} e_{i,j},\, e_{i,j}) \qquad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M}_+,$$

c'est-à-dire

$$T(P_{\mathcal{M}_i} A P_{\mathcal{M}_i}) = \sum_{j\in J_i} (A e_{i,j},\, e_{i,j}).$$

Ceci entraine ([32])

$$T(A) = \sum_{i\in I,\, j\in J_i} (A\, e_{i,j},\, e_{i,j}).$$

Comme on a

$$\mathbf{M}'_{\mathcal{M}_i}(e_{i,j'}) \cap \mathbf{M}'_{\mathcal{M}_i}(e_{i,j}) = \mathbf{M}'(e_{i,j}) \cap \mathbf{M}'(e_{i,j'}) = 0 \qquad \text{pour} \quad j \neq j'$$

et de plus $\mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_{i'} = 0$ pour $i \neq i'$, on a bien

$$\mathbf{M}'(e_{i,j}) \cap \mathbf{M}'(e_{i',j'}) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \neq i' \quad \text{ou} \quad j \neq j'.$$

Il nous reste à étudier le cas spécial où $C(\chi) = 1$ et où T est fidèle. La propriété ayant été démontrée au chapitre II dans le cas où $\mathbf{M}$ est de classe finie [en posant $\mathbf{A} = \mathbf{M} \smile \mathbf{M}'$ on a alors $\mathbf{A}(e_i) = \mathbf{M}(e_i) = \mathbf{M}'(e_i)$] on se ramènera par une partition centrale au cas où $\mathbf{M}$ est de classe proprement infinie et par une nouvelle partition centrale au cas où les invariants algébriques de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ sont égaux à un même cardinal α. Soit $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ une partition homogène en sous-espaces

---

([32]) [8], théorème 2'.

$\mathfrak{M}_i \eta \mathbf{M}$ finis. La trace T définit canoniquement sur l'$\bigstar$-algèbre de classe finie $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}_i}$ une trace T_i par la formule

$$T_i(A_{\mathfrak{M}_i}) = T(P_{\mathfrak{M}_i} A P_{\mathfrak{M}_i}) \quad \text{pour} \quad A \in \mathbf{M}_+.$$

On pourra par une partition centrale se ramener au cas où cette trace est finie pour un indice particulier i_0. Ce qui entraînera que T_i est finie pour tout i. Il existe alors une partition homogène $\{\mathfrak{N}_{i_0,j}\}_{j\in I}$ de $\mathfrak{M}_{i_0}$ en sous-espaces $\mathfrak{N}_{i_0,j}\eta\mathbf{M}'_{\mathfrak{M}_{i_0}}$ normaux et un élément $e_{i_0} \in \mathfrak{N}_{i_0,i_0}$ tel que pour tout $A \in \mathbf{M}$, on ait

$$T_{i_0}(A_{\mathfrak{M}_{i_0}}) = (A_{\mathfrak{M}_{i_0}} e_{i_0}, e_{i_0}) = (A e_{i_0}, e_{i_0}).$$

On a

$$\mathbf{M}'(e_{i_0}) = \mathfrak{M}_{i_0} \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_{\mathfrak{M}_{i_0}}(e_{i_0}) = \mathfrak{N}_{i_0,i_0}.$$

Soit pour tout $i \in I$, $U_i \in \mathbf{M}_U$ tel que $U_i(\mathfrak{M}_{i_0}) = \mathfrak{M}_i$ (on prendra $U_{i_0} = 1$). Posons

$$\mathfrak{N}_{i,j} = U_i(\mathfrak{N}_{i_0,j}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}'_j = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{N}_{i,j}.$$

On a

$$\mathfrak{M}'_j \in \mathbf{M}' \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}'_j \sim \mathfrak{M}'_{i_0}.$$

Soit pour tout j, $U'_j \in \mathbf{M}'_U$ tel que $U'_j(\mathfrak{M}'_{i_0}) = \mathfrak{M}'_j$. Posons $e_i = U_i U'_i e_{i_0}$. On a pour $A \in \mathbf{M}_+$

$$\begin{aligned} T_i(A_{\mathfrak{M}_i}) &= T(P_{\mathfrak{M}_i} A P_{\mathfrak{M}_i}) = T(U_i P_{\mathfrak{M}_{i_0}} U_i^{-1} A U_i P_{\mathfrak{M}_{i_0}} U_i^{-1}) \\ &= T(P_{\mathfrak{M}_{i_0}} U_i^{-1} A U_i P_{\mathfrak{M}_{i_0}}) = T_{i_0}(U_i^{-1} A U_i) = (U_i^{-1} A U_i e_{i_0}, e_{i_0}) \\ &= (A U_i e_{i_0}, U_i e_{i_0}) = (A U_i U'_i e_{i_0}, U_i U'_i e_{i_0}) = (A e_i, e_i). \end{aligned}$$

On a alors

$$T(A) = \sum_{i\in I} (P_{\mathfrak{M}_i} A P_{\mathfrak{M}_i}) = \sum_{i\in I} T_i(A_{\mathfrak{M}_i}) = \sum_{i\in I} (A e_i, e_i).$$

On a de plus

$$\mathbf{M}'(e_i) = \mathbf{M}'(U_i U'_i e_{i_0}) = U_i(\mathbf{M}'(e_{i_0})) = U_i(\mathfrak{M}_{i_0}) = \mathfrak{M}_i.$$

D'autre part $\mathbf{M}(e_{i_0}) \subset \mathfrak{M}'_{i_0}$ et $\mathbf{M}(e_{i_0}) \supset \mathfrak{N}_{i_0,i_0}$ ce qui entraîne $\mathbf{M}(e_{i_0}) \supset U_i(\mathfrak{N}_{i_0,i_0}) = \mathfrak{N}_{i,i_0}$ et par suite $\mathbf{M}(e_{i_0}) \supset \mathfrak{M}'_{i_0}$. On a donc $\mathbf{M}(e_{i_0}) = \mathfrak{M}'_{i_0}$. On a alors

$$\mathbf{M}(e_i) = \mathbf{M}(U_i U'_i e_{i_0}) = \mathbf{M}(U'_i e_{i_0}) = U'_i(\mathbf{M}(e_{i_0})) = \mathfrak{M}'_i,$$

ce qui achève la démonstration.

Proposition 3. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée et* T *une trace sur* $\mathbf{M}$, *fidèle et essentielle. L'idéal* $\mathbf{M}^2(T)$ *muni du produit scalaire* $(A\ B) = T(B^*A)$ *et de l'involution* $A \to A^*$ *est une algèbre unitaire* (33).

---

(33) Une algèbre unitaire ([9], [25], [13 *a*], [19]) est une $\bigstar$-algèbre **A** munie d'une structure d'espace préhilbertien au moyen d'un produit scalaire (u, v) et vérifiant les axiomes suivants :

(AU.1) $(u, v) = (v^*, u^*)$;

(AU.2) $(uv, w) = (v, u^* w)$;

(AU.3) pour tout $u \in \mathbf{A}$ l'opérateur $v \to vu$ est continu pour la topologie forte définie par la structure préhilbertienne;

(AU.4) les éléments de la forme uv sont denses dans **A**.

Démonstration. — La forme $T(B^\star A)$ est visiblement une forme sesquilinéaire positive. Posons $(A, B) = T(B^\star A)$. On a

$$(B^\star, A^\star) = T(AB^\star) = T(B^\star A) = (A, B) \quad \text{et} \quad (AB, C) = T(C^\star AB) = T((A^\star C)^\star B) = (B, A^\star C),$$

ce qui démontre (AU.1) et (AU.2). Le lemme 5 (chap. II) montre que $\|BA\| \leq |||B|||\,\|A\|$, ce qui entraîne (AU.3). Enfin pour tout $A \in \mathbf{M}^2(T)$ et tout $E \in \mathbf{M}_P \cap \mathbf{M}^2(T) = \mathbf{M}_P \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_P$, on a

$$T((A - EA)^\star(A - EA)) = T(A^\star A) - T(A^\star EA).$$

Comme T est essentielle, on a

$$\sup_{E \in \mathfrak{m}_P} E = 1, \quad \text{d'où} \quad \sup_{E \in \mathfrak{m}_P} A^\star EA = A^\star A \quad \text{et} \quad \sup_{E \in \mathfrak{m}_P} T(A^\star EA) = T(A^\star A)$$

ce qui entraîne que A est adhérent dans l'espace préhilbertien $\mathbf{M}^2(T)$ à l'ensemble des éléments EA pour $E \in \mathfrak{m}_P$. Par suite (AU.4) est vérifié.

THÉORÈME 3. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée sans composante purement infinie et* T *une trace fidèle essentielle sur* $\mathbf{M}$: *si* $C(\chi) = 1$ *il existe un sous-espace dense de* H *muni d'une structure d'algèbre unitaire* $\mathbf{B}$ *telle que :*

(i) *les* $\star$*-algèbres* $\mathbf{L}$ *et* $\mathbf{R}$ *faiblement fermées engendrées par les opérateurs de multiplication à gauche et à droite sont identiques à* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}'$;

(ii) T *est la trace canonique sur* $\mathbf{L} = \mathbf{M}$ ([34]).

Démonstration. — Soit $\{e_i\}_{i \in I}$ une famille d'éléments de H telle que

$$T(A) = \sum_{i \in I} (Ae_i, e_i) \quad \text{pour tout} \quad A \in \mathbf{M}_+$$

et telle que

$$\mathbf{M}(e_i) \cap \mathbf{M}(e_j) = \mathbf{M}'(e_i) \cap \mathbf{M}'(e_j) = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad \bigoplus_{i \in I} \mathbf{M}(e_i) = \bigoplus_{i \in I} \mathbf{M}'(e_i) = H.$$

On a alors pour tout $A \in \mathbf{M}$,

$$T(A^\star A) = \sum_{i \in I} \|Ae_i\|^2.$$

Par suite l'idéal $\mathbf{M}^2(T)$ coïncide avec l'ensemble des opérateurs $A \in \mathbf{M}$ tels que $\sum_{i \in I} \|Ae_i\|^2 < \alpha$. Pour tout $A \in \mathbf{M}^2(T)$, posons $x_A = \sum_{i \in I} Ae_i$ et soit $\mathbf{B}$ l'ensemble des éléments x_A. L'application $A \to x_A$ est une application linéaire de $\mathbf{M}^2(T)$ sur $\mathbf{B}$. L'égalité $T(A^\star A) = \|x_A\|^2$ montre que cette application est biunivoque. Munissons $\mathbf{M}^2(T)$ du produit scalaire $(A, B) = T(B^\star A)$. On peut transporter à $\mathbf{B}$ la structure d'algèbre unitaire définie sur $\mathbf{M}^2(T)$ par ce produit scalaire.

([34]) Il est aisé de vérifier que la condition $C(\chi) = 1$ est essentielle dans l'énoncé de ce théorème.

Autrement dit, munie de l'involution $x_A \to x_A^\star = x_{A^\star}$ et de la multiplication $x_A, x_B \to x_A x_B = x_{AB}$, $\mathbf{B}$ est une algèbre unitaire.

Montrons que $\mathbf{B}$ est dense dans H. Soit H_0 l'adhérence de $\mathbf{B}$. La relation $Bx_A = x_{BA}$ pour $B \in \mathbf{M}$ et $A \in \mathbf{M}^2(T)$ montre que $\mathbf{B}$ est stable par $\mathbf{M}$. Il en est donc de même de H_0. D'autre part on a pour tout $i \in I$: $e_i = \sum_{j \in I} P_{\mathbf{M}(e_i)} e_j$ puisque les sous-espaces $\mathbf{M}'(e_i)$ sont deux à deux orthogonaux. Par suite $e_i \in \mathbf{B}$. Ceci entraîne $\mathbf{M}(e_i) \subset H_0$ et comme les sous-espaces $\mathbf{M}(e_i)$ engendrent H, on a $H_0 = H$. La relation $x_B x_A = x_{BA} = Bx_A$ ($A, B \in \mathbf{M}^2(T)$) montre que l'opérateur L_{x_B} de multiplication à gauche par x_B (étendu par continuité à tout H) est égal à B. Comme $\mathbf{M}^2(T)$ est dense dans $\mathbf{M}$, on a $\mathbf{L} = \mathbf{M}$ et par suite $\mathbf{R} = \mathbf{M}'$. Il reste à montrer que T est la trace canonique sur $\mathbf{L} = \mathbf{M}$. Soit A, $B \in \mathbf{M}^2(T)$, on a

$$T(B^\star A) = T(L_{x_B}^\star L_{x_A}) = \sum_{i \in I} (A e_i, Be_i) = (x_A, x_B).$$

Par linéarité, on en déduit que la trace T coïncide avec la trace canonique sur $\mathbf{L}$ pour tous les opérateurs appartenant à l'idéal $\mathfrak{m}$ engendré par les éléments $A \in \mathbf{M}_+$ tels que $T(A) < \infty$ (chap. II, remarque 5). Par suite ([7], proposition 7) les deux traces sont identiques.

Lemme 6. — *Soit* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}_1$ *deux* $\star$*-algèbres faiblement fermées sans composante purement infinie et de même invariant* $C(\chi) = 1$. *Tout isomorphisme algébrique de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_1$ *est un isomorphisme spatial.*

Démonstration. — Soit H et H_1 les espaces sur lesquels opèrent $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$ et φ un isomorphisme algébrique de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{M}_1$. Considérons une trace fidèle essentielle T sur $\mathbf{M}$ et soit T_1 la trace sur $\mathbf{M}_1$ définie pour tout $A_1 \in (\mathbf{M}_1)_+$ par la formule $T_1(A_1) = T(\varphi^{-1} A_1)$. Soit $\mathbf{B}$ (resp. $\mathbf{B}_1$) un sous-espace dense de H (resp. H_1) muni d'une structure d'algèbre unitaire telle que $\mathbf{M}$ (resp. $\mathbf{M}_1$) soit l'$\star$-algèbre engendrée par les opérateurs de multiplication à gauche et que T (resp. T_1) soit la trace canonique sur $\mathbf{M}$ (resp. $\mathbf{M}_1$). Soit pour $x \in \mathbf{B}$, L_x l'opérateur de multiplication à gauche par x étendu à tout H et pour $x_1 \in \mathbf{B}_1$, L_{x_1} l'opérateur de multiplication à gauche par x_1 étendu à tout H_1. On a

$$T(L_x^\star L_x) = \| x \|^2 \qquad \text{et} \qquad T_1(L_{x_1}^\star L_{x_1}) = \| x_1 \|^2.$$

L'isomorphisme φ applique $\mathbf{M}^2(T)$ sur $\mathbf{M}_1^2(T_1)$ et par suite pour tout $x \in \mathbf{B}$, il existe un élément unique $x_1 \in \mathbf{B}_1$ tel que $\varphi(L_x) = L_{x_1}$. Posons $x_1 = Ux$: U est une application linéaire (et même un isomorphisme de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{B}_1$). On a pour tout $x \in \mathbf{B}$:

$$\| Ux \|^2 = T_1(L_{Ux}^\star L_{Ux}) = T(L_x^\star L_x) = \| x \|^2.$$

L'application U étant ainsi isométrique se prolonge d'une façon unique en un isomorphisme (que nous noterons également U) de H sur H_1.

Montrons que pour tout $A \in \mathbf{M}$, on a $\varphi(A) = UAU^{-1}$. On a en effet pour tout $x \in \mathbf{B}$:

$$\varphi(A)\varphi(L_x) = \varphi(AL_x) = \varphi(L_{Ax}) = L_{UAx} \quad \text{et} \quad \varphi(A)\varphi(L_x) = \varphi(A)L_{Ux} = L_{\varphi(A)Ux},$$

ce qui entraîne $UAx = \varphi(A)Ux$ pour tout $x \in \mathbf{B}$ et par suite $UA = \varphi(A)U$ soit $\varphi(A) = UAU^{-1}$.

Lemme 7. — *Soit* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}_1$ *deux* $\bigstar$*-algèbres faiblement fermées sans composante purement infinie, de même invariant* $C(\chi) = \alpha$ *(*α *est fini ou transfini). Tout isomorphisme algébrique de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_1$ *est un isomorphisme spatial.*

Démonstration. — Soit I un ensemble d'indices de puissance α, $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ et $\{\mathcal{N}_i\}_{i\in I}$ des partitions de H et H_1 dont les éléments sont des sous-espaces normaux séparateurs respectivement pour $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$. Posons pour tout $i \in I$: $\varphi_i = \varphi_{\mathcal{N}_i} \circ \varphi \circ \varphi_{\mathcal{M}_i}^{-1}$. L'application φ_i est un isomorphisme de $\mathbf{M}_{\mathcal{M}_i}$ sur $(\mathbf{M}_1)_{\mathcal{N}_i}$. En vertu du lemme 6. φ_i est un isomorphisme spatial défini par un isomorphisme, de $\mathcal{M}_i$ sur $\mathcal{N}_i$. Soit U l'isomorphisme de H sur H_1 dont la restriction à $\mathcal{M}_i$ est U_i. Pour tout $A \in \mathbf{M}$, on a $(\varphi(A))_{\mathcal{N}_i} = U_i A_{\mathcal{M}_i} U_i^{-1}$, ce qui entraîne $\varphi(A) = UAU^{-1}$. Donc φ est un isomorphisme spatial.

Lemme 8. — *Soit* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}_1$ *deux* $\bigstar$*-algèbres faiblement fermées,* φ *un isomorphisme algébrique de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_1$*. Soit* $C(\chi)$ *et* $C_1(\chi)$ *les invariants de* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}_1$*. Supposons* $C(\chi) = \alpha$ *(*α *cardinal transfini) et* $C_1(\chi) \leqq \alpha$*. Il existe un sous-espace* $\mathcal{M}\,\eta\,\mathbf{M}'$ *tel que* φ *soit équivalent à* $\varphi_{\mathcal{M}}$*.*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que pour démontrer ce lemme nous pouvons remplacer $\mathbf{M}$ par une $\bigstar$-algèbre $\mathbf{M}_0$ spatialement isomorphe à $\mathbf{M}$. En effet, soit φ_U un isomorphisme spatial de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{M}_0$. Posons $\psi = \varphi \circ \varphi_U^{-1}$. Pour tout sous-espace $\mathcal{M}\,\eta\,\mathbf{M}'_0$ séparateur pour $\mathbf{M}_0$, les isomorphismes $\varphi_{\mathcal{M}} \circ \varphi^{-1}$ et $\varphi_{U(\mathcal{M})} \circ \psi^{-1}$ sont équivalents. Par suite rechercher un sous-espace $\mathbf{M}\,\eta\,\mathcal{M}'$ tel que φ soit équivalent à $\varphi_{\mathcal{M}}$ revient à chercher un sous-espace $\mathcal{M}_1\,\eta\,\mathbf{M}'_0$ tel que ψ soit équivalent à $\varphi_{\mathcal{M}_1}$.

Supposons $C_1(\chi) \neq 0$. Considérons alors l'$\bigstar$-algèbre $\mathbf{M}_1^{(\alpha)}$ définie à partir de $\mathbf{M}_1$ par l'ampliation $\mathfrak{I}^{(\alpha)}$. D'après le lemme 5, $\mathbf{M}_1^{(\alpha)}$ a pour invariant α donc est spatialement isomorphe à $\mathbf{M}$. Comme on peut identifier l'espace H_1 sur lequel opère $\mathbf{M}_1$ à l'un des espaces $\mathcal{H}_i$, le lemme est démontré. Dans le cas où $C_1(\chi) = 0$, soit $p(\chi)$ l'invariant algébrique de $\mathbf{M}$. Par une partition centrale de H on pourra se ramener au cas où $p(\chi) = \beta$. On raisonnera alors comme précédemment en faisant une ampliation d'ordre $\alpha\beta$.

III. — Théorèmes généraux.

Théorème 4. — *Soit* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}_1$ *deux* $\bigstar$*-algèbres faiblement fermées sans composante purement infinie et* φ *un isomorphisme algébrique de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_1$*. Si après identification des spectres* [35] *de* $\mathbf{M}^\natural$ *et* $\mathbf{M}_1^\natural$*,* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}_1$ *ont même*

---

[35] Rappelons que cette identification consiste à poser $\chi(\varphi(A)) = \chi(A)$ pour tout $A \in \mathbf{A}^\natural$.

invariant $C(\chi)$ *et si* $C(\chi) \neq 0$ *sur un ensemble ouvert dense dans* Ω (*c'est-à-dire si tout sous-espace* $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}^\natural$ *fini pour* $\mathbf{M}'$ *est fini pour* $\mathbf{M}$), φ *est un isomorphisme spatial.*

Démonstration. — Soit α un cardinal majorant $C(\chi)$ et $\mathbf{M}_2$ une $\star$-algèbre faiblement fermée algébriquement isomorphe à $\mathbf{M}$ et ayant pour invariant α. Soit ψ un isomorphisme de $\mathbf{M}_2$ sur $\mathbf{M}$. Posons $\varphi \circ \psi = \psi_1$. Il existe deux sous-espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N} \eta \mathbf{M}'_2$, séparateurs, tels que ψ et ψ_1 soient respectivement équivalents à $\varphi_{\mathcal{M}}$ et $\varphi_{\mathcal{N}}$. Si $C_{\mathcal{M}}(\chi)$ et $C_{\mathcal{N}}(\chi)$ sont les invariants de $(\mathbf{M}_2)_{\mathcal{M}}$ et $(\mathbf{M}_2)_{\mathcal{M}'}$, on a $C_{\mathcal{M}}(\chi) = C_{\mathcal{N}}(\chi) = C(\chi)$. On a donc $\mathcal{M} \sim \mathcal{N}$ et les isomorphismes $\varphi_{\mathcal{M}}$ et $\varphi_{\mathcal{N}}$ sont équivalents. Par suite il en est de même de ψ et ψ_1. L'isomorphisme $\varphi = \psi_1 \circ \psi^{-1}$ est donc un isomorphisme spatial.

Corollaire. — *Soit* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}_1$ *deux* $\star$*-algèbres faiblement fermées telles que* $\mathbf{M}'$ *et* $\mathbf{M}'_1$ *soient commutatives. Tout isomorphisme algébrique de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_1$ *est un isomorphisme spatial.*

Théorème 5. — *Soit* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}_1$ *deux* $\star$*-algèbres faiblement fermées sans composante purement infinie,* φ *un isomorphisme algébrique de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_1$, $C(\chi)$ *et* $C_1(\chi)$ *les invariants de* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}_1$. *Supposons que* $C(\chi) \neq 0$ *sur un ensemble ouvert dense dans* Ω (*c'est-à-dire que tout sous-espace* $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}^\natural$ *fini pour* $\mathbf{M}'$ *soit fini pour* $\mathbf{M}$). *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un sous-espace* $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}'$ *tel que* φ *soit équivalent à* $\varphi_{\mathcal{M}}$ *est que* $C_1(\chi) \leqq C(\chi)$.

Démonstration. — La condition est nécessaire comme on le voit en séparant par une partition centrale de H les cas suivants :

(α) $\mathbf{M}$ de classe finie et $\mathbf{M}'$ de classe finie (proposition 2 du chapitre I).
(β) $\mathbf{M}$ de classe finie, $\mathbf{M}'$ de classe proprement infinie (trivial).
(γ) $\mathbf{M}$ de classe proprement infinie (trivial).

Pour démontrer que la condition est suffisante, on peut suivant une remarque déjà faite (démonstration du lemme 8) remplacer $\mathbf{M}$ par l'$\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}_0$ spatialement isomorphe. En raison du théorème 4, il suffit de trouver un sous-espace $\mathcal{M}_0 \eta \mathbf{M}'_0$ tel que $(\mathbf{M}_0)_{\mathcal{M}_0}$ ait pour invariant $C_1(\chi)$. Considérons alors une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}_2$ algébriquement isomorphe à $\mathbf{M}$ et ayant pour invariant $\alpha \geqq C(\chi)$. Sott ψ un isomorphisme de $\mathbf{M}_2$ sur $\mathbf{M}$. Posons $\psi_1 = \varphi^{-1} \circ \psi$. D'après le lemme 8, il existe deux sous-espaces $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_1$ tels que ψ et ψ_1 soient respectivement équivalents à $\varphi_{\mathcal{M}}$ et $\varphi_{\mathcal{M}_1}$. Les invariants de $(\mathbf{M}_2)_{\mathcal{M}}$ et $(\mathbf{M}_2)_{\mathcal{M}_1}$ sont $C(\chi)$ et $C_1(\chi)$. Comme on a $C_1(\chi) \leqq C_2(\chi)$, on a $\mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}$ et l'on peut supposer $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$. On peut alors conclure en prenant $\mathbf{M}_0 = (\mathbf{M}_2)_{\mathcal{M}}$ et $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1$.

Les théorèmes 4 et 5 ont négligé l'étude d'un isomorphisme φ d'une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$ sur une $\star$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}_1$ dans le cas où $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$ sont de classe proprement infinie et $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}'_1$ de classe finie. Dans ce cas il est impossible d'étudier uniquement à l'aide des invariants $C(\chi)$ et $C_1(\chi)$ de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$ puisque ceux-ci sont nuls. Il est nécessaire d'introduire un invariant lié à φ.

Proposition 4. — *Soit φ un isomorphisme d'une $\bigstar$-algèbre faiblement fermée $\mathbf{M}$ sur une $\bigstar$-algèbre faiblenent fermée $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}$ étant de classe proprement infinie, $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}'_1$ étant de classe finie. Pour tout sous-espace $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbf{M}$* fini, *désignons par $C_{\mathfrak{M}}(\chi)$ l'invariant de $\mathbf{M}_{\mathfrak{M}}$ et $C_{\varphi(\mathfrak{M})}(\chi)$ ([36]) l'invariant de $(\mathbf{M}_1)_{\varphi(\mathfrak{M})}$. Il existe sur Ω une fonction $\gamma(\chi)$ continue à valeurs dans $[0, \infty]$ telle que $C_{\varphi(\mathfrak{M})}(\chi) = \gamma(\chi)\, C_{\mathfrak{M}}(\chi)$ $\big($sur le spectre de $\mathbf{M}^{\natural}_{\mathfrak{M}}\big)$.*

Démonstration. — Soit $\mathbf{M}_2$ une $\bigstar$-algèbre faiblement fermée algébriquement isomorphe à $\mathbf{M}$ telle que $\mathbf{M}'_2$ soit de classe proprement infinie. Soit ψ un isomorphisme de $\mathbf{M}_2$ sur $\mathbf{M}$. D'après le théorème 5, il existe deux sous-espaces $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}'_1\,\eta\,\mathbf{M}'_2$ tels que ψ soit équivalent à $\varphi_{\mathfrak{M}'}$ et $\psi_1 = \varphi \circ \psi$ soit équivalent à $\varphi_{\mathfrak{M}'_1}$. Les sous-espaces $\mathfrak{M}'$ et $\mathfrak{M}'_1$ sont finis et séparateurs pour $\mathbf{M}_2$. Posons $\mathfrak{T}' = \mathfrak{M}' \oplus \mathfrak{M}'_1$. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace $\eta\,\mathbf{M}$ fini. Pour démontrer la proposition nous pouvons supposer $\mathfrak{M}^{\natural} = H$. Soit $\mathfrak{N} = \psi^{-1}(\mathfrak{M})$. Le sous-espace $\mathfrak{N}$ est un sous-espace $\eta\,\mathbf{M}_2$, fini et vérifiant $\mathfrak{N}^{\natural} = H_2$. Introduisons l'application $\natural$ canonique dans $(\mathbf{M}'_2)_{\mathfrak{T}'}$ et l'application $\natural$ canonique notée $A \to A^{\#}$ dans $(\mathbf{M}'_2)_{\mathfrak{T}' \cap \mathfrak{N}}$. Soit $C_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}'}(\chi)$, et $C_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}'}(\chi)$, $C_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}'_1}(\chi)$ les invariants de $(\mathbf{M}_2)_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}'}$, $(\mathbf{M}_2)_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}'}$ et $(\mathbf{M}_2)_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}'_1}$. On a

$$C_{\mathfrak{M}}(\chi) = C_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}'}(\chi) = C_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}'}(\chi)\, \chi\big(P^{\#}_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}'}\big)$$

et

$$C_{\varphi(\mathfrak{M})}(\chi) = C_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}'_1}(\chi) = C_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{T}'}(\chi)\, \chi\big(P^{\#}_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}'_1}\big).$$

D'après l'isomorphisme canonique de $(\mathbf{M}'_2)_{\mathfrak{T}' \cap \mathfrak{N}}$ sur $(\mathbf{M}'_2)_{\mathfrak{T}'}$, on a

$$P^{\#}_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}'} = P^{\natural}_{\mathfrak{M}'} \quad \text{et} \quad P^{\#}_{\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}'_1} = P^{\natural}_{\mathfrak{M}'_1}.$$

On a donc bien

$$C_{\varphi(\mathfrak{M})}(\chi) = \gamma(\chi)\, C_{\mathfrak{M}}(\chi)$$

en posant

$$\gamma(\chi) = \frac{\chi\big(P^{\natural}_{\mathfrak{M}'_1}\big)}{\big(P^{\natural}_{\mathfrak{M}'}\big)}$$

Remarque 9. — Soit $\mathbf{M}$ de classe proprement infinie et $\mathbf{M}'$ de classe finie. Soit $\mathfrak{M}$ un sous-espace $\eta\,\mathbf{M}'$, l'invariant $\gamma(\chi)$ de $\varphi_{\mathfrak{M}}$ est égal à $\chi\big(P^{\natural}_{\mathfrak{M}}\big)$.

Théorèmes 4′ et 5′. — *Soit $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}_1$ deux $\bigstar$-algèbres de classe proprement infinie, $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}'_1$ étant de classe finie. Soit φ un isomorphisme algèbrique de $\mathbf{M}$ sur $\mathbf{M}_1$.*

4′. La condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un isomorphisme spatial est que $\gamma(\chi) = 1$.

5′. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un sous-espace $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbf{M}'$ tel que φ soit équivalent à $\varphi_{\mathfrak{M}}$ est que $\gamma(\chi) \leq 1$.

([36]) Nous écrivons $\varphi(\mathfrak{M})$ pour $\Delta_{\varphi}(P_{\mathfrak{M}})$.

Démonstration. — Démontrons 4'. La condition est visiblement nécessaire. Inversement, si $\gamma(\chi) = 1$, on a en reprenant les notations de la proposition 4 : $\mathcal{M}' \sim \mathcal{M}'_1\,[\mathrm{mod}\,(\mathbf{M}'_2)_{\mathcal{E}}]$. Donc $\mathcal{M}' \sim \mathcal{M}'_1\,(\mathrm{mod}\,\mathbf{M}'_2)$. Les deux isomorphismes $\varphi_{\mathcal{M}'}$ et $\varphi_{\mathcal{M}'_1}$ sont donc équivalents. Il en est de même de ψ et ψ_1. Comme $\varphi = \psi_1^{-1} \circ \psi$, φ est un isomorphisme spatial.

Démontrons 5'. La condition est nécessaire d'après la remarque 9. Inversement supposons $\gamma(\chi) \leqq 1$. On peut remplacer $\mathbf{M}$ par une $\bigstar$-algèbre spatialement isomorphe à $\mathbf{M}$, par exemple l'algèbre $(\mathbf{M}_2)_{\mathcal{M}'}$ introduite dans la démonstration de la proposition 4. Comme $\gamma(\chi) \leqq 1$, on a $\mathcal{M}'_1 \prec \mathcal{M}'$ et l'on peut supposer $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}$, ce qui permet de conclure.

Nous passons à l'étude de la continuité des isomorphismes.

Lemme 9. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée et* $\mathcal{M}$ *un sous-espace* $\gamma_i\mathbf{M}'$ *séparateur pour* $\mathbf{M}$. *Si pour tout* $x \in \mathrm{H}$, *on a* $\mathbf{M}(x) \prec \mathcal{M}$ *(mod* $\mathbf{M}'$*) l'isomorphisme* $\varphi_{\mathcal{M}}$ *de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ *est faiblement et fortement bicontinu.*

Démonstration. — L'isomorphisme $\varphi_{\mathcal{M}}$ est naturellement faiblement et fortement continu. Soit $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{H}$ et $\varepsilon > 0$. Considérons dans $\mathbf{M}$ le voisinage V de zéro formé des éléments $\mathrm{A} \in \mathbf{M}$ tels que $|(\mathrm{A}x_i, y_i)| \leqq \varepsilon$. Soit pour chaque $i = 1, \ldots, n$ un opérateur $\mathrm{V}'_i \in \mathbf{M}'_{\mathrm{U}}$ tel que $\mathcal{D}_{\mathrm{V}'_i} = \mathbf{M}(x)$ et $\Delta_{\mathrm{V}'_i} \subset \mathcal{M}$. Posons $u_i = \mathrm{V}'_i\, x_i$ et $v_i = \mathrm{V}'_i\, \mathrm{P}_{\mathbf{M}(x_i)}\psi_i$. On a $u_i, v_i \in \mathcal{M}$ et

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}x_i, y_i) &= (\mathrm{A}x_i, \mathrm{P}_{\mathbf{M}(x_i)}y_i) = (\mathrm{V}'_i\,\mathrm{A}x_i, \mathrm{V}'_i\,\mathrm{P}_{\mathbf{M}(x_i)}y_i)\\ &= (\mathrm{A}\mathrm{V}'_i\,x_i, \mathrm{V}'_i\,\mathrm{P}_{\mathbf{M}(x_i)}y_i)\\ &= (\mathrm{A}u_i, v_i) = (\mathrm{A}_{\mathcal{M}}u_i, v_i).\end{aligned}$$

Soit V_1 le voisinage de zéro dans $\mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ formé des éléments $\mathrm{A}_0 \in \mathbf{M}_{\mathcal{M}}$ tels que $|(\mathrm{A}_0 u_i, v_i)| \leqq \varepsilon$. Pour que $\mathrm{A} \in \mathrm{V}$, il suffit que $\mathrm{A}_{\mathcal{M}} \in \mathrm{V}_1$, ce qui démontre la continuité faible de $\varphi_{\mathcal{M}}^{-1}$. La continuité forte se démontre de la même façon.

Théorème 6. — *Soit* φ *un isomorphisme algébrique d'une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée* $\mathbf{M}$ *sans composante purement infinie sur une* $\bigstar$*-algèbre faiblement fermée* $\mathbf{M}_1$. *L'isomorphisme* φ *est ultrafortement continu et de plus faiblement et fortement continu dans les cas suivants :*

(i) $\mathbf{M}$ *est de classe finie et* $\mathrm{C}(\chi)$ *et* $\mathrm{C}_1(\chi)$ *désignant les invariants de* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}_1$, *on a l'une des relations suivantes :*

(α) $\inf\limits_{\chi\in\Omega} \mathrm{C}(\chi) > 0$;

(β) $\sup\limits_{\chi\in\Omega} \dfrac{\mathrm{C}_1(\chi)}{\mathrm{C}(\chi)} < \infty$ ($\mathbf{M}'$ *et* $\mathbf{M}'_1$ *étant supposées de classe finie*).

(ii) $\mathbf{M}$ *est de classe proprement infinie et l'on a l'une des conditions suivantes :*

(α) $\mathbf{M}'$ *est de classe proprement infinie;*

(β) $\mathbf{M}'$ *et* $\mathbf{M}'_1$ *sont de classe finie et l'invariant* $\gamma(\chi)$ *de* φ *vérifie la relation* $\sup\limits_{\chi\in\Omega} \gamma(\chi) < \infty$.

Démonstration. — Supposons $\mathbf{M}$ de classe finie. Si $C_1(\chi) \leqq C(\chi)$, il existe un sous-espace $\mathcal{M}' \eta \mathbf{M}'$ tel que φ soit équivalent à $\varphi_{\mathcal{M}}$. L'isomorphisme φ est alors faiblement, fortement et ultrafortement continu. Comme on peut à l'aide d'une ampliation $\mathfrak{I}^{(\alpha)}$ se ramener à ce cas, φ est dans tous les cas ultrafortement continu.

Si $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}'_1$ sont de classe finie avec la condition (β), il existe un entier n tel que $C_1(\chi) \leqq nC(\chi)$. On peut alors se ramener au cas où $C_1(\chi) \leqq C(\chi)$ par l'ampliation $\mathfrak{I}^{(h)}$ d'ordre fini donc faiblement et fortement continue. L'isomorphisme est donc faiblement et fortement continu dans le cas (β). En particulier on peut ainsi ramener le cas (α) au cas où $C(\chi) \geqq 1$. On peut de plus supposer $C_1(\chi) \geqq C(\chi)$. Il existe alors un sous-espace $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}'_1$ tel que φ^{-1} soit équivalent à $\varphi_{\mathcal{M}}$. Soit $x \in H$: l'élément x étant générateur pour $(\mathbf{M}_1)_{\mathbf{M}_1(x)}$ l'invariant $C_{\mathbf{M}_1(x)}(\chi)$ est inférieur ou égal à 1. Comme $C_{\mathcal{M}}(\chi) \geqq 1$, on a $\mathbf{M}_1(x) \prec \mathcal{M}$ (lemme 2). Le lemme 9 entraîme alors que $\varphi_{\mathcal{M}}$ est faiblement et fortement bicontinu et il en est de même de φ^{-1}. L'isomorphisme φ est donc faiblement et fortement continu.

Passons au cas où $\mathbf{M}$ est de classe proprement imfinie. Supposons $\mathbf{M}'$ de classe proprement infinie et $C_1(\chi) \leqq C(\chi)$. Il existe un sous-espace $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}'$ tel que φ soit équivalent à $\varphi_{\mathcal{M}}$. L'isomorphisme φ est alors faiblement, fortement et ultrafortement continu. Comme on peut par une ampliation $\mathfrak{I}^{(\alpha)}$ appliquée à $\mathbf{M}$ se ramener à ce cas, φ est toujours ultrafortement continu.

Supposons $\mathbf{M}'$ de classe proprement infinie. Pour démontrer la continuité faible et forte de φ, il suffit de se placer dans le cas où $\mathbf{M}$ est de classe proprement infinie avec $C_1(\chi) = \alpha C(\chi)$. Il existe alors un sous-espace $\mathcal{M}' \eta \mathbf{M}'_1$ tel que φ^{-1} soit équivalent à $\varphi_{\mathcal{M}'}$. Soit I un ensemble d'indices de puissance α et $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$ une partition homogène de H_1 en sous-espaces $\mathcal{M}'_i \eta \mathbf{M}'_1$ finis, Soit $x \in H_1$: il existe un sous-ensemble dénombrable J de I tel que $x \in \bigoplus_{i \in J} \mathcal{M}'_i$. Posons $\mathcal{N}' = \bigoplus_{i \in J} \mathcal{M}'_i$. On a $\mathbf{M}_1(x) \subset \mathcal{N}'$. Les $\bigstar$-algèbres $(\mathbf{M}'_1)_{\mathcal{M}'}$ et $(\mathbf{M}'_1)_{\mathcal{N}'}$ sont algébriquement isomorphes et la dernière a pour invariant $\aleph_0$. D'après la définition de l'invariant $C(\chi)$, on a donc $C_{\mathcal{M}'}(\chi) \geqq C_{\mathcal{N}'}(\chi)$ [$C_{\mathcal{M}'}(\chi)$ et $C_{\mathcal{N}'}(\chi)$ étant les invariants de $(\mathbf{M}_1)_{\mathcal{M}'}$ et $(\mathbf{M}_1)_{\mathcal{N}'}$]. Par suite $\mathcal{N}' \prec \mathcal{M}'$ et *a fortiori* $\mathbf{M}_1(x) \prec \mathcal{M}$. D'après le lemme 9, $\varphi_{\mathcal{M}}$ est faiblement et fortement continu. Il en est donc de même de φ.

Il reste à étudier le cas (ii) (β). Reprenons les notations de la démonstration de la proposition 4. Il existe un entier n tel que $P^{\natural}_{\mathcal{M}'_1} \leqq n P^{\natural}_{\mathcal{M}'}$. Soit dans H_2, $\{\mathcal{N}_i\}_{1 \leqq i \leqq n}$ une partition homogène $(\mathcal{N}_i \eta \mathbf{M}'_2)$ telle que $\mathcal{M}' = \mathcal{N}_1$. Soit $\mathcal{N}' = \bigoplus_{1 \leqq i \leqq n} \mathcal{N}_i$. On a

$$\varphi_{\mathcal{M}'_1} \circ \varphi^{-1}_{\mathcal{M}'} = \varphi_{\mathcal{M}_1} \circ \varphi^{-1}_{\mathcal{N}'} \circ \varphi_{\mathcal{N}'} \circ \varphi^{-1}_{\mathcal{M}'}.$$

Comme on a $\mathcal{M}_1 < \mathcal{N}'$, l'isomorphisme $\varphi_{\mathcal{M}_1} \circ \varphi^{-1}_{\mathcal{N}'}$ est faiblement et fortement continu. Il en est de même de l'isomorphisme $\varphi_{\mathcal{N}'} \circ \varphi^{-1}_{\mathcal{M}'}$ qui n'est autre qu'une ampliation d'ordre n de $(\mathbf{M}_2)_{\mathcal{M}'}$. Par suite $\varphi_{\mathcal{M}'_1} \circ \varphi^{-1}_{\mathcal{M}'}$ est continu et il en est de même de φ.

Remarquons pour terminer que l'on pourra combiner les différents cas étudiés par une partition centrale *finie*.

Parmi les différentes applications de ce théorème, citons la suivante :

Corollaire. — *Soit* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}_1$ *deux* $\star$*-algèbres faiblement fermées commutatives. Tout isomorphisme algébrique de* $\mathbf{M}$ *sur* $\mathbf{M}_1$ *est faiblement et fortement* ([37]) *continu.*

Théorème 7. — *Soit* $\mathbf{M}$ *une* $\star$*-algèbre faiblement fermée de classe finie. L'application* $A \rightarrow A^\natural$ *est ultrafortement continue et de plus faiblement et fortement* ([38]) *continu si* $\inf\limits_{\chi \in \Omega} C(\chi) > 0$.

Démonstration. — Supposons $C(\chi) \geqq 1$. Soit P un projecteur $\natural$ pour $\mathbf{M}$, et $\mathcal{M} = \Delta_P$. L'application $A \rightarrow (PAP)_{\mathcal{M}} = (A^\natural)_{\mathcal{M}}$ est faiblement, fortement et ultrafortement continus. Comme il en est de même de l'application $(A^\natural)_{\mathcal{M}} \rightarrow A^\natural$ (corollaire du théorème 6), l'application $A \rightarrow A^\natural$ est faiblement, fortement et ultrafortement continue. Comme on peut se ramener à ce cas par une ampliation $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$ appliquée à $\mathbf{M}$ d'ordre fini si $\inf\limits_{\chi \in \Omega} C(\chi) > 0$, on en déduit le théorème.

APPENDICE.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE I. KAPLANSKY.

Théorème. — *Soit* $\mathbf{M}$ *et* $\mathbf{M}'$ *deux* $\star$*-algèbres faiblement fermées de classe finie. Soit* Ω *le spectre de* $\mathbf{M}^\natural$. *Le rapport* $\dfrac{\chi(P^\natural_{\mathbf{M}(x)})}{\chi(P^\natural_{\mathbf{M}'(x)})}$ *lorsqu'il a un sens en un point* χ *de* Ω *est indépendant du point* $x \in H$.

Démonstration. — Nous supposerons que $\mathbf{M}$ est de classe II, car dans le cas où $\mathbf{M}$ est de classe I, la structure de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}'$ permet de vérifier aisément le théorème.

Désignons par F l'ensemble des fonctions $P^\natural_{\mathbf{M}'(x)}(\chi)$ pour $x \in H$ et par F_1 l'ensemble des fonctions $P^\natural_{\mathbf{M}'(x)}(\chi)$. La correspondance $P^\natural_{\mathbf{M}'(x)} \rightarrow P^\natural_{\mathbf{M}(x)}(\chi)$ est biunivoque et définit une application $\mathfrak{S}$ strictement croissante de F sur F_1.

A. On a pour tout $f \in F$,

$$\mathfrak{S}\left(\frac{p}{q}f\right) = \frac{p}{q}\mathfrak{S}f \qquad \text{pour } \frac{p}{q} \leqq 1.$$

Soit en effet $x \in H$ tel que $f(\chi) = P^\natural_{\mathbf{M}'(x)}(\chi)$. Soit une partition homogène $\{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_q\}$ d'ordre q de $\mathbf{M}'(x)$. Soit $x_i = P_{\mathcal{M}_i} x \ (i = 1, \ldots, q)$. On a $P^\natural_{\mathbf{M}(x_i)}(\chi) = \mathfrak{S}\left(\frac{f}{q}\right)$. Par une partition centrale on peut séparer le cas où $\mathfrak{S}\left(\frac{f}{q}\right) \leqq \frac{1}{q}\mathfrak{S}(f)$ et le cas où $\mathfrak{S}\left(\frac{f}{q}\right) \geqq \frac{1}{q}\mathfrak{S}(f)$.

([37]) Ce résultat est démontré dans [27].

([38]) [14], théorème 3.

Plaçons-nous dans le premier cas. On peut alors trouver une partition homogène $\{\mathcal{N}'_1, \ldots, \mathcal{N}'_q\}$ $(\mathcal{N}'_i \,\eta\, \mathbf{M}')$ majorée par $\mathbf{M}(x)$ et telle que $\mathcal{N}'_1 \sim \ldots \sim \mathcal{N}'_q \sim \mathbf{M}(x_i)$ Posons $\mathcal{N}'_i = \mathrm{U}'_i(\mathbf{M}(x_i))$ $(\mathrm{U}'_i \in \mathbf{M}'_{\mathrm{U}})$ et $y_i = \mathrm{U}'_i x_i$. On a

$$\mathcal{N}'_i = \mathrm{U}'_i(\mathbf{M}(x_i)) = \mathbf{M}(\mathrm{U}'_i x_i) = \mathbf{M}(y_i).$$

L'égalité $y_i = \mathrm{U}'_i x_i$ entraîne $\mathbf{M}'(y_i) \subset \mathbf{M}'(x_i)$ et l'égalité $x_i = \mathrm{U}'^{-1}_i x_i$ l'inclusion inverse. On a donc $\mathbf{M}'(y_i) = \mathbf{M}'(x_i)$. Soit $p \leqq q$ et $z_p = \sum_{i=1}^{p} y_i$. Les égalités

$$y_i = \mathrm{P}_{\mathcal{N}'_i} z_p \qquad \text{et} \qquad y_i = \mathrm{P}_{\mathcal{M}_i} z_p$$

entraînent respectivement

$$\mathbf{M}'(y_i) \subset \mathbf{M}'(z_p) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{M}(y_i) \subset \mathbf{M}(z_p).$$

Pour tout $\mathrm{A}' \in \mathbf{M}'$, on a

$$\mathrm{A}' z_p = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{A}' y_i, \qquad \text{d'où} \qquad \mathbf{M}'(z_p) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbf{M}'(y_i)$$

et de même $\mathbf{M}(y_p) \subset \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbf{M}(y_i)$. Par suite

$$\mathbf{M}'(z_p) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbf{M}'(y_i), \qquad \mathbf{M}(z_p) = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbf{M}(y_i), \qquad \mathbf{M}'(z_q) = \bigoplus_{i=1}^{q} \mathbf{M}'(y_i) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{M}(z_q) = \bigoplus_{i=1}^{q} \mathbf{M}(y_i).$$

On a donc

$$\mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}'(z)} = f, \qquad \mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}(z_q)} = \mathfrak{I}(f), \qquad \mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}'(z_p)} = \frac{p}{q} f \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{I}\left(\frac{p}{q} f\right) = \mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}(z_p)} = \frac{p}{q}\, \mathfrak{I}(f).$$

B. Soit E l'ensemble des éléments $\chi \in \Omega$ tels que $\mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}'(x)}(\chi) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{H}$. C'est un ensemble fermé rare. Montrons que s'il existe $x_0 \in \mathrm{H}$ et $\chi_0 \in \Omega$ tel que $\mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}'(x_0)}(\chi_0) = 0$ avec $\mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}(x_0)}(\chi_0) \neq 0$, on a $\chi_0 \in \mathrm{E}$. En effet, soit alors $y \in \mathrm{H}$. On peut toujours trouver $\frac{p}{q} < 1$ tel que $\frac{p}{q}\mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}(x_0)}(\chi) < \mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}(x_0)}(\chi)$ pour $\chi = \chi_0$. Cette égalité sera encore vérifiée dans un voisinage compact ouvert K de χ_0. En raisonnant dans l'espace $\mathcal{M} \eta \mathbf{M}^{\natural}$ attaché à K, on voit qu'on devra également avoir $\mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}'(y)}(\chi) \leqq \mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}'(x_0)}(\chi)$ pour $\chi \in \mathrm{K}$ et en particulier $\mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}'(y)}(\chi_0) = 0$.

C. Soit E_1 l'ensemble des éléments $\chi \in \Omega$ tels que $\mathrm{P}^{\natural}_{\mathbf{M}(x)}(\chi) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{H}$, F_χ l'ensemble des valeurs prises par $f(\chi)$ pour $f \in \mathrm{F}$ et F'_χ l'ensemble des valeurs prises par $f_1(\chi)$ pour $f_1 \in \mathrm{F}'$. Pour tout $\chi \notin \mathrm{E} \cup \mathrm{E}_1$, l'application $\mathfrak{I}$ induit une application strictement croissante $\mathfrak{I}_\chi$ de F_χ sur F'_χ. Soit en effet $f, g \in \mathrm{F}$ tels que $f(\chi_0) = g(\chi_0)$ et $\mathfrak{I}f(\chi_0) < \mathfrak{I}g(\chi_0)$. On peut toujours supposer que $g \geqq f$ (au besoin en remplaçant f par $\inf(f, g)$ et g par $\sup(f, g)$). Choisisons $\frac{p}{q}$ tel que $\frac{p}{q}\mathfrak{I}g(\chi) > \mathfrak{I}f(\chi)$ pour $\chi = \chi_0$. Cette égalité sera encore vérifiée dans un voisinage compact ouvert de χ_0 (on raisonnera dans le sous-espace $\eta \mathbf{M}^{\natural}$ correspondant). Soit $h = \mathfrak{I}^{-1}\left(\frac{p}{q}\mathfrak{I}g\right)$. On a encore $h(\chi_0) = g(\chi_0)$

car $\Im f \leq \Im h \leq \Im g$. De plus $\Im h = \frac{p}{q}\Im(g) = \Im\left(\frac{p}{q}g\right)$ d'où $h = \frac{p}{q}g$ et par suite $h(\chi_0) = g(\chi_0)$ contrairement à l'hypothèse $\chi_0 \notin E$. Pour tout $\chi_0 \in E$ l'application $\Im_\chi$ est donc définie et nécessairement croissante. Par un raisonnement analogue au précédent, on voit que si $\chi_0 \in E_1$, l'application $\Im_\chi$ est strictement croissante.

D. On a nécessairement d'après B : $\Im_\chi\left(\frac{p}{q}\alpha\right) = \frac{p}{q}\Im_\chi(\alpha)$ pour $\alpha \in F_\chi$, $\frac{p}{q} < 1$, c'est-à-dire $\Im_\chi(\beta) = \frac{\beta}{\alpha}\Im_\chi(\alpha)$ pour $\frac{\beta}{\alpha}$ rationnel ou encore $\frac{\Im_\chi(\beta)}{\beta} = \frac{\Im_\chi(\alpha)}{\alpha}$ (si $\alpha, \beta \neq 0$) relation qui se généralise, en raison de la croissance de $\Im_\chi$ au cas où $\frac{\beta}{\alpha}$ est quelconque.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOURBAKI, *Éléments de Mathématiques. Topologie générale*, Paris.

[2] BOURBAKI, *Éléments de Mathématiques. Intégration*, Paris.

[3] J. DIXMIER, *Les Anneaux d'opérateurs de classe finie* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 66, 1949, p. 209-261).

[4] J. DIXMIER, *Sur la réduction des anneaux d'opérateurs* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 68, 1951, p. 185-202).

[5] J. DIXMIER, *Sur certains espaces considérés par M. H. Stone* (*Sum. Bras. Math.*, fasc. H t. 11, 1951, p. 151-182).

[6] J. DIXMIER, *Applications ♮ dans les anneaux d'opérateurs* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 230, 1950, p. 607-608).

[7] J. DIXMIER, *Applications ♮ dans les anneaux d'opérateurs* (*Comp. Math.*, t. 10, 1952, p. 1-55).

[8] J. DIXMIER, *Remarques sur les applications ♮* (*Arch. Math.*, t. 3, 1952, p. 290-297).

[9] J. DIXMIER, *Algèbres quasi-unitaires* (*Com. Math. Helv.*, t. 26, 1953, p. 276-321).

[10] H. A. DYE, *The Raden-Nicodym theorem* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 72, 1952, p. 242-280).

[11] I. GELFAND et N. NEUMARK, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space* (*Recueil Mathématique*, t. 13, 1943, p. 301-326).

[12] R. GODEMENT, *Sur la théorie des représentations unitaires* (*Ann. Math.*, t. 53, 1951, p. 6-124).

[13] R. GODEMENT, *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires* (*J. Math. pures et appl.*, t. 30, 1951, p. 1 à 110).

[13a] R. GODEMENT, *Deuxième Mémoire sur la théorie des caractères* (à paraître).

[14] I. KAPLANSKY, *Quelques résultats sur les anneaux d'opérateurs* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 231, 1950, p. 485-486).

[15] I. KAPLANSKY, *The structure of certain operator algebras* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 70, 1951, p. 219-255).

[16] F. J. MURRAY et J. VON NEUMANN, *On rings of operators* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 116-226).

[17] F. J. MURRAY et J. VON NEUMANN, *On rings of operators* II (*Trans. Amer. Soc.*, t. 41, 1937, p. 208-248).

[18] F. J. MURRAY et J. VON NEUMANN, *On rings of operators* IV (*Ann. Math.*, t. 44, 1943, p. 208-248),

[19] NAKANO, *Hilbert algebra* (*Tohoku Math. J.*, 2e série, t. 2, 1950.

[20] J. VON NEUMANN, *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen, Operatorem* (*Math. Ann.*, t. 102, 1929, p. 370-427).

[21] J. VON NEUMANN, *On a certain topology for rings of operators* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 111-115).

[22] J. VON NEUMANN, *On rings operators* III (*Ann. Math.*, t. 41, 1940, p. 94-161).

[23] J. VON NEUMANN, *On rings of operators, Reduction teheory* (*Ann. Math.*, t. 50, 1949, p. 401-485).

[24] R. PALLU DE LA BARRIÈRE, *Algèbres auto-adjointes faiblement fermées et algèbres hilbertiennes de classe finie* (*C. R. Acad. Sc.*, t., 232, 1951, p. 1994-1995).

[25] R. PALLU DE LA BARRIÈRE, *Algèbres unitaires et espaces de Ambrose* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 233, 1951, p. 997-999).

[26] R. PALLU DE LA BARRIÈRE, *Isomorphisme des ★-algèbres faiblement fermées d'opérateurs* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 795-797).

[27] SEGAL, *Decompositions of operator algebras* I *and* II (*Memoirs of the Amer. Math. Soc.*, t. 9, 1951).