

BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL DUBREIL

Contribution à la théorie des demi-groupes. III

Bulletin de la S. M. F., tome 81 (1953), p. 289-306

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1953__81__289_0

© Bulletin de la S. M. F., 1953, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTION A LA THÉORIE DES DEMI-GROUPES (III);

PAR M. P. DUBREIL.

Le présent travail, qui se rattache plus ou moins étroitement à des Mémoires antérieurs ⁽¹⁾, est divisé en deux parties. La première, formée des sections 1, 2, 3 concerne l'étude de certains idéaux remarquables d'un demi-groupe D : *idéaux fermés à droite* (par exemple), *idéaux larges*.

Les idéaux fermés à droite sont des idéaux à droite particuliers, caractérisés par une propriété de fermeture (au sens de E. H. Moore) ⁽²⁾ introduite à partir de l'équivalence \mathfrak{M}_D définie dans l'ensemble des parties $\mathfrak{X}(D)$ par la relation $XD = X'D$. Cette relation apparaît d'elle-même dans l'étude des *résidus* ⁽³⁾ : on sait que le résidu à droite W_H d'un *complexe* (ou partie non vide) H est l'ensemble des éléments w de D pour lesquels l'équation $wx \in H$ n'a aucune solution x ; W_H est un idéal à droite et une classe par rapport à l'équivalence principale à droite \mathcal{R}_H définie par H ([1], chap. I). L'étude des résidus se place donc au point où les théorèmes sur les demi-groupes qui s'inspirent de la Théorie des groupes s'articulent avec ceux qui généralisent la Théorie des anneaux. Je montre ici (§ 2) que *tout résidu à droite est un idéal fermé à droite, et réciproquement*. Parmi ces idéaux figurent toujours les *idéaux premiers*; tout idéal à droite de D est d'ailleurs fermé à droite dès que D possède un élément-unité à droite. L'idée qui conduit à ces résultats est extrêmement simple : elle consiste à regarder l'ensemble des parties $\mathfrak{X}(D)$ comme un *demi-groupe demi-réticulé* ou, plus brièvement, *gerbier*, qui possède en outre la propriété d'être *résidué* ⁽⁴⁾ : les règles de calcul qui en résultent sont rappelées, et leurs premières conséquences sont développées, dans le paragraphe 1.

⁽¹⁾ P. DUBREIL, *Contribution à la théorie des demi-groupes* (Mém. Acad. Sc., t. 63, 1941, p. 1-52), désigné ultérieurement par [1]; P. DUBREIL, *Contribution à la Théorie des demi-groupes* (II). (*Rendiconti di Matem. e. d. s. appl.*, 5^e série, vol. 10, 1951, p. 183-200), désigné par [2]; R. CROISOT, *Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 80, 1952, p. 217-223), désigné par [3].

⁽²⁾ E. H. MOORE, *Introduction to a form of general Analysis* (New Haven, 1910); voir aussi G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, 2^e édit., p. 49, où P. DUBREIL, *Algèbre*, t. 1, 2^e édit., chap. I, § 11 (Paris, Gauthier-Villars, sous presse).

⁽³⁾ [2], § 2, égalité (3) $W_H D = m D$.

⁽⁴⁾ Le succès de cette méthode confirme l'intérêt qui s'attache à cette structure de *gerbier*, dont on trouvera une étude systématique dans : M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *Leçons sur les treillis, les structures algébriques ordonnées et les treillis géométriques* (2^e partie) (Paris, Gauthier-Villars, sous presse).

Dans bien des questions, un complexe H d'un demi-groupe peut être remplacé par sa *trace* $T = D^2 \cap H$ sur l'ensemble D^2 des produits ab . On est ainsi conduit à considérer, dans l'ensemble des parties X de D , l'équivalence \mathcal{J} définie par la relation $D^2 \cap X = D^2 \cap X'$, et qui coïncide avec l'égalité si D est *globalement idempotent* ($D^2 = D$). Dans tout ensemble d'idéaux à droite équivalents mod \mathcal{J} , il y en a un *maximum*, qui est dit *large*. Je montre (§ 3) que *tout idéal premier est large*, et que le résidu W_H d'un complexe H est large dès que H vérifie la condition $H \cap D^2 \cap W_H = \emptyset$, ce qui a lieu notamment pour tout sous-demi-groupe de D .

Dans la seconde partie, je reviens d'abord (§ 4) sur l'étude des *complexes forts* d'un demi-groupe. Les propriétés des *sous-demi-groupes forts* ([1], chap. I, § 3, où les sous-demi-groupes sont désignés sous le nom de sous-groupoïdes) s'étendent aux *complexes forts contenant un sous-demi-groupe non vide*. Cette généralisation repose sur l'introduction de la notion, nouvelle, de *complexe unitaire par rapport à un autre complexe*. D'autre part, la lecture du travail de R. Croisot [3] m'a suggéré un théorème sur la comparaison d'un complexe fort H (non nécessairement symétrique) avec sa trace $T = D^2 \cap H$: c'est l'objet du théorème 12 dans lequel on voit de nouveau apparaître la condition $H \cap D^2 \cap W_H = \emptyset$, accompagnée de la condition symétrique $H \cap D^2 \cap {}_H W = \emptyset$.

La cinquième et dernière section est consacrée aux analogies supplémentaires qui peuvent apparaître, moyennant des hypothèses convenables, entre la décomposition d'un demi-groupe en classes par l'équivalence principale à droite relative à un sous-demi-groupe, et la décomposition d'un groupe en classes à droite par rapport à un sous-groupe.

1. Demi-groupe des parties; quotients. — A un demi-groupe D , associons le demi-groupe \mathcal{P} défini de la façon suivante. $\mathcal{P} = \mathcal{P}(D)$ est l'ensemble des parties de D ; le produit AB de deux parties non vides ou *complexes* A, B est le *complexe-produit*, c'est-à-dire l'ensemble des produits ab , où a, b décrivent respectivement A, B ; la partie vide \emptyset est élément-zéro de \mathcal{P} : $\emptyset X = X\emptyset = \emptyset$ quel que soit X dans \mathcal{P} . Par rapport à la multiplication ainsi définie, \mathcal{P} est un *demi-groupe*, que nous appellerons *demi-groupe des parties*.

Ordonné par la relation d'inclusion des parties, $X \subseteq Y$, \mathcal{P} est un treillis (et même une algèbre de Boole); la multiplication est *isotone*,

$$X \subseteq Y \quad \text{entraîne} \quad AX \subseteq AY \quad \text{et} \quad XB \subseteq YB,$$

et même *distributive par rapport à la réunion* :

$$A \left(\bigcup_{M \in \mathcal{F}} M \right) = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} AM, \quad \left(\bigcup_{M \in \mathcal{F}} M \right) A = \bigcup_{M \in \mathcal{F}} MA.$$

mais elle n'est pas *distributive par rapport à l'intersection* : on a seulement

$$A \left(\bigcap_{M \in \mathcal{F}} M \right) \subseteq \bigcap_{M \in \mathcal{F}} AM, \quad \left(\bigcap_{M \in \mathcal{F}} M \right) A \subseteq \bigcap_{M \in \mathcal{F}} MA.$$

Par exemple, dans un demi-groupe D où tout produit est égal à un même élément z , si l'on considère une famille \mathcal{F} de parties M dont l'intersection est vide, on a

$$A \left(\bigcap_{M \in \mathcal{F}} M \right) = \emptyset \subset \bigcap_{M \in \mathcal{F}} AM = \{z\}.$$

\mathcal{X} a donc une structure de *demi-groupe demi-réticulé*, ou *gerbier*.

\mathcal{X} est de plus un *gerbier résidué*. Rappelons que le *résiduel* ou *quotient à gauche* $Q = H \cdot R$ de H par R ($H, R \in \mathcal{X}$) est la plus grande des parties X de D vérifiant $XR \subseteq H$. On définit symétriquement le *quotient à droite* $H \cdot R$ au moyen de la relation $RY \subseteq H$. Dans le cas abélien, le quotient est désigné par $H : R$.

Remarque. — Si D possède un élément-zéro z , le complexe $Z = \{z\}$, contenu dans tout idéal, est élément-zéro de l'ensemble $\mathcal{X}' = \mathcal{X} - \{\emptyset\}$ des complexes de D ; il est cependant préférable, même dans ce cas, de considérer le demi-groupe \mathcal{X} plutôt que le demi-groupe \mathcal{X}' , parce que \mathcal{X}' , en général, n'est pas résidué. Par exemple, dans le demi-groupe multiplicatif $N_0 = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$, le quotient $H : R$ de l'ensemble H des nombres impairs par l'ensemble R des nombres pairs, est vide. De plus, \mathcal{X} a sur \mathcal{X}' l'avantage de posséder un *élément minimum*, \emptyset . On notera que, si D possède un élément zéro z , le complexe $Z = \{z\}$ n'est pas un zéro dans \mathcal{X} : on a en effet $\emptyset Z = Z\emptyset = \emptyset$ (et non Z).

Dans la fin de cette section et dans certains résultats des paragraphes 2 et 3 interviendront seulement les propriétés suivantes de l'ensemble des parties \mathcal{X} du demi-groupe D :

\mathcal{X} est un *gerbier résidué*;

\mathcal{X} possède un *élément minimum* \emptyset et un *élément maximum* D , on a $\emptyset X = X\emptyset = \emptyset$ et $AB = \emptyset$ (ou $BA = \emptyset$) avec $A \neq \emptyset$ entraîne $B = \emptyset$;

\mathcal{X} est un *demi-treillis complet* (c'est-à-dire toute union $\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$ existe).

Deux éléments quelconques X, Y de \mathcal{X} ont, dans \mathcal{X} , une *intersection* (ou borne inférieure) $X \cap Y$: \mathcal{X} est donc un *treillis*, et, d'après un théorème classique (*), ce treillis est *complet* (toute intersection existe).

Ces axiomes définissent une structure abstraite plus particulière que celles de gerbier et de gerbier résidué et, elle aussi, digne d'intérêt.

Propriétés. — Les relations $XR \subseteq H$ et $XR \subseteq DR \cap H$ étant vérifiées en même temps, on a

$$H \cdot R = (DR \cap H) \cdot R,$$

R étant donné, le quotient $H \cdot R$ ne dépend que de l'intersection $DR \cap H$.

On a $H \cdot \emptyset = D$ quel que soit $H \in \mathcal{X}$ (en particulier $\emptyset \cdot \emptyset = D$). Si $R \neq \emptyset$,

(*) Voir par exemple, G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, chap. IV, théorème 2, p. 49; ou M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR et R. CROISOT, *Leçons sur les treillis*, 1^{re} partie, chap. III, § 2, théorème 1. On notera que \mathcal{X} n'est pas un demi-groupe *réticulé*, cette dénomination impliquant la distributivité de la multiplication par rapport à l'intersection.

$Q = H \cdot R$ est l'ensemble des éléments q de D vérifiant $qr \in H$ quel que soit $r \in R$; en particulier, $\emptyset \cdot R = \emptyset$ ($R \neq \emptyset$).

Si l'on a $DR \subseteq H$, il en résulte $H \cdot R = D$; $D^2 \subseteq H$ entraîne donc $H \cdot R = D$ quel que soit $R \in \mathfrak{F}$ et l'on a, en particulier, $D \cdot R = D$.

Rappelons encore les règles de calcul classiques ⁽⁶⁾ :

- (1) $H \subseteq H'$ entraîne $H \cdot R \subseteq H' \cdot R$,
 (2) $R \subseteq R'$ entraîne $H \cdot R' \subseteq H \cdot R$.

On a

- (3) $(H \cdot R_1) \cdot R_2 = H \cdot (R_2 R_1)$,
 (4) $\left(\bigcap_{H \in \mathfrak{H}} H \right) \cdot R = \bigcap_{H \in \mathfrak{H}} H \cdot R$,
 (5) $H \cdot \left(\bigcup_{R \in \mathfrak{F}} R \right) = \bigcap_{R \in \mathfrak{F}} H \cdot R$,

en particulier

$$H \cdot R = \bigcap_{r \in R} H \cdot r,$$

en désignant, pour simplifier, par $H \cdot r$ le quotient à gauche de H par le complexe $\{r\}$.

THÉORÈME I. — 1° *Quels que soient* $A, R \in \mathfrak{F}$, *on a*

(6) $A \subseteq AR \cdot R$;

et, en particulier, $D = DR \cdot R$.

2° *AR est la plus petite partie H de D vérifiant*

(7) $A \subseteq H \cdot R$;

3° *Pour qu'il existe au moins une partie H de D vérifiant l'égalité*

(8) $A = H \cdot R$

il faut et il suffit que l'on ait

(9) $A = AR \cdot R$

ou, ce qui revient au même,

(9') $AR \cdot R \subseteq A$.

1° On a $AR \subseteq AR$, donc $A \subseteq AR \cdot R$. Pour $A = D$, il vient $DR \cdot R = D$.

2° L'ensemble \mathfrak{H} des parties H de D vérifiant (7) n'est pas vide puisque $AR \in \mathfrak{H}$.

D'après (4), l'intersection $H_0 = \bigcap_{H \in \mathfrak{H}} H$ vérifie (7); comme c'est, par construction,

⁽⁶⁾ Voir par exemple, pour le cas des idéaux d'un anneau commutatif, VAN DER WAERDEN *Moderne Algebra*, t. 2, 2^e édit., p. 24 (§ 85); pour celui des éléments d'un treillis multiplicatif, G. BIRKHOFF, *Lattice Theory*, 2^e édit., chap. XIII, § 1, p. 201; pour celui des éléments d'un groupe ordonné (vérifiant éventuellement des conditions plus fortes), M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT. *Leçons sur les treillis ...*, II^e partie, chap. II; (on notera qu'ici \mathfrak{F} est un treillis complet). Cette théorie de la résiduation, qui remonte à Dedekind et Macaulay, a été développée principalement par Krull, Ward et Dilworth.

la plus petite partie de D ayant cette propriété, nous avons $H_0 \subseteq AR$. D'autre part, $A \subseteq H_0 \cdot R$ entraîne $AR \subseteq H_0$, d'où l'égalité $H_0 = AR$.

3° Si une partie H de D vérifie (8), elle vérifie (7), donc contient AR , et nous avons, d'après (6) et (1),

$$A \subseteq AR \cdot R \subseteq H \cdot R = A$$

et par conséquent (9). Cette condition (9), nécessaire pour que (8) ait au moins une solution H , est évidemment suffisante, et, d'après (6), équivalente à (6').

A chaque partie R de D , associons les deux relations d'équivalence ${}_R\mathcal{U}$, \mathcal{M}_R , définies dans \mathfrak{D} de la façon suivante :

On pose

$$H \equiv H' \quad ({}_R\mathcal{U}) \quad \text{si et seulement si} \quad H \cdot R = H' \cdot R.$$

On pose

$$X \equiv X_1 \quad (\mathcal{M}_R) \quad \text{si et seulement si} \quad XR = X_1R.$$

Étudions leurs propriétés.

Puisque $H \cdot R = (DR \cap H) \cdot R$, ${}_R\mathcal{U}$ contient l'équivalence ${}_R\mathcal{J}$ définie en posant

$$H \equiv H' \quad ({}_R\mathcal{J}) \quad \text{si et seulement si} \quad DR \cap H = DR \cap H'.$$

Chaque classe $\text{mod}_R\mathcal{U}$ est *convexe* par rapport à la relation d'inclusion, c'est-à-dire $H \subseteq X \subseteq H'$ et $H \equiv H' \quad ({}_R\mathcal{U})$ entraînent $X \equiv H' \quad ({}_R\mathcal{U})$; d'après (4), chaque classe $\text{mod}_R\mathcal{U}$ est fermée par rapport à l'intersection des parties, donc contient une partie minimum, intersection de toutes les parties appartenant à cette classe.

A et R étant deux parties données de D ; les parties H vérifiant $A = H \cdot R$, s'il en existe, forment une classe $\text{mod}_R\mathcal{U}$. Cette classe comprend alors, d'après le théorème 1, le produit AR , qui est précisément la plus petite partie de cette classe.

D'après (3), l'équivalence ${}_R\mathcal{U}$ est contenue dans l'équivalence ${}_{SR}\mathcal{U}$, quel que soit $S \in \mathfrak{D}$.

L'équivalence \mathcal{M}_R est régulière à gauche pour la multiplication définie dans \mathfrak{D} . Chaque classe $\text{mod}\mathcal{M}_R$ est *convexe*, et fermée par rapport à la réunion des parties : chaque classe $\{X, \dots, X_1, \dots\} \text{mod}\mathcal{M}_R$ contient donc une partie maximum \bar{X} , réunion de toutes les parties appartenant à cette classe.

L'application $X \rightarrow \bar{X}$ est une fermeture au sens de E. H. Moore. On a évidemment $X \subseteq \bar{X}$ et $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$; il suffit donc de montrer que $Y \subseteq X$ entraîne $\bar{Y} \subseteq \bar{X}$. Or, on a, par hypothèse,

$$\bar{Y}R = YR \subseteq XR = \bar{X}R$$

et il suffit d'utiliser la proposition suivante :

LEMME 1. — Si \bar{X} est maximum dans sa classe $\text{mod}\mathcal{M}_R$, l'inclusion

$$CR \subseteq \bar{X}R$$

entraîne

$$C \subseteq \bar{X}.$$

On a en effet

$$\bar{X}R \subseteq (\bar{X} \cup C)R = \bar{X}R \cup CR = \bar{X}R,$$

d'où

$$(\bar{X} \cup C)R = \bar{X}R,$$

c'est-à-dire

$$\bar{X} \cup C = \bar{X} \quad (\mathfrak{N}_R),$$

ce qui exige $\bar{X} \cup C = \bar{X}$, donc $C \subseteq \bar{X}$.

La fermeture $X \rightarrow \bar{X}$ sera appelée *fermeture à droite associée à R*; les parties \bar{X} seront dites *fermées à droite par rapport à R*.

THÉORÈME 2. — 1° Pour toute partie X de D , on a

$$(10) \quad \bar{X} = XR \cdot R.$$

2° Les parties \bar{X} fermées à droite par rapport à R sont caractérisées par chacune des propriétés

a.

$$\bar{X} = \bar{X}R \cdot R.$$

b. Il existe au moins une partie $H \in \mathfrak{X}$ telle que $\bar{X} = H \cdot R$.

1° Par définition, \bar{X} est la réunion des parties X , vérifiant $X, R = XR$; chacune de ces parties est contenue dans le quotient $XR \cdot R = Q$, d'où $\bar{X} \subseteq Q$. Inversement, nous avons $QR \subseteq XR \subseteq \bar{X}R$, d'où, d'après le lemme 1, $Q \subseteq \bar{X}$, donc l'égalité.

2° \bar{X} étant la partie fermée à droite par rapport à R qui contient \bar{X} (puisque $\bar{\bar{X}} = \bar{X}$), on a, d'après 1°, $\bar{X} = \bar{X}R \cdot R$. Inversement, si une partie X vérifie l'égalité $X = XR \cdot R$, on a, toujours d'après 1°, $X = \bar{X}$, X est fermée à droite, et la propriété *a* est caractéristique pour les parties fermées à droite par rapport à R . La propriété *b*, équivalente à *a* d'après le théorème 1, 3°, caractérise également ces parties.

2. Idéaux fermés à droite. — Rappelons qu'un idéal à droite du demi-groupe D est une partie \mathfrak{m} de D ($\mathfrak{m} \in \mathfrak{X}$) vérifiant la condition $\mathfrak{m}D \subseteq \mathfrak{m}$; d'après cette définition et les règles de calcul du paragraphe 1, la partie vide \emptyset sera considérée comme un idéal à droite; toute réunion et toute intersection d'idéaux à droite sont des idéaux à droite.

H étant une partie quelconque de D , l'intersection des idéaux à droite contenant H est le plus petit idéal à droite $|H)$ contenant H . $|H)$ est appelé *idéal à droite engendré par H*. L'inclusion $H \subseteq |H)$ entraîne $HD \subseteq |H)D \subseteq |H)$, d'où $H \cup HD \subseteq |H)$; $H \cup HD$ étant un idéal à droite contenant H , nous avons finalement

$$(1) \quad |H) = H \cup HD,$$

$|H)$ et HD sont en général deux idéaux à droite distincts; ils coïncident si l'on a

$H \subseteq HD$ et seulement dans ce cas. L'égalité (1) entraîne $|H)D = HD$; on a donc

$$|H) \equiv H \quad (\mathfrak{N}_D).$$

L'idéal à droite $|h)$ engendré par un seul élément h est dit *principal*. L'idéal engendré par un ensemble fini $\{h_1, \dots, h_n\}$ est désigné par $|h_1, \dots, h_n)$. L'idéal $\left(\bigcup_{H \in \mathfrak{X}} H\right)$ engendré par une réunion est la réunion des idéaux $|H)$ correspondants.

On obtient aussi des idéaux par formation des quotients. Remarquons d'abord que le quotient à gauche $Q = H \cdot R$ est un idéal à gauche si H en est un, puisqu'on a

$$DQ \cdot R = D \cdot QR \subseteq DH \subseteq H, \quad \text{d'où} \quad DQ \subseteq Q.$$

THEOREME 3. — 1° *Quelle que soit la partie H de D , $Q = H \cdot R$ est un idéal à droite si R est un idéal à gauche; en particulier, les quotients à gauche $H \cdot D, H \cdot D^\alpha$ (α entier naturel) sont des idéaux à droite.*

2° *Les idéaux à droite de la forme $H \cdot D$ sont les parties \mathfrak{f} fermées à droite (par rapport à D), caractérisées par la condition*

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}D \cdot D.$$

Ces idéaux \mathfrak{f} seront dits fermés à droite.

1° Nous avons, si R est un idéal à gauche,

$$QD \cdot R = Q \cdot DR \subseteq QR \subseteq H,$$

donc $QD \subseteq Q$, et Q est un idéal à droite; il en est ainsi, notamment, pour des quotients de la forme $H \cdot D, H \cdot D^\alpha$.

2° D'après le théorème 2, les idéaux à droite $H \cdot D$ ne sont autres que les parties \mathfrak{f} fermées à droite (par rapport à D), caractérisées par la condition

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}D \cdot D$$

et l'on a

$$\mathfrak{f} = H \cdot D$$

pour toute partie H vérifiant

$$H \equiv \mathfrak{f}D \quad (D\mathfrak{X}).$$

Remarques. — 1. *Toute intersection $\bigcap_{H \in \mathfrak{X}} (H \cdot D)$ d'idéaux fermés à droite est l'idéal de même forme $\left(\bigcap_{H \in \mathfrak{X}} H\right) \cdot D$.*

2. Pour tout idéal à droite \mathfrak{m} , on a $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} \cdot D$, et, plus généralement, quel que soit $A \in \mathfrak{X}$, $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} \cdot A$ (puisque $\mathfrak{m}A \subseteq \mathfrak{m}$).

THEOREME 4. — *Pour que l'idéal à droite $|A)$ engendré par une partie A de D soit fermé à droite, il faut et il suffit que A vérifie la condition*

$$(2) \quad AD \cdot D \subseteq A \cup AD.$$

Pour que $|A)$ soit fermé à droite, il faut et il suffit que l'on ait

$$|A) = |A)D \cdot D,$$

c'est-à-dire

$$A \cup AD = AD \cdot D.$$

Or, on a toujours $A \subseteq AD \cdot D$ et $AD \subseteq AD \cdot D$; la condition (2) est donc nécessaire et suffisante.

Exemple. — Considérons le demi-groupe (abélien) $D = \{a, b, c, z\}$ défini par la table suivante :

	a	b	c	z
a	b	c	z	z
b	c	z	z	z
c	z	z	z	z
z	z	z	z	z

Puisque z est élément-zéro, tout idéal non vide contient z . Les idéaux de D sont par conséquent : \emptyset , $\mathfrak{m}_1 = \{z\} = zD = cD = (z)$, $\mathfrak{m}_2 = \{c, z\} = (c) = bD$, $\mathfrak{m}_3 = \{b, c, z\} = (b) = aD = D^2$, et enfin D . On a

$$\mathfrak{m}_1 D : D = \{z\} : D = \{c, z\} = \mathfrak{m}_2,$$

$$\mathfrak{m}_2 D : D = \{z\} : D = \mathfrak{m}_2,$$

donc, en désignant par $\bar{\mathfrak{m}}$ la fermeture de \mathfrak{m} (par rapport à D),

$$\mathfrak{m}_1 \subset \bar{\mathfrak{m}}_1 = \bar{\mathfrak{m}}_2 = \mathfrak{m}_2,$$

puis

$$\mathfrak{m}_3 D : D = \{c, z\} : D = \{b, c, z\} = \mathfrak{m}_3$$

et par conséquent

$$\mathfrak{m}_3 = \bar{\mathfrak{m}}_3.$$

Rappelons que le *résidu à droite* W_H d'une partie H de D est l'ensemble des éléments w de D vérifiant la condition (*)

$$(3) \quad H \cdot w = \emptyset$$

équivalente à

$$(4) \quad wD \subseteq D - H$$

ou, puisque $wD \subseteq D^2$, à

$$(5) \quad wD \subseteq D^2 - (D^2 \cap H).$$

On a donc

$$(6) \quad W_H = (D - H) \cdot D = [D^2 - (D^2 \cap H)] \cdot D$$

et par conséquent, *tout résidu à droite, de la forme $K \cdot D$, est un idéal fermé à droite.*

(*) [1], chap. I, § 1, p. 8; [2], chap. I, § 1 et 2, p. 2 à 5. Lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, il nous arrivera d'écrire résidu pour résidu à droite.

THÉOREME 5. — *Réciproquement, tout idéal fermé à droite \mathfrak{f} est le résidu de $H = D - \mathfrak{f}D$, de $K = D^2 - \mathfrak{f}D$, et de toute partie comprise entre H et K.*

Nous avons en effet, H et K étant définis comme dans l'énoncé,

$$\begin{aligned} W_H &= (D - H) \cdot D = \mathfrak{f}D \cdot D = \mathfrak{f}, \\ W_K &= [D^2 - (D^2 \cap K)] \cdot D = (D^2 - K) \cdot D = \mathfrak{f}D \cdot D = \mathfrak{f}. \end{aligned}$$

Puisque $K \subseteq X \subseteq H$ entraîne $W_H \subseteq W_X \subseteq W_K$, le résidu de toute partie X comprise entre H et K est également \mathfrak{f} .

Remarque. — Si X et Y sont deux parties de D ayant le même résidu à droite \mathfrak{f} , on a

$$\mathfrak{f} = (D - X) \cdot D = (D - Y) \cdot D,$$

donc

$$D - X \equiv D - Y \pmod{\mathfrak{f}D}.$$

Or, une classe de parties équivalentes $\text{mod}_p \mathfrak{f}D$ contient une partie *minimum* : il existe par suite un X *maximum* vérifiant la condition $W_X = \mathfrak{f}$. Cet X n'est autre que $H = D - \mathfrak{f}D$. Soit en effet

$$m = ar \quad (a \in \mathfrak{f}, r \in D)$$

un élément de $\mathfrak{f}D$; pour toute partie M comprenant m, on a $a \notin W_M$, d'où $\mathfrak{f} \neq W_M$: ainsi, une partie ayant \mathfrak{f} pour résidu est nécessairement disjointe de $\mathfrak{f}D$; $D - \mathfrak{f}D$ est donc la plus grande partie ayant \mathfrak{f} pour résidu à droite.

Indiquons encore les propriétés suivantes (cf. [2], chap. I, § 2, p. 5).

Pour qu'un idéal à droite \mathfrak{m} soit fermé à droite par rapport à une partie quelconque R de D, il suffit que l'on ait $\mathfrak{m} \cdot R = \mathfrak{m}$.

En effet, l'égalité $\mathfrak{m}R = \mathfrak{m}R (\subseteq \mathfrak{m})$ entraîne $X \subseteq \mathfrak{m} \cdot R$, donc ici $X \subseteq \mathfrak{m}$: l'idéal \mathfrak{m} est donc bien la partie maximum dans la classe $\text{mod}_p \mathfrak{f}D$ à laquelle il appartient.

Pour un idéal à droite premier \mathfrak{p} , la condition $\mathfrak{p} \cdot R = \mathfrak{p}$ est remplie dès que R n'est pas contenu dans \mathfrak{p} . Soit en effet $r \in R$, $r \notin \mathfrak{p}$; si $x \in \mathfrak{p} \cdot R$, on a $xr \in \mathfrak{p}$ d'où $x \in \mathfrak{p}$ donc $\mathfrak{p} \cdot R \subseteq \mathfrak{p}$, ce qui entraîne l'égalité.

Si $R = D$, nous avons $\mathfrak{p} \cdot D = \mathfrak{p}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \neq D$ et, puisque $D \cdot D = D$, nous avons

$$\mathfrak{p} \cdot D = \mathfrak{p}$$

pour tout idéal à droite premier \mathfrak{p} .

Nous avons obtenu la proposition suivante :

THÉOREME 6. — *Les idéaux à droite \mathfrak{m} vérifiant*

$$\mathfrak{m} \cdot D = \mathfrak{m},$$

en particulier les idéaux à droite premiers, et les intersections d'idéaux à droite premiers, sont des idéaux fermés à droite.

Remarque. — Il est facile de montrer directement que tout idéal à droite

premier \mathfrak{p} est fermé à droite. Soit $X \equiv \mathfrak{p} (\mathfrak{M}_0)$; si $x \in X$, on a $x^2 \in XD = \mathfrak{p}D \subseteq \mathfrak{p}$, d'où $x \in \mathfrak{p}$ et par conséquent $X \subseteq \mathfrak{p}$.

En résumé, nous avons établi qu'il y a identité entre :

les parties maximum appartenant aux classes \mathfrak{M}_0 , ou parties fermées à droite (par rapport à D) caractérisées par la condition

$$X = XD \cdot D;$$

les idéaux fermés à droite \mathfrak{f} , de la forme $H \cdot D$, $H \in \mathfrak{E}$;

les résidus à droite W_H des différentes parties H de D .

De plus, l'ensemble \mathfrak{F}^* des idéaux fermés à droite comprend les idéaux à droite \mathfrak{m} vérifiant l'égalité $\mathfrak{m} \cdot D = \mathfrak{m}$, en particulier les idéaux à droite premiers \mathfrak{p} ; enfin \mathfrak{F}^* est fermé par rapport à l'intersection des idéaux.

Pour que tout idéal à droite de D soit fermé à droite, il faut et il suffit que la condition (S) suivante soit remplie :

(S) Dans le demi-groupe multiplicatif \mathfrak{E}^* des idéaux à droite, D (élément maximum de \mathfrak{E} et de \mathfrak{E}^*) est simplifiable à droite.

En effet, il faut et il suffit que chaque classe mod \mathfrak{M}_0 contienne un seul idéal à droite, donc que l'égalité $\mathfrak{m}D = \mathfrak{m}'D$ entre idéaux à droite implique $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}'$.

Chacune des conditions suivantes, de plus en plus fortes, entraîne la condition (S), donc est suffisante pour que tout idéal à droite de D soit fermé à droite.

(S₁) $\mathfrak{m}D = \mathfrak{m}$, ou $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}D$, pour tout idéal à droite \mathfrak{m} .

(S₂) $X \subseteq XD$ pour tout $X \in \mathfrak{E}$; cette condition signifie que l'idéal à droite $|X) = X \cup XD$ engendré par X et l'idéal à droite XD coïncident, quel que soit $X \subseteq D$.

D'autre part, la condition (S₂) est une conséquence de chacune des conditions suivantes :

(I) D est idempotent, c'est-à-dire $x^2 = x$, pour tout $x \in D$;

(E_d) D possède au moins un élément neutre à droite;

(Q_d) Pour deux éléments a, m quelconques de D , il existe au moins un quotient à droite q ($m q = a$).

En résumé, nous avons les implications :

$$\begin{array}{c} (I) \searrow \\ (E_d) \rightarrow (S_2) \rightarrow (S_1) \rightarrow (S) \Leftrightarrow \text{Tout idéal à droite est fermé à droite.} \\ (Q_d) \nearrow \end{array}$$

3. Idéaux à droite larges. — Nous dirons qu'un demi-groupe D est globalement idempotent s'il vérifie la condition

$$(G I) \quad D^2 = D,$$

en d'autres termes si tout élément x de D est obtenu comme produit, $x = r s$.

Si l'on désigne par (E_g), (Q_g) les conditions respectivement symétriques

de (E_d) , (Q_d) , la propriété $(G I)$ résulte de l'une ou l'autre des conditions (E_d) , (E_g) ; elle résulte aussi de l'une ou l'autre des conditions (Q_d) , (Q_g) ; elle résulte enfin de la condition (S_2) et, *a fortiori*, de (I) .

THÉOREME 7. — Soit \mathfrak{m} un idéal à droite dans un demi-groupe D .

1° Les relations

$$(1) \quad \mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m} \cdot D \quad (\mathfrak{M}_D),$$

$$(2) \quad \mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m} D \quad (\mathfrak{N}_D)$$

ont lieu en même temps.

2° Tout idéal à droite \mathfrak{m} vérifie les relations (1) et (2) :

- a. dès que le demi-groupe D satisfait à la condition (S_1) , ou, naturellement, à une des conditions plus fortes mentionnées ci-dessus;
- b. dès que D est globalement idempotent.

1° Nous avons $\mathfrak{m} D \subseteq \mathfrak{m}$, donc

$$\mathfrak{m} D \cdot D \subseteq \mathfrak{m} \cdot D.$$

Comme $\mathfrak{m} D \cdot D$ est la fermeture à droite $\overline{\mathfrak{m}}$ de \mathfrak{m} , la congruence (1) exige que l'on ait $\mathfrak{m} \cdot D \subseteq \mathfrak{m} D \cdot D$, d'où l'égalité

$$(2') \quad \mathfrak{m} \cdot D = \mathfrak{m} D \cdot D,$$

c'est-à-dire la congruence (2).

Inversement, (2), sous la forme (2'), entraîne $\mathfrak{m} \cdot D = \overline{\mathfrak{m}} \equiv \mathfrak{m} \quad (\mathfrak{M}_D)$ c'est-à-dire (1).

2° a. La condition (S_1) , $\mathfrak{m} = \mathfrak{m} D$, entraîne évidemment (2), donc (1).

b. La relation

$$(\mathfrak{m} \cdot D) D \subseteq \mathfrak{m}$$

entraîne, si D est globalement idempotent,

$$(\mathfrak{m} \cdot D) D = (\mathfrak{m} \cdot D) D^2 \subseteq \mathfrak{m} D \subseteq (\mathfrak{m} \cdot D) D,$$

d'où

$$(\mathfrak{m} \cdot D) D = \mathfrak{m} D,$$

c'est-à-dire (1).

Dans l'ensemble \mathfrak{I}^* des idéaux à droite, considérons la relation d'équivalence \mathcal{J} définie en posant

$$\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{m}' \quad (\mathcal{J}) \quad \text{si et seulement si} \quad \mathfrak{m} \cap D^2 = \mathfrak{m}' \cap D^2.$$

\mathcal{J} se réduit à l'égalité si D est globalement idempotent. Banales dans ce cas, les considérations suivantes prennent leur intérêt dans les *demi-groupes qui ne sont pas globalement idempotents* (*).

(*) D'après les tables de K. S. CARMAN, J. C. HARDEN et E.-E. POSEY il y a 11 demi-groupes globalement idempotent d'ordre 3 sur 18, 75 demi-groupes d'ordre 4 globalement idempotents sur 121.

L'intersection $\mathfrak{m} \cap D^2$ est un idéal à droite, qu'il sera commode de désigner par \mathfrak{m}_2 et d'appeler *trace* de l'idéal \mathfrak{m} (sur D^2).

On a

$$\mathfrak{m}_2 \cdot D = (\mathfrak{m} \cdot D) \cap (D^2 \cdot D) = \mathfrak{m} \cdot D$$

puisque $D^2 \cdot D = D$; de cette propriété résulte l'inclusion

$$\mathcal{J} \subseteq \mathfrak{p} \mathcal{A}.$$

Remarque. — Pour tout idéal à droite \mathfrak{m} , on a $\mathfrak{m} D \subseteq \mathfrak{m} \cap D^2 = \mathfrak{m}_2$. S'il s'agit d'un idéal premier \mathfrak{p} , la relation $a b \in \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p}$ entraîne que l'un au moins des éléments a, b appartient à \mathfrak{p} , d'où $a b \in \mathfrak{p} D \cup D \mathfrak{p}$, et nous avons

$$\mathfrak{p} D \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{p} D \cup D \mathfrak{p}.$$

Si \mathfrak{p} est permutable à droite avec D (c'est-à-dire si l'on a $D \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p} D$), il vient

$$\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p} D.$$

Or, l'idéal \mathfrak{p} , fermé à droite, est déterminé d'une façon unique par la classe mod $\mathcal{A}_{\mathfrak{p}}$ à laquelle il appartient, c'est-à-dire par le produit $\mathfrak{p} D$. Les idéaux à droite qui sont à la fois premiers et permutables à droite avec D , en particulier les idéaux premiers d'un demi-groupe abélien, sont donc déterminés d'une façon unique par leur trace.

L'équivalence \mathcal{J} est régulière par rapport à la réunion et à l'intersection des idéaux à droite; les classes mod \mathcal{J} , évidemment convexes, contiennent un idéal à droite minimum qui est la trace commune \mathfrak{m}_2 , et un idéal à droite *maximum* \mathfrak{m}_1 , réunion de tous les idéaux de la classe. L'application $\mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}_1$ est d'ailleurs, dans \mathcal{A}^* , une fermeture (au sens de E. H. Moore), car on a par construction $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_1$ et $(\mathfrak{m}_1)_1 = \mathfrak{m}_1$, et d'autre part l'inclusion $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}$ entraîne

$$\mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{n}_1 \equiv \mathfrak{m} \cup \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \equiv \mathfrak{n}_1 \quad (\mathcal{J}),$$

donc $\mathfrak{m}_1 \cup \mathfrak{n}_1 \subseteq \mathfrak{n}_1$ (d'où l'égalité), et enfin $\mathfrak{m}_1 \subseteq \mathfrak{n}_1$.

Cet idéal \mathfrak{m}_1 , qui sera dit *large*, est de la forme

$$\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 + M,$$

et on doit avoir

$$\mathfrak{m}_1 D \subseteq \mathfrak{m}_1,$$

ou, puisque $\mathfrak{m}_1 D$ est contenu aussi dans D^2 ,

$$\mathfrak{m}_1 D \subseteq \mathfrak{m}_2.$$

Or, on a $\mathfrak{m}_1 D = \mathfrak{m}_2 D \cup MD$, avec $\mathfrak{m}_2 D \subseteq \mathfrak{m}_2$, la condition précédente se réduit donc à

$$MD \subseteq \mathfrak{m}_2$$

et il faut prendre pour M la plus grande partie de $D - D^2$ vérifiant cette relation, d'où

$$M = (\mathfrak{m}_2 \cdot D) \cap (D - D^2),$$

et enfin

$$(3) \quad \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 + (\mathfrak{m}_2 \cdot D) \cap (D - D^2).$$

Pour qu'un idéal à droite donné, \mathfrak{m} , soit large, il faut et il suffit qu'en posant $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m} \cap D^2$, on ait

$$(4) \quad (\mathfrak{m}_2 \cdot D) \cap (D - D^2) \subseteq \mathfrak{m}.$$

Cette condition (4) équivaut en effet à $\mathfrak{m}_1 \subseteq \mathfrak{m}$, donc à l'égalité $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}$.

Il suffit en particulier que l'on ait

$$(5) \quad \mathfrak{m}_2 \cdot D \subseteq \mathfrak{m}.$$

Comme on a $\mathfrak{m} \cdot D = \mathfrak{m}_2 \cdot D$, la condition nécessaire et suffisante (4) s'écrit encore

$$(4') \quad (\mathfrak{m} \cdot D) \cap (D - D^2) \subseteq \mathfrak{m}$$

et la condition suffisante (5) peut s'écrire sous l'une des formes

$$(5') \quad \mathfrak{m} \cdot D \subseteq \mathfrak{m},$$

$$(5'') \quad \mathfrak{m} \cdot D = \mathfrak{m}$$

(puisqu'on a toujours $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m} \cdot D$); ces conditions sont remplies par tout idéal premier et par toute intersection finie de tels idéaux premiers.

En résumé, nous avons la proposition suivante :

THÉOREME 8. — *Pour qu'un idéal à droite \mathfrak{m} soit large, il faut et il suffit qu'il vérifie les conditions (4) ou (4'); il suffit qu'il vérifie l'une des conditions (5), (5') ou (5''). En particulier, tout idéal à droite premier \mathfrak{p} est large.*

Moyennant une hypothèse simple, le résidu à droite W_H d'un complexe H est un idéal à droite large. Soient $H_2 = D^2 \cap H$, $W_2 = D^2 \cap W_H$ les traces respectives de H et de W_H sur D : nous dirons que H est *dégagé de son résidu à droite* W_H si

$$H_2 \cap W_2 = H \cap D^2 \cap W_H = \emptyset$$

(cette condition est plus faible que $H \cap W_H = \emptyset$, elle-même plus faible que $W_H = \emptyset$, c'est-à-dire H net à droite).

THÉOREME 9. — *Si le complexe H est dégagé de son résidu à droite, on a*

$$W_2 \cdot D = W_H \cdot D = W_H$$

et l'idéal à droite W_H est un idéal large.

D'après l'équation (6), (§2), on a $W_H = (D^2 - H_2) \cdot D$. Soit $a \in W_2 \cdot D$, nous avons, d'après l'hypothèse, $a \cdot D \subseteq W_2 \subseteq D^2 - H_2$, donc $a \in W_H$, et par suite $W_H \cdot D = W_2 \cdot D \subseteq W_H \subseteq W_H \cdot D$, d'où l'égalité. L'idéal à droite W_H est large d'après le théorème 8.

COROLLAIRE. — *Si H est un sous-demi-groupe de D , W_H est un idéal à droite large.*

En effet, H et W_H sont alors disjoints, et le théorème précédent s'applique.

Remarque. — Pour que W_H soit un idéal large, H étant un complexe quelconque, il faut et il suffit, d'après la condition (4'), que l'on ait

$$[(D^2 - H_2) \cdot D^2] \cap (D - D^2) \subseteq W_H,$$

mais cette condition nécessaire et suffisante semble peu maniable.

4. Complexes unitaires; complexes forts. — THÉOREME 10. — 1° Pour toute partie K d'un demi-groupe D , $K \cdot K = U$ est un sous-demi-groupe de D fermé à droite par rapport à K .

2° Tout complexe V unitaire à droite contenant K contient U .

3° Si l'on a $uK = K$ pour tout $u \in U$, U est unitaire à droite.

4° Si K est un sous-demi-groupe S , on a $S \subseteq S \cdot S = U$. Si S est globalement idempotent, on a $U \equiv S(\mathcal{M}_S)$.

1° Soient $u_1 \in U$, $u_2 \in U$; nous avons

$$u_1 u_2 \cdot K = u_1 \cdot u_2 K \subseteq u_1 K \subseteq K,$$

donc $u_1 u_2 \in U$. L'égalité $XK = UK$ entraîne

$$X \subseteq UK \cdot K \subseteq K \cdot K = U,$$

U est donc fermé à droite par rapport à K .

2° Soit $u \in U$; les relations $k \in K \subseteq V$ et $uk \in K \subseteq V$, où V est unitaire à droite, entraînent $u \in V$.

3° Soit $xu \in U$, avec $u \in U$; nous avons $xuK \subseteq K$ avec, par hypothèse $uK = K$; il en résulte $x \in U$, et U est unitaire à droite.

4° S étant un sous-demi-groupe, nous avons $S^2 \subseteq S$ d'où $S \subseteq S \cdot S = U$. Il en résulte

$$S^2 \subseteq US \subseteq S,$$

d'où, si S est globalement idempotent, $S^2 = US (= S)$, c'est-à-dire $U \equiv S(\mathcal{M}_S)$; U est alors la fermeture à droite \bar{S} de S par rapport à S .

N. B. — Dans un travail non encore publié, M. G. Thierrin établit en outre les propriétés suivantes.

1° U est saturé mod \mathcal{R}_K , où \mathcal{R}_K est l'équivalence principale à droite définie par K .

2° Si K est un complexe fort et si U n'est pas vide, U est une classe mod \mathcal{R}_K .

La définition suivante, qui généralise la notion de complexe unitaire à droite, va permettre d'étendre les propriétés des sous-demi-groupes forts ([1], chap. I, § 3, p. 14) aux complexes forts contenant un sous-demi-groupe.

Nous dirons qu'un complexe S est unitaire à droite par rapport à un complexe H si les relations

$$s \in S, \quad xs \in H$$

entraînent

$$x \in H,$$

en d'autres termes si l'on a

$$H \cdot s \subseteq H \quad \text{pour tout } s \in S.$$

Si l'en est ainsi, toute partie non vide S' de S est encore un complexe unitaire à droite par rapport à H .

Soit \mathcal{R}_H l'équivalence principale à droite définie par H ,

$$x \equiv y(\mathcal{R}_H) \Leftrightarrow H \cdot x = H \cdot y.$$

THÉOREME 11. — Soient H un complexe fort d'un demi-groupe D et S un sous-demi-groupe (non vide) contenu dans H .

1° S est contenu dans une classe $A \bmod \mathcal{R}_H$ distincte de W_H , et l'on a

$$(1) \quad A = H \cdot S = H \cdot s_1 \quad \text{pour tout } s_1 \in S.$$

Pour que la classe A soit contenue dans H , il faut et il suffit que S soit unitaire à droite par rapport à H .

2° Le sous-demi-groupe $U = S \cdot S (\neq \emptyset)$ est compris entre S et A :

$$(2) \quad S \subseteq U \subseteq A,$$

U , donc aussi S , est unitaire à droite par rapport à A .

3° Si l'on a $S \subseteq H \cdot H^{(*)}$, A est un sous-demi-groupe de D .

4° Si $D^2 \cap H (= T)$ est contenu dans S et si S est unitaire à droite, on a

$$S = U = A.$$

1° Quel que soit $s \in S$, nous avons $sS \subseteq S \subseteq H$, d'où $S \subseteq H \cdot s$; les quotients à droite de H par deux éléments s_1, s_2 de S se coupent, donc coïncident (puisque H est fort); nous avons

$$s_1 \equiv s_2 \quad (\mathcal{R}_H)$$

et S est contenu dans une classe $A \bmod \mathcal{R}_H$ (avec $A \neq W_H$).

Si $a \in A$, nous avons $H \cdot a = H \cdot s$, donc $S \subseteq H \cdot a, aS \subseteq H$, d'où $a \in H \cdot S$ et $A \subseteq H \cdot S \subseteq H \cdot s_1$ pour tout $s_1 \in S$. Mais d'autre part $x \in H \cdot s_1$ entraîne $s_1 \in H \cdot x$; comme $s_1 \in H \cdot s$ pour tout $s \in S$, nous avons $x \equiv s(\mathcal{R}_H)$, c'est-à-dire $x \in A$, d'où $H \cdot s_1 \subseteq A$, et les égalités (1).

D'après ces égalités, les deux propositions : $A \subseteq H$ et « S est unitaire à droite par rapport à H » sont équivalentes.

2° On a $S \subseteq U$ d'après le théorème 9; d'autre part $US \subseteq S \subseteq H$ entraîne $U \subseteq H \cdot S = A$. Soit $xu = a \in A$, où $u \in U$; il en résulte, pour tout $s \in S$,

$$x.us \in xu.S = aS \subseteq H, \quad \text{où } us = s_1 \in S,$$

donc $x \in H \cdot s_1 = A$; U est donc unitaire à droite par rapport à A .

3° Soient $a_1 \in A, a_2 \in A = H \cdot S$, et s un élément quelconque de S . Nous

(*) Cette condition s'écrit encore $SH \subseteq H$; elle est remplie dans les deux cas suivants :

1° H est un sous-demi-groupe de D : $SH \subseteq H^2 \subseteq H$;

2° S est permis à droite dans H , $SH \subseteq S \subseteq H$; en particulier, S est un idéal à droite de D .

avons $a_1 \equiv s(\mathcal{R}_H)$, d'où puisque, \mathcal{R}_H est régulière à droite, $a_1 \cdot a_2 \equiv s \cdot a_2(\mathcal{R}_H)$. Or nous avons $a_2 S \subseteq H$, d'où, en raison de l'hypothèse $S \subseteq H \cdot H$,

$$sa_2 \cdot S = s \cdot a_2 S \subseteq s \cdot H \subseteq H.$$

Il s'ensuit $sa_2 \in A$ et $a_1 a_2 \in A$; A est un sous-demi-groupe.

4° Si $a \in A$, nous avons $aS \subseteq H$, donc $aS \subseteq T = D^2 \cap H$ et, puisque nous supposons $T \subseteq S$, $aS \subseteq S$; S étant supposé unitaire à droite, il en résulte $a \in S$. donc $A \subseteq S$ et, d'après (2),

$$S = U = A.$$

Remarques. — 1. Un élément-unité à gauche, e , de D , s'il en existe, appartient à $U = S \cdot S$ et à A .

2° Si S est contenu dans D^2 , ce qui a lieu toutes les fois que S est globalement idempotent, on a $S \subseteq T$, et les hypothèses de la quatrième partie du théorème 11 ($T \subseteq S$, S unitaire à droite) entraînent $T = S = U = A$.

3° Pour un sous-demi-groupe fort ($S = H$), le théorème précédent redonne le théorème 16 de [1].

Dans un demi-groupe D qui n'est pas globalement idempotent, $D^2 \subset D$, le théorème suivant précise le rôle joué par la trace $T = D^2 \cap H$ d'un complexe H sur D ; nous supposons H non trivial, c'est-à-dire $T \neq \emptyset$. Il est clair que $H \cdot a = T \cdot a$ et $\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_T$ ([2], chap. I, § 2).

THÉOREME 12. — Soient H un complexe fort (non trivial), $\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_T$ l'équivalence principale à droite correspondante, \mathfrak{S} la trace de cette équivalence sur D^2 , \mathcal{R}'_T l'équivalence principale à droite définie, dans D^2 , par $T (= D^2 \cap H)$. W'_T le résidu à droite de T dans D^2 .

1° T est un complexe fort, non seulement dans D , mais dans D^2 ; on a

$$W_H \cap D^2 \subseteq W'_T, \quad \mathfrak{S} \subseteq \mathcal{R}'_T,$$

\mathfrak{S} et \mathcal{R}'_T ont même trace sur $D^2 - W'_T$;

2° Si de plus H est dégagé de son résidu à droite : $H \cap D^2 \cap W_H = \emptyset$, on a les égalités

$$W_H \cap D^2 = W'_T, \quad \mathfrak{S} = \mathcal{R}'_T;$$

3° Si en outre H est dégagé de son résidu à gauche : $H \cap D^2 \cap W_H = \emptyset$, en particulier si H est net ($W_H = {}_H W = \emptyset$), on a la correspondance biunivoque

$$D/\mathcal{R}_H \leftarrow \rightarrow D^2/\mathcal{R}'_T,$$

qui est un isomorphisme si \mathcal{R}_H (donc aussi \mathcal{R}'_T) est régulière des deux côtés.

1° Soient Q_a, Q'_a les quotients à droite de T , respectivement dans D et dans D^2 , par un élément a de D^2 . Nous avons $Q'_a = Q_a \cap D^2$, $Q_a = \emptyset$ entraîne $Q'_a = \emptyset$ d'où $W_H \cap D^2 \subseteq W'_T$. Si Q'_a coupe Q'_b , Q_a coupe Q_b , d'où $Q_a = Q_b$, puis $Q'_a = Q'_b$: T est donc fort dans D^2 . Si a, b sont deux éléments de D^2 ,

$a \equiv b (\mathfrak{C})$ ou (\mathcal{R}_H) entraîne $Q'_a = Q'_b$ donc $a \equiv b (\mathcal{R}'_T)$: nous avons $\mathfrak{C} \subseteq \mathcal{R}'_T$. Puisque $Q'_a \{Q'_b$ entraîne $Q_a\} Q_b$, \mathfrak{C} et \mathcal{R}'_T ont mêmes traces sur $D^2 - W'_T$.

2° Soit $\omega = p q \in W'_T$. S'il existait un élément x de D vérifiant $\omega x = h \in H$, où, par hypothèse, h , élément de T , n'appartient pas à W_H , on pourrait trouver $y \in D$ vérifiant $h y \in H$, d'où $\omega . x y \in D^2 \cap H = T$, avec $x y \in D^2$, ce qui est contradictoire. Nous avons donc $\omega \in W_H$ d'où $W'_T \subseteq W_H \cap D^2$ et par conséquent l'égalité.

W'_T étant alors une classe mod \mathfrak{C} et mod \mathcal{R}'_T , ces deux équivalences, qui ont même trace sur $D^2 - W'_T$, coïncident : $\mathfrak{C} = \mathcal{R}'_T$.

3° Toute classe mod \mathcal{R}_H contient un élément de D^2 , car, en premier lieu, le résidu W_H , s'il n'est pas vide, est permis à droite, donc contient des produits ; si maintenant A est une classe distincte de W_H et contenant l'élément a , on a une relation de la forme $a . x = h \in T \subseteq H$, avec par hypothèse, $h \notin W_H$. Il existe donc un élément m de D tel que $m h = m a . x \in H$ d'où, puisque H est fort, $m a \equiv a (\mathcal{R}_H)$ c'est-à-dire $m a \in A$.

En associant à chaque classe $X \in D/\mathcal{R}_H$ son intersection avec D^2 ,

$$X \cap D^2 = X' \in D^2/\mathfrak{C} = D^2/\mathcal{R}'_T$$

nous définissons entre les ensembles-quotients D/\mathcal{R}_H et D^2/\mathcal{R}'_T une correspondance biunivoque. Cette correspondance est un isomorphisme si \mathcal{R}_H est régulière non seulement à droite, mais à gauche, car $\mathfrak{C} = \mathcal{R}'_T$ est alors régulière elle aussi, et les classes X ou X' se multiplient comme des représentants qu'on peut, d'après ce qui précède, prendre dans D^2 .

Remarque. — Les différentes hypothèses faites dans le théorème précédent sont simultanément vérifiées, et par conséquent toutes les conclusions sont valables, lorsque H est un *complexe symétrique fort dégagé de son résidu W* . Des progrès importants dans l'étude des complexes symétriques forts ont été réalisés récemment par R. Croisot [3].

5. Analogies avec les groupes. — Soit S un sous-demi-groupe fort du demi-groupe D ; moyennant des hypothèses convenables, la partition de D réalisée par l'équivalence principale à droite \mathcal{R}_S présente d'intéressantes analogies avec la décomposition d'un groupe en classes à droite par rapport à un sous groupe ⁽¹⁰⁾.

THÉORÈME 13. — *Soit S un sous-demi-groupe fort de D .*

⁽¹⁰⁾ Rappelons que pour tout complexe fort H , les ensembles-quotients relatifs aux équivalences principales à droite α_H et à gauche ${}_H\alpha$ ont la même puissance :

$$D/\alpha_H \leftrightarrow D/{}_H\alpha,$$

ce qui résulte immédiatement de la considération des applications principales à droite f_H et à gauche ${}_Hf$ associées à H ([2], chap. I, § 1), et de la correspondance biunivoque très générale obtenue, dans l'étude des applications multiformes, à partir des propriétés des *parties stables*, par M. L. DUBREIL-JACOTIN, *Quelques propriétés des applications multiformes* (C. R. Acad. Sc., t. 230, 1950, p. 806).

1° Pour tout quotient non vide $S \cdot a$ ou $S \cdot a$ et pour toute classe $X \bmod \mathcal{R}_s$ distincte du résidu W_s ⁽¹¹⁾, on a

$$(S \cdot a)S \subseteq S \cdot a, \quad S(S \cdot a) \subseteq S \cdot a, \quad SX \subseteq X.$$

2° Si D vérifie la règle de simplification à droite et si, dans S , deux éléments quelconques s, s_1 ont un quotient à gauche,

$$s_1 = qs, \quad q \in S,$$

on a, pour toute classe $X \neq W_s$ et pour tout $x \in X$,

$$X = SX = Sx,$$

X a même puissance que S .

1° Nous avons $a(S \cdot a) \subseteq S$, donc $a(S \cdot a)S \subseteq S$ et par conséquent $(S \cdot a)S \subseteq S \cdot a$. De même, $S(S \cdot a) \subseteq S \cdot a$. S étant fort, la classe $X \neq W_s$ est un quotient à gauche non vide ([1], théorème 3, p. 9) et nous avons $SX \subseteq X$.

2° Soient $x, x_1 \in X (\neq W_s)$, et $y \in S \cdot x = S \cdot x_1$, donc $xy = s \in S$, $x_1y = s_1 \in S$, d'où, avec les notations de l'énoncé, $x_1y = qxy$, donc $x_1 = qx$, où $q \in S$. Nous avons donc $x_1 \in Sx$ ce qui permet d'écrire

$$X \subseteq Sx \subseteq SX (\subseteq X),$$

d'où la double égalité

$$X = SX = Sx.$$

L'application $s \rightarrow sx$ de S sur $X = Sx$ est biunivoque puisque D vérifie la règle de simplification à droite.

(11) Cette condition $X \neq W_s$ est remplie d'elle-même si $W_s = \emptyset$ (« S net à droite »).