

# BULLETIN DE LA S. M. F.

ÉMILE TURRIÈRE

**Une nouvelle courbe de transition pour les  
raccordements progressifs : la radioïde  
pseudo-elliptique**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 67 (1939), p. 62-99

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1939\\_\\_67\\_\\_62\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1939__67__62_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**UNE NOUVELLE COURBE DE TRANSITION POUR LES  
RACCORDEMENTS PROGRESSIFS : LA RADIOÏDE  
PSEUDO-ELLIPTIQUE;**

Par M. ÉMILE TURRIÈRE,

Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier.

**Généralités sur les courbes de transition.**

1. Le problème de la voie ferrée, et celui, plus récemment posé, de la route ont imposé l'emploi de *courbes de transition* pour raccordements progressifs.

Il s'agit de passer d'un alignement droit BA d'arrivée à un second alignement droit AB' de départ (ou *vice-versa*) en se raccordant sur un arc circulaire qui appartiendrait, en principe, à un cercle de centre  $C_0$ , rayon  $R_0$  (*cercle primitif*).

La variation brusque de courbure serait dangereuse, en raison des effets de la force centrifuge. Cette variation de courbure constituerait une absurdité pratique et une grave erreur théorique. On ne saurait donc passer directement d'un alignement droit à un arc circulaire et inversement.

La solution adoptée est de déplacer ou déformer le cercle primitif ( $C_0, R_0$ ) :

- a. En conservant le centre et diminuant le rayon;
- b. En conservant le rayon et déplaçant le centre de  $C_0$  en C sur la bissectrice  $AC_0C$  des alignements (AB, AB').

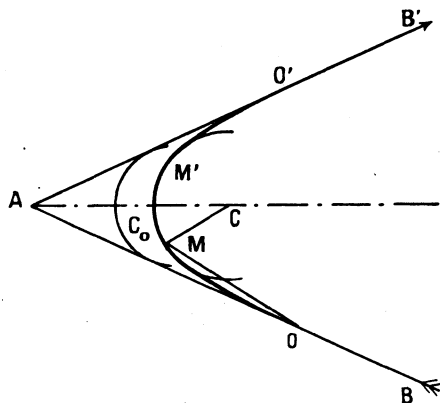
Le profil définitif (*profil en longueur*) de la voie, comprendra ainsi :

- 1° Une partie BO rectiligne;
- 2° Un arc OM de courbe de transition;
- 3° Un arc circulaire MM';
- 4° Un arc M'O' de courbe de transition;

5° Une partie rectiligne O'B'; l'ensemble étant *symétrique par rapport à la bissectrice de l'angle BAB'*.

Les courbes de transition, assurant une variation continue de la courbure, devront essentiellement avoir des points d'inflexion O et O' avec OB et O'B' pour tangentes inflexionnelles. En M et M', elles seront respectivement osculatrices au cercle définitif (C, R).

Fig. 1.



Déjà, vers 1854, de telles lignes de transition furent insérées entre cercle et alignements droits à l'occasion de l'établissement de voies ferrées du sud de l'Autriche (courbe en anse de panier).

En 1863, de telles courbes furent utilisées couramment sur la ligne du Brenner. En même temps, sur toute la longueur de ce raccordement, le dévers croissait uniformément de zéro à sa valeur sur la courbe circulaire.

En 1867, W. de Nördling, alors ingénieur en chef de la Compagnie d'Orléans, introduisait ces notions en France et donnait sa solution des *raccordements paraboliques*.

La circulaire ministérielle française du 28 juin 1879 préconisait l'emploi de la parabole cubique de Nördling

$$y = \frac{x^3}{135\ 000}$$

avec la vitesse V, le dévers  $d$  et l'angle  $i$  de dévers :

$$V = 62\text{ km}, \quad d = \frac{45}{R}, \quad \text{tang } i = 0,002.$$

Dans ses études sur les rivières à fond mobile, Fargue (1) introduisit en 1868 la *spirale volute* qui n'était autre que la *clothoïde* ou *spirale de Cornu*. Il indiquait, en même temps, une solution théorique par une nouvelle courbe qu'il nommait la *bisinoïde*, et en 1884, une autre solution par les *spirales sinusoïdes*.

En 1869, Combiere reprenait la solution de Nördling par la parabole cubique.

En 1868, paraissait une importante étude mathématique de Tourtay (2); le problème était posé dans toute sa généralité et résolu par l'emploi d'une courbe d'équation intrinsèque

$$R = \varphi(s)$$

conduisant aux formules

$$x = \int ds \left[ \cos \int \varphi(s) ds \right].$$
$$y = \int ds \left[ \sin \int \varphi(s) ds \right].$$

analogues à celles de Fargue.

En 1876, E. Collignon (3) étudiait la question sous un point de vue strictement géométrique.

Toutes les recherches de cette période initiale aboutissaient à la thèse de doctorat de Maximilien de Leber (4) (1892), consacrée aux *radioïdes* suivantes : la parabole cubique, la clothoïde, l'élastique, la lemniscate de Bernoulli.

Le problème de la construction des pistes de vélodrome fut

---

(1) L. FARGUE, *Étude sur la corrélation entre la configuration du lit et la profondeur d'eau dans les rivières à fond mobile* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1868, 1<sup>er</sup> semestre, p. 34).

L. FARGUE, *Note sur le tracé des rives de la Garonne* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1884, 1<sup>er</sup> semestre, p. 411).

L. FARGUE, *La forme du lit des rivières à fond mobile*, 1908, p. 63 et 175.

(2) TOURTAY, *Note sur les raccordements paraboliques de la voie en plan* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 6<sup>e</sup> série, t. VI, 1883, 2<sup>e</sup> semestre, p. 387-408). Voir aussi p. 612 du même volume quelques lignes insérées, à la demande de Fargue, au sujet de la Note de Tourtay.

(3) E. COLLIGNON, *Problème des raccordements* (*Association française pour l'avancement des sciences*, Clermont-Ferrand, 5<sup>e</sup> session, 1876, p. 87-104).

(4) Maximilien de LEBER, *Calcul des raccordements paraboliques dans les tracés de chemins de fer*, 1892 (*Thèse soutenue en juin 1895*).

résolu en 1895 par Carlo Bourlet<sup>(5)</sup> au moyen de la clothoïde, tandis que la lemniscate était spécialement étudiée, sous le rapport de son application au problème de la voie, par Adam<sup>(6)</sup> (1895).

En 1902, M. d'Ocagne<sup>(7)</sup> revenait sur l'application de la clothoïde aux voies ferrées et publiait les tables qui ont depuis été constamment utilisées.

Le problème des voies fluviales, qui, primitivement, avait été étudié par Fargue était repris par Mocquery<sup>(8)</sup> (1881) et par Fargue lui-même (1884), puis en 1911 par Armand<sup>(9)</sup>, qui considéra à nouveau la bisinusoïde.

Ce ne fut, par contre, que plus récemment que se posa la question du relèvement des virages des routes.

En France, une Commission du Touring-Club édicta, en 1905, quelques règles qui ne furent pas suivies.

En 1914-1918, au cours de la Guerre, les routes furent élargies systématiquement dans les virages, en France et en Amérique. Des travaux stratégiques, en régions accidentées, furent entrepris au Maroc. Dans la région de Fez, il fut fait usage de raccords progressifs pour virages fortement relevés.

Mais, depuis la Guerre, une abondante littérature a été consacrée à la question routière et principalement aux courbes de transition.

En France, MM. J. Bize et Malegarie<sup>(10)</sup> ont publié une série d'articles présentant le plus vif intérêt, ainsi qu'une bibliographie

---

(5) CARLO BOURLET, *Traité des bicyclettes et bicyclettes, suivi d'une application à la construction des vélodromes*, 1884, p. 82-88.

(6) ADAM, *Emploi de la lemniscate de Bernoulli pour les raccords*, avec tables applicables aux tracés de chemins de fer (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1895, 2<sup>e</sup> semestre, p. 383).

(7) D'OCAGNE, *Sur les raccords à courbure progressive pour voies ferrées* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1902, p. 70).

(8) MOCQUERY, *Courbes de raccordement des canaux* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1881, n<sup>o</sup> 56).

(9) ARMAND, *Travaux d'amélioration du Rhône* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1911, 2<sup>e</sup> semestre, n<sup>o</sup> 70).

(10) J. BIZE, *Calcul et implantation des courbes de transition des virages sur les routes* (*Annales des Ponts et Chaussées*, 1932, 1<sup>er</sup> semestre, p. 300-323).

CHARLES MALEGARIE et JOSEPH BIZE, *Application des raccords progressifs aux sinuosités des voies terrestres et fluviales* (*L'Ingénieur-Constructeur*, 1935, n<sup>o</sup> 246, p. 3505-3517; n<sup>o</sup> 247, p. 3569-3582; n<sup>o</sup> 248, p. 3653-3656).

GALATOIRE-MALEGARIE, *Tracés de routes à courbure continue. Raccords à courbure progressive par l'emploi de la lemniscate de Bernoulli*.

étendue relativement à ces diverses courbes. Comme travaux récents, il convient de citer ceux de MM. Larras et Couprie.

En Belgique, M. J. Lamoën <sup>(11)</sup> leur a consacré une longue étude et a calculé de nouvelles tables.

En Angleterre, le Professeur Royal Dawson et M. H. Criswell ont publié des études techniques sur l'emploi de la spirale de Cornu ou la lemniscate; ces études sont du plus grand intérêt <sup>(12)</sup>.

En Italie <sup>(13)</sup>, l'intérêt spécial qui vient d'être apporté aux autostrades a provoqué la publication de recherches importantes de Luigi Stabilini, F. Corini, F. Balatroni, L. Lamagna, C. Columba, et les graves accidents sur l'autodrome de Monza

---

*Relèvements des virages (Annales des Ponts et Chaussées, 3<sup>e</sup> trimestre, 1919, p. 332).*

MALEGABIE, *Virages et raccordements progressifs (Revue générale des routes et de la circulation routière, juin 1934).*

LARRAS, *Profils en long et profils en travers de chaussées dans les entrées de virages relevés (Annales des Ponts et Chaussées, t. VII, juillet 1936, p. 74-87).*

COUPRIE, *Note sur les caractéristiques des routes modernes, (Annales des Ponts et Chaussées, août 1938, 2<sup>e</sup> semestre, n° 5, p. 179-249).*

<sup>(11)</sup> J. LAMOËN, *Le tracé des raccordements progressifs (Annales des travaux publics de Belgique, 1933).*

<sup>(12)</sup> F. ROYAL G. DAWSON, *Elements of curve design for road, railway and racing track.*

F. G. ROYAL DAWSON, *Graphic solution of road and railway curve problems with the aid of lemniscate transition curves.*

F. G. ROYAL DAWSON, *Rectifying road curves (Roads and Road Construction, 2 janvier et 1<sup>er</sup> février, 33 p.).*

F. G. ROYAL DAWSON, *Road curves for safe modern traffic (E. F. Spon, London), avec tables.*

H. CRISWELL, *Highway spirals, banking and vertical curves (a pocket book for Highway Engineers).*

H. CRISWELL, *Les courbes de transition (Roads and Road Construction, décembre 1935, p. 405).*

H. CRISWELL, *Tables de la spirale pour projets de grandes routes (Roads and Road Construction, février 1936, p. 37).*

<sup>(13)</sup> LUIGI STABILINI, *Raccordi a una pista ciclistica (Giornale del genio civile, 1923).*

Felice CORINI, *Saggi sul problema stradale moderno (Il politecnico, 1930).*

FRANCESCO BALATRONI, *Le curve nelle strade automobilistiche (Il politecnico, 1933).*

Luigi LAMAGNA, *Sul moto in curva di un treno stradale (Il politecnico, 1933).*

C. COLUMBA, *Les courbes de raccordement des routes et la lemniscate (Il politecnico, 1936).*

pendant que se courait le grand prix d'Europe ont prouvé la nécessité de ces recherches.

Je citerai aussi les travaux de M. Peter <sup>(14)</sup> dans la *Revue suisse de la route*, et de J. Funcke, dans le *Strassensbau* <sup>(15)</sup>.

2. Les courbes spéciales utilisées dans la technique des raccordements progressifs entre un alignement droit et un arc circulaire peuvent être distribuées en *deux groupes* suivant la constitution même des développements en séries représentatives de la variation de leurs courbures en fonction de l'angle  $\alpha$  de déviation de la tangente courante.

Un premier groupe comprend la parabole cubique, la lemniscate de Bernoulli (radioïde aux cordes), la courbe élastique particulière (radioïde aux abscisses), la clothoïde (spirale volute, spirale de Cornu, radioïde aux arcs).

Chacune d'elles dépend essentiellement d'un paramètre et reste homothétique à un type de courbe complètement déterminée.

Un second groupe, en plus du paramètre de similitude, est caractérisé par la présence de paramètres affectant la forme essentielle de la courbe. C'est le cas de la famille des spirales sinusoïdes d'équation polaire

$$r^n = a^n \sin n\theta,$$

qui comprend comme cas particulier ( $n = 2$ ) la lemniscate de Bernoulli, et dont les importantes propriétés géométriques ou analytiques les font intervenir en de nombreuses questions. Leur emploi au titre de radioïde possible avait été préconisé en 1868 par Fargue pour les travaux en vue de la régularisation du lit de la Garonne. Et, à l'occasion des mêmes études, Fargue introduisit aussi comme radioïde sa curieuse bisinusoïde, dont l'emploi est rendu difficile par la complication des transcendentes <sup>(16)</sup>.

---

(14) PETER, *Des courbes de raccordement* (*Revue suisse de la route*, juillet 1928).

(15) J. FUNCKE, *Ausbildung von Strassenkreuzungen innerhalb geschlossener Ortschaften* (*Der Strassenbau*, 15 sept. 1934).

(16) Pour la bibliographie et la partie historique, voir mes Notes suivantes, aux *Anais da Faculdade de Ciencias do Porto: Sur diverses courbes planes*, t. XXII, 1937, paragraphes 34 et 35; *Sur les courbes de transition dans les virages*, t. XXIII, 1938, p. 19-32.

Récemment d'ailleurs, dans son remarquable Mémoire, M. J. Lamoën après avoir longuement étudié les radioïdes du premier groupe revient rapidement sur la question de la bisinu-soïde de Fargue, mais n'en poursuit pas l'application.

Aucune de ces diverses courbes ou famille de courbes ne réalise la condition *optima pour le calculateur* de ne dépendre, soit dans la représentation analytique, soit pour l'expression de sa loi de rectification, que de fonctions élémentaires. Il s'introduit dans tous les cas des transcendentes : intégrales elliptiques ou eulériennes, intégrales de Fresnel, intégrales du double-sinus. L'emploi de tables permet, il est vrai, l'utilisation de ces courbes dans la pratique, le travail ayant ainsi été préparé aux techniciens. Mais il convient de songer à la théorie, au cas où un examen profond de la question exige le retour à des équations exactes. C'est ainsi que si l'on recherche le maximum du rapport  $\frac{s}{R}$ , les tables montreront l'existence d'un maximum; mais comme la fonction varie peu au voisinage du maximum, l'emploi de tables ou de séries lentement convergentes n'est pas fait pour donner avec une précision convenable la valeur correspondante de la variable.

En diverses circonstances, la préférence à accorder à telle ou telle courbe de transition a été discutée; des raisons techniques, dans le cas de longs parcours où les courbes cessent d'être assimilables, peuvent donner la priorité à la spirale volute, malgré la complication des calculs afférents.

P. Appell<sup>(17)</sup>, se plaçant sous un point de vue géométrique, qui n'est d'ailleurs pas celui des techniciens, a déduit du calcul variationnel que la meilleure radioïde était la courbe élastique. Par considération de l'énergie de l'élastique, il s'agit de rendre minima, dans des conditions précisées, l'intégrale

$$\int \frac{ds}{R^2}$$

suivant l'arc de la courbe. La courbe élastique générale dans le plan dépendant d'un nombre surabondant de paramètres,

---

(<sup>17</sup>) P. APPELL, *Courbe de raccordement et élastique plane* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLIX, 1921, p. 105-106).



M. G. Remoundos <sup>(18)</sup> a complété la solution de P. Appell pour une meilleure détermination de l'élastique. Et d'ailleurs cette propriété de l'élastique, courbe découverte par Jacques Bernoulli en 1694 et étudiée par Jean Bernoulli, avait été mise en évidence par leur neveu et fils Daniel Bernoulli. La question fut plus amplement étudiée, en 1744, par Euler dans son Mémoire sur les lignes jouissant de propriétés de maximum ou minimum.

Mais quel que soit l'intérêt mathématique qui s'attache à de telles questions, ce n'est pas sous cet aspect qu'il faut considérer le problème pratique. Et sous ce point de vue, les belles propriétés géométriques de la lemniscate de Bernoulli lui réservent une place prépondérante dans les études récentes.

#### La radioïde pseudo-elliptique.

3. Les conditions qui, sous le point de vue précisé plus haut, doivent dicter le choix d'une radioïde pour les raccordements progressifs sont les suivantes :

1° La courbe doit admettre un point ordinaire d'inflexion et aussi une courbure croissante;

2° *Elle doit être rectifiable.* Même si dans les calculs d'approximation en vue de la résolution du problème fondamental il est fait usage de développements en séries, il convient d'être en possession de formules rigoureuses (en particulier pour la rectification de la courbe), qui permettront de vérifier les résultats.

Il est nécessaire que les formules, permettant d'exprimer certains éléments, en fonction d'un *paramètre angulaire* (l'azimut  $\theta$  ou l'angle  $\alpha$  d'inclinaison de la tangente courante sur la tangente inflexionnelle) soient relativement simples, aptes aux calculs, et de précision satisfaisante.

Les éléments sont : les coordonnées de position  $(x, y)$  du point

---

<sup>(18)</sup> G, REMOUNDOS, *Sur le raccordement des lignes et la courbe élastique plane* (C. R. Acad. Sc., t. 174, 20 février 1922, p. 519-521).

G, REMOUNDOS, *Sur le raccordement des chemins de fer et la courbe élastique plane* (Bulletin de la Société mathématique de Grèce, [3], 1922, p. 25-27).

courant  $M$  de la courbe ou ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$ ; le rapport  $\frac{s}{R}$ .

Malgré l'indétermination dans le choix de la solution du problème théorique de Géométrie, ce choix n'est pas tellement libre d'une courbe techniquement convenable. Et, c'est ce que prouve le fait qu'il ait été nécessaire d'avoir recours à des courbes aussi compliquées, quant à leur représentation analytique, que le sont et la clothoïde et la bisinusoïde de Fargue.

Les diverses courbes utilisées présentent des inconvénients : la parabole cubique, la lemniscate, la sinusoïde ou la tangentoïde, l'élastique de Bernoulli dont la rectification ne peut être effectuée qu'avec des fonctions elliptiques; les spirales sinusoïdes dont la rectification fait intervenir des fonctions qui dans certains cas sont les fonctions eulériennes.

L'équation cartésienne de l'élastique ne peut être exprimée élémentairement et elle dépend aussi des fonctions elliptiques. Quant à la clothoïde et à la bisinusoïde, toutes deux rectifiables par définition, ce sont deux courbes dont les coordonnées du point courant dépendent toutes deux de transcendantes exprimables par des intégrales.

Parmi les diverses courbes douées d'une inflexion soumises à l'examen sous le point de vue de leur utilisation possible au titre de radioïde, j'ai retenu une courbe inédite (en tant que courbe spéciale) (1) dépourvue de propriétés géométriques il est vrai, mais qui semble devoir donner satisfaction pour les faibles inclinaisons. C'est la courbe d'équation

$$(1) \quad \text{tang} \frac{X}{m} = \text{th} \frac{Y}{m};$$

par son allure générale elle s'apparente avec la tangentoïde

$$Y = m \text{ tang} \frac{X}{m};$$

mais alors que la tangentoïde n'est rectifiable qu'au moyen de

---

(1) La courbe représente pourtant une fonction ayant de nombreuses applications. Elle est l'image de la *loxodromie* sphérique dans le système où les coordonnées sont la longitude et la latitude.

fonctions elliptiques, la courbe signalée ci-dessus se rectifie élémentairement.

Pour une raison qui apparaîtra plus loin, je la nommerai la *radioïde pseudo-elliptique*; elle appartient, lorsque  $m$  varie, à une famille de courbes homothétiques, comme il convient dans le problème des raccordements.  $m$  sera appelé le *paramètre* de la radioïde.

Les calculs seront faits sur la courbe particulière de la famille, ayant l'unité pour paramètre ( $m = 1$ ). Il sera aisé finalement de conclure pour la courbe convenable correspondant à la valeur véritable de ce paramètre. Ce sera la méthode de réduction des calculs préliminaires sur la *radioïde réduite*.

4. La radioïde réduite aura donc comme équations l'une ou l'autre des équations suivantes qui sont équivalentes entre elles :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang} X = \operatorname{th} Y, \\ \sin 2X = \operatorname{th} 2Y, \\ \cos 2X \cdot \operatorname{ch} 2Y = 1, \\ \operatorname{tang} 2X = \operatorname{sh} 2Y; \\ Y = \operatorname{Log} \sqrt{\operatorname{tang} \left( X + \frac{\pi}{4} \right)}. \end{array} \right.$$

Elle admet la bissectrice des axes ( $X = Y$ ) pour tangente inflexionnelle à l'origine  $O$  des coordonnées. Les bissectrices des axes ( $OX, OY$ ) étant prises pour axes ( $Ox, Oy$ ).

La courbe admet l'asymptote  $X = \frac{\pi}{4}$ .

Les formules de changements de coordonnées seront :

$$(3) \quad \sqrt{2}x = Y + X, \quad \sqrt{2}y = Y - X.$$

La figure représente les anciens axes  $OX, OY$  et leurs bissectrices ( $Ox, Oy$ ) L'arc utile de la radioïde est figuré en trait plein de l'inflexion  $O$  jusqu'au jarret  $j$ . Sur la branche infinie marquée en pointillé, de  $j$  à l'asymptote  $X = \frac{\pi}{4}$  est marqué le point  $\sigma$ , qui correspondrait théoriquement au maximum de  $\sigma$ .

En  $\gamma$ , est représentée la naissance de la développée.

Pour la construction de la courbe, voici les précisions concer-



La rectification s'effectue par la formule d'intégration suivante :

$$(7) \quad s = \sqrt{2} \int_0^{\tau} \frac{\sqrt{1+\tau^4}}{1-\tau^4} d\tau = \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos 2\alpha \sqrt{\sin 2\alpha}}.$$

Sous sa forme algébrique, l'intégrale dépendant d'un radical portant sur un polynome du quatrième degré, il semble à première vue que l'intégration doive dépendre des fonctions elliptiques. Il en serait ainsi pour la courbe plus générale représentée par l'équation

$$\text{th } Y = c^2 \text{ tang } X;$$

en posant

$$\text{tang } X = \frac{\tau}{c}, \quad \text{th } Y = c\tau,$$

la rectification s'effectuerait par l'intégrale

$$s = c \sqrt{1+c^4} \int_0^{\tau} \frac{\sqrt{1+\tau^4}}{(c^2+\tau^2)(1-c^2\tau^2)} d\tau$$

elliptique. Mais, dans le cas particulier où  $c$  prend la valeur  $c = 1$ , on se trouve en présence de l'intégrale pseudo-elliptique sur laquelle l'attention aurait été précisément appelée par Euler (1) et qui serait le premier exemple d'intégrale de cette nature.

La forme trigonométrique montre que c'est bien un cas de pseudo-ellipticité. Il suffit de mettre l'intégrale sous la forme

$$s = \int \frac{\cos 2\alpha d\alpha}{\cos^2 2\alpha \sqrt{\sin 2\alpha}} = \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin 2\alpha)}{\cos^2 2\alpha \sqrt{\sin 2\alpha}};$$

en posant

$$(8) \quad \sin 2\alpha = \psi^2, \quad (0 < \psi < 1),$$

(1) Cette intégrale aurait été considérée par Euler dans une lettre à Condorcet. Voir à ce sujet le P.-S. de la lettre du 15 mai 1778 de Fuss à Condorcet, publiée par G. Darboux.

G. DARBOUX, *Lettres de divers mathématiciens (Bulletin des Sciences mathématiques, 2<sup>e</sup> série, t. III, 1879, p. 200-228).*

Ch. HERMITE, *Sur une formule d'Euler (Journal de Liouville, 3<sup>e</sup> série, t. VI, 1880, p. 5-18).*

E. CATALAN, *Sur l'intégrale d'Euler*

$$\int \frac{dx \sqrt{1+x^4}}{1-x^4}$$

(Nouvelle correspondance mathématique, t. VI, 1880, p. 151-155).

$s$  s'exprime élémentairement

$$(9) \quad s = \int_0^\psi \frac{r\psi}{1-\psi^4}$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} 2s &= \text{Arctang} \psi + \text{Log} \sqrt{\frac{1+\psi}{1-\psi}} = \text{Arctang} \psi + \text{Argth} \psi, \\ \frac{1}{R} &= \psi \sqrt{1-\psi^4}; \end{aligned} \right.$$

$\psi$  s'exprime en fonction de  $\tau$  par la formule

$$\psi = \sqrt{2} \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^4}}$$

Finalement, le rapport

$$\sigma = \frac{s}{R}$$

prend la forme

$$(11) \quad \begin{aligned} 2\sigma &= \psi \sqrt{1-\psi^4} \left\{ \text{Arctang} \psi + \text{Log} \sqrt{\frac{1+\psi}{1-\psi}} \right\} \\ &= \psi \sqrt{1-\psi^4} \left\{ \text{Arctang} \psi + \text{Argth} \psi \right\} \end{aligned}$$

(logarithme naturel).

§. Centre de courbure. — Soient  $(\xi, \eta)$  les coordonnées par rapport aux nouveaux axes  $(Ox, Oy)$  de ce centre.

Elles se déduisent de celles du point courant  $(x, y)$  de la courbe par les formules

$$(12) \quad \begin{cases} \xi = x + \mu = x - R \sin z, \\ \eta = y + \nu = y + R \cos z. \end{cases}$$

Posons

$$\mu = -R \sin z < 0, \quad \nu = R \cos z > 0;$$

$\mu$  et  $\nu$  sont les coordonnées de l'extrémité  $\mathcal{R}$  d'un vecteur ayant  $O$  pour origine et équipollent au rayon de courbure. Ce point  $\mathcal{R}$  a pour coordonnées polaires  $R$  et  $\alpha$  par rapport à  $O$  et la direction  $Oy$ . Il décrit la courbe nommée la *radiale* (radiale de Tucker) de la courbe étudiée. La radiale de la radioïde pseudo-elliptique a donc pour équation polaire

$$R \cos 2z \sqrt{\sin 2z} = 1,$$

et pour équation cartésienne

$$2\mu\nu(\mu^2 - \nu^2)^2 = \mu^2 + \nu^2;$$

c'est donc une sextique unicursale;  $\mu$  et  $\nu$  s'expriment rationnelle-

ment, en effet, en fonction de  $\tau$ ,

$$\sqrt{2}\mu = -\tau \frac{1+\tau^4}{1-\tau^4}, \quad \sqrt{2}\nu = \frac{1}{\tau} \frac{1+\tau^4}{1-\tau^4}.$$

Dans ses études sur la forme des lits de rivières, Fargue (1) s'est précisément préoccupé de la question de figurer par une courbe la loi de variation de la courbure en fonction de l'inclinaison de l'élément. Cette courbe déterminant la succession des courbures n'est autre que la radiale si la fonction représentée est le rayon lui-même  $R(\alpha)$  ou une transformée par inversion de la radiale si la fonction représentée est la courbure. Le mieux, semble-t-il, est de représenter en coordonnées polaires la variation de la courbure en fonction de l'angle  $\alpha$ . Dans le cas présent, la courbe figurative (inverse de la radiale) a pour équation polaire

$$r^2 = \cos^2 2\theta \times \sin 2\theta;$$

pour les petites valeurs de l'inclinaison de la tangente, l'inverse de la radiale se comporte comme la lemniscate  $r^2 = \sin 2\theta$ , l'allure générale est celle d'une fausse-lemniscate, avec disparition de l'axe de symétrie  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

**6. Développements en séries.** — Les développements en séries de  $\tau$  ou  $\psi$  sont expressifs et immédiats. Ils sont convergents pour  $\tau < 1$  ou  $\psi < 1$ . L'asymptote, inclinée à  $\alpha = 45^\circ$ , correspond à  $\tau = 1$  ou  $\psi = 1$ .

$$\begin{aligned} X &= \text{Arctang } \tau, & Y &= \text{Argth } \tau, \\ X &= \tau - \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^5}{5} - \frac{\tau^7}{7} + \dots, & Y &= \tau + \frac{\tau^3}{3} + \frac{\tau^5}{5} + \frac{\tau^7}{7} + \dots \\ x &= \sqrt{2}\tau \left( 1 + \frac{\tau^4}{5} + \frac{\tau^8}{9} + \dots + \frac{\tau^{4p}}{4p+1} + \dots \right), \\ r &= \sqrt{2}\tau^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{\tau^4}{7} + \frac{\tau^8}{11} + \dots + \frac{\tau^{4p}}{4p+3} + \dots \right), \\ \frac{ds}{d\psi} &= \frac{1}{1-\psi^4} = 1 + \psi^4 + \psi^8 + \dots, \\ s &= \psi \left( 1 + \frac{\psi^4}{5} + \frac{\psi^8}{9} + \dots + \frac{\psi^{4p}}{4p+1} + \dots \right), \\ \frac{s}{\sqrt{2}} &= \tau \left( 1 + \frac{3}{10}\tau^4 + \frac{11}{7^2}\tau^8 + \dots \right), \\ \frac{s}{R} &= \sigma = \psi^2 \sqrt{1-\psi^4} \left[ 1 + \frac{\psi^4}{5} + \frac{\psi^8}{9} + \dots \right]. \end{aligned}$$

---

(1) L. FARGUE, *La forme du lit des rivières à fond mobile*, 1908; pièce annexe VII : *Instruction sur l'emploi des gabarits de courbure*, p. 177-181.

En première approximation

$$(13) \quad \sigma = \psi^2 \left( 1 - \frac{3}{10} \psi^4 - \frac{41}{360} \psi^8 \dots \right).$$

Pour obtenir rapidement les expressions, développées en séries de  $\tau^i$ , des coordonnées du centre de courbure, le mieux est de déterminer l'enveloppe de la normale au point courant M, normale dont l'équation est ici

$$\begin{aligned} \xi + \tau^2 \eta &= \sqrt{2} \tau \left\{ 1 + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) \tau^4 + \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) \tau^8 + \left( \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \right) \tau^{12} + \dots \right\} \\ &= 8\sqrt{2} \tau \left\{ \frac{1}{8} + \frac{1}{3 \cdot 5} \tau^4 + \frac{2}{7 \cdot 9} \tau^8 \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{11 \cdot 13} \tau^{12} + \dots + \frac{P}{(4p-1)(4p+1)} \tau^{4p} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

La dérivation en  $\tau$  (série absolument convergente,  $\tau < 1$ ) donne tout d'abord l'expression de  $\eta$  et celle de  $\xi$  en résulte aussitôt après

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= 4\sqrt{2} \tau \left\{ \frac{1}{8} - \frac{\tau^4}{5} - \frac{2}{9} \tau^8 - \frac{3}{13} \tau^{12} - \dots - \frac{1}{4p+1} \tau^{4p} - \dots \right\}, \\ \eta &= \frac{4\sqrt{2}}{\tau} \left\{ \frac{1}{8} + \frac{\tau^4}{3} + \frac{2}{7} \tau^8 + \frac{3}{11} \tau^{12} + \dots + \frac{P}{4p-1} \tau^{4p} + \dots \right\}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi que le montrent ces diverses formules, les deux variables angulaires  $\tau$  ou  $\psi$  seront introduites concurremment, en tenant compte de la simplicité des développements. Ceux-ci d'ailleurs sont rapidement convergents; le rapport de termes consécutifs dans ces diverses séries est, à partir d'un rang peu éloigné, comparable à  $\tau^4$ , les séries se comportent pratiquement comme la progression géométrique de raison  $\tau^4$ ; et, ici,  $\tau^4$  est de l'ordre de 0,1 et  $\tau$  de 0,56.

J'indiquerai aussi l'expression de la coordonnée axiale  $\lambda$  qui pourra être utilisée dans la construction de la tangente courante. C'est M. d'Ocagne qui a montré initialement l'intérêt, dans certains cas, de ces coordonnées. Les variables sont alors l'angle  $\alpha$  d'inclinaison de la tangente courante et l'abscisse  $\lambda$  de sa trace sur  $Ox$ .

En coordonnées axiales  $(\lambda, \alpha)$ , l'équation de la tangente est

$$x = \lambda + y \cot \alpha;$$



d'où les expressions

$$r = \lambda' \sin^2 \alpha, \quad \lambda' = \frac{d\lambda}{d\alpha}, \quad \lambda'' = \frac{d^2\lambda}{d\alpha^2};$$

$$x = \lambda + \lambda' \sin \alpha \cos \alpha,$$

des coordonnées  $(x, y)$  du point de contact et celle

$$R = \lambda'' \sin \alpha + 2 \lambda' \cos \alpha,$$

du rayon de courbure  $R$ .

La tangente a pour équation, dans le cas de la radioïde étudiée dans le présent travail,

$$\tau^2 x - y = 2\sqrt{2} \tau^3 f(\tau)$$

avec

$$(15) \quad f(\tau) = \frac{1}{1.3} \tau^3 + \frac{\tau^5}{5.7} + \frac{\tau^8}{9.11} + \dots + \frac{\tau^{4p}}{(4p-1)(4p+1)} \dots$$

d'où, pour la représentation en coordonnées axiales.

$$\tau^2 = \tan \alpha,$$

$$\lambda = 2\sqrt{2} \tau f(\tau),$$

formules permettant à l'occasion de déterminer la position de la tangente.

**7. Tableau résumé pour les séries.** — Voici le tableau des divers développements en série de  $\tau$  ou  $\alpha$  des principaux éléments dans la théorie de la nouvelle radioïde

$$\tan \alpha = \tau^2.$$

$$\tau = \sqrt{\alpha} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{6} + \frac{19}{360} \alpha^4 \right], \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{6} - \frac{\alpha^4}{40} \right];$$

$$\tau^2 = \alpha \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{3} + \frac{2}{15} \alpha^4 \right], \quad \frac{1}{\tau^2} = \frac{1}{\alpha} \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^4}{45} \right];$$

$$\tau^3 = \alpha \sqrt{\alpha} \left[ 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{87}{360} \alpha^4 \right], \quad \tau^4 = \alpha^2 \left[ 1 + \frac{2}{3} \alpha^2 + \frac{17}{45} \alpha^4 \right].$$

Courbure :

$$\sqrt{2} R = \frac{(1 + \tau^4)^{\frac{3}{2}}}{\tau(1 - \tau^4)}, \quad \frac{1}{R} = \cos 2\alpha \sqrt{\sin 2\alpha}.$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2} \tau} \left[ 1 + \frac{5}{2} \tau^4 + \frac{23}{8} \tau^8 \right] = \frac{1}{\sqrt{2} \alpha} \left[ 1 + \frac{7}{3} \alpha^2 + \frac{41}{10} \alpha^4 \right],$$

$$\frac{1}{R} = \sqrt{2} \tau \left[ 1 - \frac{5}{2} \tau^4 + \frac{27}{8} \tau^8 \right] = \sqrt{2} \alpha \left[ 1 - \frac{7}{3} \alpha^2 + \frac{121}{90} \alpha^4 \right].$$

Coordonnées  $(x, y)$  du point d'osculation de la radioïde :

$$x = \sqrt{2} \tau \left( 1 + \frac{\tau^4}{3} + \frac{\tau^8}{9} \right) = \sqrt{2} \alpha \left[ 1 + \frac{11}{30} x^2 + \frac{119}{360} x^4 \right],$$

$$y = \sqrt{2} \tau^3 \left( \frac{1}{3} + \frac{\tau^4}{7} + \frac{\tau^8}{11} \right) = \frac{\alpha \sqrt{2} \alpha}{3} \left[ 1 + \frac{13}{14} x^2 + \frac{1339}{20 \times 11} x^4 \right];$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2 \tau^2 \left[ 1 + \frac{23}{45} \tau^4 + \frac{563}{9 \times 25 \times 7} \tau^8 \right] \\ &= 2 \alpha \left[ 1 + \frac{38}{45} x^2 + \frac{526}{27 \times 25 \times 7} x^4 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2} \tau \left[ 1 + \frac{23}{90} \tau^4 + \frac{3313}{40 \times 81 \times 7} \tau^8 \right] \\ &= \sqrt{2} \alpha \left[ 1 + \frac{19}{45} x^2 + \frac{467}{2 \times 81 \times 7} x^4 \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{x}{R} = 2 \tau^2 \left( 1 - \frac{23}{10} \tau^4 + \frac{215}{72} \tau^8 \right) = 2 \alpha \left[ 1 - \frac{59}{30} x^2 + \frac{59}{72} x^4 \right],$$

$$\frac{y}{R} = 2 \tau^3 \left[ \frac{1}{3} - \frac{29}{42} \tau^4 + \frac{529}{11 \times 56} \tau^8 \right] = \frac{2 \alpha^2}{3} \left[ 1 - \frac{59}{42} x^2 + \frac{761}{11 \times 9 \times 40} x^4 \right].$$

Coordonnées du centre de courbure  $(\xi, \eta)$  :

$$\frac{\xi}{R} = \frac{x}{R} - \sin \alpha, \quad \frac{\eta}{R} = \frac{y}{R} + \cos \alpha;$$

$$\frac{\xi}{R} = \alpha \left[ 1 - \frac{113}{30} x^2 + \frac{587}{360} x^4 \right],$$

$$\frac{\eta}{R} = 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{451}{8 \times 63} x^4,$$

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \tau \left[ 1 - \frac{8}{5} \tau^4 - \frac{16}{9} \tau^8 \right] = \sqrt{\frac{x}{2}} \left( 1 - \frac{43}{30} x^2 - \frac{67}{36} x^4 \right),$$

$$\eta = \frac{\sqrt{2}}{8 \tau} \left[ 1 + \frac{8}{3} \tau^4 + \frac{16}{7} \tau^8 \right] = \frac{1}{\sqrt{2} \alpha} \left[ 1 + \frac{5}{2} x^2 + \frac{3019}{840} x^4 \right].$$

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{1}{\alpha} \left[ 1 + \frac{59}{15} x^2 + \frac{13 \times 1489}{25 \times 9 \times 7} x^4 \right],$$

$$\frac{\xi}{\eta} = \alpha \left[ 1 - \frac{59}{15} x^2 + \frac{334}{3 \times 7 \times 7} x^4 \right];$$

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{2 \alpha} \left[ 1 + 6 x^2 + \frac{74}{7} x^4 \right],$$

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{\sqrt{2} \alpha} \left[ 1 + 3 x^2 + \frac{11}{14} x^4 \right].$$

Longueur  $s$  de l'arc à partir de l'inflexion :

$$s = \sqrt{2} \tau \left[ 1 + \frac{3}{10} \tau^4 + \frac{11}{72} \tau^8 + \frac{23}{16 \times 13} \tau^{12} + \frac{179}{128 \times 17} \tau^{16} \right],$$

$$s = \sqrt{2} \alpha \left( 1 + \frac{7}{15} \alpha^2 + \frac{41}{90} \alpha^4 \right),$$

$$\sigma = \frac{s}{R} = 2 \tau^2 \left[ 1 - \frac{11}{5} \tau^4 + \frac{25}{9} \tau^8 \right] = 2 \alpha \left( 1 - \frac{28}{15} \alpha^2 + \frac{32}{45} \alpha^4 \right).$$

**8. Vérification de la formule de M. Bize.** — Pour évaluer la longueur d'un arc de lemniscate de Bernoulli, une formule empirique équivalente à

$$(16) \quad s = \xi + \frac{\alpha}{5} (\eta + 4 R)$$

a été proposée par M. J. Bize <sup>(1)</sup>, Ingénieur des Ponts et Chaussées du Vaucluse; dans cette formule,  $\xi$ ,  $\eta$  sont les coordonnées du centre de courbure de la lemniscate relatif au point M de contact de la tangente d'inclinaison  $\alpha$ ;  $R$  le rayon de courbure en M.

La radioïde pseudo-elliptique donne lieu aux développements suivants en séries de  $\tau$  :

$$\sqrt{2} \tau R = 1 + \frac{5}{2} \tau^4 + \frac{23}{8} \tau^8,$$

$$\sqrt{2} \xi = \tau \left( 1 - \frac{8}{5} \tau^4 - \frac{16}{9} \tau^8 \right),$$

$$\sqrt{2} \tau \eta = 1 + \frac{8}{5} \tau^4 + \frac{16}{7} \tau^8,$$

$$\alpha = \tau^2 \left( 1 - \frac{\tau^4}{3} + \frac{\tau^8}{5}, \dots \right),$$

puisque  $\tan \alpha = \tau^2$ . D'où successivement

$$\sqrt{2} \tau \frac{\eta + 4 R}{5} = 1 + \frac{38}{15} \tau^4 + \frac{193}{70} \tau^8,$$

$$\sqrt{2} \alpha \frac{\eta + 4 R}{5} = \tau \left[ 1 + \frac{11}{5} \tau^4 + \frac{1331}{630} \tau^8 \right],$$

$$\xi + \frac{\alpha}{5} (\eta + 4 R) = \sqrt{2} \tau \left( 1 + \frac{3}{10} \tau^4 + \frac{211}{9 \times 140} \tau^8 \right),$$

$$s = \sqrt{2} \tau \left( 1 + \frac{3}{10} \tau^4 + \frac{11}{72} \tau^8 \right);$$

<sup>(1)</sup> J. BIZE, *Calcul et implantation des courbes de transition des virages sur les routes (Annales des Ponts et Chaussées, 1932, 1<sup>er</sup> semestre, p. 300-323).*

CH. MALEGARIE et J. BIZE, *Application des raccordements progressifs aux*

les deux dernières expressions ont mêmes termes des premier et cinquième ordre en  $\tau$ . L'emploi pour la radioïde pseudo-elliptique de la formule de Bize comporte donc une erreur relative

$$\left( \frac{211}{9 \times 140} - \frac{11}{62} \right) \tau^8 = \frac{37}{9 \times 280} \tau^8;$$

la formule donne une valeur approchée par défaut de la longueur de l'arc avec une erreur relative de l'ordre de  $\frac{\alpha^4}{70}$ . Pour  $\alpha = \frac{1}{6}$  (correspondant à un angle  $\alpha$  d'une dizaine de degrés); cette erreur relative est donc en valeur absolue,  $1 \cdot 16^{-3}$ , et la précision en est remarquable, tout aussi bien que dans le cas de la lemniscate de Bernoulli. Mais alors que pour cette dernière courbe l'approximation était par excès, c'est le sens contraire pour la radioïde pseudo-elliptique.

#### Le jarret.

9. La radioïde présente un sommet (le jarret) au point

$$\psi^4 = \frac{1}{3}, \quad \psi = 0,759\ 835\ 5, \quad \tau = 0,563\ 76,$$

où le rayon de courbure est minimum. En ce point

$$\cos 4\alpha = \frac{1}{3}, \quad \tan \alpha = \sqrt{3} - \sqrt{2}, \quad \tan 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha = 17^\circ 37' 56'' = 0,307\ 740\ 4,$$

$$= 19^s 59' 14'',$$

$$\frac{1}{R} = 0,620\ 40. \quad R = 1,611\ 855.$$

Les coordonnées du jarret sont : par rapport aux axes OX et OY,

$$X = 0,513\ 360, \quad Y = 0,638\ 33,$$

par rapport aux axes Ox et Oy,

$$x = 0,814\ 38, \quad y = 0,088\ 32,$$

$$\theta = 6^\circ 10' 44''.$$

---

*sinuosités des voies terrestres et fluviales (L'Ingénieur-Constructeur, n° 246, juillet-août 1935, p. 3512 et 3513).*

Les coordonnées du centre de courbure par rapport aux axes  $Ox$ ,  $Oy$ , sont

$$\xi = 0,326\ 15, \quad \eta = 1,624\ 46;$$

d'où

$$\frac{\xi}{\eta} = 0,200\ 9, \quad \frac{\eta}{\xi} = 4,980\ 7.$$

L'angle polaire de ce point, par rapport à l'axe  $Oy$ , est  $11^{\circ}21'$ .

Le centre de courbure associé au jarret  $j$  est *point de rebroussement* de la développée

$$(17) \quad \begin{aligned} \xi &= x - R \sin \alpha, & \eta &= y + R \cos \alpha, \\ \frac{d\xi}{dx} &= -\frac{dR}{dx} \sin \alpha & \frac{d\eta}{dx} &= \frac{dR}{dx} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ces formules générales montrent qu'en un jarret ( $dR = 0$ ), on a

$$\frac{d\xi}{dx} = 0, \quad \frac{d\eta}{dx} = 0.$$

La normale au jarret  $j$  rencontre l'axe  $Ox$  en un point d'abscisse  $X_n = 17,426$  et l'axe  $Oy$  en un point d'ordonnée  $Y_n = 0,9041$ .

La droite  $X = 1$  est rencontrée au point

$$X = 1, \quad Y = 0,3864.$$

Ces données numériques permettent de construire avec précision la normale au jarret, et, par suite le cercle de courbure, ce qui est précieux pour la construction de l'arc utile de la radioïde.

10. Tout point situé entre le point d'inflexion et ce point de rayon minimum de courbure donnera donc un *raccordement correct*, dans le sens qu'il ne se présentera pas pour l'alignement droit, sur la partie de raccordement de la radioïde des points où les rayons de courbure seraient inférieurs à celui du cercle à raccorder (<sup>1</sup>).

La limite  $\alpha = 17^{\circ}$  n'est pas atteinte dans les applications envisagées dans le Mémoire de M. Lamoën, où la plus grande valeur de  $\alpha$  considérée est  $8^{\circ}36'$ .

Mais si l'existence du jarret sur la courbe de raccordement est

(<sup>1</sup>) DE LA HIRE, *Remarques sur la forme de quelques arcs dont on se sert dans l'architecture* (Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 1702, p. 100-103). De la Hire signale ce défaut « que les ouvriers appellent le jarret et qui est précisément blâmé dans l'architecture ».

blâmable, il n'en est nullement de même de l'arrivée en jarret sur la partie circulaire d'un virage. Il semble au contraire que *l'arrivée en jarret soit recommandable* : puisque, en telle circonstance, le cercle de raccordement se trouve de ce fait même être sur osculateur à la courbe de transition. On pourrait même tolérer que le jarret fut très légèrement dépassé sur l'arc conservé de la radioïde.

D'ailleurs Comber (1) a systématiquement introduit le jarret dans ses courbes de raccordement.

La courbe affine de la chaînette a reçu le nom de *courbe à deux nez*, lorsqu'elle présente deux jarrets symétriques (en plus du sommet de clef). A la suite de Rankine, elle a été utilisée par T. Alexander et A. W. Thomson comme courbe de voûte. Ils ont indiqué un certain nombre de constructions de tels arcs de courbes (2).

La caténoïde de cette espèce a été réalisée pour la construction de deux ouvrages importants, tous deux en maçonnerie : en 1891, le pont de Verjux, sur la Saône, et en 1900, le nouveau pont d'Orléans sur la Loire (3).

Pour le pont de Verjux (pont Boucicaut), si remarquable à divers points de vue et notamment par la hardiesse des voûtes, Tourtay a utilisé la projection de chaînette comme courbe d'intrados. Il résulte des données numériques (comme résultat de calculs et non au titre de condition imposée) que les jarrets sont presque atteints et très voisins des naissances sur le prolongement de l'arc utile. C'est un cas analogue à l'arrivée en jarret, pour les raccordements; c'est une sorte de *retombée en jarret* pour le pont.

Par contre, il résulte des données (données théoriques) de Legay, pour son nouveau pont d'Orléans, que la fibre moyenne de cet ouvrage contient effectivement les jarrets sur l'arc retenu.

---

(1) COMBIER, *Courbes de raccordements (Annales des Ponts et Chaussées, 1869, t. II, p. 148)*.

(2) T. ALEXANDER et A. W. THOMSON, *Two-nosed catenaries and their application to the design of segmental arches (Transactions of the royal Irish Academy, t. 24, 1888, part 3, p. 43-99)*.

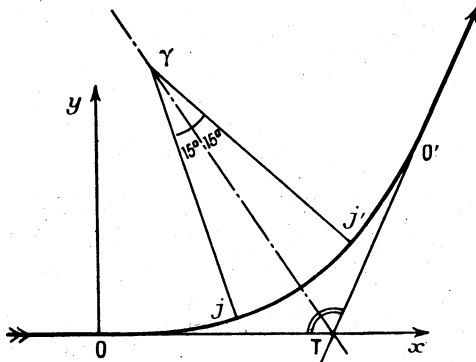
(3) *Courbes de voûtes surbaissées en maçonnerie ou en béton armé [Buletinul Societatii Politehnica din Romnia (sous presse)]*.

Enfin, puisqu'il a été fait état de la condamnation des jarrets, je crois devoir relater, d'après Dieulafoy <sup>(1)</sup>, le mérite artistique de *l'ogive persane*, qui comporte précisément des jarrets et dont il a été fait un usage systématique dans les ponts de toute beauté construits par les anciens persans.

Revenons maintenant au jarret de la courbe pseudo-elliptique.

La figure 3 représente un virage avec arrivée en jarret :  $Oj$  est l'arc de radioïde jusqu'au jarret;  $jj'$  est un arc de  $30^\circ$  circulaire appartenant au cercle surosculateur;  $j'O'$  est l'arc symétrique de  $Oj$  de la courbe pseudo-elliptique. Au total, une déviation angulaire de la tangente de  $65^\circ 34'$  empruntant  $30^\circ$  au cercle.

Fig. 3.



Au jarret

$$\psi = 0,759\,835\,5, \quad \psi^2 = \frac{1}{3},$$

la courbure est

$$\frac{1}{R} = \psi \sqrt{1 - \psi^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \psi;$$

$$R = 1,611\,855.$$

$$\frac{1 + \psi}{1 - \psi} = 7,327\,33,$$

$$\text{Lognat} \sqrt{\frac{1 + \psi}{1 - \psi}} = \text{Argth} \psi = 0,995\,825\,0,$$

$$\text{Arctang} \psi = 37^\circ 13' 44'' = 0,649\,766\,6,$$

$$s = 0,822\,795\,8;$$

<sup>(1)</sup> DIEULAFOY, *Notice sur la construction des ponts en Perse* [Annales des ponts et chaussées 1883, 2<sup>e</sup> semestre, p. 23-48 (spécialement 34)].

d'où

$$\sigma = 0,510\ 465\ 0.$$

11. De Leber a mis en évidence, pour la radioïde aux abscisses, le point qu'il nomme le *sommet de séparation* et dont le rôle est de partager en deux arcs équivalents l'arc de l'élastique, de l'inflexion au sommet proprement dit. En ce point  $\alpha = 24^{\circ}28'11''$ .

Pour la lemniscate de Bernoulli, l'arc analogue de l'inflexion au sommet avait été partagé en deux parties égales par Fagnano (1750) dans ses recherches qui eurent une si grande influence sur le développement de la théorie des fonctions elliptiques. Pour la lemniscate, d'équation polaire

$$r^2 = a^2 \sin 2\theta,$$

le point de division en deux arcs équivalents de l'arc  $0 < \theta < 45^{\circ}$  correspond à

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2(\sqrt{2}-1), \\ \sin 2\theta &= \sqrt{2}-1, \\ \theta &= 12^{\circ}14'05'', \\ \alpha &= 36^{\circ}42'15''. \end{aligned}$$

Dans le cas de la radioïde pseudo-elliptique, le milieu de l'arc  $Oj$ , de l'inflexion  $O$  au jarret  $j$ , correspond à

$$\begin{aligned} \psi &= 0,409; \\ \alpha &= 4^{\circ}49'. \end{aligned}$$

## 12. Le maximum de $\sigma$

$$\sqrt{1-\psi^4} \frac{d\sigma}{d\psi} = \psi + s(1-3\psi^4).$$

L'équation  $\frac{d\sigma}{d\psi} = 0$  se présente sous la forme

$$1 = \frac{7}{5}z + \frac{11}{5.9}z^2 + \frac{15}{9.13}z^3 + \frac{19}{13.17}z^4 + \dots + \frac{4n+3}{(4n-3)(4n+1)}z^n + \dots;$$

en posant

$$z = \psi^4,$$

on reconnaît l'existence d'une racine  $z$  comprise entre  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{2}{3}$ ,



légèrement supérieure à 0,6. Par approximation,

$$\begin{aligned}z &= 0,61066, \\ \psi &= 0,8840, \quad \tau = 0,6937, \\ \alpha &= 25^{\circ}41'48'';\end{aligned}$$

le point correspondant a pour coordonnées (par rapport aux axes OX, OY)

$$X = 0,6065; \quad Y = 8,8550.$$

La valeur de  $\sigma$  maximum est alors, en fonction de la racine précédente  $\psi$ ,

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{\psi^2 \sqrt{1 - \psi^4}}{3\psi^4 - 1},$$

$$\sigma_{\text{max}} = 0,5842$$

avec

$$s = 1,1025, \quad R = 1,813.$$

Le point correspondant ( $\sigma_1$  de la figure 1) est nettement au-dessus du jarret et par conséquent n'est pas situé sur l'arc utile de la courbe.

Le rapport  $\sigma$ , dans la partie utile, va donc en croissant de zéro à la valeur 0,5104 qu'il atteint au jarret.

#### Formules pour la surlargeur.

13. La surlargeur  $\bar{e}$ , primitivement considérée par Fargue, est représentée par la différence entre le rayon primitif et le rayon diminué (1), son expression est donc

$$(18) \quad \bar{e} = \bar{\eta} - \bar{R},$$

dans le cas du paramètre  $m$ ; par suite

$$\bar{e} = m e,$$

en introduisant la surlargeur réduite  $e = \eta - R$ , calculée sur la radioïde réduite.

Les développements de  $\eta$  et  $R$  en fonction de  $\alpha$  donnent celui

---

(1) M. DE LEBER, *Calculs des raccordements paraboliques dans les tracés de chemins de fer*, Paris, 1892, p. 8 et 23.

J. BIZE, *Calcul et implantation des courbes de transitions des virages sur les routes (Annales des Ponts et Chaussées, 1932, 1<sup>er</sup> semestre, p. 300-323)*.

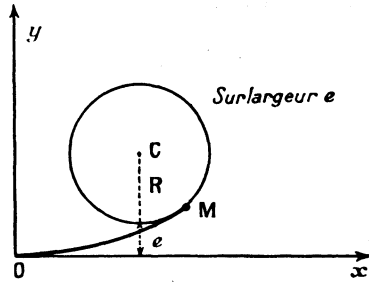
de  $e$  : pour la radioïde pseudo-elliptique,

$$(19) \quad e = \frac{\alpha}{12} \sqrt{2\alpha} \left[ 1 - \frac{85}{28} \alpha^2 \right], \quad \frac{e}{R} = \frac{\alpha^2}{6} \left( 1 - \frac{451}{84} \alpha^2 \right),$$

$$\frac{de}{dx} = \frac{\sqrt{2\alpha}}{8} \left[ 1 - \frac{85}{12} \alpha^4 \right],$$

$$(20) \quad \frac{4e}{y} = 1 - \frac{111}{8} \alpha^2.$$

Fig. 4.



Pour les faibles valeurs de l'inclinaison  $\alpha$ , la radioïde pseudo-elliptique donne donc une surlargeur sensiblement égale au quart de l'ordonnée du point d'osculation (1)

$$e = \frac{y}{4}.$$

Le maximum de  $e$  ne se présente pas sur l'arc utile de la radioïde. Il correspondrait à une valeur théorique

$$\alpha_1^2 = \frac{12}{85} = \frac{1}{7}, \quad \frac{e_1}{y_1} = 0,1101, \quad \alpha_1 = 0,3757;$$

le point correspondant serait au delà du jarret. C'est donc au jarret lui-même que se produit le maximum de la surlargeur (fonction croissante depuis l'inflexion initiale). En ce dernier point

$$\begin{aligned} R &= 1,61185, \\ \eta &= 1,62446, \\ y &= 0,08832, \\ e &= 0,0126, \\ \frac{e}{y} &= 0,142, \quad \frac{e}{R} = 0,0128. \end{aligned}$$

(1) C'est la formule de la circulaire V. 693 du réseau P. L. M., 1928, p. 21.

**Formules empiriques.**

14. Considérons la fonction

$$(21) \quad y = \frac{L + M \cos x}{\sin x},$$

dont le développement est

$$(22) \quad y = \frac{p}{x} \left\{ 1 + \frac{p-3M}{6p} x^2 + \left( \frac{7}{360} - \frac{M}{24p} \right) x^4 \right\},$$

en posant  $L + M = p$ . Si l'on introduit un angle  $\alpha$ ,

$$(23) \quad x = p\alpha,$$

le développement prend la forme

$$(24) \quad y = \frac{1}{\alpha} \left\{ 1 + \frac{p(p-3M)}{6} \alpha^2 + \frac{p^4}{360} \left( 7 - \frac{15M}{p} \right) \alpha^4 \right\}.$$

Comparons au développement de  $\frac{2}{\sigma}$

$$\frac{2}{\sigma} = \frac{1}{\alpha} \left\{ 1 + \frac{28}{15} \alpha^2 + \frac{208}{75} \alpha^4 \right\};$$

l'identification exige que  $p$  soit racine de l'équation bicarrée

$$\begin{aligned} p^4 + 28p^2 - \frac{12}{5} \times 208 &= 0, \\ p^2 &= 12,3662, \\ p &= 3,5166. \end{aligned}$$

$L$  et  $M$  sont définies ensuite par les formules

$$(25) \quad \begin{cases} M = \frac{1}{3p} \left( p^2 - \frac{56}{5} \right), \\ L + M = p, \end{cases}$$

ce qui finalement donne la formule empirique pour  $\sigma$

$$(26) \quad \begin{cases} L = 3,40607, \\ M = 0,11053, \\ p = 3,51662, \end{cases}$$

$$(27) \quad \sigma = \frac{2 \sin p\alpha}{L + M \cos p\alpha}.$$

On peut prendre une formule à peu près équivalente à la précédente, mais à coefficients réduits

$$(28) \quad \sigma = \frac{20 \sin q x}{34 + \cos q x}$$

avec  $q = \frac{7}{5}$ .

On peut aussi utiliser une formule plus simple mais moins approchée

$$(29) \quad \sigma = \frac{5 \sin 4 x}{9 + \cos 4 x};$$

cette dernière peut être rendue plus correcte en posant

$$(30) \quad \sigma = \frac{5 \sin 4 x}{9 + \cos 4 x} + 2 x^5.$$

Examinons la valeur pratique des formules empiriques au voisinage du jarret, point extrême de l'arc utile de la radioïde pseudo-elliptique. La valeur de  $\sigma$  trouvée directement est

$$\sigma = 0,51046.$$

Ici

$$\cos 4 x = \frac{1}{3}; \quad \sin 4 x = \frac{2\sqrt{2}}{3};$$

d'où la valeur approchée par la formule empirique ( $q = 4$ )

$$\sigma_1 = \frac{10\sqrt{2}}{28} = 0,50508,$$

$$\sigma - \sigma_1 = 0,00541,$$

$$2 x^5 = 0,00552.$$

L'erreur commise avec l'emploi de la formule (29) est donc  $1 \cdot 10^{-4}$ ; soit une erreur relative  $2 \cdot 10^{-4}$ .

15. Considérons de même le développement de la fonction  $\frac{\eta}{\xi}$

$$(31) \quad x \frac{\eta}{\xi} = 1 + \frac{59}{15} x^2 + \frac{13 \times 1489}{9 \times 25 \times 7} x^4;$$

la représentation de cette fonction par l'expression

$$\frac{P + Q \cos p x}{\sin p x}$$

exige que soient remplies les conditions suivantes :

$$(32) \quad \begin{cases} P + Q = p, \\ Q = \frac{p^2 - \frac{118}{5}}{3p}, \end{cases}$$

$$p^4 + 59p^2 - \frac{4 \times 13 \times 1489}{5 \times 7} = 0, \quad p^2 = 26,021,$$

$$(33) \quad \begin{cases} p = 5,1010, \\ P = 4,94280, \\ Q = 0,15820. \end{cases}$$

Je prendrai la formule approchée à coefficients simplifiés

$$(34) \quad \frac{\eta_1}{\xi} = \zeta = \frac{368 + 7 \cos 5\alpha}{75 \sin 5\alpha}.$$

Le développement de  $\zeta$  est

$$\zeta = \frac{1}{\alpha} \left( 1 + \frac{59}{15} \alpha^2 + \frac{35}{3} \alpha^4 \right);$$

les coefficients respectifs de  $\alpha^4$  dans les développements de  $\alpha \frac{\eta_1}{\xi}$  et  $\alpha \zeta$  sont 12,2906 et  $\frac{35}{3}$ ; d'où

$$\alpha \left( \frac{\eta_1}{\xi} - \zeta \right) = 0,624 \alpha^3.$$

Au jarret  $\alpha = \frac{1}{3}$ , l'erreur est donc approximativement 0,024 entre les développements limités en séries.

#### 16. Minimum de $\frac{\eta_1}{\xi}$

$$(35) \quad \frac{\eta_1}{\xi} = \frac{P + Q \cos p\alpha}{\sin p\alpha}, \quad \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\eta_1}{\xi} \right) = -p \frac{Q + P \cos p\alpha}{\sin^2 p\alpha}.$$

Ce minimum de  $\frac{\eta_1}{\xi}$  qui se produit au point de rebroussement de la développée (centre de courbure associé au jarret) est donc défini, dans l'emploi de la formule empirique, par

$$\cos p\alpha = -\frac{Q}{P}.$$

La condition de réalité des équations de l'équation linéaire trigonométrique, quand  $\frac{\eta}{\xi}$  est donné, est d'autre part

$$\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2 + Q^2 \geq P^2,$$

et, par suite, le minimum est

$$\text{minimum } \frac{\eta}{\xi} = \sqrt{P^2 - Q^2} = \sqrt{P(P - Q)},$$

(en tenant compte de  $P + Q = p$ ).

Avec

$$p = 5,1010, \quad \frac{1}{p} = 0,196\ 040, \quad P - Q = 4,784\ 60,$$

on trouve ainsi

$$\begin{aligned} \text{minimum } \frac{\eta}{\xi} &= 4,9403, \\ p\alpha &= \frac{\pi}{2} + \beta, & \beta &= 1^{\circ}50'04'', \\ \frac{\pi}{2p} &= 17^{\circ}38'37'', & \frac{\beta}{p} &= 0^{\circ}21'35'', \\ \alpha &= 18^{\circ}00'12'', \end{aligned}$$

ce qui représente une erreur par excès de 22'.

Avec

$$\begin{aligned} p &= 5, & P - Q &= \frac{361}{75}, \\ \frac{\xi}{\eta} &= \frac{\sqrt{15}}{19} = 0,203\ 841\ 5, & \frac{\eta}{\xi} &= 4,9067 \\ \cos p\alpha &= -\frac{7}{368} = -0,019\ 621\ 737, \\ 5\alpha &= 91^{\circ}05'23'', & \alpha &= 18^{\circ}13'05''; \end{aligned}$$

l'erreur par excès est portée à 35', ce qui représente une erreur relative de 1/30<sup>ième</sup> (dans le cas le plus défavorable).

#### Résolution des problèmes fondamentaux. Méthode trigonométrique.

17. Deux problèmes se posent principalement dans la technique, suivant que le rayon est conservé ou le centre de courbure.

Dans les deux cas, les formules empiriques qui ont été données

ramènent la question à la résolution d'une équation

$$(36) \quad \frac{L + M \cos u}{\sin u} = a,$$

dans laquelle L et M sont les coefficients constants admis, et où  $a$  est la donnée ( $\sigma$  ou  $\frac{\eta}{\xi}$  suivant les cas) du problème. Quant à  $u$ , c'est un multiple déterminé  $u = p\alpha$  de l'inclinaison de la tangente de la radioïde. *La résolution de l'un ou de l'autre problème est donc réduite à l'équation linéaire classique de la trigonométrie élémentaire.*

**18. Méthode de calcul pour le tracé d'un raccordement progressif en radioïde pseudo-elliptique entre un alignement droit et un cercle (raccordement à rayon conservé).** — Données : longueur L du raccordement, rayon  $R_0$  du cercle.

*Première partie de la solution.* — Détermination du point de raccordement sur la radioïde réduite.

L et  $R_0$  étant imposés,  $\sigma$  est connu

$$\sigma = \frac{L}{R_0}.$$

Le point A de la radioïde réduite, où le rapport  $\frac{s}{R}$  prend cette valeur  $\sigma$ , est déterminé par la résolution de l'équation transcendante (11) en  $\psi$

$$2\sigma = \psi \sqrt{1 - \psi^4} \left\{ \text{Arctang} \psi + \text{Log} \sqrt{\frac{1 + \psi}{1 - \psi}} \right\}.$$

Comme  $\sigma$  et  $\psi$  sont relativement faibles, on prendra, en première et seconde approximations,

$$\psi_0^2 = \sigma, \quad \psi_1^2 = \sigma + \frac{3}{10} \sigma^3.$$

Partant de cette valeur approchée, on résoudra assez rapidement l'équation transcendante par les méthodes habituelles.

La connaissance de  $\psi$  entraînera celles de  $s$ , R et  $\alpha$

$$2s = \text{Arctang} \psi + \text{Log} \sqrt{\frac{1 + \psi}{1 - \psi}},$$

$$\frac{1}{R} = \psi \sqrt{1 - \psi^4},$$

$$\sin 2\alpha = \psi^2, \quad \text{tang} \alpha = \tau^2;$$

d'où la position du point A dans le plan, ainsi que celle du centre correspondant de courbure (coordonnées  $\xi, \eta$ ).

*Deuxième partie.* — Le paramètre  $m$  de la radioïde

$$\operatorname{tang} \frac{X}{m} = \operatorname{th} \frac{Y}{m}$$

se détermine par similitude

$$m = \frac{L}{s} = \frac{R_0}{R},$$

les éléments calculés,  $s$  et  $R$ , correspondant sur la radioïde réduite

$$\operatorname{tang} X = \operatorname{th} Y$$

aux éléments donnés  $L$  et  $R_0$ . Aux coordonnées  $x, y$ , ou  $\bar{X}, \bar{Y}$  de la courbe réduite correspondront les coordonnées  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{X}, \bar{Y}$  du point correspondant de la solution. De même au centre de courbure  $(\xi, \eta)$  pour la courbe réduite, correspondra le centre  $(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ . Les formules de correspondance seront

$$\begin{aligned} \bar{x} &= mx, & \bar{y} &= my, \\ \bar{\xi} &= m\xi, & \bar{\eta} &= m\eta. \end{aligned}$$

Observer que, dans tous ces calculs, il n'est fait usage que pour une seule opération des tables de fonctions hyperboliques. C'est pour dégager la valeur numérique de l'argument  $Y$  (à partir de la valeur précédemment déterminée de  $\tau$ ) par la formule

$$\operatorname{th} Y = \tau.$$

*Formule différentielle de correction.* — La dérivation du produit

$$\sigma = s \times \frac{1}{R},$$

par rapport à la variable  $\psi$ , donne

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\psi} &= \psi \sqrt{1-\psi^2} \frac{1}{1-\psi^2} + s \frac{1-3\psi^2}{\sqrt{1-\psi^2}}, \\ \sqrt{1-\psi^2} \frac{d\sigma}{d\psi} &= \psi + s(1-3\psi^2); \\ \frac{d\sigma}{d\psi} &= 2\psi \left( 1 - \frac{9}{10} \psi^2 \right); \end{aligned}$$

en première approximation (pour  $\psi$  très petit)

$$d\sigma = 2 d\alpha.$$



Cette formule permettra, lors de la résolution du problème fondamental (détermination de  $\alpha$  connaissant  $\sigma$ ), de déduire la valeur de  $\alpha$  d'une valeur assez approchée.

Au voisinage immédiat du point de courbure maxima ( $dR = 0$ ),  $d\sigma$  se réduit à

$$d\sigma = dx.$$

**19. Application I.** — *Établir un raccordement progressif en radioïde pseudo-elliptique de 15<sup>m</sup> de longueur entre un alignement droit et un cercle de 50<sup>m</sup> de rayon.* — La donnée est

$$\sigma = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}.$$

La table des valeurs de  $\sigma$  donne

$$\begin{aligned} \alpha = 9^\circ, & \quad \sigma = 0,299\ 85; \\ \alpha = 9^\circ, 10', & \quad \sigma = 0,304\ 84; \end{aligned}$$

l'interpolation donne

$$\begin{aligned} \alpha &= 9^\circ 00' 15'', \\ \psi &= 0,556\ 02, \\ \text{Arc tang } \psi &= 0,507\ 455 = 29^\circ 04' 32'', \\ \text{Arg th } \psi &= 0,627\ 0; \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} s &= 0,5672, \\ R &= 1,8910, \quad \frac{1}{R} = 0,5288, \\ \sigma &= 0,3000. \end{aligned}$$

Trigonométriquement, la question se pose ainsi. Il s'agit de trouver  $\alpha$  pour  $\sigma = 0,3$ . Les tables indiquent que  $\alpha$  est voisin de  $9^\circ$ . Le terme correctif  $2\alpha^5$  est donc sensiblement, pour cette valeur de  $\alpha$ , égal à

$$2\alpha^5 = 0,000\ 199\ 2;$$

il faut donc égaler la fraction trigonométrique  $\sigma$ , à

$$0,300\ 0 - 0,000\ 199\ 2 = 0,299\ 800.$$

et résoudre l'équation linéaire

$$\begin{aligned} \frac{5 \sin 4\alpha}{9 + \cos 4\alpha} &= 0,299\ 800, \\ 16,6778 \sin 4\alpha - \cos 4\alpha &= 9; \\ \alpha &= 9^\circ 00' 45''. \end{aligned}$$

Le paramètre  $m$  est ensuite calculé par la formule

$$m = \frac{50}{R} = 26^m, 440.$$

La confrontation de ce résultat avec ceux donnés par M. J. Lamoën résulte du tableau d'ensemble suivant des valeurs de  $\tan \alpha$  :

Clothoïde.....	0,151 236
Lemniscate.....	0,151 236
Nordling.....	0,151 706
Élastique.....	0,151 236
Parabole cubique.....	0,155 074
Pseudo-elliptique.....	0,158 165

20. **Application II.** — *Établir un raccordement progressif en radioïde pseudo-elliptique de 10<sup>m</sup> de longueur entre un alignement droit et un cercle de 100<sup>m</sup> de rayon.* — La donnée est

$$\sigma = \frac{1}{10}.$$

L'interpolation donne la valeur de  $\alpha$ . Voici les calculs de vérification :

$$\begin{aligned} \alpha &= 2^{\circ} 52' 45'', \\ \psi &= 0,316 750 5, \\ \tau &= 0,224 261 6; \\ \text{Arc tang } \psi &= 0,306 749 0 = 17^{\circ} 34' 31'', 5, \\ \text{Arg th } \psi &= 0,327 855 4; \\ R &= 3,173 040, \quad \frac{1}{R} = 0,315 16, \\ s &= 0,317 302, \\ m &= 31^m, 516. \end{aligned}$$

Tableau de comparaison des résultats de M. J. Lamoën pour les valeurs de  $\tan \alpha$  :

Lemniscate.....	0,049 783
Nordling.....	0,050 063
Élastique.....	0,050 075
Clothoïde.....	0,050 075
Parabole cubique.....	0,050 176
Pseudo-elliptique.....	0,050 293

21. **Méthode de calcul pour le tracé d'un raccordement progressif en radioïde pseudo-elliptique entre un alignement droit et un cercle (raccordement à centre conservé).** — Les données sont les coordonnées  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  de position du centre de courbure. De l'homothétie des diverses courbes, pour les valeurs arbitraires du paramètre  $m$ , il résulte que le rapport  $\frac{\xi}{\eta}$  est la donnée principale. Le problème n'est autre que la *détermination de l'intersection de la développée de la radioïde avec une droite issue de O.*

Ceci est vrai de toutes les radioïdes. Contrairement à ce qui se produit pour la conservation du rayon, la question actuelle dépend d'une *équation du troisième degré seulement* dans deux cas : celui de la parabole cubique et celui de la lemniscate de Bernoulli.

Dans le cas de la lemniscate, cette équation est même susceptible d'être mise sous une forme remarquablement simple. Je reviendrai sur la question, me bornant à relever le fait que, si  $\theta$  est l'angle polaire du point d'osculation avec le cercle de la lemniscate

$$r^2 = a^2 \sin 2\theta,$$

on a

$$(37) \quad \begin{cases} \frac{\xi}{\eta} = \operatorname{tang} \theta \frac{1 + 2 \cos^2 \theta}{1 + 2 \sin^2 \theta}, \\ \frac{\xi}{\eta} = \operatorname{tang} \theta \frac{\operatorname{tang}^2 \theta + 3}{\operatorname{tang}^2 \theta + 1}; \end{cases}$$

d'où, en imposant

$$\frac{\xi}{\eta} = c,$$

l'équation du troisième degré en  $\operatorname{tang} \theta$ . Mais, en posant

$$(38) \quad \operatorname{tang} \theta = \operatorname{th} u,$$

l'équation prend la forme définitive

$$(39) \quad \operatorname{th} 3u = c.$$

La résolution est donc immédiate, avec usage de tables de la fonction tangente hyperbolique, la formule

$$(40) \quad \xi^2 + \eta^2 = \frac{3r^4 + a^4}{9r^2}$$

fait ensuite connaître le rayon polaire du centre de courbure de la lemniscate.

Cette circonstance de calcul, qui ne me paraît pas avoir été jusqu'à présent mise en lumière, rend l'emploi de la radioïde aux cordes d'une simplicité remarquable, dans le cas présent de la conservation du centre. Mais, pour être complet, je vais néanmoins poursuivre l'étude du problème pour la radioïde pseudo-elliptique.

22. **Application III.** — *Raccordement à centre conservé. Les données sont les coordonnées du centre de courbure*

$$\bar{\xi} = 7^m, 00, \quad \bar{\eta} = 70^m, 00.$$

Nous avons à déterminer  $\alpha$  par la condition

$$\frac{\eta}{\xi} = 10.$$

La résolution trigonométrique donne

$$\alpha = 5^{\circ} 58' 38'' .$$

$$\text{tang } \alpha = 0, 104\ 658.$$

Le tableau de comparaison des divers résultats de calcul de M. J. Lamoën, pour cet exemple, sera ainsi complété (valeurs de  $\text{tang } \alpha$ ) :

Nordling.....	0, 100 672
Lemniscate.....	0, 100 695
Élastique.....	0, 100 695
Clothoïde.....	0, 100 695
Parabole cubique.....	0, 102 852
Pseudo-elliptique.....	0, 104 658

Je reviendrai, dans un prochain article, sur la comparaison des diverses radioïdes entre elles (1).

(1) *Bulletin de mathématiques et physique pures et appliquées de l'École Polytechnique Roi Carol II, 1937, t. IX.*

— *Sur les raccords progressifs à centre conservé, p. 150-154.*

— *Essai sur une théorie générale d'une classe de courbes de transition pour les raccords progressifs, p. 127-150,*

— *La surla zeur des routes dans les virages* (sous presse).

*Anais da Faculdade de Ciencias do Porto : Raccords lemniscatiques* (à l'impression).

Voir aussi la thèse, actuellement sous presse, de M. HOURFAR (Taghi), *Sur l'étude générale des radioïdes.*

### Conclusions.

La radioïde pseudo-elliptique présente l'avantage d'être rectifiable par une formule simple.

Dans les applications, elle donne des résultats numériques qui la classent plutôt aux côtés de la parabole cubique.

Elle permet une *arrivée rapide au jarret*, après une déviation angulaire de la tangente  $\alpha = 17^{\circ} 37' 56''$  et pour un azimut polaire du point d'osculation avec le cercle  $\theta = 6^{\circ} 10' 44''$ . Alors que pour la parabole cubique ces mêmes angles sont

$$\begin{aligned}\alpha &= 24^{\circ} 05' 41'', \\ \theta &= 8^{\circ} 28' 44'';\end{aligned}$$

que, pour l'élastique harmonique, ils sont

$$\begin{aligned}\alpha &= 90^{\circ}, \\ \theta &= 30^{\circ} 55' 30'',\end{aligned}$$

et, pour la lemniscate,

$$\alpha = 135^{\circ}, \quad \theta = 45^{\circ},$$

tandis qu'il n'y a pas de jarret sur la clothoïde.

Les méthodes approchées paraissent suffisantes jusqu'à une déviation  $\alpha = 10^{\circ}$  sur la courbe de transition (voies ferrées de largeur normale). Au-dessus (chemins de fer d'intérêt local, routes, lacets des routes en montagne) il semble difficile, *pour le moment*, de se prononcer sur la valeur des *nombre admis* dans la technique. La discussion des formules empiriques relatives à la *surlargeur*, prescrite en termes vagues par les circulaires ministérielles (28 juillet 1930, 29 mars 1933, 17 juin 1936) est loin d'être close. On prend en général

$$\frac{e}{R} = \frac{3}{2} \theta^2$$

(formule qui correspond à  $\frac{e}{R} = \frac{\alpha^2}{6}$  ci-dessus donnée). Plusieurs auteurs préconisent une formule

$$e = \frac{54}{R},$$

mais elle conduit à ce résultat étrange que la longueur du raccorde-  
ment serait constante et égale à 36<sup>m</sup>. Il y a donc lieu d'hésiter à  
lier une limite supérieure de  $\alpha$  à la considération d'une surlargeur  
mal définie algébriquement.

Mais les dispositions adoptées dans la pratique paraissent  
permettre l'emploi des formules empiriques jusqu'à l'angle de 17°  
de déviation extrême du cas de la radioïde pseudo-elliptique.

*Table des valeurs de  $\alpha^5$  pour termes correctifs.*

$\alpha$ .	$\alpha^5$	$\alpha$ .	$\alpha^5$ .
5 <sup>o</sup> .....	0,000 005 1	12 <sup>o</sup> .....	0,000 403 0
6.....	12 6	13.....	611 3
7.....	25 1	14.....	871 0
8.....	52 3	15.....	1 230 0
9.....	99 6	16.....	1 700 0
10.....	162 0	17.....	2 300 0
11.....	0,000 260 8	18.....	0,003 060 0

*Table de  $10^4 \times \frac{1}{R}$ .*

Minutes.....	0.	10.	20.	30.	40.	50.
0 <sup>o</sup> .....	-	763	1 079	1 321	1 525	1 705
1.....	1 867	2 016	2 155	2 284	2 407	2 524
2.....	2 635	2 741	2 843	2 941	3 035	3 128
3.....	3 215	3 301	3 385	3 466	3 544	3 620
4.....	3 694	3 766	3 837	3 906	3 973	4 039
5.....	4 104	4 167	4 228	4 288	4 346	4 403
6.....	4 460	4 515	4 569	4 622	4 673	4 724
7.....	4 773	4 821	4 868	4 913	4 958	5 002
8.....	5 045	5 087	5 128	5 169	5 209	5 249
9.....	5 287	5 324	5 360	5 395	5 429	5 462
10.....	5 494	5 527	5 559	5 589	5 619	5 647
11.....	5 675	5 702	5 728	5 754	5 779	5 803
12.....	5 826	5 849	5 872	5 891	5 912	5 933
13.....	5 950	5 970	5 987	6 004	6 020	6 035
14.....	6 050	6 064	6 077	6 089	6 101	6 113
15.....	6 124	6 134	6 143	6 151	6 160	6 167
16.....	6 174	6 180	6 185	6 189	6 193	6 196
17.....	6 199	6 201	6 203	6 204	6 203	6 203
18.....	6 202	-	-	-	-	-

*Table de  $10^5 \times \pi_1$ .*

Minutes....	0.	10.	20.	30.	40.	50.
0.....	-	582	1 162	1 746	2 328	2 909
1.....	3 488	4 069	4 649	5 229	5 808	6 387
2.....	6 965	7 542	8 119	8 695	9 369	9 944
3.....	10 418	10 991	11 562	12 132	12 701	13 269
4.....	13 835	14 400	14 964	15 526	16 087	16 647
5.....	17 205	17 761	18 315	18 868	19 418	19 968
6.....	20 514	21 059	21 602	22 142	22 681	23 217
7.....	23 752	24 283	24 812	25 339	25 863	26 386
8.....	26 905	27 421	27 934	28 445	28 954	29 460
9.....	29 962	30 461	30 958	31 450	31 940	32 426
10.....	32 910	33 386	33 865	34 339	34 808	35 274
11.....	35 736	36 195	36 650	37 100	37 541	37 989
12.....	38 428	38 863	39 294	39 720	40 142	40 561
13.....	40 975	41 384	41 789	42 189	42 585	42 976
14.....	43 363	43 745	44 122	44 494	44 861	45 223
15.....	45 580	45 932	46 278	46 620	46 957	47 288
16.....	47 614	47 934	48 249	48 558	48 862	49 160
17.....	49 452	49 738	50 019	50 295	50 560	50 825
18.....	51 085	-	-	-	-	-

*Table de  $10^5 \times \left(\frac{\xi}{\eta}\right)_1$ .*

Minutes....	0.	10.	20.	30.	40.	50.
0.....	-	291	582	872	1 163	1 453
1.....	1 743	2 033	2 321	2 611	2 899	3 187
2.....	3 474	3 760	4 046	4 331	4 615	4 898
3.....	5 180	5 461	5 741	6 019	6 297	6 573
4.....	6 848	7 122	7 394	7 660	7 934	8 201
5.....	8 467	8 731	8 994	9 255	9 513	9 770
6.....	10 025	10 278	10 529	10 778	11 024	11 268
7.....	11 510	11 750	11 987	12 222	12 455	12 685
8.....	12 912	13 137	13 359	13 578	13 795	14 009
9.....	14 220	14 428	14 633	14 835	15 035	15 231
10.....	15 424	15 614	15 800	15 984	16 164	16 341
11.....	16 514	16 685	16 852	17 015	17 175	17 331
12.....	17 484	17 633	17 778	17 920	18 058	18 193
13.....	18 324	18 457	18 576	18 693	18 808	18 920
14.....	19 028	19 131	19 231	19 327	19 418	19 489
15.....	19 590	19 669	19 744	19 816	19 884	19 946
16.....	20 005	20 059	20 110	20 156	20 998	20 236
17.....	20 269	20 299	20 323	20 344	20 361	20 373
18.....	20 380	-	-	-	-	-