Bulletin de la S. M. F.

Charles Jordan

Problèmes de la probabilité des épreuves répétées dans le cas général

Bulletin de la S. M. F., tome 67 (1939), p. 223-242
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__223_0>

PROBLÈMES DE LA PROBABILITÉ DES ÉPREUVES RÉPÉTÉES DANS LE CAS GÉNÉRAL;

PAR M. CHARLES JORDAN.

Nous allons considérer une suite de n épreuves; à chaque épreuve, un événement peut être favorable ou non. On ne fait aucune hypothèse concernant la probabilité que la $m^{\text{ième}}$ épreuve soit favorable; on déduira premièrement la probabilité qu'en n épreuves x soient favorables; secondement la probabilité qu'en n épreuves il y ait au moins x favorables; troisièmement la probabilité que la première épreuve favorable soit la $x^{\text{ième}}$ épreuve.

1. Pour déduire les théorèmes relatifs à ces probabilités, le mieux est d'avoir recours à la théorie des classes formées d'éléments en nombre fini. On désigne les classes par une ou plusieurs lettres : A_1, A_1A_2, $A_1A_2A_3$, etc., et le nombre des éléments appartenant à la classe par la même lettre mise entre parenthèses (A_1), (A_1A_2), $(A_1A_2A_3)$, etc.

On dit que l'ensemble C est la somme des deux ensembles A_1 et A_2, c'est-à-dire $C = A_1 + A_2$, si chaque élément de C appartient à A_1 ou à A_2 ou à la fois à ces deux ensembles; et inversement chaque élément de A_1 et de A_2 appartient à C.

On dit que C est le produit des ensembles A_1 et A_2, c'est-à-dire $C = A_1A_2$, si cet ensemble est formé des éléments communs à A_1 et A_2; par suite, chaque élément de C appartient à A_1 et A_2.

Cas particuliers. — 1. $A_1\alpha_1 = 0$ veut dire que les deux ensembles A_1 et α_1 n'ont pas d'éléments communs. Dans ce cas, E étant la somme des deux ensembles $E = A_1 + \alpha_1$, on peut passer de cette équation de classe à l'équation algébrique $(E) = (A_1) + (\alpha_1)$, d'après laquelle le nombre des éléments de E est la somme des éléments de A_1 et de α_1.

2. De $EA_1 = A_1$, on conclut que tous les éléments de A_1 appartiennent à E, et que dans ce cas $E + A_1 = E$. On a évidemment $EE = E$ et $E + E = E$.

Partageons l'ensemble E en deux classes et répétons ce classement de plusieurs points de vue différents; on a

$$E = A_1 + \alpha_1 = A_2 + \alpha_2 = \ldots = A_n + \alpha_n.$$

Supposons de plus que les classements aient été effectués de manière que les classes A_i et α_i n'aient pas d'éléments communs, donc $A_i\alpha_i = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$. On en conclut que $(A_i) + (\alpha_i) = (E)$.

Les classements précédents sont du premier ordre. On aura un classement du second ordre en considérant les éléments de E à deux points de vue, par exemple au point de vue des attributs A_1 et A_2, alors, on aura quatre classes

$$E = A_1 A_2 + A_1 \alpha_2 + \alpha_1 A_2 + \alpha_1 \alpha_2$$

et les relations

$$\begin{array}{lll} A_1 = A_1 A_2 + A_1 \alpha_2, & \alpha_1 = \alpha_1 A_2 + \alpha_1 \alpha_2, & E = A_1 + \alpha_1; \\ A_2 = A_1 A_2 + \alpha_1 A_2, & \alpha_2 = A_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2. & E = A_2 + \alpha_2. \end{array}$$

Appelons classes positives les classes dont la dénomination ne contient que des lettres latines, par exemple : E, A_1, A_1A_2, $A_1A_2A_3$, etc. On appellera les autres, classes négatives. Des équations de classe du système précédent, on peut déduire, par élimination, le nombre des éléments des classes négatives, en fonction des nombres des éléments des classes positives. Par exemple,

$$(\alpha_1 A_2) = (A_2) - (A_1 A_2), \qquad (\alpha_1 \alpha_2) = (E) - (A_1) - (A_2) + (A_1 A_2).$$

Ce procédé est assez laborieux surtout lorsqu'il s'agit d'ordre élevé. Mais on peut arriver au même but d'une manière plus simple en écrivant dans l'équation de classe $E - A_i$ au lieu de α_i; ce procédé est symbolique, car la soustraction n'a pas été définie dans le calcul de classes, mais on peut montrer qu'en procédant ainsi, on arrive au même résultat que par élimination. Par exemple

$$\alpha_1 \alpha_2 = (E - A_1)(E - A_2) = EE - EA_1 - EA_2 + A_1 A_2.$$

On a vu que $EE = E$, et ayant égard à $E = A_i + \alpha_i$, on a aussi $EA_i = A_i$; par suite $\alpha_1 \alpha_2 = E - A_1 - A_2 + A_1 A_2$; et passant à l'équation algébrique on retrouve la relation obtenue ci-dessus.

En classant les éléments de E en même temps à trois points de vue, on obtient huit classes du troisième ordre, et en les classant à n points de vue, 2^n classes.

2. Considérons maintenant le premier problème de la probabilité des épreuves répétées et supposons que l'on fasse n épreuves. Désignons par A_i l'ensemble formé par les séries d'épreuves dans lesquelles la $i^{\text{ème}}$ épreuve est favorable; et par α_i l'ensemble des séries d'épreuves dans lesquelles cette épreuve est défavorable; finalement par E l'ensemble de toutes les séries d'épreuves possibles (chaque série étant considérée comme également probable).

Donc $\frac{(A_i)}{(E)}$ est la probabilité que la $i^{\text{ème}}$ épreuve soit favorable sans égard aux autres épreuves. De même $\frac{(A_i A_j)}{(E)}$ est la probabilité que les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ième}}$ épreuves soient favorables, sans égard aux autres épreuves. Et en général la probabilité que les épreuves d'ordre $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ soient favorables sans égard aux autres est $\frac{(A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_s})}{(E)}$; pour abréger désignons cette probabilité par

$$\frac{(A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_s})}{(E)} = p_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s}. \tag{1}$$

La probabilité pour que la première épreuve soit favorable et les autres défavorables est donnée par $\frac{(A_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n)}{(E)}$. Enfin la probabilité pour que les épreuves d'ordre $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_x$ soient favorables et les autres défavorables sera

$$\frac{(A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_x} \alpha_{\nu_{x+1}} \alpha_{\nu_{x+2}} \ldots \alpha_{\nu_n})}{(E)}, \tag{2}$$

où les nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$ représentent une permutation des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$.

Le *premier théorème* de la probabilité des épreuves répétées [1] donnant la probabilité $P(x)$ que sur n épreuves x soient favorables

---

[1] CH. JORDAN, *Les fondements de la théorie des probabilités* (*Mathematikai ès Physikai Lapok*, Vol. XXXIV, Budapest 1928, p. 136). *Le théorème de probabilité de Poincaré généralisé au cas de plusieurs variables indépendantes* (*Acta Scientiarum Mathematicarum*, t. VII, Szeged, 1934, p. 107).

est obtenu en faisant la somme des probabilités (2) étendue aux $\binom{n}{x}$ combinaisons des x lettres A_i et $n-x$ lettres α_j ci-dessus.

Exprimons les classes négatives de l'expression (2) par des classes positives, comme il a été indiqué plus haut. En partant de

$$A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_x} (E - A_{\nu_{x+1}})(E - A_{\nu_{x+2}}) \ldots (E - A_{\nu_n})$$

et en en effectuant les multiplications, on trouve

$$A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_x} - A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_x} \Sigma' A_i + A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_x} \Sigma' A_i A_j$$
$$- A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_x} \Sigma' A_i A_j A_k + \ldots + (-1)^{n-x} A_1 A_2 \ldots A_n$$

dans les sommes accentuées i, j, k, ... prennent toutes les valeurs de 1 à n, sauf $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_x$; de plus, on doit avoir $i \neq j \neq k \neq \ldots$.

Pour obtenir $P(x)$ il faut encore faire la somme de l'expression précédente, étendue aux $\binom{n}{x}$ combinaisons $A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_x}$, puis diviser la somme par (E). Il s'ensuit

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-x} (-1)^i \binom{x+i}{i} \sum \frac{(A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_{x+i}})}{(E)}.$$

En effet, dans la somme $\Sigma A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_x} \Sigma' A_i$, chaque combinaison $A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_{x+1}}$ se présentera autant de fois que l'on peut choisir A_i parmi $x+1$ éléments, donc $x+1$ fois. De même dans $\Sigma A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_x} \Sigma' A_i A_j$ chaque combinaison se présentera autant de fois qu'on peut choisir deux éléments $A_i A_j$ parmi $x+2$ éléments, donc $\binom{x+2}{2}$ fois, et ainsi de suite.

Pour simplifier la formule précédente, posons $s = x + i$, et introduisons la notation $p_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s}$ pour les probabilités figurant dans le second membre, on aura

$$(3) \qquad P(x) = \sum_{s=x}^{n} (-1)^{x+s} \binom{s}{x} \sum p_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s}.$$

En partant de cette équation, on peut déterminer inversement la somme des probabilités $p_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_i}$ en fonction des probabilités $P(x)$. On y arrive par l'inversion de la formule (3). Multiplions les deux membres de cette équation par $\binom{x}{i}$ et faisons la somme, x variant de i à n. D'après une formule connue du Calcul des différences finies, on a $(n \geqq s)$

$$\sum_{x=i}^{n} (-1)^{x-s} \binom{x}{i} \binom{s}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \neq i, \\ 1 & \text{si } s = i, \end{cases}$$

on a donc

$$(4) \qquad \sum p_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i} = \sum_{x=i}^{n} \binom{x}{i} \mathrm{P}(x) = \mathcal{B}_i.$$

On voit que $\mathcal{B}_i$ est le moment binomial d'ordre i de la fonction de probabilité $\mathrm{P}(x)$, Si l'on connaît la fonction génératrice $\Theta(t)$ de $\mathrm{P}(x)$, c'est-à-dire

$$\Theta(t) = \sum_{x=0}^{n} \mathrm{P}(x) t^x,$$

on obtient $\mathcal{B}_i$ directement et par suite aussi la somme des probabilités $p_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_i}$, en se servant de l'équation

$$(5) \qquad \mathcal{B}_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i \Theta(t)}{dt^i} \right]_{t=1} = \sum p_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_i}.$$

Par contre, connaissant les probabilités $p_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_i}$, on peut déterminer d'abord les moments binomiaux $\mathcal{B}_i$, puis la fonction génératrice de $\mathrm{P}(x)$, en se servant du développement de Newton

$$\Theta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (t-1)^i \mathcal{B}_i.$$

La probabilité (3) peut être mise sous la forme

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{s=x}^{n} (-1)^{x+s} \binom{s}{x} \mathcal{B}_s.$$

En posant dans la formule (3) $x = 0$, on aura la probabilité que toutes les épreuves soient défavorables

$$(6) \qquad \mathrm{P}(0) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \sum p_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_s} = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \mathcal{B}_s.$$

Enfin en retranchant (6) de l'unité, on obtient la formule de Poincaré ([2]) qui donne la probabilité qu'il y ait *au moins une épreuve* favorable au cours de n épreuves.

En partant de la formule (3), on peut déduire le *second théorème* général de la probabilité des épreuves répétées qui donne la probabilité $\mathfrak{P}(x)$ qu'en n épreuves il y ait au moins x épreuves favorables. Pour l'obtenir il suffit de faire la somme des probabilités $\mathrm{P}(i)$ pour i variant de x à n

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{i=x}^{n} \mathrm{P}(i).$$

En calcul des différences finies, on montre $(n > s)$ que

$$(7) \qquad \sum_{i=x}^{n} (-1)^i \binom{s}{i} = (-1)^x \binom{s-1}{x-1},$$

par suite la somme cherchée sera

$$(8) \qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_{s=x}^{n=1} (-1)^{x+s} \binom{s-1}{x-1} \sum p_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s} \quad ([3]).$$

En posant dans cette formule $x = 1$ on obtient de nouveau la formule de Poincaré.

3. Dans le problème des épreuves répétées, on doit considérer deux cas particuliers remarquables, celui de la *symétrie* et celui de l'*indépendance*. On dit que le problème est symétrique, lorsque la condition suivante est satisfaite. La probabilité

$$\frac{(\mathrm{A}_{\nu_1}\mathrm{A}_{\nu_2}\ldots\mathrm{A}_{\nu_x}\alpha_{\nu_{x+1}}\ldots\alpha_{\nu_n})}{(\mathrm{E})}$$

qu'en n épreuves, les épreuves d'ordre $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_x$ soient favorables et les autres défavorables est indépendante des nombres $\nu_1, \ldots, \nu_x$, et cela pour $x = 1, 2, \ldots, (n-1)$.

([2]) H. Poincaré, *Calcul des probabilités*, 1896, p. 36; M. Fréchet, *Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités*, t. 1, Paris 1937, p. 12.

([3]) E. J. Gumbel, *La distribution des événements compatibles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 202, 1936, p. 1637).

Notons que cette condition est équivalente à la suivante : la probabilité $\frac{(A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_x})}{(E)}$ que les épreuves d'ordre $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_x$ soient favorables sans égard aux autres est indépendante des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots$, et cela pour $x = 1, 2, \ldots, (n-1)$.

Remarque. — La probabilité $p_i = \frac{(A_i)}{(E)}$ que la $i^{\text{ième}}$ épreuve soit favorable sans égard aux autres épreuves, peut être la même pour toutes les valeurs de i, sans que cela soit suffisant pour la symétrie.

En cas de symétrie, la seconde somme figurant dans la formule (3) se simplifie, car les $\binom{n}{s}$ combinaisons $(A_{\nu_1} A_{\nu_2} \ldots A_{\nu_s})$ deviennent toutes égales et la formule (3) sera

$$(9) \qquad P(x) = \sum_{s=x}^{n} (-1)^{x+s} \binom{s}{x} \binom{n}{s} p_{1,2,3,\ldots,s}.$$

De même la formule (8) donne en cas de symétrie,

$$(10) \qquad \mathfrak{P}(x) = \sum_{s=x}^{n} (-1)^{x+s} \binom{s-1}{x-1} \binom{n}{s} p_{1,2,3,\ldots,s}.$$

Quelquefois on a avantage à employer ces formules sous une forme légèrement différente

$$(11) \qquad P(x) = \binom{n}{x} \sum_{s=x}^{n} (-1)^{x+s} \binom{n-x}{s-x} p_{1,2,3,\ldots,s},$$

et

$$(12) \qquad \mathfrak{P}(x) = n \binom{n-1}{x-1} \sum_{s=x}^{n} (-1)^{x+s} \binom{n-x}{s-x} \frac{1}{s} p_{1,2,3,\ldots,s}.$$

On considère le problème comme indépendant lorsqu'on a pour toutes les valeurs de s

$$p_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s} = p_{\nu_1} p_{\nu_2} \ldots p_{\nu_s},$$

ce qui simplifie les formules (3) et (8).

Lorsque le problème est symétrique et en même temps indépendant, on a, pour toutes les valeurs de s,

$$p_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s} = p_1 p_2 \ldots p_s.$$

4. Dans les problèmes des épreuves répétées, il faut avant tout déterminer la moyenne m du nombre des épreuves favorables. Pour l'obtenir, il faut multiplier chaque valeur de x par sa probabilité et faire la somme des produits; on aura

$$m = \sum_{x=0}^{n} x\,\mathrm{P}(x) = \mathcal{B}_1;$$

de la formule (4) il suit que cette moyenne est $m = \Sigma p_i$; de plus lorsque le problème est symétrique on a $m = np_1$.

En second lieu, il faut déterminer la dispersion σ^2 du nombre des épreuves favorables autour de la moyenne, c'est-à-dire la moyenne des carrés des $x - m$. On trouve

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{n} (x - m)^2\,\mathrm{P}(x) = 2\mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_1^2.$$

Lorsqu'on connaît la fonction génératrice de la probabilité $\mathrm{P}(x)$ on peut déterminer directement $\mathcal{B}_2$ par la formule (5). Dans le cas général, on aura

$$\mathcal{B}_2 = \sum p_{ij}.$$

Souvent on peut utiliser cette formule pour la détermination de $\mathcal{B}_2$. Lorsque le problème est symétrique, on a $\mathcal{B}_2 = \binom{n}{2} p_{12}$; et dans le cas de l'indépendance $\mathcal{B}_2 = \Sigma p_i p_j$. Finalement lorsque les événements sont indépendants et le problème symétrique

$$\mathcal{B}_2 = \binom{n}{2} p_1^2.$$

5. Ayant déterminé la moyenne m et la dispersion σ^2, on peut déduire selon le *principe des moments* des formules approchées, donnant la probabilité $\mathrm{P}(x)$ que sur n épreuves x soient favorables et la probabilité $\mathfrak{P}(x)$ que le nombre des épreuves favorables soit au moins x, en n épreuves.

1° Les moments du premier ordre de $\mathrm{P}(x)$ et de la fonction approchée coïncident. La formule de Poisson donne une telle approximation

$$\text{(13)} \qquad P(x) \sim \frac{m^x e^{-m}}{x!} = \psi(x);$$

en effet, les moments du premier ordre de $P(x)$ et de $\psi(x)$ sont $\mathcal{B}_1 = m$. Lorsque toutes les probabilités p_i sont petites, la formule (13) donne une assez bonne approximation.

En partant de cette formule, on déduit la valeur approchée de la probabilité pour obtenir au moins x épreuves favorables

$$\mathfrak{P}(x) = 1 - \sum_{s=0}^{x-1} P(s),$$

en faisant la somme de la fonction $\psi(s)$; pour cela remarquons que

$$\sum_{s=0}^{x-1} \psi(s) = 1 - I(u, x-1),$$

où $I(u, x-1)$ est le rapport de la fonction gamma incomplète à la fonction complète correspondante

$$I(u, x-1) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^m e^{-t} t^{s-1}\, dt$$

et $u = \dfrac{m}{\sqrt{x}}$. Il y a des tables donnant les valeurs de ces fonctions ([4]). On a donc

$$\mathfrak{P}(x) = I(u, x-1).$$

2. Les moments du premier et du second ordre de $P(x)$ et de la fonction approchée coïncident. On obtient une telle fonction approchée à l'aide de $\psi(x)$ ([5]).

$$\text{(14)} \qquad P(x) \sim \psi(x) + \left(\mathcal{B}_2 - \frac{1}{2}\mathcal{B}_1^2\right)\Delta^2\psi(x-2).$$

Les moments des deux fonctions sont $\mathcal{B}_1 = m$ et $\mathcal{B}_2 = \Sigma p_{ij}$.

([4]) K. Pearson, *Tables for Statisticians*, Cambridge, 1914. Tables of $\dfrac{e^{-m} m^x}{x!}$, p. 113-121; *Tables of the Incomplète Γ-Function*, London, 1922.

([5]) Ch. Jordan, *Sur la probabilité des épreuves répétées* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LIV, 1926, p. 101-137).

Pour obtenir la probabilité $\mathfrak{P}(x)$ il faut faire la somme de la probabilité $P(s)$ donnée par (14) de $s = 0$ à $s = x - 1$ et retrancher le résultat obtenu de l'unité. On trouve

$$(15) \qquad \mathfrak{P}(x) \sim I(u, x-1) + \left(\mathcal{B}_2 - \frac{1}{2}\mathcal{B}_1\right)\Delta\psi(x-2).$$

On peut déterminer les valeurs de $\Delta^2\psi(x-2)$ et $\Delta\psi(x-2)$ figurant dans (14) et (15) en se servant des tables mentionnées de $\psi(x)$; mais comme les différences ne figurent pas explicitement dans les tables actuellement disponibles, on a avantage à écrire dans ces formules

$$\Delta\psi(x-2) = \left(1 - \frac{x-1}{m}\right)\psi(x-1),$$

$$\Delta^2\psi(x-2) = \left[\frac{x(x-1)}{m^2} - \frac{2x}{m} + 1\right]\psi(x).$$

Remarque. — Au lieu d'utiliser les formules satisfaisant rigoureusement au principe des moments, on emploie en général la *fonction de probabilité de* Laplace, qui conduit en posant

$$\xi = \frac{(x-m)}{\sigma}$$

aux formules suivantes :

$$(16) \qquad P(x) \sim \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{z}{\sigma}$$

et

$$(17) \qquad \mathfrak{P}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\xi'}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt,$$

où $\xi' = \xi - \frac{1}{2\sigma}$.

Les meilleures tables donnant z et $1 - \mathfrak{P}(x)$ sont celles de Sheppard (*loc. cit.*, 4, p. 2-11).

Il faut remarquer que la fonction de probabilité de Laplace ne satisfaisait pas rigoureusement au principe des moments ; en effet, au lieu d'avoir

$$\sum_{x=0}^{n}\frac{xz}{\sigma} = m \qquad \text{et} \qquad \sum_{x=0}^{n}\frac{(x-m)^2 z}{\sigma} = \sigma^2,$$

on a les relations

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xz}{\sigma}\, dx = m \qquad \text{et} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-m)^2 z}{\sigma}\, dx = \sigma^2.$$

La formule de sommation d'Euler permet de déterminer l'erreur commise en substituant les intégrales aux sommes. On peut montrer que lorsque tous les p_i sont voisins de $\frac{1}{2}$ et que n est grand, l'erreur est négligeable et les formules (16) et (17) donnent une assez bonne approximation ([6]).

3. Lorsqu'on demande une approximation plus grande, par exemple que les n premiers moments $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_n$ de $P(x)$ et de la fonction approchée coïncident, il faut avoir recours à la formule suivante [*loc. cit.*, 5, p. 110]

$$P(x) = \psi(x) \sum_{s=0}^{n} c_s G_s(x), \tag{18}$$

où

$$c_s = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \frac{m^i}{i!} \mathcal{B}_{s-i}, \qquad G_s(x) = \frac{s!}{m^s} \sum_{i=0}^{s} (-1)^i \binom{x}{s-i} \frac{m^i}{i!},$$

de même

$$\mathfrak{P}(x) = I(u, x-1) + \sum_{s=2}^{n} c_s G_{s-1}(x-1)\, \psi(x-1). \tag{19}$$

Il n'y a pas de tables pour $G_t(x)$, mais on peut abréger le calcul en se servant des tables de $\psi(x)$ et de celles des coefficients du binome $\binom{x}{\nu}$, en donnant aux formules précédentes une autre forme

$$P(x) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s c_s \Delta^s \psi(x-s), \tag{20}$$

$$\mathfrak{P}(x) = I(u, x-1) + \sum_{s=2}^{n} (-1)^{s-1} \Delta^{s-1} \psi(x-s-1), \tag{21}$$

([6]) Ch. Jordan, *Sur la probabilité des épreuves répétées* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LIV, 1926, p. 101-137).

mais ces formules ne seront réellement utiles que si l'on dispose des tables de $\Delta^s\psi(x)$.

Une autre solution est obtenue à l'aide des polynomes de Hermite

$$P(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\xi^2}}{\sqrt{2\pi}}\left[1 + \sum_{s=3}^{n} a_s H_s(\xi)\right], \tag{22}$$

où l'on a posé $\xi = \frac{x-m}{\sigma}$. De plus,

$$a_s = \sum_{i=0} \frac{(-1)^{s+i}\mu_{s-2i}}{i!(s-2i)!\,2^i\sqrt{2\pi}},$$

μ_ν étant le moment de puissance suivant

$$\mu_\nu = \sum_{x=0}^{n} \xi^\nu P(x).$$

Finalement $H_s(\xi)$ est le polynome d'Hermite de degré s où l'on a posé $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$H_s(\xi) = s!\sum_{i=0} \frac{(-1)^{s-i}\xi^{s-2i}}{2^i i!(s-2i)!}.$$

De la formule (22) on tire

$$\mathfrak{P}(x) = \int_{\xi'}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt - \sum_{s=3}^{n} a_s H_{s-1}(\xi')\frac{e^{-\frac{1}{2}\xi'^2}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{23}$$

où

$$\xi' = \xi - \frac{1}{2\sigma}.$$

Les formules (22) et (23) ont le même défaut que (16) et (17).

6. *Troisième problème des épreuves répétées.* — On répète les épreuves jusqu'à ce qu'on arrive à une épreuve favorable ; on demande la probabilité $V(x)$ que la $x^{\text{ième}}$ épreuve soit la première favorable. En employant la notation paragraphe 1 on trouve

$$V(x) = \frac{(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{x-1}A_x)}{(E)}. \tag{24}$$

En éliminant les classes négatives comme précédemment on a

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{x-1} A_x = A_x(E - A_1)(E - A_2) \ldots (E - A_{x-1}),$$

et l'on en tire

$$(25) \qquad V(x) = \frac{(A_x)}{(E)} + \sum_{\nu=1}^{x-1} (-1)^\nu \sum{}' \frac{(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_\nu} A_x)}{(E)},$$

où la somme accentuée est étendue aux combinaisons ν à ν des symboles $A_1, A_2, \ldots, A_{x-1}$.

On peut donner une autre forme à $V(x)$ en remplaçant dans (24) A_x par $E - \alpha_x$, alors on obtient

$$V(x) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{x-1})}{(E)} - \frac{(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_x)}{(E)}.$$

Si l'on désigne par $Q(x)$ la probabilité qu'en x épreuves aucune ne soit favorable, $Q(x) = \frac{(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_x)}{(E)}$, on aura la formule remarquable

$$(26) \qquad V(x) = -\Delta Q(x-1).$$

De la même manière on obtiendrait la probabilité $\overline{V}(x)$ que la première épreuve défavorable soit la $x^{\text{ième}}$ épreuve

$$\overline{V}(x) = -\Delta p_{1,2,\ldots,x-1}.$$

Finalement la probabilité $\mathfrak{T}(x)$ pour que les épreuves commencent par une série de x épreuves favorables suivies par des épreuves défavorables ou par x épreuves défavorables suivies par des épreuves favorables ou brièvement « *par une série de* x » est

$$\mathfrak{T}(x) = V(x+1) + \overline{V}(x+1) = \frac{(A_{x+1})}{(E)} + \sum_{\nu=1}^{x}{}' \frac{(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_\nu} A_{+1x})}{(E)}$$
$$+ \frac{(A_1 A_2 \ldots A_x)}{(E)} - \frac{(A_1 A_2 \ldots A_{x+1})}{(E)}.$$

Lorsqu'on fait n épreuves, la probabilité qu'on ait au moins une épreuve favorable est

$$\mathfrak{p}(1) = \sum_{x=1}^{n} V(x);$$

de (26) on tire le résultat évident

$$\mathfrak{p}(1) = 1 - Q(n).$$

Moyenne de la longueur x des séries. — On obtient par la méthode de la sommation par parties

$$\mathcal{B}_1 = \sum_{x=1}^{\infty} x V(x) = -\sum_{x=1}^{\infty} x \Delta Q(x-1) = \sum_{x=0}^{\infty} Q(x).$$

Par la même méthode on obtient

$$\mathcal{B}_2 = \sum_{x=1}^{\infty} \binom{x}{2} V(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x Q(x),$$

où $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont les moments binomiaux de la fonction $V(x)$.

La moyenne σ^2 des carrés des écarts est

$$\sigma^2 = 2\mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_1^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (2x+1) Q(x) - \left[\sum_{x=0}^{\infty} Q(x)\right]^2.$$

Lorsque les épreuves sont symétriques, la formule (25) peut s'écrire

$$V(x) = \sum_{\nu=0}^{x-1} (-1)^{\nu} \binom{x-1}{\nu} p_{123,\ldots,\nu+1}. \tag{27}$$

Lorsqu'on connaît les probabilités $p_{123,\ldots,\nu+1}$, cette formule donne $V(x)$; par contre, connaissant $V(x)$ on peut obtenir les probabilités $p_{123,\ldots,\nu+1}$ par l'inversion de la formule (27). On multiplie les deux membres par $(-1)^{x-1}\binom{i}{x-1}$ et l'on fait la somme de $x = 1$ à $x = i+1$, on trouve ainsi

$$p_{123,\ldots,i+1} = \sum_{x=1}^{i+1} (-1)^{x-1} \binom{i}{x-1} V(x). \tag{28}$$

7. Exemple I. — *Problème général de l'urne.* — Une urne contient a boules blanches et b boules noires; $a + b = c$. On tire une boule, si elle est blanche, on met dans l'urne $k+1$ boules blanches; si elle est noire, on y met $k+1$ boules noires. Il s'agit

de déterminer la probabilité d'obtenir x boules blanches en n tirages (⁷).

Le problème est symétrique. En effet, la probabilité d'obtenir x boules blanches aux premiers x tirages et $n-x$ boules noires aux tirages suivants est donnée par la fraction

$$\begin{aligned}&\frac{a}{c}\,\frac{(a+k)}{(c+k)}\,\frac{(a+2k)}{(c+2k)}\cdots\frac{(a+xk-k)}{(c+xk-k)}\\ &\quad\times\frac{b}{(c+xk)}\,\frac{(b+k)}{(c+xk+k)}\cdots\frac{(b+nk-xk-k)}{(c+nk-k)}\\ &=\frac{1}{(E)}(A_1A_2\ldots A_x\alpha_{x+1}\alpha_{x+2}\ldots\alpha_n).\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir x boules blanches et $n-x$ boules noires dans un ordre quelconque est la même, car le dénominateur est évidemment le même, et le numérateur ne différera que par l'ordre des facteurs; il en est ainsi pour toutes les valeurs de x. La symétrie étant démontrée, on peut se servir des formules (9) à (12).

Dans le cas considéré, la probabilité que les s premières épreuves soient favorables est

$$p_{1\,2\,3\ldots s}=\frac{a(a+k)(a+2k)\ldots(a+sk-k)}{c(c+k)(c+2k)\ldots(c+sk-k)},$$

par suite de (11), il résulte que la probabilité d'obtenir x boules blanches en n tirages est

$$P(x)=\binom{n}{x}\sum_{s=x}^{n}(-1)^{x+s}\binom{n-x}{s-x}\frac{a(a+k)\ldots(a+sk-k)}{c(c+k)\ldots(c+sk-k)}.$$

La probabilité d'avoir au moins x boules blanches peut être tirée de la formule (12)

$$\mathfrak{P}(x)=n\binom{n-1}{x-1}\sum_{s=x}^{n}(-1)^{x+s}\binom{n-x}{s-x}\frac{1}{s}\,\frac{a(a+k)\ldots(a+sk-k)}{c(c+k)\ldots(c+sk-k)}.$$

En posant dans les formules précédentes $k=0$, le problème

(⁷) Ce problème a été considéré pour la première fois dans ce cas général par F. Eggenberger et G. Polya, *Zeitschr. für angew. Mathem. u. Mech.*, 1923, p. 279-289.

devient identique au problème des épreuves répétées de *Bernoulli*. En effet, en écrivant $p = \frac{a}{c}$ et $i = s - x$, on trouve

$$P(x) = \binom{n}{x} \sum_{i=0}^{n-x} (-1)^i \binom{n-x}{i} p^i = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

et

$$\mathfrak{P}(x) = n \binom{n-1}{x-1} \sum_{i=0}^{n-x} (-1)^i \binom{n-x}{i} \frac{p^{x+i}}{x+i}.$$

On peut voir par intégration par parties que la somme dans le second membre est égale à

$$\int_0^p (1-t)^{n-x} t^{x-1}\, dt = B_p(n-x+1,\, x),$$

c'est-à-dire à une fonction β incomplète. Comme le facteur devant la somme est l'inverse de la fonction β complète, on a la formule connue donnant dans le problème de *Bernoulli* la probabilité qu'en n épreuves au moins x soient favorables ([8])

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{B_p(n-x+1,\, x)}{B\,(n-x+1,\, x)}.$$

D'après le paragraphe 4 on a

$$m = \mathcal{B}_1 = \sum p_i = \frac{na}{c} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B}_2 = \sum p_{ij} = \binom{n}{2} \frac{a(a+k)}{c(c+k)},$$

on en conclut

$$\sigma^2 = \frac{nab(c+nk)}{c^2(c+k)}.$$

A l'aide de m et de σ on peut déterminer les valeurs approchées de $P(x)$ et de $\mathfrak{P}(x)$ en se servant des formules du paragraphe 5.

Troisième problème. — Déterminons la probabilité $V(x)$ que la $x^{\text{ième}}$ épreuve soit la première favorable. La probabilité que toutes les x épreuves soient défavorables est

$$Q(x) = \frac{b(b+k)\ldots(b+xk-k)}{c(c+k)\ldots(c+xk-k)},$$

([8]) Pour les calculs numériques on se servira de *K. Pearson's*, *Tables of the Incomplete* β-*Function*, London, 1934.

on en tire à l'aide de (26)

$$V(x) = -\Delta Q(x-1) = \frac{b(b+k)\ldots(b+xk-2k)a}{c(c+k)\ldots(c+xk-k)},$$

on aurait pu écrire cette probabilité directement.

8. Exemple II. — *Problème de la rencontre. Généralisation de Laplace.* — Une urne contient rn boules numérotées de 1 à n; il y en a r de chaque nombre. On tire successivement n boules; lorsque le nombre i sort au i-ième tirage on dit qu'il y a rencontre. Désignons par p_i la probabilité d'avoir rencontre au $i^{\text{ième}}$ tirage. On peut montrer, comme au paragraphe précédent, que le problème est symétrique.

Dans le cas considéré il est assez compliqué de déterminer directement la probabilité $Q(s)$ de l'absence de rencontre en s tirages, ou la probabilité $V(x)$ que la première rencontre ait lieu au $x^{\text{ième}}$ tirage; par contre, on peut écrire facilement la probabilité qu'en s tirages on ait s rencontres. En effet, on a

$$p_{12\ldots s} = \frac{r^s}{rn(rn-1)\ldots(rn-s+1)}.$$

On en conclut que pour déterminer la probabilité qu'il y ait x rencontres en n tirages, le mieux est de se servir de la formule (9)

$$(29) \qquad P(x) = \sum_{s=x}^{n} (-1)^{x+s} \binom{s}{x} \binom{n}{s} \frac{r^s}{rn(rn-1)\ldots(rn-s+1)},$$

et pour avoir la probabilité $\mathfrak{P}(x)$ que l'on ait au moins x rencontres en n tirages, on aura recours à la formule (10)

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{s=x}^{n} (-1)^{x+s} \binom{s-1}{x-1} \binom{n}{s} \frac{r^s}{rn(rn-1)\ldots(rn-s+1)}.$$

Cas particulier de $r=1$. — Les formules précédentes donnent en écrivant $s-x=i$

$$P(x) = \frac{1}{x!} \sum_{i=0}^{n-x} (-1)^i \frac{1}{i!},$$

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{1}{(x-1)!} \sum_{i=0}^{n-x} (-1)^i \frac{1}{i!(x+i)}.$$

Remarque. — Lorsque n augmente indéfiniment on trouve

$$\lim_{n=\infty} \mathrm{P}(x) = \frac{1}{x!e}.$$

La formule (29) conduit aussi à ce résultat quel que soit r; de même la formule (13) de Poisson, en effet le *nombre moyen* des rencontres dans les séries de n épreuves est, d'après le paragraphe 4,

$$m = \mathfrak{B}_1 = \sum p_i = \sum \frac{1}{n} = 1.$$

Lorsque $r = 1$

$$\mathfrak{B}_2 = \sum p_{ij} = \binom{n}{2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2},$$

on trouve dans ce cas $\sigma^2 = 1$.

Troisième problème. — La probabilité que la première rencontre ait lieu à la $x^{\text{ième}}$ épreuve est, d'après (27),

$$\mathrm{V}(x) = \sum_{\nu=0}^{x-1} (-1)^\nu \binom{x-1}{\nu} \frac{r^\nu}{rn(rn-1)\ldots(rn-\nu)}.$$

9. Exemple III. — *Problème de Poisson. Cas particulier.* — On fait n épreuves. La probabilité du cas favorable à la $i^{\text{ième}}$ épreuve est $p_i = \frac{i}{(n+1)}$. Les événements sont indépendants, on a donc

$$\mathrm{P}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_s} = p_{\nu_1}p_{\nu_2}\ldots p_{\nu_s} = \frac{\nu_1\nu_2\ldots\nu_s}{(n+1)^s}. \tag{30}$$

Ce problème n'est pas symétrique; par suite, la probabilité pour obtenir sur n épreuves x favorables est donnée par la formule (3)

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{s=x}^{n} (-1)^{x+s} \binom{s}{x} \frac{\sum \nu_1\nu_2\ldots\nu_s}{(n+1)^s}.$$

Il faut faire la somme des produits des combinaisons s à s des nombres $1, 2, \ldots, n$. On sait que ce nombre est la valeur absolue du nombre de *Stirling* de première espèce S_{n+1}^{n+1-s}. Donc

$$\sum p_{\nu_1}p_{\nu_2}\ldots p_{\nu_s} = \frac{|\mathrm{S}_{n+1}^{n+1-s}|}{(n+1)^s}, \tag{31}$$

et, de plus,

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{s=x}^{n} (-1)^{x+s} \binom{s}{x} \frac{|S_{n+1}^{n+1-s}|}{(n+1)^s}.$$

D'après la formule (4) la somme des probabilités (31) est égale au moment binomial $\mathcal{B}_s$ de la fonction $\mathrm{P}(x)$. On en conclut que

$$|S_{n+1}^{n+1-s}| = (n+1)^s \mathcal{B}_s.$$

En écrivant $\frac{(\mathrm{A}_i)}{(\mathrm{E})} = p_i$ et $\frac{(\alpha_i)}{(\mathrm{E})} = q_i$ (donc $p_i + q_i = 1$) la fonction génératrice de $\mathrm{P}(x)$ sera dans cet exemple

$$\theta(t) = \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i t);$$

en effet le coefficient de t^x dans le développement de cette fonction sera égal à $\mathrm{P}(x)$. Par suite

$$S_{n+1}^{n+1-s} = (n+1)^s \left[\frac{1}{s!} \frac{d^s}{dt^s} \prod_{i=1}^{n} (q_i + p_i t) \right]_{t=1}$$

Cette formule permet de calculer les nombres de *Stirling* de première espèce à l'aide des probabilités ([9]).

Pour déterminer $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ écrivons

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{(q_i + p_i t)},$$

par suite

$$\mathcal{B}_1 = \left[\frac{d\theta}{dt}\right]_{t=1} = \sum p_i = \sum \frac{i}{n+1} = \frac{1}{2} n.$$

On a, en outre,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt} \sum \frac{p_i}{(q_i + p_i t)} - \theta \sum \frac{p_i^2}{(q_i + p_i t)^2},$$

$$\mathcal{B}_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\sum p_i\right)^2 - \sum p_i^2\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{n^2}{4} - \frac{n(2n+1)}{6(n+1)}\right]$$

([9]) Voir les nombres de Stirling dans Ch. Jordan, *Calculus of finite differences*. Budapest, 1939. Hungarian agent Egzenberger bookshop.

et, d'après le paragraphe 4,

$$\sigma^2 = \sum p_i(1 - p_i) = \frac{n(n+2)}{6(n+1)}.$$

Comme dans ce problème on a $q_i = p_{n+1-i}$, il en résulte $\Sigma p_i^\nu = \Sigma q_j^\nu$, et l'on en conclut

$$P(x) = P(n - x).$$

Troisième problème. — Comme dans ce cas les événements sont indépendants, la probabilité pour que la $x^{\text{ième}}$ épreuve soit la première favorable s'exprime donc simplement

$$V(x) = q_1, q_2 \ldots q_{x-1} p_x = \frac{n(n-1)\ldots(n-x+2)x}{(n+1)^x}.$$