M.-L. DUBREIL-JACOTIN
R. CROISOT

Équivalences régulières dans un ensemble ordonné

Bulletin de la S. M. F., tome 80 (1952), p. 11-35
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1952__80__11_0>

ÉQUIVALENCES RÉGULIÈRES DANS UN ENSEMBLE ORDONNÉ.

Par M. L. Dubreil-Jacotin et R. Croisot.

Introduction.

Dans un groupoïde G, c'est-à-dire dans un ensemble muni d'une opération, les relations d'équivalence les plus importantes sont les équivalences $\mathcal{R}$ régulières par rapport à l'opération (1).

Dans un treillis, selon les questions étudiées, on considère les équivalences régulières seulement par rapport à l'opération $\cup$ (par exemple) ou par rapport aux deux opérations $\cap$ et $\cup$. Dans le premier cas, il est naturel que l'opération $\cap$ ne joue qu'un rôle secondaire et l'on peut se placer dans un demi-treillis. Plus généralement, nous considérons ici un ensemble ordonné et nous nous proposons de définir les relations d'équivalence *régulières par rapport à la relation d'ordre* et d'étudier leurs propriétés.

I. — Définition de la régularité d'une relation d'équivalence dans un ensemble ordonné.

Rappelons qu'étant donnés deux ensembles ordonnés E et E^*, on appelle homomorphisme de E sur E^* une application α de E sur E^* telle que l'on ait

$$x \leqq y \text{ dans } E \Rightarrow \alpha(x) = x^* \leqq \alpha(y) = y^* \text{ dans } E^*.$$

Définition. — Nous dirons qu'une relation d'équivalence définie dans un ensemble ordonné E *est régulière par rapport à la relation d'ordre, ou simplement régulière, si et seulement si elle est l'équivalence d'application* $\mathcal{R}$

$$x \equiv y(\mathcal{R}) \Leftrightarrow \alpha(x) = \alpha(y)$$

dans un homomorphisme de E *sur un ensemble ordonné* E^*.

Traduisons cette propriété de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ par une condition liant $\mathcal{R}$ à la relation d'ordre dans E et ne faisant pas intervenir la notion d'homomorphisme.

Théorème 1. — *Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie dans un ensemble*

(1) Ou compatibles avec l'opération (N. Bourbaki, *Algèbre*, chap. I, p. 44); pour les définitions et propriétés, *voir* P. Dubreil, *Algèbre*, p. 80.

ordonné E *est régulière si et seulement si elle satisfait à la condition* (ρ) *suivante : les relations*

$$\begin{cases} a_1 \equiv a'_1(\mathcal{R}), \quad a_2 \equiv a'_2(\mathcal{R}), \quad \dots, \quad a_{n-1} \equiv a'_{n-1}(\mathcal{R}), \quad a_n \equiv a'_n(\mathcal{R}), \\ a'_1 \leqq a_2, \quad a'_2 \leqq a_3, \quad \dots, \quad a'_{n-1} \leqq a_n, \quad a'_n \leqq a_1 \end{cases}$$

entraînent

$$a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv \dots \equiv a_n(\mathcal{R}).$$

Supposons en effet qu'il existe, dans E, une suite de $2n$ éléments a_1, a'_1, a_2, a'_2, $\dots$, a_n, a'_n tels que l'on ait

$$\begin{aligned} &a_1 \equiv a'_1(\mathcal{R}), \quad a_2 \equiv a'_2(\mathcal{R}), \quad \dots, \quad a_{n-1} \equiv a'_{n-1}(\mathcal{R}), \quad a_n \equiv a'_n(\mathcal{R}), \\ &a'_1 \leqq a_2, \quad a'_2 \leqq a_3, \quad \dots, \quad a'_{n-1} \leqq a_n, \quad a'_n \leqq a_1. \end{aligned}$$

Considérons les images a_1^*, a_2^*, $\dots$, a_n^* de ces éléments dans E^*; on a

$$a_1^* \leqq a_2^* \leqq a_3^* \leqq \dots \leqq a_n^* \leqq a_1^*,$$

d'où l'on déduit, E^* étant un ensemble ordonné,

$$a_1^* = a_2^* = a_3^* = \dots a_n^*,$$

c'est-à-dire

$$a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \equiv \dots \equiv a_n(\mathcal{R}).$$

Réciproquement, si une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ satisfait à la condition (ρ), elle est régulière. En effet, considérons comme ensemble E^* l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$, et définissons dans $E/\mathcal{R}$ la relation binaire $\mathcal{O}$:

$$X \mathcal{O} Y \Leftrightarrow \exists\ x' \in X, \quad y \in Y, \quad a_1, \quad a'_1, \quad a_2, \quad a'_2, \quad \dots, \quad a_n, \quad a'_n$$

tels que l'on ait

$$\begin{aligned} &a_1 \equiv a'_1(\mathcal{R}), \quad a_2 \equiv a'_2(\mathcal{R}), \quad \dots, \quad a_n \equiv a'_n(\mathcal{R}), \\ &x' \leqq a_1, \quad a'_1 \leqq a_2, \quad \dots, \quad a'_n \leqq y. \end{aligned}$$

Cette relation est réflexive, transitive et antisymétrique, d'après la condition précédente; c'est donc une relation d'ordre que nous noterons $X \leqq Y$. L'ensemble E^*, muni de cette relation d'ordre, est manifestement image homomorphe de E, l'application étant $\alpha(y) = Y (= y^*) \Leftrightarrow y \in Y$.

Définition. — On appelle *image homomorphe de* E *attachée à* $\mathcal{R}$ l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$ ordonné par $\mathcal{O}$.

Remarque. — Une équivalence $\mathcal{R}$ régulière dans E étant donnée, l'ensemble E^*, image homomorphe de E, n'est pas univoquement déterminé. En tant qu'ensemble non ordonné, E est déterminé à un isomorphisme près, puisqu'il est équipotent à $E/\mathcal{R}$. Mais toute relation d'*ordre* dans E^* déduite de $\mathcal{O}$ par introduction de couples supplémentaires liés par $\leqq$, c'est-à-dire moins fine que $\mathcal{O}$, fait évidemment aussi de E^* une image homomorphe de E, α étant toujours un homomorphisme et $\mathcal{R}$ son équivalence d'application.

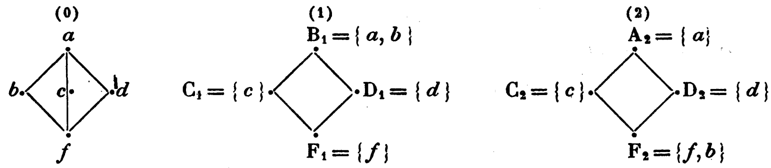
Propriétés. — On voit immédiatement, en vertu du théorème 1, que l'*intersection d'une famille quelconque d'équivalences régulières est régulière.*

Par contre, *le produit transitif de deux équivalences régulières est une équivalence qui n'est pas nécessairement régulière.*

Considérons, par exemple, dans l'ensemble ordonné à cinq éléments

$$E = \{ a, b, c, d, e, f \}$$

de diagramme (O), les deux équivalences régulières $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ auxquelles sont attachées les images homomorphes de E, qui ont pour diagrammes (1) et (2)



Le produit transitif $\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2$ n'est pas régulier, car $E/\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ se compose de trois classes $\{ a, b, f \}$, $\{ c \}$, $\{ d \}$ et l'on a

$$a_1 = a \equiv f = a'_1, \qquad a_2 = c = a'_2,$$
$$a'_1 < a_2, \qquad a'_2 < a_1,$$

et

$$a_2 \not\equiv a_1 \quad \text{puisque} \quad c \not\equiv a.$$

On a néanmoins la propriété :

Théorème 2. — *Les équivalences régulières définies dans un ensemble ordonné forment un treillis complet dont l'élément nul est l'égalité* ε, *et dont l'élément universel est l'équivalence absolue* ω.

Naturellement, le treillis $\mathcal{T}$, sous-ensemble du treillis des équivalences définies dans E n'en est pas un sous-treillis; $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ est l'intersection des équivalences régulières contenant $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ (ensemble non vide, puisque l'équivalence absolue en fait partie).

On définit aussi la *fermeture régulière* $\overline{\mathcal{R}}$ d'une équivalence $\mathcal{R}$ *quelconque* comme l'intersection des équivalences régulières moins fines qu'elle : c'est donc l'équivalence régulière la plus fine contenant $\mathcal{R}$ et l'on a évidemment

$$\mathcal{R} \leqq \overline{\mathcal{R}}, \qquad \overline{\overline{\mathcal{R}}} = \overline{\mathcal{R}}, \qquad \mathcal{R}_1 \leqq \mathcal{R}_2 \Rightarrow \overline{\mathcal{R}}_1 \leqq \overline{\mathcal{R}}_2,$$

ce qui justifie le nom de fermeture.

Nous aurons donc :

$$x \equiv y\,(\overline{\mathcal{R}}) \Leftrightarrow \exists\, a_1,\ a'_1,\ \ldots,\ a_{j-1},\ a'_{j-1},\ a_{j+1},\ a'_{+1},\ \ldots,\ a_n,\ a'_n,\ x',\ y'$$

tels que

$$x \equiv x'(\mathcal{R}), \quad y \equiv y'(\mathcal{R}), \quad a_i \equiv a'_i(\mathcal{R}) \quad \text{pour } i = 1, \ \ldots, \ j-1, \ j+1, \ \ldots, \ n,$$
$$x' \leqq a_1, \quad a'_1 \leqq a_2, \quad \ldots, \quad a'_{j-1} \leqq y, \quad y' \leqq a_{j+1}, \quad \ldots, \quad a'_n \leqq x.$$

Dans la suite de ce Mémoire, tant que nous n'aurons pas introduit d'autres conventions (§ V), le signe $\cap$ signifiera l'intersection des équivalences, le signe $\cup$ la fermeture régulière du produit transitif des équivalences régulières, c'est-à-dire l'union dans le treillis $\mathcal{T}$.

II. — Équivalences régulières ayant une classe donnée ou une famille de classes donnée.

THÉORÈME 3. — *Toute classe C modulo une équivalence régulière $\mathcal{R}$ définie dans un ensemble ordonné est convexe.*

En effet, supposons que l'on ait

$$x \,\&\, y \in \mathrm{C}, \qquad x \leqq z \leqq y.$$

Ceci permet d'écrire

$$y \equiv x(\mathcal{R}), \qquad z \equiv z(\mathcal{R});$$
$$x \leqq z, \qquad z \leqq y,$$

ce qui entraîne, d'après le théorème 1,

$$x \equiv z(\mathcal{R}), \quad \text{c'est-à-dire} \quad z \in \mathrm{C}.$$

Classes particulières.— Envisageons dans E*, image homomorphe de E attachée à $\mathcal{R}$, un élément minimal, s'il en existe, et considérons la classe I correspondant à cet élément. Elle possède la propriété suivante :

$$(\mathcal{I}) \qquad i \in \mathrm{I},\ x \leqq i \Rightarrow x \in \mathrm{I}.$$

En effet, on a, dans E*,

$$\mathrm{X} \leqq \mathrm{I}, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{X} = \mathrm{I}.$$

Nous appellerons *section commençante* (²) de E tout sous-ensemble I possédant la propriété ($\mathcal{I}$). En particulier, nous appellerons section commençante d'un élément a et nous désignerons par (a) l'ensemble des éléments x de E avec $x \leqq a$. L'intersection (au sens de la théorie des ensembles) d'une famille de sections commençantes est une section commençante si elle n'est pas vide. La réunion d'une famille de sections commençantes est une section commençante. Les sections commençantes, auxquelles on adjoint éventuellement le sous-ensemble vide constituent donc un sous-treillis complet du treillis des sous-ensembles de E.

Par dualité, à tout élément maximal de E*, s'il en existe, correspond une classe D, possédant la propriété suivante :

$$(\mathcal{D}) \qquad d \in \mathrm{D},\ d \leqq x \Rightarrow x \in \mathrm{D}.$$

Nous appellerons *section finissante* de E tout sous-ensemble D possédant la propriété ($\mathcal{D}$). En particulier, nous appellerons section finissante d'un élément a et nous désignerons par $)a($ l'ensemble des éléments x de E avec $x \geqq a$. Les sections finissantes auxquelles on adjoint éventuellement le sous-ensemble vide constituent un sous-treillis complet du treillis des sous-ensembles de E.

THÉORÈME 4. — *La condition nécessaire et susffisante pour qu'un sous-*

(²) Nous n'utiliserons pas le mot idéal, car il est employé par certains auteurs dans un sens plus restreint. *Cf.* par exemple, C. VAIDYANATHASWAMY, *The Ideal theory of the partially ordered set* (*Proc. Ind. Acad. Sc.*, vol. XIII, 1941). J. Colmez (*Thèse*, *Portugaliæ mathematica*, vol. 6, 1947), appelle sections à gauche les sections commençantes. Notre terminologie est en accord avec celle de A. Denjoy (*L'énumération transfinie*, Gauthier-Villars, Paris).

ensemble C *de* E *soit classée d'au moins une équivalence régulière définie dans* E *est que* C *soit convexe.*

L'équivalence la plus fine répondant à la question est l'équivalence $\mathcal{E}_C$

$$x \equiv y\,(\mathcal{E}_C) \Leftrightarrow x = y \quad \text{ou} \quad x \,\&\, y \in C.$$

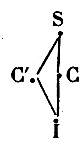
La condition est nécessaire d'après le théorème 1. Pour montrer qu'elle est suffisante, il suffit de montrer que l'équivalence $\mathcal{E}_C$ est régulière ; ce sera évidemment la plus fine répondant à la question.

Définissons dans $E/\mathcal{E}_C$ la relation binaire

$$C < (\text{ou} >)\, Y = \{y\}\,(y \notin C) \quad \Leftrightarrow \exists\, c \in C, \quad \text{avec} \quad c < y\,(\text{ou}\ y < c),$$
$$X = \{x\} < Z = \{z\}\,(x \,\&\, z \notin C \Leftrightarrow x < z) \quad \text{ou} \quad \exists\, c_1 \,\&\, c_2 \in C, \text{ tels que } x < c_1 \quad \text{et} \quad c_2 < z.$$

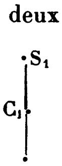
Cette relation est transitive et $X < Y$ et $Y < X$ sont incompatibles, puisque $x < c_1$, $c_2 < y$, et $y < c_3$, $c_4 < x$ exigent $y \in C$ et $x \in C$ en vertu de la convexité de C. Cette relation est donc une relation d'ordre strict et $E/\mathcal{E}_C$ est visiblement image homomorphe de E.

En général, il n'existe pas d'équivalence régulière moins fine que toutes les autres ayant C *pour classe.* Supposons C sous-ensemble strict de E. Considérons les sous-ensembles suivants de E : l'ensemble I des éléments inférieurs à au moins un élément de C et n'appartenant pas à C ; l'ensemble S des éléments supérieurs à au moins un élément de C et n'appartenant pas à C ; l'ensemble C′ des éléments qui ne sont comparables à aucun élément de C. Les sous-ensembles I, C, S et C′ de E sont disjoints en vertu de la convexité de C et forment une partition de E si aucun d'eux n'est vide. L'équivalence correspondante ρ est régulière, car l'ensemble quotient peut être ordonné suivant le diagramme suivant :



qui est image homomorphe de E (sans être nécessairement image homomorphe de E attachée à ρ).

Mais les deux chaînes



avec $\begin{cases} S_1 = S \\ C_1 = C \\ I_1 = I \cup C' \end{cases}$ et

avec $\begin{cases} S_2 = S \cup C' \\ C_2 = C \\ I_2 = I \end{cases}$

sont les images homomorphes de E attachées aux deux équivalences d'application correspondantes $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ qui sont régulières et admettent C pour classe; s'il existait une équivalence régulière admettant C pour classe moins fine que toutes les autres, elle serait moins fine que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, donc moins fine que leur produit transitif qui correspond à la partition de E en deux classes, C et E — C.

Cette équivalence, qui est la moins fine de celles admettant C pour classe, n'est pas régulière.

Au contraire, on voit aisément que, si l'un au moins des trois sous-ensembles I, S et C′ de E est vide, il existe une équivalence régulière moins fine parmi celles admettant C pour classe. Si C′ est vide, c'est l'équivalence correspondant à la partition de E en ceux des sous-ensembles C, I, S qui sont non vides. Si I (ou S) est vide, c'est celle qui correspond à la partition de E en deux classes C et $S \biguplus C'$ (ou $I \biguplus C'$).

On peut donc compléter le théorème 3 par le

THÉORÈME 5. — C *étant un sous-ensemble convexe de* E, *il y a une équivalence régulière* $\mathcal{F}_C$ *moins fine que toutes les autres ayant* C *pour classe si et seulement si* C *est une section finissante ou commençante ou si tout élément de* E *est comparable à un élément au moins de* C.

Les théorèmes 4 et 5 se généralisent de la manière suivante :

THÉORÈME 4′. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille* $\mathcal{A} = \{C_\alpha\}\,\alpha \in A$ *de sous-ensembles convexes distincts* C_α *de l'ensemble ordonné* E *soit une famille de classes dans au moins une équivalence régulière définie dans* E *est qu'elle satisfasse à la propriété*

$$(\pi) \qquad x'_{\alpha_1} \leqq x_{\alpha_2}, \quad x'_{\alpha_2} \leqq x_{\alpha_3}, \quad \ldots, \quad x'_{\alpha_n} \leqq x_{\alpha_1},$$

avec

$$x_{\alpha_i} \,\&\, x'_{\alpha_i} \in C_{\alpha_i} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n,$$

La propriété est évidemment nécessaire d'après le théorème 1. Remarquons d'ailleurs qu'en vertu de la propriété (π), les C_{α_i} sont disjoints, car, s'il existe ξ tel que $\xi \in C_{\alpha_1}$ et $\xi \in C_{\alpha_2}$, avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$, en prenant $x'_{\alpha_1} = x_{\alpha_1} = \xi$ et $x'_{\alpha_2} = x_{\alpha_2} = \xi$, on aurait $x'_{\alpha_1} \leqq x_{\alpha_2}$, $x'_{\alpha_2} \leqq x_{\alpha_1}$, contrairement à la propriété (π).

Pour démontrer que la condition (π) est suffisante, montrons que la *relation* $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$

$$x \equiv y(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}) \Leftrightarrow x = y \quad \text{ou} \quad \exists\, \alpha \in A \ \text{ tel que } x \,\&\, y \in C_\alpha$$

est une équivalence régulière répondant à la question. Ce sera alors évidemment *la plus fine.*

Cette relation est évidemment une équivalence ayant les C_α pour classes. Montrons qu'elle est régulière. En effet, si elle ne l'était pas, d'après le théorème 1, on pourrait trouver une suite

$$a_1 \equiv a'_1(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}), \quad \ldots, \quad a_n \equiv a'_n(\mathcal{E}_{\mathcal{A}}),$$

avec

$$a'_1 \leqq a_2, \quad \ldots, \quad a'_n \leqq a_1$$

et $a_i \not\equiv a_j$ pour un i et un j au moins.

Dans cette suite, si $a_k \notin C_\alpha$ quel que soit $\alpha \in A$, on a

$$a'_k = a_k, \quad a'_{k-1} \leqq a_k, \quad a'_k \leqq a_{k+1}, \quad \text{donc} \quad a'_{k-1} \leqq a_{k+1}$$

et l'on peut supprimer tous les éléments a_k n'appartenant pas aux C_α sans changer les relations restantes; mais la propriété (π) entraîne que les C_α ne soient pas distincts, soit $C_\alpha = C_{\alpha_0}$ pour tous les α intervenant. Si $\mathcal{E}_{\mathfrak{A}}$ n'était pas régulière, on pourrait donc trouver une suite

$$x_1 < a_1, \quad a'_1 < x_2, \quad x_2 < a_2, \quad a'_2 < x_3, \quad \ldots, \quad x_l < a_l, \quad a'_l < x_1,$$

avec $a_i \,\&\, a'_i \in C_{\alpha_0}$ pour $i = 1, 2, \ldots, l$, $x_i \notin C_0$ pour $i = 1, 2, \ldots, l$; ce qui est impossible en vertu de la convexité de C_{α_0}.

Remarque. — La propriété (π) est trivialement vérifiée, quelle que soit la famille $\mathfrak{A}$ de sous-ensembles convexes disjoints de E, si E est une chaîne.

Corollaire. — *A toute famille $\mathfrak{A}$ de sous-ensembles $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ qui sont disjoints et sont tous des sections commençantes ou des sections finissantes, correspond au moins une équivalence régulière admettant ces sous-ensembles pour classes, la plus fine équivalence répondant à la question étant l'équivalence $\mathcal{E}_{\mathfrak{A}}$.*

Les sous-ensembles C_α étant évidemment convexes, il suffit de remarquer que la propriété (π) est vérifiée. En effet, si l'on se place dans l'hypothèse de (π), C_{α_1} est une section commençante ou une section finissante. Dans le premier cas, $x'_{\alpha_n} \leqq x_{\alpha_1}$ implique $C_{\alpha_n} = C_{\alpha_1}$ et, de proche en proche,

$$C_{\alpha_2} = C_{\alpha_3} = \ldots = C_{\alpha_n} = C_{\alpha_1}.$$

Dans le second cas, $x'_{\alpha_1} \leqq x_{\alpha_2}$ implique $C_{\alpha_2} = C_{\alpha_1}$ et, de proche en proche,

$$C_{\alpha_n} = C_{\alpha_{n-1}} = \ldots = C_{\alpha_2} = C_{\alpha_1},$$

La famille $\mathfrak{A}$ de sous-ensembles convexes C_α de l'ensemble ordonné E satisfaisant à la propriété (π) étant donnée, nous poserons, en appelant C la réunion des C_α, les définitions suivantes :

Définitions. — 1° On dit que $b \in E - C$ *est lié à* $a \in E - C$ *par la famille* $\mathfrak{A}$ si et seulement si $\exists\, \alpha_i \in A$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$ et $c_i \,\&\, c'_i \in C_{\alpha_i}$ pour $i = 1, 2, \ldots, k$, tels que

$$(1) \qquad a \leqq c_1, \quad \ldots, \quad c'_i \leqq c_{i+1}, \quad \ldots, \quad c'_k \leqq b.$$

On écrit alors $a \lambda_{\mathfrak{A}} b$.

2° On dit que *a et b sont liés par la famille* $\mathfrak{A}$ si a est lié à b ou si b est lié à a par la famille $\mathfrak{A}$.

Remarquons qu'un élément c ne peut être lié à lui-même, car cela entraînerait que les C_α ne satisferaient pas à la propriété (π).

3° Lorsque *a et b sont non liés par la famille* $\mathfrak{A}$, nous écrirons $a \nu_{\mathfrak{A}} b$.

On a alors les propriétés suivantes :

1° $a \lambda_{\mathfrak{A}} b$ et $a \equiv b(\mathcal{R})$, où $\mathcal{R}$ est une équivalence régulière quelconque admettant les C_α pour classes, *sont incompatibles*, car (1) et $a \equiv b(\mathcal{R})$ sont incompatibles en raison du théorème 1 ;

2° Soit $a \nu_{\mathfrak{A}} b$; appelons Δ l'ensemble $\{a, b\}$ si a et b ne sont pas comparables dans E et le segment $[a, b]$ ou $[b, a]$ si a et b sont comparables [3]. On a :

---

[3] Si l'on a $a < b$, on appelle segment $[a, b]$ l'ensemble des $x \in E$ tels que $a \leqq x \leqq b$.

Les C_α *et* Δ *satisfont à la condition* (π). En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait une suite

$$\omega'_1 \leqq c_1, \quad \ldots, \quad c'_j \leqq c_{j+1}, \quad \ldots, \quad c'_n \leqq \omega_1,$$

avec $c_j \,\&\, c'_j \in C_{\alpha_j}$, $\alpha_j \in A$ pour $j = 1, 2, \ldots, n$, et $\omega_1 \,\&\, \omega'_1 \in \Delta$. Si l'on avait $\omega_1 = \omega'_1$, cet élément serait lié à lui-même, ce qui est impossible; si l'on avait $\omega_1 \neq \omega'_1$, il en résulterait $a \lambda_{\mathfrak{A}} b$ ou $b \lambda_{\mathfrak{A}} a$, impossible aussi, puisque $a \nu_{\mathfrak{A}} b$. Donc, il existe toujours au moins une équivalence régulière ayant les C_α pour classes et dans laquelle deux éléments quelconques a et b tels que $a \nu_{\mathfrak{A}} b$ soient congrus.

Par suite, *pour qu'il existe une équivalence* $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ *moins fine* que toutes les autres ayant les C_α *pour classes*, *il est nécessaire que la relation binaire* $\nu_{\mathfrak{A}}$ *soit transitive*. Nous allons voir que cette condition est aussi suffisante.

$\nu_{\mathfrak{A}}$ étant réflexive, transitive et évidemment symétrique est, par construction, une équivalence définie dans $E - C$. Considérons alors la relation définie dans E par

$$x \equiv y(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}) \Leftrightarrow \exists \alpha \text{ tel que } x \,\&\, y \in C_\alpha \quad \text{ou} \quad x \nu_{\mathfrak{A}} y \quad \text{pour } x \,\&\, y \in E - C.$$

Cette relation est évidemment une équivalence et, si elle est régulière, c'est la moins fine des équivalences régulières définies dans E admettant les C_α pour classes.

Or, $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$ est régulière. En effet, s'il n'en était pas ainsi, d'après le théorème 1, on pourrait trouver une suite d'éléments de E tels que

$$x_1 \equiv x'_1(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}), \quad x_2 \equiv x'_2(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}), \quad \ldots, \quad x_k \equiv x'_k(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}), \quad x_i \,\&\, x'_i \in E,$$
$$x'_1 \leqq x_2, \quad x'_2 \leqq x_3, \quad \ldots, \quad x'_k \leqq x_1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

les x_i n'étant pas tous congrus modulo $\mathcal{F}_{\mathfrak{A}}$.

Mais une telle suite où tous les $x_i \,\&\, x'_i$ seraient éléments des C_α ne peut être construite, puisque les C_α satisfont à (π).

Montrons qu'une telle suite ne peut exister avec certains éléments appartenant à $E - C$. On peut d'abord supposer $x_i \not\equiv x_j(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}})$ pour $i \neq j$. Sinon, on pourrait se ramener à des suites du même type et ayant moins d'éléments.

Soit $x_i = a_1 \in E - C$ et $x_{i+p} = a_2$ le premier élément de la suite $x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_k, x_1, \ldots, x_i$ tel que $a_2 \notin C$. Si $p = 1$, on a $x'_i = a'_1 \leqq a_2$. Sinon, on a $a'_1 \lambda_{\mathfrak{A}} a_2$, puisqu'il existe $c_{\beta_j} \,\&\, c'_{\beta_j} \in C_{\beta_j}$ avec $\beta_j \in A$ pour $j = 1, 2, \ldots, p-1$ tels que

$$a'_1 \leqq c_{\beta_1}, \quad c'_{\beta_1} \leqq c_{\beta_2}, \quad \ldots, \quad c'_{\beta_{p-1}} \leqq a_2.$$

On ne peut avoir $a_2 = a_1$, puisqu'on a $a_1 \nu_{\mathfrak{A}} a'_1$ et que l'on doit supposer $k > 1$ (autrement dit, il existe des indices $j \neq i$ pour lesquels $a_j \notin C$).

De $a_1 \not\equiv a_2(\mathcal{F}_{\mathfrak{A}})$, résulte $a_1 \lambda_{\mathfrak{A}} a_2$ (car $a_2 \lambda_{\mathfrak{A}} a_1$ est impossible, puisque cela entraînerait $a'_1 \lambda_{\mathfrak{A}} a_1$). On a alors, de proche en proche, $a_2 \lambda_{\mathfrak{A}} a_3$, d'où $a_1 \lambda_{\mathfrak{A}} a_3, \ldots$, et finalement $a_1 \lambda_{\mathfrak{A}} a_1$, ce qui est impossible.

On obtient donc le résultat suivant :

THÉORÈME 5'. — *Étant donnée une famille* $\mathfrak{A}$ *de sous-ensembles convexes* $\{C_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *d'un ensemble ordonné* E, *si la condition* (π) *est vérifiée, pour qu'il* *existe une équivalence régulière moins fine que toutes les autres parmi celles qui admettent les* C_α *comme classes, il faut et il suffit que la relation* $\nu_{\mathcal{A}}$ *définie dans* $E - C = E - \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$ *par*

$$a \nu_{\mathcal{A}} b \Leftrightarrow a \text{ et } b \text{ ne sont pas liés par } \mathcal{A}$$

soit transitive.

Corollaire. — *Si les sous-ensembles* C_α *sont disjoints et sont tous des sections commençantes ou des sections finissantes, il existe une équivalence régulière moins fine que toutes les autres parmi celles qui admettent les* C_α *comme classes. On l'obtient en ajoutant aux classes* C_α, *la classe* $E - C$.

En effet, dans ce cas, deux éléments de $E - C$ ne sont jamais liés par $\mathcal{A}$.

Théorème 6. — $\mathcal{R}$ *étant une équivalence régulière ayant une famille* $\mathcal{A}$ *de classes donnée, si* $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ *n'existe pas, il existe néanmoins une équivalence moins fine que* $\mathcal{R}$ *maximale parmi les équivalences régulières possédant la même propriété.*

Ceci résulte, par application du théorème de Zorn, du fait que le produit transitif d'une chaîne d'équivalences régulières ayant une famille de classes données possède les mêmes propriétés. En effet, si $\{\mathcal{R}_\iota\}_{\iota \in I}$ désigne une chaîne de telles équivalences, on a

$$x \equiv y\left(\bigcup_{\iota \in I} \mathcal{R}_\iota\right) \Leftrightarrow \exists\, \iota \quad \text{avec} \quad x \equiv y(\mathcal{R}_\iota).$$

La condition de régularité, qui ne fait intervenir qu'un nombre fini d'éléments de E, en résulte, ainsi que la propriété d'avoir une famille de classes données.

III. — Étude du treillis $\mathcal{T}$ des équivalences régulières définies dans un ensemble ordonné E.

Théorème 7. — $\mathcal{R}$ *étant une équivalence régulière définie dans* E *et* E^* *l'image homomorphe de* E *attachée à* $\mathcal{R}$, *la section finissante* $)\mathcal{R}($ *du treillis* $\mathcal{T}$ *est un treillis isomorphe au treillis* $\mathcal{T}^*$ *des équivalences régulières définies dans* E^*.

Considérons l'application biunivoque f de l'ensemble des équivalences (quelconques) définies dans E moins fines que $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des équivalences (quelconques) définies dans $E^* = E/\mathcal{R}$

$$\rho \xrightarrow{f} \rho^* \quad \text{si} \quad A \equiv B(\rho^*) \Leftrightarrow \exists\, a \in A \quad \text{et} \quad b \in B, \qquad \text{avec} \quad a \equiv b(\rho).$$

Nous montrons que ρ^* est régulière, si ρ est régulière, en montrant que l'image homomorphe de E attachée à ρ, E/ρ, est image homomorphe de E^*, ρ^* étant une équivalence d'homomorphisme. En effet, si l'on a $X \leqq Y$ dans E^*, il existe dans E des éléments x', a, a', b, b', ..., l, l', y tels que l'on ait

$$\begin{array}{cccccc} x' \to X, & a \equiv a'(\mathcal{R}), & b \equiv b'(\mathcal{R}) & \ldots, & l \equiv l'(\mathcal{R}), & y \to Y, \\ & x' \leqq a, & a' \leqq b & \ldots, & l' \leqq y. & \end{array}$$

ρ étant moins fine que $\mathcal{R}$, on en déduit que la classe de x' modulo ρ est, dans E/ρ, inférieure ou égale à la classe de y modulo ρ. Or, dans l'application canonique de l'ensemble quotient de E par ρ sur l'ensemble quotient de E^* par ρ^*, de ces classes correspondent aux classes de X modulo ρ^* et de Y modulo ρ^* respectivement, ce qui établit l'homomorphisme de E^* sur E/ρ.

Réciproquement, on voit que si ρ^* est régulière ($\mathcal{R}$ étant régulière), ρ est régulière.

Enfin, puisque f et f^{-1} respectent l'inclusion des équivalences, $)\mathcal{R}($ et $\mathcal{T}^*$ sont isomorphes.

Conséquence. — Le segment $[\mathcal{R}, \rho]$ *de* $\mathcal{T}$ *est isomorphe à la section commençante* (ρ^*) *de* $\mathcal{T}^*$.

Théorème 8. — *$\mathcal{R}$ étant une équivalence régulière définie dans* E *et* $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *la famille de toutes les classes modulo $\mathcal{R}$, la section commençante $(\mathcal{R})$ de $\mathcal{T}$ est isomorphe au produit cardinal des treillis $\mathcal{T}_\alpha$ des équivalences régulières définies dans chacun des sous-ensembles ordonnés* C_α *de* E.

Soit φ l'application de $(\mathcal{R})$ dans $\prod\limits_{\alpha\in A}\mathcal{T}_\alpha$ définie par $\varphi(\rho)=\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$, où ρ_α désigne l'équivalence, évidemment régulière, induite par ρ dans C_α. Cette application est *biunivoque*. C'est une application de $(\mathcal{R})$ *sur* $\prod\limits_{\alpha\in A}\mathcal{T}_\alpha$; en effet, ρ_α désignant, quel que soit $\alpha\in A$, une équivalence régulière définie dans C_α, il existe une équivalence $\rho\in(\mathcal{R})$ et une seule, qui induise ρ_α dans C_α pour tout α. Cette équivalence est régulière dans E. En effet, supposons que l'on ait

$$\begin{array}{llll} a_1\equiv a'_1(\rho), & a_2\equiv a'_2(\rho), & \ldots, & a_n\equiv a'_n(\rho), \\ a'_1\leqq a_2, & a'_2\leqq a_3, & \ldots, & a'_n\leqq a_1. \end{array}$$

ρ étant plus fine que $\mathcal{R}$, ces relations sont valables si l'on remplace ρ par $\mathcal{R}$. On en déduit, puisque $\mathcal{R}$ est régulière,

$$a_1\equiv a_2\equiv\ldots\equiv a_n(\mathcal{R}).$$

Donc, tous les éléments écrits appartiennent à la même classe C_α. L'équivalence ρ_α étant régulière dans C_α, on a

$$a_1\equiv a_2\equiv\ldots\equiv a_n(\rho_\alpha), \qquad \text{d'où} \qquad a_1\equiv a_2\equiv\ldots\equiv a_n(\rho).$$

L'application φ et l'application φ^{-1} respectant l'inclusion des relations d'équivalences, on a l'isomorphisme annoncé.

Nous nous proposons maintenant d'étudier le treillis $\mathcal{T}$ au point de vue de ses points (éléments couvrant ε) et de ses éléments maximaux (éléments couverts par ω).

Théorème 9. — *Une équivalence est maximale dans $\mathcal{T}$ si et seulement si sa partition est formée de deux classes dont l'une est une section commençante (et, par suite, l'autre, une section finissante).*

Il est clair qu'une telle équivalence est régulière et maximale. Réciproquement, soit une équivalence régulière maximale $\mathcal{R}$. Si elle correspondait à une partition de E en plus de deux classes, on pourrait trouver dans E*, image homomorphe de E attachée à $\mathcal{R}$, une équivalence régulière distincte de ε et ω (ce qui est toujours possible dans un ensemble ordonné E* ayant plus de deux éléments, car on peut toujours trouver un sous-ensemble strict de E* convexe ayant plus d'un élément) et $\mathcal{R}$ ne serait pas couverte par l'équivalence absolue. Soit alors A une des classes de la partition de $\mathcal{R}$; montrons que c'est une section finissante ou commençante; s'il n'en était pas ainsi, on aurait

$$a \,\&\, a' \in \mathrm{A},\ x \,\&\, x' \in \mathrm{E} - \mathrm{A} \qquad \text{avec} \quad x < a',\ a < x',$$

mais alors, $x \equiv x'(\mathcal{R})$ serait incompatible avec la régularité de $\mathcal{R}$.

Théorème 10. — *Toute équivalence régulière distincte de l'équivalence absolue est intersection d'équivalences régulières maximales.*

D'après le théorème 7, il suffit de le montrer pour l'égalité (si E a plus d'un élément) qui est l'intersection des équivalences régulières maximales correspondant aux sections commençantes de chaque élément de E[$x \neq y$ dans E $\Rightarrow x \notin (y)$ ou $y \notin (x)$].

Thorème 11. — *Une équivalence est un point de $\mathcal{T}$ si et seulement si ses classes se composent d'un seul élément, sauf l'une d'elles qui se compose de deux éléments non comparables ou dont l'un couvre l'autre.*

Évidemment, une telle équivalence est régulière et couvre l'égalité. Réciproquement, soit $\mathcal{R}$ un point de $\mathcal{T}$. Si deux classes au moins modulo $\mathcal{R}$ possédaient plus d'un élément de E, en décomposant une de ces classses en classes d'un seul élément, on obtiendrait une équivalence régulière $\rho \neq \varepsilon$ strictement plus fine que $\mathcal{R}$. Si la classe C de $\mathcal{R}$ non réduite à un seul élément contenait plus de deux éléments, on pourrait en déduire une équivalence différente de ε strictement contenue dans $\mathcal{R}$; il suffit de considérer un élément quelconque a de C et de décomposer C en deux sous-ensembles C_1 et $C - C_1$ où C_1 est l'ensemble $\{a\}$ si a est maximal ou minimal dans C et l'ensemble $)a(\cap C$ dans le cas contraire; la famille $\mathcal{C} = \{C_1, C - C_1\}$ satisfait à (π) et l'on a $\varepsilon < \mathcal{E}_{\mathcal{C}} < \mathcal{R}$; donc $\mathcal{R}$ ne serait pas un point.

Remarque. — Il n'existe pas toujours des points dans le treillis $\mathcal{T}$. Par exemple, si E est la chaîne des nombres réels, $\mathcal{T}$ ne possède aucun point.

Propriété. — *Le treillis $\mathcal{T}$ est atomique (c'est-à-dire que tout élément distinct de l'élément ε est supérieur ou égal à un point au moins) si et seulement si l'ensemble* E *satisfait à la condition suivante :*

$$x < y \text{ dans } \mathrm{E} \Rightarrow \exists x_1 \,\&\, y_1 \in [x, y], \quad \text{non comparables ou tels que} \quad x_1 \prec y_1.$$

C'est la condition pour que l'équivalence $\mathcal{E}_{\mathrm{C}}$ correspondant à $\mathrm{C} = [x, y]$ soit moins fine qu'un point et il suffit d'imposer la propriété pour une telle équivalence.

Remarque. — Le treillis $\mathcal{T}$ peut être atomique sans que tout élément distinct de l'élément ε soit union de points. Par exemple, si E est la chaîne des entiers positifs complétée par un élément $+\infty$, ω n'est visiblement pas produit transitif de points, ni union de points, ce qui revient au même, puisque E est une chaîne.

Montrons, d'une façon générale, E étant quelconque, qu'un élément de $\mathfrak{T}$ ne peut être union de points sans être produit transitif de points.

Lemme 1. — *Soient a et b deux éléments de* E, *satisfaisant à $a < b$, congrus modulo un produit transitif de points de $\mathfrak{T}$*, c'est-à-dire

$$\exists c_i \in \mathrm{E} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1), \qquad \text{avec} \quad c_0 = a, \qquad c_{n+1} = b$$

et $\mathcal{R}_i = \mathcal{E}_{\{c_i, c_{i+1}\}}$, point de $\mathfrak{T}$, pour $i \in \mathrm{I} = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Si $x \in \mathrm{E}$ est tel que l'on ait $x \neq c_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$ et $a < x < b$, il existe c_j non comparable à x, d'où résulte

$$a \equiv x \equiv b \left(\mathcal{E}_{\{c_j, x\}} \times \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{R}_i \right).$$

En effet, si c_i était comparable à x pour tout $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$, on pourrait répartir les c_i en deux ensembles non vides A et B ($c_i \in \mathrm{A} \Leftrightarrow c_i < x$). Il y aurait alors nécessairement un point de $\mathfrak{T}$ au moins, soit $\mathcal{R}_{i_0}$, tel que l'on ait $c_{i_0} < x < c_{i_0+1}$, ce qui est impossible.

Lemme 2. — *Soient a et b deux éléments de* E *congrus modulo un produit transitif de points de $\mathfrak{T}$*, c'est-à-dire

$$\exists c_i \in \mathrm{E} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n+1), \qquad \text{avec} \quad c_0 = a, \; c_{n+1} = b$$

et $\mathcal{R}_i = \mathcal{E}_{\{c_i, c_{i+1}\}}$, point de $\mathfrak{T}$, pour $i \in \mathrm{I} = \{0, 1, \ldots, n\}$.

Si $d \in \mathrm{E}$ satisfait à $b < d$ (ou $b > d$), ou bien on a $a < d$ (ou $a > d$), ou bien il existe c_j tel que

$$a \equiv d \left(\mathcal{E}_{\{c_j, d\}} \times \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{R}_i \right).$$

En effet, si un tel c_j n'existe pas, on doit avoir $d \neq c_i$ et c_i comparable à d pour tout $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$; on ne peut avoir $a > d$ d'après le lemme 1 ; on a donc $a < d$.

Théorème 12. — *La fermeture régulière d'un produit transitif de points de $\mathfrak{T}$ est un produit transitif de points de $\mathfrak{T}$.*

Soit $\mathcal{A} = \{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ une famille de points de $\mathfrak{T}$. Posons

$$\mathfrak{X} = \prod_{\alpha \in \mathrm{A}} \mathcal{R}_\alpha.$$

Nous devons établir que $\overline{\mathfrak{X}}$ est un produit transitif de points de $\mathfrak{T}$. Ceci revient à montrer que

$$\overline{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X}' \quad \text{en posant} \quad \mathfrak{X}' = \prod_{\beta \in \mathrm{B}} \mathcal{R}_\beta, \qquad \text{où} \quad \mathcal{B} = \{\mathcal{R}_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$$

est l'ensemble des points de $\mathfrak{T}$ satisfaisant à $\mathcal{R}_\beta \leq \overline{\mathfrak{X}}$ (on a évidemment $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$)

On a

$$x \equiv y(\overline{\mathfrak{X}}) \Leftrightarrow \exists a_i, \quad a'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n), \qquad x', y'$$

tels que

$$x \equiv x'(\mathfrak{T}), \quad y \equiv y'(\mathfrak{T}), \quad a_i \equiv a'_i(\mathfrak{T}),$$
$$x' < a_1, \quad \ldots, \quad a'_{j-1} < y, \quad y' < a_{j+1}, \quad \ldots, \quad a'_n < x.$$

Si x et y sont non comparables, on a

$$x \equiv y(\mathcal{E}_{\{x,y\}}), \quad \text{avec} \quad \mathcal{E}_{\{x,y\}} \in \mathcal{B}.$$

Sinon, soit, par exemple, $y < x$. De

$$x \equiv x'(\mathfrak{T}), \quad x' < a_1, \quad a_1 \equiv a'_1(\mathfrak{T}), \quad \ldots, \quad a_{j-1} \equiv a'_{j-1}(\mathfrak{T}), \quad a'_{j-1} < y,$$

on déduit, en appliquant le lemme 2, soit $x \equiv a_1(\mathfrak{T}')$, soit $x < a_1$, puis, soit $x \equiv a'_1(\mathfrak{T}')$, soit $x < a'_1$. De la même façon, on déduit

$$x \equiv a_2(\mathfrak{T}') \text{ ou } x < a_2 \quad \text{et} \quad x \equiv a'_2(\mathfrak{T}') \text{ ou } x < a'_2.$$

De proche en proche, on en conclut $x \equiv y(\mathfrak{T}')$, car $x < y$ est impossible.

Cherchons maintenant quelle condition il faut imposer à E pour que tout élément de $\mathcal{T} \neq \varepsilon$ soit produit transitif de points de $\mathcal{T}$.

Définition. — C étant un sous-ensemble convexe de E, nous dirons que deux éléments x et y de C sont *enchaînés par* C s'il existe une suite finie $a_1 = x$, $a_2, \ldots, a_{n+1} = y$ d'éléments de C tels que, pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$, les deux éléments a_i, a_{i+1} soient non comparables ou tels que l'un couvre l'autre.

Théorème 13. — *Une équivalence régulière* $\mathcal{R}$ *définie dans* E, *autre que l'égalité, est produit transitif de points de* $\mathcal{T}$ *si et seulement si deux éléments quelconques de toute classe* C *modulo* $\mathcal{R}$ *sont enchaînés par* C. *En particulier, tout élément de* $\mathcal{T}$ *autre que* ε *est produit transitif de points si et seulement si deux éléments quelconques de* E *sont enchaînés par tout sous-ensemble convexe de* E *les contenant.*

$\mathcal{R}$ étant le produit transitif des équivalences $\mathcal{E}_C$ définies par chacune de ses classes, on peut se limiter au cas où une seule classe possède plus d'un élément. La condition énoncée est nécessaire et suffisante, car dire que $\mathcal{E}_C$ est produit transitif de points, c'est dire que deux éléments quelconques de C sont enchaînés par C.

Conséquence. — On voit facilement que la condition finale du théorème 13 est équivalente à la suivante : $x < y \Rightarrow \exists$ *deux chaînes maximales finies* $\{x < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n\}$ et $\{b_m < b_{m-1} < \ldots < b_1 < y\}$ *du segment* $[x, y]$ *telles que* $a_n = b_m$ *ou* a_n *non comparable à* b_m.

Cette condition est donc une condition nécessaire et suffisante à imposer à E pour que tout élément de $\mathcal{T}$ soit union de points. En particulier, les seules chaînes E répondant à la question sont les chaînes de longueur finie et, à l'isomorphisme près, la chaîne des entiers positifs, celle des entiers négatifs et celle des entiers relatifs.

Lemme 3. — *Si* $\mathcal{T}$ *possède une chaîne maximale de longueur finie,* *l'ensemble* E *est fini, toutes les chaînes extraites de* $\mathcal{T}$ *sont de longueur finie et toutes ses chaînes maximales ont même longueur.*

En effet, si l'on a $\mathcal{R}_1 \prec \mathcal{R}_2$ dans $\mathcal{T}$, il résulte des théorèmes 7 et 11 que toutes les classes modulo $\mathcal{R}_2$ se retrouvent modulo $\mathcal{R}_1$, sauf l'une d'elles qui se décompose en deux classes modulo $\mathcal{R}_1$. Par suite, s'il existe une chaîne maximale de longueur finie n dans $\mathcal{T}$, l'égalité correspond à une partition en $n+1$ classes et E possède $n+1$ éléments. Toutes les chaînes extraites de $\mathcal{T}$ sont finies et les chaînes maximales sont de longueur n en vertu de la même remarque.

Il en résulte immédiatement les propriétés suivantes :

S'il existe entre deux éléments de $\mathcal{T}$ *une chaîne maximale de longueur finie, toutes les chaînes maximales entre ces deux éléments ont même longueur finie.*

S'il existe, dans $\mathcal{T}$, *un élément* $\mathcal{R}$ *de hauteur finie, il est produit transitif d'un nombre fini de points.*

IV. — Renforcements de la notion de régularité.

1. Régularité normale. — *Définition.* — Une équivalence régulière $\mathcal{R}$ définie dans un ensemble ordonné E est dite *normalement régulière* (N. R.) si et seulement si, $E/\mathcal{R}$ étant l'image homomorphe de E attachée à $\mathcal{R}$, elle satisfait à la condition

(N) $\quad A < B(A \,\&\, B \in E/\mathcal{R}) \Leftrightarrow A \neq B \quad$ et $\quad \exists a \in A,\ b \in B,\ $ avec $a < b$.

Pour cela, il est d'abord nécessaire que l'on ait

$$a' \leqq c,\quad c \equiv c'(\mathcal{R}),\quad c' \leqq b \Rightarrow \exists a \equiv a'(\mathcal{R}),\quad b' \equiv b(\mathcal{R}),\quad \text{avec } a \leqq b'.$$

Cette condition est aussi suffisante, car elle entraîne que l'on peut remplacer la relation $\mathcal{O}$ qui ordonne $E/\mathcal{R}$ par une relation équivalente obtenue en supprimant de proche en proche tous les couples (a_i, a'_i), relation qui est alors celle définie par la condition (N).

De plus, la condition (N) mise sous cette forme montre aussi que la condition de régularité du théorème 1 est équivalente à celle que l'on obtient en se limitant à $n = 2$.

On peut donc énoncer :

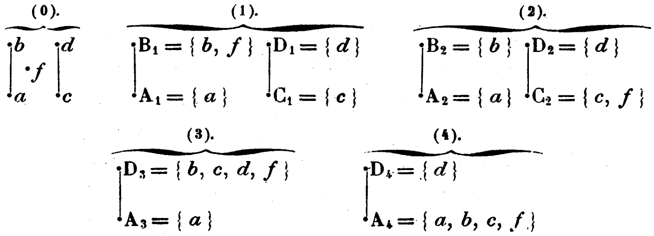
THÉORÈME 14. — *Une équivalence* $\mathcal{R}$ *définie dans un ensemble ordonné* E *est normalement régulière si et seulement si elle satisfait aux deux conditions :*

(1) $\quad a' \leqq b,\quad b \equiv b'(\mathcal{R}),\quad b' \leqq c \Rightarrow \exists a \equiv a'(\mathcal{R}),\quad c' \equiv c(\mathcal{R}),\quad$ avec $a \leqq c'$;

(2) $\quad a' \leqq b,\quad b \equiv b'(\mathcal{R}),\quad b' \leqq a,\quad a \equiv a'(\mathcal{R}) \Rightarrow a \equiv b(\mathcal{R}).$

Remarque. — Les équivalences normalement régulières définies dans un ensemble ordonné E ne forment pas un treillis en général. Considérons, par exemple, l'ensemble ordonné E de diagramme (0) et les équivalences $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$,

$\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$ auxquelles sont attachées les images homomorphes de diagrammes (1), (2), (3), (4) :



L'équivalence $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4$ dont les classes sont $\{a\}$, $\{b, c, f\}$ et $\{d\}$ est régulière, mais n'est pas normalement régulière, alors que $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$ le sont.

De plus, les chaînes suivantes prises dans le treillis des équivalences régulières définies dans E et dans lesquelles le signe $\prec$ signifie « est couvert par »

$$\varepsilon \prec \mathcal{R}_1 \prec \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 \prec \mathcal{R}_3 \prec \omega, \quad \varepsilon \prec \mathcal{R}_1 \prec \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 \prec \mathcal{R}_4 \prec \omega,$$
$$\varepsilon \prec \mathcal{R}_2 \prec \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 \prec \mathcal{R}_3 \prec \omega, \quad \varepsilon \prec \mathcal{R}_2 \prec \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 \prec \mathcal{R}_4 \prec \omega,$$

montrent qu'il n'y a pas d'équivalence N. R. qui soit plus petit majorant de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ ou plus grand minorant de $\mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_4$. Elles montrent aussi qu'il n'y a pas de plus petite équivalence normalement régulière contenant $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$, donc qu'on ne peut pas définir la fermeture N. R. d'une équivalence.

2. **Régularité forte.** — *Définition.* — Une équivalence régulière $\mathcal{R}$, définie dans un ensemble ordonné E, est dite *fortement régulière supérieurement* (F. R. S.) *si et seulement si* elle satisfait à la condition (S), que l'on peut écrire sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes :

$$(S_1) \qquad a' \equiv a(\mathcal{R}), \quad a \not\equiv b(\mathcal{R}), \quad a' < b \Rightarrow \exists\, b' \equiv b(\mathcal{R}), \quad \text{avec } a < b';$$
$$(S_2) \qquad a' \equiv a(\mathcal{R}), \quad a' \leqq b \Rightarrow \exists\, b' \equiv b(\mathcal{R}), \quad \text{avec } a \leqq b'.$$

Il résulte de cette condition et de la convexité des classes que la relation

$$A < B(A \,\&\, B \in E/\mathcal{R}) \Leftrightarrow A \neq B \quad \text{et} \quad \exists\, a \in A, \quad b \in B, \quad \text{avec } a < b$$

est transitive. D'autre part, $A < B$ et $B < A$ sont incompatibles en vertu de la propriété (π) vérifiée par la famille de classes $\{A, B\}$, puisque $\mathcal{R}$ est une équivalence régulière. Cette relation est donc une relation d'ordre strict dans $E/\mathcal{R}$, qui coïncide d'ailleurs avec la relation $\mathcal{O}$ introduite précédemment, puisque, en vertu de la propriété (S), la suite de couples d'éléments (a_i, a'_i) peut se réduire à deux termes; de

$$a'_i < a_{i+1}, \qquad a'_{i+1} < a_{i+2}, \qquad a_{i+1} \equiv a'_{i+1}(\mathcal{R})$$

résulte en effet

$$\exists\, a^*_{i+2} \equiv a_{i+2}(\mathcal{R}), \qquad \text{avec} \quad a_{i+1} < a^*_{i+2}, \qquad \text{d'où} \qquad a'_i < a^*_{i+2},$$

et l'on peut supprimer le couple (a_{i+1}, a'_{i+1}).

Ceci nous permet d'énoncer :

Théorème 15. — *Toute équivalence fortement régulière supérieurement est normalement régulière.*

La propriété (S) entraînant la propriété (N), la régularité d'une équivalence satisfaisant à la condition (S) est assurée par la condition (2) du paragraphe IV.1. De plus, si l'on a $a' \leq b$, $b \equiv b'(\mathcal{R})$, $b' \leq a$, la condition (S) entraîne qu'il existe $a^* \equiv a(\mathcal{R})$ tel que $b \leq a^*$; $a \equiv b(\mathcal{R})$ est donc conséquence de $a \equiv a'(\mathcal{R})$ si les classes de $\mathcal{R}$ sont convexes. Par suite, la convexité des classes entraîne (2) moyennant (S) et, comme la régularité entraîne la convexité des classes, on peut énoncer :

Théorème 16. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une équivalence $\mathcal{R}$ soit fortement régulière supérieurement est que l'on ait* (5)

(S) $\quad a' \equiv a(\mathcal{R}),\ a' < b,\ a \not\equiv b(\mathcal{R}) \Rightarrow \exists\, b' \equiv b(\mathcal{R}),$ avec $a < b'$;

(C) $\quad a < b < a',\ a \equiv a'(\mathcal{R}) \Rightarrow b \equiv a(\mathcal{R}).$

Un exemple important d'équivalence F. R. S. est donné par le théorème suivant :

Théorème 17. — *Toute congruence $\mathcal{R}$ dans un demi-treillis (ou équivalence régulière par rapport à l'opération $\cup$ du demi-treillis) est une équivalence F. R. S. par rapport à la relation d'ordre définie dans le demi-treillis ($a \leq b \Leftrightarrow a \cup b = b$).*

En effet :

1° Les classes sont convexes, car si l'on a $a < x < a'$, avec $a \equiv a'(\mathcal{R})$, on a

$$x = a \cup x \equiv a' \cup x = a'.$$

2° (S) est vérifiée, car de $a' < b$, $a' \equiv a(\mathcal{R})$, $a \not\equiv b(\mathcal{R})$, résulte

$$a \cup b \equiv a' \cup b = b;$$

l'élément $a \cup b$ est donc un élément $b' \equiv b(\mathcal{R})$ et tel que $a < b'$.

Nous allons donner maintenant une propriété utile des congruences définies dans les demi-treillis et qui est encore vraie pour les équivalences F. R. S. définies dans les ensembles ordonnés :

Théorème 18. — *Si $\mathcal{R}$ est une équivalence F. R. S. définie dans un ensemble ordonné* E *et si la classe* A *(modulo $\mathcal{R}$) d'un élément a est contenue dans la section commençante $|(a)$ de a, toute classe* X *(modulo $\mathcal{R}$) coupant (a) est contenue dans (a)* :

$$a \in A,\quad A \subseteq (a) \quad \text{et} \quad X \cap (a) \neq \emptyset \Rightarrow X \subseteq (a).$$

Si $X = A$, le théorème est vérifié. Soit donc $x \in X$, $x \notin A$ et $x \in (a)$. On a

(5) On voit, à l'aide d'exemples immédiats, que (S) et (C) sont indépendantes.

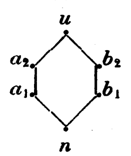
$x < a$, d'où $X < A$. Mais la propriété (S) entraîne que, pour tout $x' \in X$, il existe $a' \in A$ tel que $x' < a'$. Or $A \subseteq (a)$ entraîne $a' \leqq a$. On a donc

$$x' < a, \qquad x' \in (a) \qquad \text{et} \qquad X \subseteq (a).$$

Remarque. — L'intersection de deux équivalences F. R. S. définies dans un ensemble ordonné E n'est pas F. R. S. en général.

Soient, par exemple, E l'ensemble ordonné à six éléments de diagramme (0), $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ les équivalences régulières (F. R. S.) auxquelles sont attachées les images homomorphes de diagrammes (1) et (2) :

(0).



(1).

$U_1 = \{u\}$
$B_1 = \{a_2, b_1, b_2\}$
$A_1 = \{a_1\}$
$N_1 = \{n\}$

(2).

$U_2 = \{u, b_2\}$
$A_2 = \{a_1, a_2, b_1\}$
$N_2 = \{n\}$

(3).

$U_3 = \{u\}$
$B_3^2 = \{b_2\}$
$B_3^1 = \{a_2, b_1\}$
$A_3 = \{a_1\}$
$N_3 = \{n\}$

L'image homomorphe attachée à $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ a pour diagramme (3); on voit que $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ n'est pas F. R. S., car on a $b_1 < b_2$, $a_2 \equiv b_1 (\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2)$ et il n'existe pas d'élément congru à b_2 plus grand que a_2.

THÉORÈME 19. — *Le produit transitif d'une famille $\mathcal{A}$ d'équivalences satisfaisant à la propriété* (S) *satisfait à la propriété* (S).

Soit, en effet,

$$a' < b, \qquad a \not\equiv b \Big(\prod_{\alpha \in A} \mathcal{R}_\alpha\Big) \qquad \text{et} \qquad a' \equiv a \Big(\prod_{\alpha \in A} \mathcal{R}_\alpha\Big),$$

c'est-à-dire : $\exists a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que

$$a' \equiv a_1(\mathcal{R}_{\alpha_1}), \quad \ldots, \quad a_{i-1} \equiv a_i(\mathcal{R}_{\alpha_i}), \quad \ldots, \quad a_{n-1} \equiv a(\mathcal{R}_{\alpha_n}), \quad \text{avec } a_i \in A.$$

Mais, en vertu de la propriété (S), il existe

$$b_1 \equiv b(\mathcal{R}_{\alpha_1}), \ \text{avec } a_1 < b_1, \quad \text{puis } b_2 \equiv b_1(\mathcal{R}_{\alpha_2}), \ \text{avec } a_2 < b_2, \quad \ldots,$$

et finalement $b' \equiv b_{n-1}(\mathcal{R}_{\alpha_n})$, avec $a < b'$, et cette suite de congruences montre que

$$b' \equiv b \Big(\prod_{\alpha \in A} \mathcal{R}_\alpha\Big).$$

On a donc

THÉORÈME 20. — *Le produit transitif d'une famille d'équivalences F. R. S. est F. R. S. si et seulement si ses classes sont convexes* (*si et seulement s'il est régulier*).

Il en est ainsi, par exemple, quelle que soit la famille d'équivalences F. R. S., si l'ensemble E satisfait à la condition de chaîne ascendante.

En effet, supposons que l'on ait

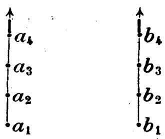
$$a < b \leq a', \qquad a' \equiv a\left(\prod_{\alpha \in A} \mathcal{R}_\alpha\right) \quad \text{et} \quad a \not\equiv b\left(\prod_{\alpha \in A} \mathcal{R}_\alpha\right).$$

Il existe des éléments a_i $(1 \leqq i \leqq n)$ tels que l'on ait

$$a' = a_1, \qquad a_1 \equiv a_2(\mathcal{R}_{\alpha_1}), \qquad \ldots, \qquad a_{n-1} \equiv a_n(\mathcal{R}_{\alpha_{n-1}}), \qquad a_n = a.$$

Chaque équivalence $\mathcal{R}_\alpha$ étant F. R. S., de $a_{n-1} \equiv a_n(\mathcal{R}_{\alpha_{n-1}})$ et de $a_n = a < b$, on déduit l'existence de $b' \equiv b(\mathcal{R}_{\alpha_{n-1}})$ tel que l'on ait $a_{n-1} < b'$ et, de proche en proche, l'existence de $b^* \equiv b\left(\prod_{\alpha \in A} \mathcal{R}_\alpha\right)$ tel que l'on ait $a' < b^*$. De $b < a'$ et de $b \equiv b^*\left(\prod_{\alpha \in A} \mathcal{R}_\alpha\right)$, par le même procédé que ci-dessus, on déduit l'existence de $a^* \equiv a\left(\prod_{\alpha \in A} \mathcal{R}_\alpha\right)$ tel que l'on ait $b^* < a^*$. On construit par ce procédé une chaîne ascendante infinie, contrairement à l'hypothèse.

La propriété peut être inexacte, si la condition de chaîne ascendante n'est pas vérifiée comme le montre le contre-exemple suivant : Considérons l'ensemble ordonné E représenté par le diagramme ci-contre, où les deux chaînes sont isomorphes à la chaîne des entiers positifs.



Les deux équivalences suivantes sont F. R. S. : 1° $a_i \equiv b_i$ pour tout $i \geqq 1$, $a_i \not\equiv a_j$ pour $i \neq j$; 2° $a_i \equiv b_{i+2}$ pour tout $i \geqq 1$, $b_i \not\equiv b_j$ pour $i \neq j$. Leur produit transitif correspond à la partition de E en deux classes, deux éléments étant équivalents si leurs indices sont de même parité; elle n'est évidemment pas régulière.

Pour montrer que les équivalences F. R. S. définies dans E forment un treillis, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 4. — *Dans le treillis $\mathcal{C}$ des équivalences régulières définies dans* E, *l'union d'une famille quelconque d'équivalences F. R. S. est une équivalence F. R. S.*

Soit $\mathcal{A} = \{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ la famille d'équivalences F. R. S. envisagée, $\mathfrak{T} = \prod_{\alpha \in A} \mathcal{R}_\alpha$, leur produit transitif et $\overline{\mathfrak{T}}$ la fermeture régulière de $\mathfrak{T}$. Nous devons montrer que $\overline{\mathfrak{T}}$ satisfait à la condition (S).

Supposons donc que l'on ait $x \equiv y(\overline{\mathfrak{T}})$, $y \leqq z$. D'après la forme de l'équivalence $\overline{\mathfrak{T}}$ (§ I), il existe, en particulier, x' et a_i & a'_i $(i = 1, 2, \ldots, j-1)$ tels que l'on ait

$$x \equiv x'(\mathfrak{T}), \qquad a_i \equiv a'_i(\mathfrak{T}) \quad \text{pour tout } i, \quad x' \leqq a_1, \quad \ldots, \quad a'_{j-1} \leqq y.$$

De $a_{j-1} \equiv a'_{j-1}(\mathfrak{T})$, résulte qu'il existe $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n$ tels que l'on ait

$$a_{j-1} = b_1, \qquad b_1 \equiv b_2(\mathcal{R}_{\alpha_1}), \qquad \ldots, \qquad b_{n-1} \equiv b_n(\mathcal{R}_{\alpha_{n-1}}), \qquad b_n = a'_{j-1},$$

avec $\alpha_i \in \mathrm{A}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

De $a'_{j-1} \leqq z$, résulte, l'équivalence $\mathcal{R}_{\alpha_{n-1}}$ étant F. R. S., qu'il existe $v_1 \equiv z(\mathcal{R}_{\alpha_{n-1}})$ tel que $b_{n-1} \leqq v_1$. De proche en proche, on montre ainsi qu'il existe $v_2 \equiv v_1(\mathcal{R}_{\alpha_{n-2}})$ tel que $b_{n-2} \leqq v_2, \ldots,$ et finalement $v_{n-1} \equiv v_{n-2}(\mathcal{R}_{\alpha_1})$ tel que $a'_{j-2} \leqq a_{j-1} = b_1 \leqq v_{n-1}$, cet élément $v_{n-1} = t_1$ satisfaisant à $t_1 \equiv z(\mathfrak{T})$.

Par le même procédé, on montre qu'il existe $t_2 \equiv t_1 \equiv z(\mathfrak{T})$ tel que $a'_{j-3} \leqq a_{j-2} \leqq t_2$ et, de proche en proche, qu'il existe $t \equiv z(\mathfrak{T})$ tel que $x \leqq t$. La condition (S) est donc vérifiée.

Théorème 21. — *Les équivalences F. R. S. définies dans un ensemble ordonné* E *forment un treillis complet* $\mathcal{C}_1$, *sous demi-treillis complet de* $\mathcal{C}$ *pour l'union.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 4 et du fait que l'égalité est F. R. S. (ainsi d'ailleurs que l'équivalence absolue).

On définit de même par dualité les *équivalences fortement régulières inférieurement* (F. R. I.). Une équivalence $\mathcal{R}$ régulière est F. R. I. si et seulement si elle satisfait à

(I) $\qquad a \equiv a'(\mathcal{R}), \quad b < a', \quad b \not\equiv a(\mathcal{R}) \Rightarrow \exists\, b' \equiv b(\mathcal{R}),$ avec $b' < a$.

Définition. — Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, définie dans un ensemble ordonné E, est *fortement régulière* (F. R.) si elle est à la fois F. R. S. et F. R. I.

On a immédiatement, en utilisant les théorèmes 17 et 20 :

Théorème 22. — *Toute congruence définie dans un treillis est* F. R.

Théorème 23. — *Le produit transitif d'une famille d'équivalences F. R. est F. R. si et seulement si ses classes sont convexes* (*si et seulement s'il est régulier*).

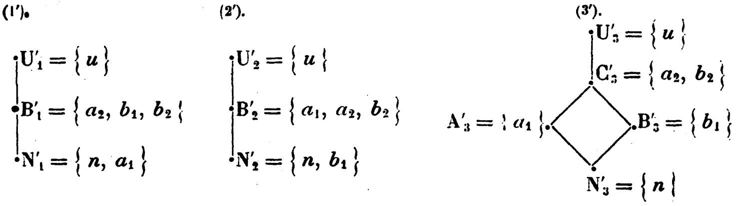
Il en est ainsi, par exemple, quelle que soit la famille d'équivalences F. R., si l'ensemble E satisfait à la condition de chaîne ascendante ou à la condition de chaîne descendante.

Du lemme 4, on déduit le

Théorème 24. — *Dans le treillis* $\mathcal{C}$, *l'union d'une famille quelconque d'équivalences F. R. est une équivalence F. R. et les équivalences F. R. forment un treillis complet* $\mathcal{C}_2$, *sous demi-treillis complet de* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}_1$ *pour l'union.*

Remarque. — Le treillis $\mathcal{C}_2$ n'est pas, en général, un sous-treillis de $\mathcal{C}_1$, car l'intersection dans $\mathcal{C}_1$ de deux équivalences F. R. n'est pas nécessairement F. R. Ainsi, reprenons l'exemple de la remarque qui suit le théorème 18. Les équivalences $\mathcal{R}'_1$ et $\mathcal{R}'_2$ auxquelles sont attachées les images homomorphes de diagrammes (1′) et (2′) :

(1′). (2′). (3′).



sont F. R. et leur intersection dans $\mathfrak{T}_1$, à laquelle est attachée l'image homomorphe de diagramme (3′) n'est pas F. R. I.

3. Régularité totale. — On peut encore renforcer la notion de régularité de la manière suivante :

Définition. — Une équivalence régulière définie dans un ensemble ordonné E est dite totalement régulière [6] (T. R.) si et seulement si, $E/\mathcal{R}$ étant l'image homomorphe de E attachée à R, elle satisfait à la condition

(T) $\quad A < B (A \,\&\, B \in E/\mathcal{R}) \Rightarrow a < b$ pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$.

Une équivalence (quelconque) est totalement régulière si et seulement si elle vérifie la condition

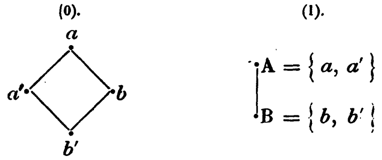
(T′) $\quad a \equiv a'(\mathcal{R}), \quad b \equiv b'(\mathcal{R}), \quad a \not\equiv b(\mathcal{R}), \quad a < b \Rightarrow a' < b'.$

Une telle équivalence est *a fortiori* F. R.

Remarque. — Une congruence définie dans un treillis n'est pas totalement régulière en général comme le montre l'exemple suivant :

E est le treillis à quatre éléments de diagramme (0), $\mathcal{R}$ l'équivalence à laquelle est attachée l'image homomorphe de diagramme (1). Cette équivalence est régulière par rapport aux opérations $\cup$ et $\cap$, mais n'est pas totalement régulière, puisqu'on n'a pas $b < a'$.

(0). (1).



Cependant, si E est une chaîne, toute équivalence $\mathcal{R}$ régulière est T. R. et il n'y a pas d'autre équivalence régulière définie dans E que les congruences de E regardé comme un treillis.

[6] Les équivalences totalement régulières ont été en particulier considérées par J. Schmidt. *Cf.* par exemple, *Zusammensetzungen und Zerlegungen halbgeordneter Mengen*. Conférence faite le 20 septembre 1951 (*Jahrestagung der Deutschen Mathematiker Vereinigung*).

Théorème 25. — *Les équivalences totalement régulières définies dans un ensemble ordonné* E *forment un treillis complet* $\mathcal{T}_3$, *sous-treillis complet du treillis des équivalences quelconques définies dans* E, *du treillis* $\mathcal{T}$, *du treillis* $\mathcal{T}_1$ *et du treillis* $\mathcal{T}_2$.

Toutes ces propriétés résultent du fait que l'intersection et le produit transitif d'une famille $\{\mathcal{R}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ d'équivalences totalement régulières, sont totalement régulières.

Montrons-le d'abord pour l'intersection $\mathcal{R} = \bigcap_{\alpha\in A}\mathcal{R}_\alpha$; si l'on a

$$a \equiv a'(\mathcal{R}), \qquad b\equiv b'(\mathcal{R}), \qquad a \not\equiv b(\mathcal{R}), \qquad a<b,$$

on en déduit $a\equiv a'(\mathcal{R}_\alpha)$, $b\equiv b'(\mathcal{R}_\alpha)$ pour tout $\alpha\in A$, $a\not\equiv b(\mathcal{R}_\alpha)$ pour un α au moins, d'où résulte $a'<b'$.

Montrons-le maintenant pour le produit transitif $\mathfrak{T} = \prod_{\alpha\in A}\mathcal{R}_\alpha$. Si l'on a

$$a \equiv a'(\mathfrak{T}), \qquad b\equiv b'(\mathfrak{T}), \qquad a \not\equiv b(\mathfrak{T}), \qquad a<b,$$

on en déduit l'existence de a_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ et b_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ tels que l'on ait

$$\begin{array}{lllll} a=a_1, & a_1\equiv a_2(\mathcal{R}_{\alpha_1}), & \ldots, & a_{n-1}\equiv a_n(\mathcal{R}_{\alpha_{n-1}}), & a_n=a', \\ b=b_1, & b_1\equiv b_2(\mathcal{R}_{\alpha'_1}), & \ldots, & b_{m-1}\equiv b_m(\mathcal{R}_{\alpha'_{m-1}}), & b_m=b', \end{array}$$

$a_i\not\equiv b_j(\mathcal{R}_\alpha)$ pour tout couple i, j et tout α.

Il en résulte $a<b_2, \ldots, a<b_m=b'$ et, de même, $a_2<b', \ldots, a_n=a'<b'$.

V. — Étude des treillis $\mathcal{T}_1$ (des équivalences F. R. S.), $\mathcal{T}_2$ (des équivalences F. R.), $\mathcal{T}_3$ (des équivalences T. R.).

On démontre d'une manière analogue à celle utilisée pour la démonstration du théorème 7 :

Théorème 7'. — *Avec les hypothèses et les notations du théorème* 7, *si* $\rho\in\,)\mathcal{R}($ *possède l'une quelconque des propriétés qui renforcent la régularité, il en est de même de sa correspondante* ρ^*, *dans l'isomorphisme de* $)\mathcal{R}($ *sur le treillis* $\mathcal{T}^*$. *Inversement, si* ρ^* *et* $\mathcal{R}$ *ont toutes deux l'une de ces propriétés supplémentaires, il en est de même de* ρ (7).

1. Propriétés du treillis $\mathcal{T}_1$.

Théorème 26. — *Les éléments maximaux du treillis* $\mathcal{T}_1$ *sont celles des équivalences maximales de* $\mathcal{T}$ *dont la classe* I, *qui est une section commençante, satisfait à la propriété supplémentaire :*

$$x\in I, \quad y\notin I, \quad x<y, \quad x'\in I \Rightarrow \exists\, y'\notin I, \quad \text{avec } x'<y',$$

et celles-là seulement.

(7) Le théorème 8 ne s'étend qu'à $\mathcal{T}_3$.

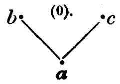
Il existe toujours (si E a plus de deux éléments) de telles équivalences : il suffit de prendre pour I la section commençante d'un élément non maximal, le cas où il n'existe pas d'élément non maximal étant trivial.

Il est évident que ces équivalences sont maximales. Il n'y en a pas d'autres car, si une équivalence a plus de deux classes, on peut trouver une équivalence F. R. S. moins fine qu'elle, puisque dans un ensemble ordonné qui a plus de deux éléments, il y a toujours au moins une équivalence F. R. S. distincte de ε et ω.

Le même raisonnement montre qu'*il y a toujours au moins une équivalence F. R. S. maximale moins fine qu'une équivalence F. R. S. donnée.*

Remarque. — Dans $\mathcal{C}_1$, un élément distinct de l'élément ω n'est pas nécessairement intersection d'éléments maximaux. Il suffit, pour le voir, de considérer l'ensemble ordonné E de diagramme (0) pour lequel l'égalité n'est pas intersection d'éléments maximaux de $\mathcal{C}_1$.

(0).



Théorème 27. — *Les points de* $\mathcal{C}_1$, *s'il en existe, sont les points de* $\mathcal{C}$ *tels que les deux éléments distincts de* E *congrus satisfassent à*

(1) x et y non comparables et $z > x \Leftrightarrow z > y$,

(2) $x \succ y$ (par exemple) et $z > y \Rightarrow z \geqq x$.

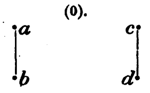
Il est évident qu'un point de $\mathcal{C}$ est point de $\mathcal{C}_1$ si et seulement s'il satisfait à l'une de ces conditions. Une équivalence $\mathcal{R}$ qui n'est pas un point de $\mathcal{C}$ ne peut être un point de $\mathcal{C}_1$. Supposons, en effet, que $\mathcal{R}$ ait au moins deux classes ayant plus d'un élément, soient C_1 et C_2. Dans $E/\mathcal{R}$, image homomorphe de E attachée à $\mathcal{R}$, on a, par exemple, $C_1 \not\leqq C_2$; envisageons l'équivalence $\mathcal{R}'$ obtenue à partir de $\mathcal{R}$ en décomposant les classes modulo $\mathcal{R}$ inférieures ou égales à C_2 dans $E/\mathcal{R}$ en classes contenant un seul élément de E. On voit aisément que $\mathcal{R}'$ est F. R. S., strictement plus fine que $\mathcal{R}$ et $\neq \varepsilon$. Si maintenant, $\mathcal{R}$ a une seule classe C ayant plus d'un élément et si cette classe en possède au moins trois, l'un d'eux, soit c_1, est non supérieur à chacun des deux autres; envisageons l'équivalence $\mathcal{R}_1$ dont toutes les classes sont réduites à un seul élément, sauf l'une d'elles qui contient tous les éléments x de C tels que l'on ait $x \not\leqq c_1$; cette équivalence est F. R. S., strictement plus fine que $\mathcal{R}$ et $\neq \varepsilon$.

Remarque. — Les conditions imposées à E au paragraphe 3 pour que $\mathcal{C}$ soit atomique ne suffisent pas pour qu'il en soit ainsi de $\mathcal{C}_1$, comme le montre l'exemple de la page 27 pour lequel les équivalences F. R. S. considérées ne peuvent être supérieures à aucun point.

On peut voir aussi que $\mathcal{C}_1$ est atomique si E satisfait à la condition de chaîne ascendante.

Enfin, si une équivalence F. R. S. est de hauteur finie dans $\mathcal{C}_1$, on ne peut en conclure qu'elle soit union de points, même si E est fini, comme le montre l'ensemble E de diagramme (0) et l'équivalence correspondant à la partition $\{a, c\}$, $\{b, d\}$

(0).



Théorème 28. — *Si $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont deux équivalences F. R. S. et si $\mathcal{R}_1$ couvre $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$* [8], *le produit transitif $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ est F. R. S. et il couvre $\mathcal{R}_2$* [9].

Si $\mathcal{J}$ désigne l'intersection de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ *dans* $\mathcal{T}$, on a évidemment $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \leq \mathcal{J} \leq \mathcal{R}_1$. Puisque $\mathcal{R}_1$ couvre $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ dans $\mathcal{T}_1$, donc dans $\mathcal{T}$ [8], et qu'on n'a pas $\mathcal{J} = \mathcal{R}_1$ qui entraînerait $\mathcal{R}_1 \leq \mathcal{R}_2$, on doit avoir $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \mathcal{J}$. On sait alors que $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ couvre $\mathcal{R}_2$ dans le treillis des équivalences quelconques définies dans E [10]. Pour montrer que $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ est F. R. S., il suffit de montrer que les classes modulo $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ sont convexes. On peut se limiter au cas où $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est l'égalité. Soient x et y les deux seuls éléments distincts de E congrus modulo $\mathcal{R}_1$; supposons que l'on ait

$$a < b < a' \quad \text{et} \quad a \equiv a'(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2).$$

Ceci exige, soit $a \equiv a'(\mathcal{R}_2)$, soit $a \equiv x(\mathcal{R}_2)$ et $y \equiv a'(\mathcal{R}_2)$ (ou les relations analogues en permutant x et y).

Dans le premier cas, puisque $\mathcal{R}_2$ est régulière, on a $b \equiv a(\mathcal{R}_2)$, d'où $b \equiv a(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)$. Dans le second cas, de $x \equiv a(\mathcal{R}_2)$, $a \leq b$, on déduit, puisque $\mathcal{R}_2$ est F. R. S., l'existence de $b' \equiv b(\mathcal{R}_2)$ tel que $x \leq b'$. Si l'on a $x = b'$, il en résulte $a \equiv b'(\mathcal{R}_2)$, d'où $a \equiv b(\mathcal{R}_2)$ et $a \equiv b(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)$. Sinon, de $y \equiv x(\mathcal{R}_1)$, $x < b'$, on déduit, puisque $\mathcal{R}_1$ est un point de $\mathcal{T}_1$, $y \leq b'$; enfin, puisqu'on a $a' \equiv y(\mathcal{R}_2)$, $y \leq b'$, il existe $b^* \equiv b' \equiv b(\mathcal{R}_2)$ tel que $b \leq a' \leq b^*$, d'où résulte

$$a \equiv a' \equiv b(\mathcal{R}_2) \quad \text{et} \quad a \equiv b(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2).$$

De ce théorème, résulte [11] le

Corollaire. — *Dans le treillis $\mathcal{T}_1$, si une chaîne maximale entre deux éléments est de longueur finie, toutes les chaînes maximales entre ces deux éléments ont même longueur finie.*

---

(8) $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ désigne l'intersection de $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ prise dans $\mathcal{T}_1$. Les relations de couverture sont évidemment aussi prises dans $\mathcal{T}_1$, mais ont lieu également dans $\mathcal{T}$ et même dans le treillis des équivalences quelconques définies dans E en vertu des théorèmes 7' et 27.

(9) La condition $\mathcal{R}_1 \succ \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \Rightarrow \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \succ \mathcal{R}_2$ est une de celles qui caractérisent la semi-modularité dans certaines classes générales de treillis, en particulier, dans les treillis de longueur finie. Il est facile de voir que cette condition n'est pas nécessairement vérifiée dans le treillis $\mathcal{T}$, en prenant comme contre-exemple l'exemple de la page 30.

(10) Le treillis des équivalences définies dans un ensemble non ordonné étant semi-modulaire. *Voir*, par exemple, G. Birkhoff, *Lattice Theory*, th. 8, p. 107 et exercice 8, p. 109 ou M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot. *Leçons sur la théorie des treillis*, 3e partie, chap. II.

(11) *Voir* M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *loc. cit.*, 1re partie, chap. VII, th. 3.

2. Propriétés du treillis $\mathfrak{T}_2$. — Le treillis $\mathfrak{T}_2$ est évidemment l'intersection du treillis $\mathfrak{T}_1$ et du treillis des équivalences F. R. I. définies dans E.

THÉORÈME 29. — *Une équivalence est maximale dans $\mathfrak{T}_2$ si et seulement si sa partition est composée de deux classes dont l'une est une section commençante* I *satisfaisant à la propriété :*

$$x \in I, \quad y \notin I, \quad x < y, \quad x' \in I, \quad y' \notin I \Rightarrow \exists\, x'' \in I, \quad y'' \notin I, \quad \text{avec } x' < y'', \quad x'' < y'.$$

La démonstration est analogue à celle du théorème 26.

Pour voir qu'il existe au moins une équivalence F. R. maximale définie dans un ensemble ordonné E ayant plus de deux éléments, on peut opérer ainsi : si, dans E, il existe un élément x à la fois maximal et minimal, il suffit de prendre $I = \{x\}$. Sinon, considérons les sous-ensembles non vides S de E tels que deux éléments distincts de S, s'il en existe, ne soient jamais comparables. Les sous-ensembles S forment un ensemble inductif. D'après le théorème de Zorn, il existe au moins un sous-ensemble S maximal, soit S^*. Il suffit de prendre pour I la réunion des sous-ensembles I_s tels que, pour tout $s \in S^*$, $I_s = (s)$ si s n'est pas maximal dans E et $I_s = (s) - \{s\}$ si s est maximal dans E.

Il en résulte que tout élément de $\mathfrak{T}_2 \neq \omega$ est contenu dans un élément maximal.

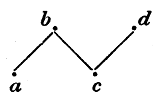
Remarque 1. — L'exemple utilisé dans la remarque qui suit le théorème 26 montre que, dans $\mathfrak{T}_2$, tout élément $\neq \omega$ n'est pas, en général, intersection d'éléments maximaux.

Remarque 2. — Dans $\mathfrak{T}_2$, les points, quand il en existe, peuvent être des équivalences dont plusieurs classes contiennent plus d'un élément. C'est ainsi que l'équivalence considérée dans le deuxième exemple de la remarque de la page 33 est un point de $\mathfrak{T}_2$ et possède deux classes de deux éléments ([12]). On trouve facilement des exemples d'ensembles E tels qu'un point de $\mathfrak{T}_2$ ait des classes d'autant d'éléments que l'on veut et en nombre aussi grand que l'on veut.

3. Propriétés du treillis $\mathfrak{T}_3$. — Dans le treillis $\mathfrak{T}_3$, les équivalences maximales peuvent correspondre à des partitions en plus de deux classes.

Ainsi, dans l'ensemble E de diagramme (0), l'égalité est maximale.

(0)



Les points peuvent correspondre à des partitions telles qu'une classe ait plus de deux éléments. Ainsi, dans l'exemple précédent, l'équivalence absolue est un point.

Toutefois, et à l'encontre de ce qui se produit dans le treillis $\mathfrak{T}_2$, il ne peut y avoir qu'une seule classe modulo $\mathcal{R}$ qui contienne plus d'un élément si $\mathcal{R}$ est un

([12]) Le treillis $\mathfrak{T}_2$, relatif à cet exemple, montre aussi que deux chaînes maximales de $\mathfrak{T}_2$ entre deux éléments peuvent être de longueurs finies différentes. Par suite, le treillis $\mathfrak{T}_2$ n'est pas, en général, semi-modulaire.

point. En effet, si $\mathcal{R}$ est une équivalence T. R., l'équivalence qu'on en déduit en décomposant toutes les classes modulo $\mathcal{R}$, sauf l'une d'elles, en classes d'un seul élément est T. R.

Dans $\mathfrak{T}_3$, un élément n'est pas, en général, ni union de points, ni intersection d'éléments maximaux.

THÉORÈME 30. — *Le treillis $\mathfrak{T}_3$ vérifie la condition*

$$\mathcal{R}_1 \succ \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \Rightarrow \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \succ \mathcal{R}_2.$$

Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux équivalences T. R. telles que $\mathcal{R}_1$ couvre $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ dans $\mathfrak{T}_3$. On peut toujours supposer que $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ est l'égalité. $\mathcal{R}_1$ est alors un point; donc, il existe une seule classe $C = \{c_\alpha\}_{\alpha \in A}$ modulo $\mathcal{R}_1$ contenant plus d'un élément. Soit ρ une équivalence T. R. telle que l'on ait $\mathcal{R}_2 \leq \rho < \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. Il faut établir $\mathcal{R}_2 = \rho$. Or, les classes modulo $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$ sont toutes des classes modulo $\mathcal{R}_2$, sauf l'une d'elles qui est la réunion des classes modulo $\mathcal{R}_2$ coupant C. Il suffit donc de montrer que deux éléments distincts de C ne peuvent être congrus modulo ρ. Ceci résulte simplement du fait que $\mathcal{R}_1 \cap \rho$ est l'égalité.

COROLLAIRE. — *Dans $\mathfrak{T}_3$, si une chaîne maximale entre deux éléments est de longueur finie, toutes les chaînes maximales entre ces deux éléments ont la même longueur.*