BULLETIN DE LA S. M. F.

L.-C. YOUNG

Intégrales généralisées de Stieltjes et convergence des séries de Fourier

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 185-193 (supplément)
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__S185_0>

Journée du 10 juillet 1937.

Réun. intern. Math. (1937, Paris)
Bull. Soc. math. France,
Suppl. 1939, p. 185 à 193.

INTÉGRALES GÉNÉRALISÉES DE STIELTJES

ET

CONVERGENCE DES SÉRIES DE FOURIER

Par M. L.-C. YOUNG.

Mesdames, Messieurs,

Je voudrais d'abord exprimer ma vive reconnaissance au Comité de la Société Mathématique pour son aimable invitation. C'est un grand honneur pour moi de faire une Conférence devant une assemblée de mathématiciens qui compte parmi ses membres des maîtres pour lesquels j'éprouve depuis longtemps une profonde admiration. D'ailleurs le sujet dont je vais avoir l'honneur de vous parler est la conséquence logique des recherches auxquelles l'école française des Mathématiques s'est particulièrement consacrée depuis plus d'un siècle.

Il s'agit en effet d'un développement nouveau et très simple de la théorie de l'intégrale. Le but principal de ce développement est d'obtenir des théorèmes *d'intégration terme à terme* qui n'exigent plus les conditions classiques d'intégrabilité absolue de M. Lebesgue, mais qui, bien entendu, exigent d'autres conditions de nature assez différente. Les idées que je vais vous exposer conduisent en même temps à une extension de l'intégrale de Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

L'existence de cette intégrale se trouvera en effet assurée par des conditions tout à fait symétriques entre la fonction f et la fonction g.

Les conditions dont nous aurons besoin sont de la forme

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \left\{ \displaystyle\int_a^b |f(x+h)-f(x)|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \varphi(h) \\ \left\{ \displaystyle\int_a^b |g(x)-g(x-h)|^{p'}\,dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqq \psi(h), \end{cases}$$

où p et p' sont des nombres positifs astreints à satisfaire la condition $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ et où $\varphi(h)$, $\psi(h)$ sont des fonctions croissantes de $|h|$ dont le produit satisfait à une condition supplémentaire que nous obtiendrons dans un instant. Ces conditions sur f et g sont donc du type de *Lipschitz intégrées,* elles ont été utilisées constamment dans d'autres domaines par MM. Hardy et Littlewood, par exemple, dans le cas où $\varphi(h)$ et $\psi(h)$ sont des puissances fractionnaires de h. Ces conditions ont d'ailleurs des rapports étroits avec une notion due à M. Norbert Wiener et qui généralise de façon directe la notion de variation bornée au sens de Jordan. Dans un mémoire d'il y a une année, j'ai utilisé la notion de M. Wiener, mais il est un peu plus commode de se servir de celle de Lipschitz intégrée. La notion de M. Wiener, qui a du reste été employée récemment par M. Denjoy, comme a bien voulu me le signaler M. Fréchet, c'est la suivante : une fonction f est dite *à variation de puissance p-ième bornée* si la somme de puissances p-ièmes d'accroissements

$$\sum_i |f(x_{i+1})-f(x_i)|^p$$

reste inférieure à une borne indépendante de la suite croissante de points x_i. Je signale cette notion ici parce que j'y reviendrai encore dans les applications trigonométriques.

Maintenant quelques mots sur la méthode tout à fait élémentaire que je vais employer. D'abord accordez-moi de faire quelques hypothèses simplificatrices : au lieu de (a, b) j'écrirai simplement $(0, 1)$ et je supposerai que f et g sont des fonctions bornées mesurables (au sens de M. Lebesgue) et en outre périodiques avec la période 1. Ensuite pour plus de commodité, j'entendrai par l'intégrale de Stieltjes

$$\int_0^1 f(x)\,dg(x)$$

la dérivée pour $t = 0$ de la fonction

$$-F(t) = -\int_0^1 f(x) g(x-t)\,dx = -\int_0^1 f(x+t) g(x)\,dx$$

par rapport à la suite binaire, c'est-à-dire la limite

$$\lim_{\nu \to \infty} 2^\nu \{ F(0) - F(2^{-\nu}) \}.$$

Cette définition un peu artificielle coïncide évidemment avec celle de Stieltjes dans le cas où f et g possèdent des dérivées continues puisque

$$\int_0^1 f(x) \frac{g(x) - g(x-h)}{h}\,dx \quad \to \quad \int_0^1 f(x) g'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dg(x)$$

lorsque $h \to 0$ dans ce cas particulier. On démontre d'ailleurs sans peine que la définition que j'utilise comprend aussi celle au sens classique de Stieltjes.

On peut donc écrire

$$\int_0^1 f(x)\,dg(x) = \lim_{h = 2^{-\nu},\ \nu \to \infty} \int_0^1 f(x) \left\{ \frac{g(x) - g(x-h)}{h} \right\} dx$$
$$= \lim_{h = 2^{-\nu},\ \nu \to \infty} -\int_0^1 \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right\} g(x)\,dx.$$

On voit bien par ces formules quel parti on peut tirer d'une condition portant sur la seule différence $g(x) - g(x-h)$ ou sur la seule différence $f(x+h) - f(x)$. Mais voilà que justement nous voulons tirer parti à la fois de la condition

$$\left\{ \int_0^1 |f(x+h) - f(x)|^p\,dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \varphi(h)$$

et de la condition

$$\left\{ \int_0^1 |g(x-h) - g(x)|^{p'}\,dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqq \psi(h).$$

Il nous faudra donc procéder d'une façon un peu plus subtile, et c'est ici qu'intervient le choix que nous avons fait $h = 2^{-\nu}$.

On a, en effet, l'identité

$$\frac{F(2h)-F(0)}{2h}-\frac{F(h)-F(0)}{h}$$
$$=\frac{1}{2h}\{F(2h)-2F(h)+F(0)\}$$
$$=\frac{1}{2h}\int_0^1\{f(x+h)-f(x)\}\{g(x)-g(x-h)\}\,dx,$$

ce qui est majoré en valeur absolue par $\frac{\varphi(h)\psi(h)}{2h}$, en vertu de l'inégalité classique de Hölder. Donc, en sommant pour $h=2^{\nu+1}, 2^{\nu+2}, \ldots$, on trouve

$$\left|2^{\nu}\{F(2^{-\nu})-F(0)\}+\int_0^1 f(x)\,dg(x)\right|\leqq\sum_{\mu=\nu}^{\infty}2^{\mu-1}\varphi(2^{-\mu})\psi(2^{-\mu}),$$

d'où il résulte, par monotonie, que

$$\left|2^{\nu}\{F(2^{-\nu})-F(0)\}+\int_0^1 f(x)\,dg(x)\right|\leqq\int_0^{2^{-\nu}}\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^2}\,du.$$

On voit ainsi que *si f et g remplissent les conditions* (I) *et si $\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^2}$ est intégrable au voisinage de $u=0$, alors l'intégrale de Stieltjes de f et g existe et l'on a pour $h=2^{-\nu}$ ($\nu=1, 2, \ldots$) l'inégalité*

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dg(x)-\int_0^1 f(x)\left\{\frac{g(x)-g(x-h)}{h}\right\}dx\right|\leqq\int_0^h\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^2}\,du.$$

De ce résultat on déduit tout de suite le théorème désiré d'intégration terme à terme, que nous allons formuler d'une façon qui rappelle un peu certains *théorèmes Taubériens* de la théorie des séries.

Supposons que $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$ sont deux suites de fonctions sujettes aux conditions

$$\left\{\int_0^1|f_n(x+h)-f_n(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}\leqq\varphi(h),$$
$$\left\{\int_0^1|g_n(x)-g_n(x-h)|^{p'}\,dx\right\}^{\frac{1}{p'}}\leqq\psi(h),$$

où $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ sont des fonctions croissantes de $|u|$ telles que $\frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^2}$ soit intégrable au voisinage de $u=0$. Supposons en outre que, pour chaque t,

$$\int_0^1 f_n(x)\,g_n(x-t)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,g(x-t)\,dx,$$

les fonctions f et g étant elles-mêmes astreintes à remplir les conditions (I). *Alors*

$$\int_0^1 f_n(x)\,dg_n(x) \to \int_0^1 f(x)\,dg(x).$$

En effet, si l'on se donne $\varepsilon > 0$, il suffit de choisir une valeur particulière $t = 2^{-\nu}$ pour laquelle

$$\int_0^t \frac{\varphi(u)\psi(u)}{u^2}\,du < \varepsilon,$$

et l'on constate qu'à ε près on peut remplacer les intégrales de Stieltjes dont il s'agit, c'est-à-dire les dérivées binaires d'intégrales de Lebesgue, par les quotients de différences finies

$$\int_0^1 f_n(x)\frac{g_n(x)-g_n(x-t)}{t}\,dx$$

et

$$\int_0^1 f(x)\frac{g(x)-g(x-t)}{t}\,dx;$$

et t étant fixe, la première tend évidemment vers la dernière.

Je passe maintenant aux applications à la convergence des séries de Fourier. Ces applications dépendent d'une propriété fondamentale très simple de la fonction

$$\text{(II)} \qquad g(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Cette propriété s'écrit

$$\text{(III)} \qquad \sum_i \Psi[|g(x_{i+1}) - g(x_i)|] < B\sum_n \Psi\left(\frac{1}{n}\right),$$

où $\Psi(u)$ désigne une fonction arbitraire assujettie aux conditions

$$\Psi(u_1)+\Psi(u_2)\leqq\Psi(u_1+u_2)$$

pour $u_1>0$ et $u_2>0$, et où B désigne une constante absolue (indépendante par conséquent de la fonction Ψ et de la suite croissante des points x_i). La démonstration de ce fait est élémentaire, on la trouvera dans un mémoire qui va paraître dans les *Mathematische Annalen*. Elle ne comporte, du reste, aucune difficulté.

On connaît le rôle de notre fonction (II) dans la théorie des séries de Fourier. On a, en effet, en désignant par $s_n(x)$ la somme des $2n+1$ premiers termes de la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ et par $s(x)$ une fonction arbitraire

$$s_n(x)-s(x)=\int_0^\infty f_n(t)\,dg(t),$$

où la fonction $f_n(t)$ (qui dépend de x) ne diffère que par un facteur trivial de l'expression

$$\begin{array}{ll} f\left(x+\dfrac{t}{n}\right)+f\left(x-\dfrac{t}{n}\right)-2s(x) & (0\leqq t\leqq n) \\ 0 & (t>n). \end{array}$$

Pour utiliser nos résultats concernant les intégrales de Stieltjes, nous commençons par faire un petit changement de variable $\tau=\varpi(t)$ qui transforme notre intégrale de la façon suivante

$$\text{(IV)} \qquad \int_0^\infty f_n(t)\,dg(t)=\int_0^1 f_n^\star(\tau)\,dg^\star(\tau),$$

les fonctions $f_n^\star$ et $g^\star$ étant périodiques de période 1. Il suffit pour cela de choisir pour $\varpi(t)$ une combinaison linéaire, à coefficients positifs, de t et de la borne supérieure, variable avec t, qui est celle des sommes au premier membre de (III) lorsqu'on impose la condition supplémentaire $x_i\leqq t$. Lorsque $\tau=\varpi(t)$, on écrit par définition $f_n^\star(\tau)=f_n(t)$, $g^\star(\tau)=g(t)$ pour les valeurs de τ prises par $\varpi(t)$. Si l'on s'arrange comme on le peut évidemment, à ce que ces valeurs de τ constituent un intervalle de longueur inférieure à $\frac{1}{2}$, on complète encore de façon triviale la définition de $f_n^\star(\tau)$, $g^\star(\tau)$ de manière à les rendre périodiques de période 1, tout en faisant que la relation (IV) soit valable, et tout en s'arrangeant que l'on ait

$$|g^\star(\tau+h)-g^\star(\tau)|=O[\psi(h)],$$

où $\psi(u)$ est la fonction inverse de $\Psi(u)$, cette dernière étant supposée de plus croissante.

En utilisant notre théorème d'intégration terme à terme, on voit maintenant que

$$\int_0^1 f_n^\star(\tau)\,dg^\star(\tau) \to 0$$

pourvu que, d'une part,

$$\text{(V)} \qquad \int_0^1 |f_n^\star(\tau+h)-f_n^\star(\tau)|\,d\tau=O[\varphi(h)],$$

où $\varphi(u)$ est une fonction croissante telle que $\dfrac{\varphi(u)\,\psi(u)}{u^2}$ soit intégrable, et pourvu que, d'autre part,

$$\text{(VI)} \qquad \int_0^1 f_n^\star(\tau+h)\,g^\star(\tau)\,d\tau \to 0$$

quel que soit h. Il s'ensuit que *les conditions* (V) *et* (VI) *suffisent à assurer la convergence de la série de Fourier donnée vers la somme* $s(x)$.

J'avouerai que je n'ai pas analysé en détail les conditions (V) et (VI); je remarquerai cependant que la condition (VI) est remplie dans le cas d'une fonction $f(x)$ bornée et mesurable pour laquelle au point x considéré la série de Fourier converge en moyenne arithmétique d'un ordre quelconque vers $s(x)$. C'est certainement le cas en un point de discontinuité de première espèce si l'on choisit

$$s(x)=\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}.$$

Quant à la condition V, elle est certainement vérifiée si l'on suppose que, en désignant par $\Phi(u)$ la fonction inverse de $\varphi(u)$, l'on ait

$$\sum \Phi[\,|f_n^\star(\tau_i)-f_n^\star(\tau_{i-1})|\,]<B_1,$$

où B_1 est une constante indépendante de n et de la suite croissante de points τ_i contenus dans une même période. Or le membre gauche de cette inégalité devient une somme toute semblable relative à la fonction f si l'on fait un très simple changement de variable. Donc la condition (V) est remplie si l'on a

$$\text{(VII)} \qquad \sum_i \Phi[\,|f(x_i)-f(x_{i-1})|\,] < B_1,$$

quelle que soit la suite croissante de points x_i contenus dans une période de f.

En choisissant pour Φ et Ψ certaines fonctions spéciales, on arrive ainsi à des extensions de théorèmes classiques de Jordan et de Dini-Lipschitz, par exemple la suivante dont j'ai esquissé récemment une démonstration différente aux *Comptes rendus*.

Soit pour u suffisamment petit et positif. $\Phi(u)=\exp(u^{-\alpha})$ *où* $\alpha<\frac{1}{2}$, *et soit $f(x)$ une fonction périodique pour laquelle la condition* (VII) *est remplie. Alors la série de Fourier de $f(x)$ converge vers* $\dfrac{\{f(x+0)+f(x-x)\}}{2}$.

L'analogie avec le critère de Dini-Lipschitz suggère du reste la possibilité d'étendre encore cet énoncé au cas $\alpha\leqq 1$. Je n'ai cependant pas encore pu démontrer une telle extension.

Toute une série de problèmes intéressants se posent encore dans les ordres d'idées que je vous ai exposés. Un de ceux-ci qui a également des rapports étroits avec la théorie des séries trigonométriques a été partiellement résolu par mon compatriote M. Littlevood.

Soient f et g deux fonctions périodiques ayant dans une période la variation de puissance $p^{\text{ième}}$ et $q^{\text{ième}}$ respectivement bornée, et soit

$$\theta(u)=\int_0^1 f(x+u)\,dg(x).$$

On peut montrer que $\theta(u)$ est à variation de puissance λ bornée pour tout λ positif tel que

$$\frac{1}{\lambda}<\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1.$$

Ce résultat se démontre d'ailleurs aussi par la méthode de dérivation binaire que j'utilise ici. Le problème qui reste est de savoir si l'on peut prendre aussi

$$\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1.$$

Je ne suis pas à même de répondre à cette question qui paraît très difficile.

Je mentionnerai encore un problème qui se pose lorsque l'on considère notre intégrale de Stieltjes comme une fonctionnelle définie dans un champ fonctionnel en somme *plus restreint* que celui des fonctions continues. Nous savons depuis MM. Hadamard, Fréchet et F. Riesz, caractériser les fonctionnelles linéaires dans certains champs qui comprennent les fonctions continues, par exemple le champ des fonctions à carré intégrable. Le problème d'une caractérisation analogue dans des champs plus restreints tel que celui des fonctions f qui remplissent la condition de Lipschitz fractionnaire

$$|f(x+h)-f(x)|=O[|h|^{\alpha}]$$

paraît plus difficile. Je n'ai obtenu que des résultats incomplets dans cette direction.

Pour terminer je dirai encore qu'il y a dans l'ordre d'idées des méthodes que j'ai esquissées ici des problèmes intéressants qui concernent les *iutégrales multiples* ou encore l'*intégrale fractionnaire,* c'est-à-dire celle de « Riemann-Liouville » dont nous avons appris une application nouvelle dans la belle conférence de M. Marcel Riesz.

L.-C. YOUNG.