BULLETIN DE LA S. M. F.

P. FATOU

Sur les fonctions holomorphes et bornées à l'intérieur d'un cercle

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 191-202
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__191_1>

SUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES ET BORNÉES A L'INTÉRIEUR D'UN CERCLE;

Par M. P. Fatou.

I. Traitons d'abord le problème suivant : trouver les fonctions $f(z)$ holomorphes pour $0 \leqq |z| < 1$ et satisfaisant en outre aux conditions suivantes :

$$1^\circ \qquad f(0) = 0,$$

$$2^\circ \qquad \lim_{r=1} |f(re^{i\theta})| = 1 \qquad \text{(uniformément).}$$

La fonction harmonique $\log|f(z)|$ est alors régulière dans la couronne

$$r_0 < r < 1,$$

et continue sur la circonférence $r = 1$, où elle prend la valeur zéro; elle est donc, en vertu du principe de prolongement par symétrie de Schwarz, régulière dans la couronne

$$r_0 \leqq r \leqq \frac{1}{r_0},$$

prenant des valeurs égales et de signes contraires en deux points symétriques par rapport au cercle unité; la fonction $f(z)$ est elle-même prolongeable au delà de ce cercle et même dans tout le plan, prenant en deux points symétriques $re^{i\theta}$ et $\frac{1}{r}e^{i\theta}$ les valeurs symétriques $Re^{i\Theta}$ et $\frac{1}{R}e^{i\Theta}$, et n'ayant par suite d'autres points singuliers que des pôles; c'est donc une fonction rationnelle qui fait la représentation conforme du cercle unité sur une surface de Riemann à m feuillets couvrant chacun ce cercle, et définit ce que nous avons appelé « une substitution à cercle fondamental de première espèce (¹) ». On voit facilement qu'on peut écrire

$$f(z) = e^{i\omega}z^{\nu}\prod \frac{1}{|a_n|}\frac{z-a_n}{z-a'_n} \qquad (\nu \geqq 1),$$

a_n et a'_n désignant respectivement un point intérieur au cercle unité et son symétrique. En prenant la dérivée logarithmique des deux membres et y faisant ensuite $z = e^{i\theta}$, on obtient, en s'aidant de considérations géométriques, l'inégalité

$$|f'(e^{i\theta})| > \nu + \sum \frac{1-|a_n|}{2} > 1,$$

plus précise que celle obtenue dans le Mémoire cité et qui est utile dans l'étude de ces substitutions.

II. Si l'on veut obtenir des fonctions transcendantes généralisant ces fonctions rationnelles, il faut remplacer la condition 2° par une condition moins restrictive. Nous admettrons que l'égalité

$$\lim_{r=1} |f(re^{i\theta})| = 1 \qquad \text{(uniformément)}$$

est vérifiée seulement pour une certaine suite de valeurs de r tendant vers l'unité. Si l'on n'est pas dans le cas précédemment examiné, c'est que $|f(z)|$ a des minima dans certaines couronnes tendant vers la circonférence $r=1$; $f(z)$ a donc une infinité de zéros dont les points limites sont sur cette circonférence; de plus si $|Z_0| < 1$, le principe de l'argument de Cauchy montre que les

(¹) *Voir* notre Mémoire sur les équations fonctionnelles (Chap. III) (*Bulletin de la Société mathématique*, 1920, fasc. I).

équations $f(z) = 0$ et $f(z) = Z_0$ ont le même nombre de racines dans le cercle: $|Z| < r_n$, si r_n appartient à la suite en question et est suffisamment voisin de 1. En outre si z tend vers un point de la circonférence limite suivant un chemin continu, la valeur asymptotique de $f(z)$, si elle existe, a l'unité pour module.

Ceci posé, soit z_0 une racine de l'équation $f(z) = Z_0$; on pourra définir un élément de la fonction inverse de $f(z)$, soit $z = \varphi(Z)$, prenant en Z_0 la valeur z_0, et faire le prolongement de cet élément le long d'un chemin quelconque intérieur au cercle C; les valeurs obtenues pour z restent elles-mêmes intérieures à C, et toutes les branches de la fonction $\varphi(Z)$ n'ont à l'intérieur de ce cercle d'autres points singuliers que des points critiques algébriques; c'est ce qu'on voit par un raisonnement constamment employé dans l'étude des fonctions inverses des fonctions uniformes.

On voit donc que les valeurs de $f(z)$ pour $|z| < 1$ couvrent une surface de Riemann à une infinité de feuillets n'ayant pas d'autres bords que la circonférence $|z| = 1$, et dont les feuillets sont reliés par des points de ramification algébriques.

Sur la circonférence limite, $\varphi(Z)$ pourra avoir des points critiques transcendants, à savoir les valeurs asymptotiques de $f(z)$ aux points de la circonférence qui sont des points singuliers de $f(z)$. Si, en particulier, cette circonférence est une coupure pour $f(z)$, il en est de même pour $\varphi(Z)$; dans ce cas, on démontre qu'aucune branche de $\varphi(Z)$ ne peut être uniforme dans un domaine intérieur à C, ayant un arc de la circonférence comme frontière : tout point de cette circonférence est donc limite de points critiques algébriques de $\varphi(Z)$.

Il s'agit maintenant de montrer qu'il y a effectivement des fonctions $f(z)$ possédant ces propriétés. Soit une suite infinie de nombres

$$a_n (0 < |a_n| < 1),$$

dont le produit soit absolument convergent, et formons le produit

$$f(z) = z \prod_{1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \frac{z - a_n}{z - a'_n} \qquad \left(a'_n = \frac{1}{\bar{a}_n}\right)$$

absolument convergent pour $|z| < 1$, qui définit une fonction holomorphe dans C. On peut choisir les a_n de manière que la condition : $\lim|f(z)| = 1$, soit vérifiée sur une infinité de circonférences concentriques tendant vers la circonférence limite. Le cas le plus défavorable est celui où les a_n sont tous réels et positifs, z tendant lui-même vers $+1$ en restant sur l'axe réel; on doit alors étudier dans ces hypothèses les valeurs limites du produit

$$\prod \frac{x - a_n}{a_n x - 1} \qquad (0 < a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n < \ldots < 1).$$

On trouve facilement la condition nécessaire et suffisante pour que la valeur 1 soit l'une des limites de cette expression pour $x \to 1$. Cette condition n'est pas très simple, mais elle est vérifiée pourvu que $\frac{1 - a_{n+1}}{1 - a_n}$ ait pour limite zéro $\left(\text{exemple : } a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}\right)$. Les a_n étant ainsi choisis (multipliés si l'on veut par des facteurs quelconques de module égal à 1), la fonction $f(z)$ correspondante satisfait aux conditions demandées.

Si l'on conserve les a_n réels et positifs, $f(z)$ est uniforme dans tout le plan avec le seul point singulier essentiel $z = 1$; elle n'a pas de valeurs exceptionnelles ni de valeurs asymptotiques pour $z \to 1$, d'où il suit que la fonction inverse n'a pas de points critiques transcendants. La substitution $Z = f(z)$ admet, outre les points 0 et ∞, une infinité de points invariants sur la circonférence $|z| = 1$, et possède notamment, au point de vue de l'itération, essentiellement les mêmes propriétés que les fonctions rationnelles analogues.

III. Les produits infinis considérés ci-dessus sont analogues à ceux que considère M. Picard (*Traité d'Analyse*, t. II, Chap. V, § V) pour obtenir une fonction holomorphe dans un cercle avec des zéros donnés à l'avance; seulement nous avons choisi comme pôles de nos facteurs primaires non pas des points de la circonférence, mais des points extérieurs, symétriques des zéros; nous avons ainsi des facteurs primaires dont le module est égal à 1 sur la circonférence, < 1 à l'intérieur, ce qui facilite l'étude des produits [1]. On voit notamment que si les nombres

$$a_n \, (0 < |a_n| < 1)$$

---

(1) Bien entendu, si le produit Πa_n n'est pas convergent, on doit introduire des facteurs exponentiels analogues à ceux de Weierstrass, comme le fait M. Picard.

ont un produit absolument convergent, il est possible de trouver une fonction holomorphe et bornée dans le cercle $|Z|<1$, ayant les a_n pour zéros. Il est remarquable que cette condition suffisante est également nécessaire pour qu'une telle fonction existe.

Cela va résulter d'une formule de M. Jensen (*Acta mathematica*, t. XXII) fréquemment employée dans la théorie des fonctions entières; rangeons les modules r_n des a_n par ordre croissant et soit

$$r_n < r < r_{n+1}.$$

On a alors

$$n \log r - \log r_1 r_2 \ldots r_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta - \log|f(0)|.$$

En posant

$$\log\frac{1}{r_n} = \lambda_n, \qquad \log\frac{1}{r} = \lambda,$$

le premier membre s'écrit

$$(\lambda_1 - \lambda) + (\lambda_2 - \lambda) + \ldots + (\lambda_n - \lambda).$$

Les λ_i sont positifs, décroissants et tendent vers zéro avec $\frac{1}{i}$, λ est compris entre λ_n et λ_{n+1}. D'autre part, $f(z)$ étant bornée, le second membre de la formule reste borné *supérieurement* pour $r \to 1$. On conclut de là très facilement que

$$\lambda_1 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_p$$

est bornée supérieurement quel que soit p, ce qui prouve la convergence de la série $\Sigma\lambda_n$ ou du produit Πr_n [1].

Voici une autre conséquence immédiate de la formule précédente : on sait que $f(z)$ a *presque partout* sur la circonférence une valeur limite radiale bien déterminée; je dis que l'ensemble des points où cette limite est nulle est de mesure nulle. S'il en était autrement, soit μ la mesure de cet ensemble et supposons $|f(z)|<1$ dans C. A tout nombre positif A on peut faire correspondre un nombre $r'<1$, tel que l'inégalité $r>r'$ entraîne

$$\log|f(re^{i\theta})| < -A$$

---

[1] Le raisonnement s'applique s'il y a des r_n égaux entre eux.

pour des valeurs de θ formant un ensemble de mesure $> \frac{\mu}{2}$. L'intégrale du second membre tendrait alors vers $-\infty$, ce qui est impossible puisque le premier membre est positif et que $\log|f(0)|$ est constant. On a donc $\mu = 0$. Ce résultat a déjà été obtenu par M. M. Riesz d'une manière beaucoup moins élémentaire, en s'appuyant sur les résultats de notre thèse (¹). La démonstration précédente a aussi l'avantage de s'étendre au cas où l'intégrale $\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\alpha d\theta$ est bornée pour $r < 1$, sans qu'il en soit de même de $|f(z)|$ (α, nombre positif arbitraire). Dans ce cas, en effet, l'intégrale $\int_0^{2\pi} \log|f|\,d\theta$ a des éléments positifs pour $|f| > 1$, mais dont la somme est inférieure à $C \int_0^{2\pi} |f|^\alpha d\theta$, c'est-à-dire bornée, et la conclusion subsiste.

Il en est de même de la conclusion concernant les modules des zéros de $f(z)$ intérieurs au cercle. Je signale enfin que le théorème de M. Riesz s'étend par l'emploi de la fonction modulaire aux fonctions holomorphes dans un cercle avec deux valeurs exceptionnelles. Cette extension n'est pas difficile mais dépasserait le cadre de cet article.

Notes.

1. La dérivée logarithmique de $f(z)$ changée de signe est égale à

$$\frac{\nu}{-z} + \sum \left(\frac{1}{a - z} - \frac{1}{a' - z} \right) = - \frac{f'(z)}{f(z)} \qquad (|f| = 1 \text{ pour } |z| = 1).$$

Prenons $|z| = 1$; les quantités $-z$, $a - z$, $a' - z$ sont représentées par des vecteurs ayant pour origine le point z de la circonférence et pour extrémités les points 0, a, a' (*fig.* 1). Les quantités inverses sont représentées (abstraction faite d'une symétrie par rapport à un axe) par les vecteurs d'origine z et d'extrémités 0, b, b' transformés des points 0, a, a' dans l'inversion de centre z et de puissance égale à 1 qui transforme la circonfé-

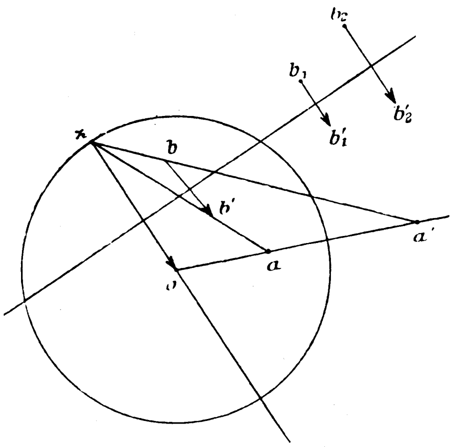
---

(¹) F. et M. Riesz, *Ueber die Randwerte einer Analytischen Funktion* (4ᵉ *Congrès des mathématiciens scandinaves, Stockholm*, 1916).

Depuis la rédaction de cet article, M. Riesz a d'ailleurs développé des considérations analogues à celles du texte.

rence $|z| = 1$, en une droite perpendiculaire au milieu de zo; a et a' étant symétriques par rapport à la circonférence, b et b'

Fig. 1.



sont symétriques par rapport à cette droite, o et b étant du même côté; la différence géométrique $(zb) - (zb')$ est égale au vecteur $b'b$ parallèle à zo et de même sens. Nous voyons que la quantité à évaluer est représentée par une somme de vecteurs parallèles et de même sens. On en conclut

$$|f'(e^{i\theta})| = \nu + \sum |b'b| > 1,$$

jamais $= 1$ si f est de degré > 1. On peut préciser davantage

$$\left|\frac{1}{a-z} - \frac{1}{a'-z}\right| = \left|\frac{a'-a}{(a-z)(a'-z)}\right|.$$

Comme $\left|\dfrac{a'-z}{a-z}\right| = \dfrac{1}{|a|}$ sur la circonférence et que $|aa'| = 1$, cette expression est aussi égale à $\dfrac{1-|a|^2}{|a-z|^2}$ et varie entre $\dfrac{1-|a|}{1+|a|}$ et $\dfrac{1+|a|}{1-|a|}$. On obtient finalement

$$|f'(e^{i\theta})| > \nu + \frac{1}{2}\sum(1-|a|),$$

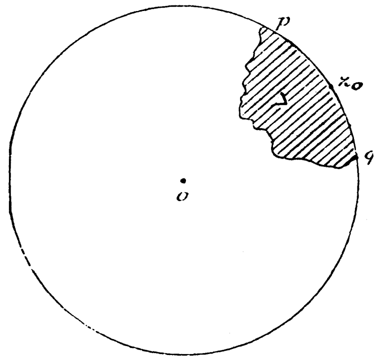
quantité > 1. On a aussi

$$\max |f'(e^{i\theta})| = \nu + \sum \frac{1+|a|}{1-|a|},$$

quantité qui devient infinie si l'un des $|a|$ tend vers 1.

II. Si $\varphi(Z)$ est holomorphe dans un domaine tel que Δ (*fig.* 2), $\log|\varphi(Z)|$ est analytique dans ce domaine; il est presque évident

Fig. 2.



que $|\varphi(Z)|$ prend la valeur 1 en tout point de l'arc pq. On n'a alors qu'à appliquer le principe de Schwarz pour voir que $\varphi(Z)$ est prolongeable au delà de pq; mais si $\varphi(Z)$ est holomorphe en Z_0, le point correspondant $z_0 = \varphi(Z_0)$ ne peut être pour $f(z)$ qu'un point ordinaire ou algébrique; comme $|Z_0| = 1$, ceci est incompatible avec l'hypothèse que la circonférence est une coupure pour $f(z)$.

Soit à étudier les variations du produit

$$z \prod \frac{z - a_n}{z - a'_n}$$

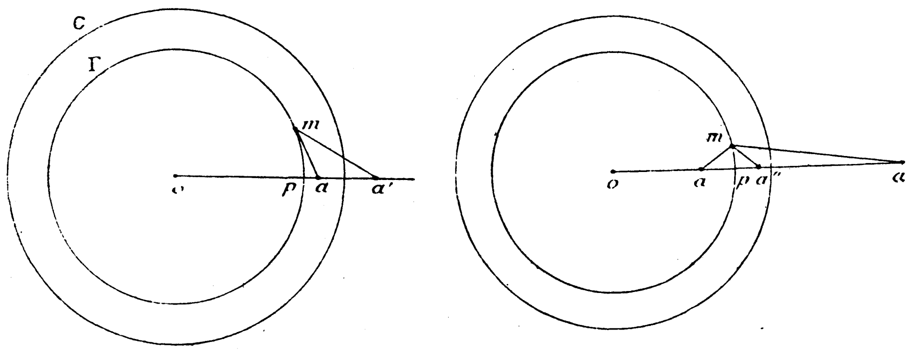
quand les arguments des différentes quantités varient, non les modules.

Nous pouvons d'abord faire décrire à z la circonférence Γ

$$(|z| = r < 1),$$

a et a' étant fixes. Si a et a' sont extérieurs à Γ, le minimum et le maximum du rapport $\frac{ma}{ma'}$ sont atteints respectivement aux deux extrémités du diamètre Oaa' (*fig.* 3). Si a est intérieur à Γ, soit a'' le symétrique de a par rapport à Γ; a'' est extérieur à Γ mais à gauche de a'; comme $\frac{ma}{ma''}$ est constant sur Γ on a à étudier le rapport $\frac{ma''}{ma'}$. On est ramené au premier cas de figure. Il suit de là que le minimum minimorum du produit fini ou infini considéré est atteint quand les arguments de z et des a_n sont tous égaux.

Fig. 3.



Nous avons maintenant à étudier les variations de

$$\prod \frac{x-a_n}{1-a_n x} \quad \text{(au signe près)}$$

pour $x \to 1$, toutes quantités réelles.

1° Pour $x > a_n$ nous posons

$$\frac{x-a_n}{1-a_n x} = 1 - h_n.$$

En faisant

$$\begin{aligned} x &= 1-y \\ a_n &= 1-\mu_n \end{aligned} \qquad (y,\ \mu_n > 0),$$

on obtient

$$h_n = \frac{y(2-\mu_n)}{\mu_n + y(1-\mu_n)} < \frac{2y}{\mu_n}.$$

Soit

$$a_p < x < a_{p+1}.$$

On a

$$\prod_1^p (1-h_n) > \prod_1^p \left(1 - \frac{2y}{\mu_n}\right) > 1 - 2y\sum_1^p \frac{1}{\mu_n} = 1 - 2y\Phi(p),$$

en posant

$$\Phi(p) = \sum_1^p \frac{1}{\mu_n}.$$

On a aussi $\left(\text{en supposant } \mu_n < \frac{1}{2}\right)$

$$h_n > \frac{3}{4}\frac{y}{\mu_n},$$

$$1 - h_n < 1 - \frac{3}{4}\frac{y}{\mu_n} < e^{-\frac{3}{4}\frac{y}{\mu_n}},$$

$$\prod_1^p (1 - h_n) < e^{-\frac{4}{3}y\Phi(p)}.$$

2° Pour $a_n > x$ nous écrivons

$$\frac{a_n - x}{1 - a_n x} = 1 - k_n,$$

d'où l'on tire comme plus haut

$$k_n = \frac{\mu_n(2 - y)}{y(1 - \mu_n) + \mu_n},$$

$$k_n < \frac{2\mu_n}{y},$$

$$k_n > \frac{3}{4}\frac{\mu_n}{y},$$

$$\prod_{p+1}^{\infty} (1 - k_n) > 1 - \frac{2}{y}\sum_{p+1}^{\infty} \mu_n = 1 - \frac{2}{y}\varphi(p),$$

$$\prod_{p+1}^{\infty} (1 - k_n) < e^{-\frac{3}{4}\frac{1}{y}\sum_{p+1}^{\infty}\mu_n} = e^{-\frac{3}{4}\frac{1}{y}\varphi(p)}.$$

On a donc pour la valeur absolue P du produit étudié

$$\left[1 - \frac{2}{y}\varphi(p)\right][1 - 2y\Phi(p)] < \mathrm{P} < e^{-\frac{3}{4}\left[\frac{\varphi(p)}{y} + y\varphi(p)\right]}.$$

Pour que P soit infiniment voisin de 1, il faut et il suffit que $\frac{\varphi(p)}{y}$ et $y\Phi(p)$ soient tous deux infiniment petits; y est supposé compris entre μ_p et μ_{p+1}. Comme $\Phi(p) > \frac{1}{\mu_p}$, le rapport $\frac{\mu_{p+1}}{\mu_p}$ est infiniment petit. Supposons qu'on ait toujours

$$\mu_{n+1} < c\mu_n \qquad (0 < c < 1).$$

En écrivant

$$\Phi(p) = \frac{1}{\mu_p}\left[1 + \frac{\mu_p}{\mu_{p-1}} + \frac{\mu_p}{\mu_{p-1}}\frac{\mu_{p-1}}{\mu_{p-2}} + \ldots + \frac{\mu_p}{\mu_{p-1}}\frac{\mu_{p-1}}{\mu_{p-2}}\cdots\frac{\mu_2}{\mu_1}\right],$$

on obtient

$$\Phi(p) < \frac{1}{\mu_p} \frac{1}{1-c}.$$

De même on trouve

$$\mu_{p+1} < \varphi(p) < \frac{\mu_{p+1}}{1-c}.$$

La condition trouvée exprime alors que $\frac{\mu_{p+1}}{\mu_p}$ est infiniment petit avec $\frac{1}{p}$, au moins pour une certaine suite de valeurs de p. On pose alors, par exemple, $y = \sqrt{\mu_p \mu_{p+1}}$.

Considérons la fonction

$$f(z) = z \prod \frac{z - a_n}{a_n z - 1}$$

en prenant par exemple $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$; le second membre est absolument et uniformément convergent dans tout domaine fermé qui ne contient aucun point a_n ou $\frac{1}{a_n} \cdot f(z)$ est donc une fonction uniforme dans tout le plan avec les zéros $z = a_n$, les pôles $z = \frac{1}{a_n}$ et le point singulier essentiel $z = 1$; elle tend pour $z \to 1$ suivant l'axe réel vers toutes les valeurs réelles comprises entre ± 1. Supposons que $f(z)$ tende vers une limite (nécessairement de la forme $e^{i\omega}$) quand z tend vers 1 suivant un chemin quelconque; on peut supposer ce chemin intérieur au cercle $|z| < 1$; sinon on remplacera les arcs extérieurs par leurs symétriques, ce qui ne change pas la limite puisque $f(z)$ prend aux points $re^{i\theta}$ et $\frac{1}{r} e^{i\theta}$ respectivement les valeurs $Re^{i\Theta}$ et $\frac{1}{R} e^{i\Theta}$; mais $|f(z)|$ étant bornée (< 1) à l'intérieur du cercle devrait alors prendre la même valeur limite quand z tend vers 1 en restant à l'intérieur d'un angle $< \pi$ ayant pour bissectrice le rayon; c'est ce qui résulte d'un important théorème de MM. Lindelöf et Montel (¹). On verra sans peine que la démonstration est encore valable si la courbe considérée a des points sur la circonférence limite,

---

(¹) LINDELÖF, *Sur un principe général de l'Analyse* (*Acta Societatis Fennicæ*, 1915, p. 10). — MONTEL, *Sur la représentation conforme* (*Journ. de Math.*, 7ᵉ série, t. III, 1917, Chap. II, § 11).

$f(z)$ étant continue en ces points. Examinons de plus près ce qui se passe quand z tend vers 1 en décrivant la circonférence; soit $f(e^{i\theta}) = e^{i\Theta}$; la partie réelle de $f(z)$ dans C peut se mettre sous la forme d'une intégrale de Poisson, la fonction de contour $\cos\Theta(\theta)$ étant bornée et discontinue pour $\theta = 0$; les valeurs limites radiales de cette fonction harmonique pour $r = 1$ comprenant tout l'intervalle $(-1, +1)$, il en est de même de l'intervalle d'oscillation de la fonction de contour pour $\theta = 0$; comme d'autre part z et $Z = f(z)$ marchent toujours dans le même sens quand z décrit la circonférence, $f'(z)$ n'étant pas nulle sur celle-ci, Z décrit la circonférence entière quand z décrit des arcs infiniment petits tendant vers $z = 1$, de sorte que Z et z viennent une infinité de fois en coïncidence; la substitution $Z = f(z)$ a une infinité de points doubles de multiplicateur > 1, tendant vers le point $z = 1$. Si l'on fait l'itération de la substitution $Z = f(z)$, les conséquents d'un point tendent régulièrement vers zéro et ∞ respectivement dans les deux régions du plan séparées par la circonférence; celle-ci est aussi l'ensemble dérivé des antécédents d'un point quelconque du plan.

Remarquons que si l'on prenait $a_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, toutes choses égales d'ailleurs, on aurait une fonction $f(z)$ analogue mais pour laquelle $f(z)$ aurait une valeur limite nulle suivant le rayon aboutissant au point $z = 1$. Le point $Z = 0$ serait alors point critique transcendant de la fonction inverse.