M. NEWENGLOWSKI

Note sur la transformation des courbes par rayons vecteurs réciproques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 2 (1873), p. 133-136
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2__133_0>

NOTE

SUR

LA TRANSFORMATION DES COURBES

PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES,

PAR M. NEWENGLOWSKI,

PROFESSEUR A MONT-DE-MARSAN.

On peut définir la transformation des courbes par rayons vecteurs réciproques, en disant qu'en deux points correspondants M, M′ (*fig.* 1) les tangentes MT, M′T font avec le rayon vecteur OMM′ des angles TMM′, TM′M égaux. Cela posé, considérons une courbe tracée sur une surface

Fig. 1.

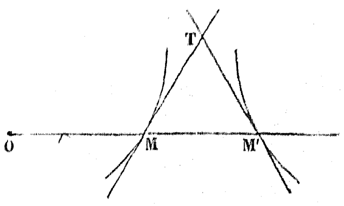
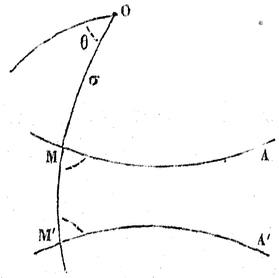


Fig. 2.



quelconque (*fig.* 2). On peut prendre pour coordonnées d'un point quelconque M de cette courbe la longueur σ de la ligne géodésique menée à ce point par un point fixe O pris sur la surface, et l'angle θ de ce *rayon vecteur géodésique* avec une ligne géodésique fixe. Sur chaque rayon OM, prenons un point M′ tel que $OM' = \sigma'$, et cherchons s'il peut exister entre σ et σ' une relation

$$f(\sigma, \sigma') = 0$$

indépendante de l'angle θ, et telle que la courbe A'M' soit *inverse* de la courbe AM, c'est-à-dire qu'aux points correspondants les angles AMM', A'M'M soient égaux.

Pour cela, désignons par s la longueur d'un arc compté sur la courbe AM à partir d'une origine quelconque; on a, comme on sait,

$$ds^2 = d\sigma^2 + \lambda^2 d\theta^2,$$

λ étant, en général, fonction de σ et de θ.

Si i désigne l'angle de la courbe AM avec le rayon vecteur géodésique, on a

$$\cos i = \frac{1}{\lambda}\frac{d\sigma}{d\theta}.$$

Désignons par les mêmes lettres, mais accentuées, les éléments correspondants de la courbe A'M'; on aura

$$\cos i' = \frac{1}{\lambda'}\frac{d\sigma'}{d\theta},$$

et les deux courbes seront inverses si

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d\sigma}{d\theta} + \frac{1}{\lambda'}\frac{d\sigma'}{d\theta} = 0$$

ou

$$\frac{d\sigma}{\lambda} + \frac{d\sigma'}{\lambda'} = 0. \tag{1}$$

Cette relation doit être indépendante de θ. Donc il faut que λ et λ' soient fonctions de σ et σ' seuls, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda = \varphi(\sigma), \quad \lambda' = \varphi'(\sigma').$$

Alors l'expression générale de l'élément de courbe tracée sur la surface sera donnée par l'équation

$$ds^2 = d\sigma^2 + [\varphi(\sigma)]^2 d\theta^2.$$

Ce qui montre que la surface donnée *doit être de révolution autour d'un axe mené par le point* O, pour que la transformation demandée soit possible.

Si l'on désigne par α l'angle du méridien mené par M avec le méridien fixe contenant la ligne géodésique fixe prise *comme axe polaire,* on aura

$$\theta = b\alpha,$$

b étant une constante, et l'on pourra écrire

$$ds^2 = d\sigma^2 + [b\varphi(\sigma)]^2 d\alpha^2;$$

et l'on voit sous cette forme que $b\varphi(\sigma)$ est la distance d'un point de la surface à l'axe de révolution.

Ce qui précède est vrai, en général; mais si la surface donnée est un cône quelconque ayant son sommet en O, les lignes géodésiques σ seront des lignes droites, et l'on aura

$$ds^2 = d\sigma^2 + \sigma^2 d\theta^2,$$

$d\theta$ étant l'angle de deux génératrices infiniment voisines, et l'équation (1) prendra la forme

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{d\sigma'}{\sigma'} = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma\sigma' = m,$$

ce qui est la relation bien connue de la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Reprenons l'équation (1), dans laquelle nous supposerons

$$\lambda = b\varphi(\sigma), \quad \lambda' = b\varphi'(\sigma');$$

nous pourrons l'écrire

$$\frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)} + \frac{d\sigma'}{\varphi(\sigma')} = 0,$$

et, par suite, nous pourrons énoncer ce théorème :

Étant donnée une surface de révolution autour d'un axe qui la rencontre en O (*fig.* 3), *deux courbes tracées sur cette surface seront inverses par rapport au point* O, *si les arcs de méridiens comptés à partir de* O *jusqu'aux points correspondants* M, M' *satisfont à l'équation*

$$\int \frac{d\sigma}{\varphi(\sigma)} + \int \frac{d\sigma'}{\varphi'(\sigma')} = m, \tag{2}$$

dans laquelle m *est une constante, et* $\varphi(\sigma)$ *est proportionnelle à la distance* MP *du point* M *à l'axe.*

Exemples. — 1° Sur une sphère, on a

$$\varphi(\sigma) = \sin\sigma;$$

l'équation (2) devient

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma \times \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\sigma' = m \quad (^1).$$

Fig. 3.

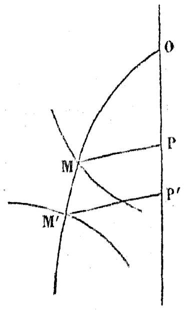
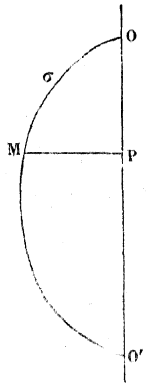


Fig. 4.



2° Considérons la surface de révolution engendrée sur une cycloïde tournant autour de la ligne OO′ (*fig.* 4), qui joint deux points de rebroussement consécutifs.

On a ici

$$\mathrm{MP} = \frac{\sigma(8a - \sigma)}{8a},$$

a désignant le rayon de cercle générateur. L'équation (2) peut s'écrire

$$\int \frac{8a\,d\sigma}{\sigma(\sigma a - \sigma)} + \int \frac{8a\,d\sigma'}{\sigma'(8a - \sigma')} = m \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma\sigma'}{(8a - \sigma)(8a - \sigma')} = m;$$

mais si $\mathrm{OM} = \sigma$, $\mathrm{O'M} = 8a - \sigma$, désignant donc $8a - \sigma$ et $8a - \sigma'$ par σ_1 et σ'_1, on peut écrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\sigma\sigma'}{\sigma_1\sigma'_1} = m.$$

Donc, sur la surface considérée, deux courbes inverses par rapport au point O, le sont aussi par rapport au point O′.

---

(1) Voir *Étude sur la sphère* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, janvier 1870).