Annales scientifiques de l'É.N.S.

Paul Vincensini

Sur quelques types spéciaux de réseaux et de congruences conjugués

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 62 (1945), p. 269-300
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1945_3_62__269_0>

SUR

QUELQUES TYPES SPÉCIAUX DE RÉSEAUX

ET DE

CONGRUENCES CONJUGUÉS

PAR M. PAUL VINCENSINI.

I. — Introduction.

Dans un article du *Bulletin des Sciences Mathématiques* (1), j'ai signalé les propriétés suivantes des surfaces harmoniques (représentatives des fonctions harmoniques). Soit S une surface harmonique représentant, en axes rectangulaires, la fonction harmonique $z = P(x, y)$. I étant un point fixe quelconque de l'espace et M un point quelconque de S de projection m sur le plan xOy, menons par I la parallèle à la normale en M à S, et désignons par m' le point où cette parallèle perce le plan xOy. On a les deux propriétés :

a. La correspondance ponctuelle établie dans le plan xOy par les points m, m' lorsque M décrit S est une *correspondance conforme inverse*, et c'est la correspondance conforme inverse la plus générale du plan.

b. Si l'on mène par chaque point m la parallèle à la normale au point correspondant M de S, on obtient *une congruence à surface moyenne plane*, le plan moyen étant xOy.

On déduit aussitôt de la proposition (a) que, si l'on considère deux surfaces harmoniques quelconques, et si l'on établit entre les deux surfaces une correspondance ponctuelle par plans tangents parallèles, la projection orthogonale de cette correspondance sur le plan xOy est *la correspondance conforme directe la plus générale du plan*.

(1) *Surfaces harmoniques; congruences et représentations conformes associées* (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. LXVIII, mars-avril 1944).

En ce qui concerne la proposition (b), il convient d'observer que l'ensemble des congruences à surface moyenne plane qu'elle fournit ne constitue pas la totalité des congrnences à surface moyenne plane, mais seulement une famille de telles congruences [congruences (H) de l'article cité]. Ces congruences se caractérisent d'ailleurs par des propriétés géométriques intéressantes, pour lesquelles je renvoie à l'article indiqué du *Bulletin des Sciences Mathématiques*. La congruence (H) la plus générale peut être définie en se donnant, dans un plan, une correspondance conforme inverse quelconque $m \to m'$, en joignant chaque point m' à un point fixe quelconque I de l'espace, et en menant, par le point m correspondant, la parallèle δ à $\mathrm{I}m'$. La congruence est constituée par l'ensemble des droites δ.

C'est en cherchant à généraliser les résultats précédents que j'ai été conduit au développement qui va suivre.

Dans la première Partie du Mémoire j'approfondis l'étude des relations existant entre les congruences de Ribaucour et les réseaux conjugués à invariants égaux. On sait qu'on appelle *congruence de Ribaucour* toute congruence dont les développables déterminent sur la surface moyenne [lieu des milieux des segments focaux] un réseau conjugué, lequel est nécessairement à invariants (ponctuels) égaux.

Je généralise la construction des congruences (H) déduite de la considération d'une correspondance conforme inverse d'un plan et d'un point fixe I de l'espace précédemment rappelée, en l'étendant aux congruences de Ribaucour les plus générales. Le cas où la congruence de Ribaucour détermine sur la surface moyenne un réseau orthogonal (de courbure) est particulièrement intéressant. J'effectue la détermination de ces dernières congruences à partir des couples de surfaces isothermiques en correspondance involutive de Christoffel.

Dans la deuxième Partie j'applique les résultats de la première à l'étude des congruences (H) précédemment définies. Les relations entre ces congruences et les surfaces harmoniques sont examinées en détail. De nombreuses propriétés géométriques sont mises en évidence, et notamment le fait que ces congruences appartiennent à la famille des congruences W.

La troisième Partie est presque entièrement consacrée au problème de la recherche des déplacements à deux paramètres à imprimer à un angle de grandeur constante pour que les développables se correspondent dans les congruences engendrées par les deux côtés. Ce problème peut être regardé comme une généralisation de celui, bien connu, de la recherche des couples de droites parallèles engendrant des congruences dont les développables se correspondent. Le cas où les congruences décrites par les deux côtés de l'angle constant sont de Ribaucour est particulièrement intéressant, et conduit à déplacer le sommet de l'angle sur les surfaces parallèles à un tore quelconque suivant ses différents réseaux conjugués. Si l'angle est droit le déplacement doit s'effectuer sur une surface minima arbitraire. Ces cas particuliers sont examinés en détail, de même que celui où les deux côtés de l'angle constant décrivent des congruences paraboliques avec correspondance de l'unique famille de développables.

A la fin du Mémoire j'ai tenu à indiquer une propriété de l'hélicoïde minima réglé. Cette surface peut être mise en correspondance ponctuelle par orthogonalité des éléments linéaires avec une surface de révolution *arbitraire*.

I.

1. Dans tout ce qui va suivre nous entendrons toujours, par *réseau*, un réseau conjugué, au sens de Dupin, d'une surface. Pour qu'un point de coordonnées $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ décrive un réseau dont les deux familles de courbes sont $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, il faut et il suffit, comme l'on sait, que les trois fonctions x, y, z soient trois solutions distinctes d'une même équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{P}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{Q}\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Une congruence est dite *conjuguée à un réseau* s'il existe, entre ses droites et les points du réseau, une correspondance telle que chaque droite de la congruence passe par le point correspondant du réseau, les développables de la congruence correspondant aux courbes du réseau, et si, en outre, les rayons de la congruence coupent effectivement les plans tangents du réseau (autrement dit si la congruence n'est pas l'une des deux congruences focales du réseau).

L'opportunité de la restriction précédente s'est présentée à C. Guichard quand il s'est agi de rendre généraux les énoncés de certains résultats de la théorie des réseaux et des congruences, tel par exemple le résultat suivant, dont il sera fait grand usage dans la suite de ce travail, et qui ramène la construction des congruences conjuguées à un réseau à la détermination des réseaux *parallèles* au réseau donné.

Deux réseaux sont parallèles si leurs courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ se correspondent, les tangentes aux courbes homologues en deux points homologues quelconques étant parallèles. La détermination des réseaux parallèles à un réseau donné quelconque (R) dépend de l'intégration d'une équation de Laplace (adjointe de l'équation du réseau) et, une fois ces réseaux connus, les congruences conjuguées à (R) s'obtiennent par la construction suivante :

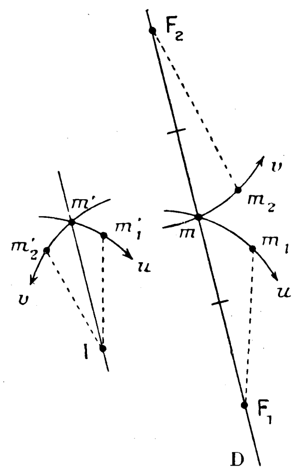
Soit (R′) un réseau quelconque parallèle à (R). Donnons-nous dans l'espace un point fixe quelconque I. Joignons I à un point quelconque m' de (R′), et menons par le point m de (R) homologue de m' la parallèle à la droite Im'. L'ensemble des droites ainsi obtenues forme une congruence conjuguée à (R). En faisant varier la position du point fixe I, pour un réseau (R′) donné (choisi arbitrairement dans la famille des réseaux homothétiques dont il fait partie), on obtient ∞^3 congruences conjuguées à (R). La considération de l'ensemble des réseaux (R′) parallèles à (R) [définis chacun à une homothétie près] fournit la totalité des congruences conjuguées au réseau (R).

2. Portons plus spécialement notre attention sur les congruences de Ribaucour admettant pour surface moyenne une surface donnée S [1]. Le réseau que les développables de l'une quelconque de ces congruences déterminent sur S est un réseau à invariants égaux, et l'on peut se demander comment, *à partir des réseaux à invariants égaux de* S, *on pourra construire les congruences de Ribaucour de surface moyenne* S.

Soit (R) un réseau à invariants égaux de S. Les congruences de Ribaucour admettant (R) pour réseau moyen étant des congruences particulières conjuguées à (R), leur construction pourra s'effectuer, conformément au procédé indiqué au n° 1, en adjoignant à (R) des réseaux parallèles (R′) *convenablement choisis* et en menant, par les différents points de (R), les parallèles aux droites joignant un point fixe I de l'espace aux points correspondants de (R′). Il s'agit de voir comment il convient de choisir les réseaux (R′).

Supposons trouvé l'un de ces réseaux (R′), et soient I le point fixe associé, et m' le point de (R′) correspondant au point m de (R) [*fig.* 1]. La droite D

Fig. 1.



menée par m parallèlement à Im' engendre une congruence de Ribaucour admettant (R) pour réseau moyen. Désignons par F_1 et F_2 les deux foyers

(1) Rappelons que la construction classique des congruences de Ribaucour de surface moyenne S consiste à chercher les surfaces (Σ) correspondant à S avec orthogonalité des éléments linéaires, puis à mener, par chaque point de S, la parallèle à la normale au point correspondant d'une surface Σ quelconque.

portés par D, et par $\overline{mm_1}$, $\overline{mm_2}$ les éléments d'arcs sur les courbes $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ du réseau (R). Si (x, y, z) sont les coordonnées de m, on a, pour les composantes de ces éléments :

$$\overline{m\,m_1}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du,\ \frac{\partial y}{\partial u}du,\ \frac{\partial z}{\partial u}du\right), \qquad \overline{m\,m_2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}dv,\ \frac{\partial y}{\partial v}dv,\ \frac{\partial z}{\partial v}dv\right).$$

D'autre part, $\overline{m'm'_1}$, $\overline{m'm'_2}$ étant les éléments d'arc de (R′) correspondant aux éléments $\overline{mm_1}$, $\overline{mm_2}$ de (R), on aura aussi, en désignant par (x', y', z') les coordonnées du point m' :

$$\overline{m'\,m'_1}\left(\frac{\partial x'}{\partial u}du,\ \frac{\partial y'}{\partial u}du,\ \frac{\partial z'}{\partial u}du\right), \qquad \overline{m'\,m'_2}\left(\frac{\partial x'}{\partial v}dv,\ \frac{\partial y'}{\partial v}dv,\ \frac{\partial z'}{\partial v}dv\right).$$

La similitude des triangles $(\mathrm{I}m'm'_1)$ et $(\mathrm{F}_1\,m\,m_1)$ donne (en valeur algébrique)

$$\frac{\overline{m'\,m'_1}}{\overline{m\,m_1}} = \frac{\overline{\mathrm{I}m'}}{\overline{\mathrm{F}_1 m}}; \tag{1}$$

de même, la similitude des triangles $(\mathrm{I}m'm'_2)$ et $(\mathrm{F}_2\,m\,m_2)$ donne

$$\frac{\overline{m'\,m'_2}}{\overline{m\,m_2}} = \frac{\overline{\mathrm{I}m'}}{\overline{\mathrm{F}_2 m}}. \tag{1'}$$

La congruence envisagée étant de Ribaucour, on a $\overline{\mathrm{F}_2 m} = -\overline{\mathrm{F}_1 m}$, et l'on déduit des relations (1), (1′)

$$\frac{\overline{m'\,m'_1}}{\overline{m\,m_1}} = -\frac{\overline{m'\,m'_2}}{\overline{m\,m_2}} = \frac{\overline{\mathrm{I}m'}}{\overline{\mathrm{F}_1 m}}.$$

On voit que deux des segments infiniment petits $(\overline{mm_1}, \overline{m'm'_1})$ ou $(\overline{mm_2}, \overline{m'm'_2})$ *sont de même sens et les deux autres de sens contraires*, et cela *quelle que soit* la position du point fixe I. Il résulte alors des expressions des composantes de $\overline{mm_1}$, $\overline{mm_2}$, $\overline{m'm'_1}$, $\overline{m'm'_2}$ écrites ci-dessus, que les coordonnées (x', y', z') du réseau (R′) sont liées aux coordonnées (x, y, z) de (R) par les formules

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= \ \ h\frac{\partial x}{\partial u}, \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= -h\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et deux analogues en (y, y') et (z, z'), h étant une certaine fonction de u et v, représentant d'ailleurs le rapport (algébrique) des segments parallèles $\overline{\mathrm{I}m'}$ et $\overline{\mathrm{F}_1 m}$ $\left(h = \dfrac{\overline{\mathrm{I}m'}}{\overline{\mathrm{F}_1 m}}\right)$.

On déduit aussitôt des relations (1) que x', y', z' vérifient l'équation de Laplace à *invariants égaux*

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{1}{h}\right)\frac{\partial\theta}{\partial v}=0$$

qui se déduit d'ailleurs, comme le montrent les relations (2), de l'équation de Laplace du réseau (R)

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial(\log h)}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial(\log h)}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}=0$$

en y remplaçant h par $\frac{1}{h}$.

Ainsi, le réseau (R′) parallèle à (R), qu'il convient d'associer à (R) pour que la construction traduite par la figure (1) fournisse une congruence de Ribaucour admettant (R) pour réseau moyen, *est nécessairement à invariants égaux,* comme (R).

Étant donné un réseau quelconque à invariants égaux (R), il existe toujours au moins un réseau à invariants égaux (défini à une homothétie près) parallèle à (R). En général ce réseau est unique. Pour des réseaux (R) particuliers il peut y avoir plus d'un réseau parallèle à invariants égaux (il y en a alors une infinité); mais le réseau (R′) parallèle à (R) à associer à (R) dans la construction qui précède pour obtenir les congruences de Ribaucour admettant (R) pour réseau moyen est *toujours unique,* et c'est celui qui est défini, conformément aux relations (2), par la proportionnalité des couples d'arcs infiniment petits homologues issus de deux points homologues quelconques sur les courbes correspondantes des réseaux (R) et (R′).

Lorsque, dans la suite, nous parlerons du réseau à invariants égaux parallèle à un réseau à invariants égaux donné, il s'agira toujours du réseau unique dont il vient d'être question.

Ainsi, par exemple, si (R) est un réseau de translation quelconque (à invariants égaux nuls)

$$\text{(R)}\qquad x=U_1+V_1,\qquad y=U_2+V_2,\qquad z=U_3+V_3,$$

tous les réseaux parallèles à (R) sont de translation, donc à invariants égaux, mais seul le réseau défini, à une homothétie près, par les formules

$$\text{(R}'\text{)}\qquad x=U_1-V_1,\qquad y=U_2-V_2,\qquad z=U_3-V_3,$$

fournit, moyennant la construction géométrique précédemment indiquée, ∞^3 congruences de Ribaucour (correspondant aux ∞^3 positions possibles du point I) de réseau moyen (R).

3. Il convient, pour ce qui va suivre, d'envisager plus spécialement le cas où, sur la surface moyenne S, le réseau moyen (R) d'une congruence de Ribaucour est un réseau à invariants égaux *orthogonal*, donc *isotherme*. Il s'agit donc des congruences de Ribaucour à surface moyenne isothermique dont les développables découpent sur cette surface moyenne le réseau de ses lignes de courbure. Si S′ est la surface support du réseau (R′) parallèle à (R) associé à (R) dans la construction de la congruence envisagée, les relations (2) montrent que la correspondance (par plans tangents parallèles) que les points homologues m et m' des réseaux (R) et (R′) déterminent sur S et S′ est une correspondance conforme. Deux angles homologues (formés par les tangentes à deux couples de courbes homologues de S et S′ issues de deux points correspondants m et m'), mesurés dans les plans tangents parallèles (supposés orientés dans le même sens) qui les contiennent, sont évidemment *de sens contraires* : la correspondance entre S et S′ est une *correspondance conforme inverse*.

Deux surfaces se correspondant par plans tangents parallèles dans une représentation conforme sont, ou bien deux surfaces homothétiques quelconques (la correspondance conforme est alors *directe*), ou bien deux surfaces minima *associées* (la correspondance est encore *directe*), ou bien deux surfaces (dites *transformées de Christoffel* l'une de l'autre) pour lesquelles la correspondance conforme est *inverse*. Cette dernière condition (correspondance conforme *inverse*) entraîne la *correspondance des réseaux de courbure des deux surfaces*, et classe ces réseaux dans la famille des réseaux orthogonaux à invariants égaux (isothermes).

Tout réseau orthogonal isotherme (R) admet, à une homothétie près, un réseau isotherme parallèle et un seul (R′), et c'est ce réseau qu'il faut adjoindre à (R) pour obtenir les congruences de Ribaucour admettant pour réseau moyen le réseau orthogonal isotherme (R).

La construction générale des congruences envisagées dans ce numéro est donc la suivante :

Donnons-nous arbitrairement un réseau orthogonal isotherme (R). Construisons son transformé de Christoffel (R′) [1]. Joignons les différents points de (R′) à un point fixe quelconque de l'espace. Menons par les points homologues de (R) les parallèles aux droites obtenues. L'ensemble de ces parallèles constitue la congruence de Ribaucour la plus générale à réseau moyen orthogonal (isotherme).

---

[1] Le réseau orthogonal isotherme étant supposé donné par ses coordonnées $[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$, la détermination de son transformé de Christoffel $[x', y', z']$ peut être faite à partir des formules (2) du numéro 2. Cette détermination n'exige que des quadratures (*voir*, par exemple, G. Darboux, *Théorie des Surfaces*, t. II, p. 253 et suiv.).

II.

4. Revenons maintenant aux congruences (H) définies dans l'Introduction. Ces congruences sont des congruences de Ribaucour comme toutes les congruences à surface moyenne plane, et leurs réseaux moyens (R) sont des réseaux plans à invariants égaux. Cherchons à déterminer les couples de réseaux plans parallèles à invariants égaux [(R), (R')] qui, conformément à la construction générale du n° 2, caractérisent les congruences de ce type particulier.

La congruence (H) la plus générale de plan moyen (Π) est déterminée par une correspondance conforme inverse $[m \rightarrow m']$ du plan (Π) et par un point fixe I de l'espace, son rayon générateur étant la parallèle menée par m à la droite Im'. Les développables de (H) déterminent sur (Π) un réseau à invariants égaux (R), et, lorsque m décrit ce réseau, m' décrit un réseau à invariants égaux parallèle à (R).

Or, étant donnée une correspondance conforme inverse plane quelconque, il existe un couple (et un seul) de réseaux homologues parallèles, et ces réseaux sont orthogonaux et isothermes.

D'autre part, parmi les réseaux parallèles à un réseau orthogonal isotherme donné, il en existe toujours un et un seul (une homothétie étant négligée) également isotherme [le réseau transformé de Christoffel du premier].

Il résulte de là que la congruence (H) la plus générale peut être définie *par le fait que ses développables déterminent dans le plan moyen un réseau orthogonal isotherme*.

Tout réseau (R) de cette espèce est le réseau moyen de ∞^3 congruences (H), obtenues, après adjonction à (R) de son transformé de Christoffel (R'), par la construction dont l'énoncé termine le n° 3.

5. Les congruences (H), initialement définies à partir d'une surface harmonique arbitraire en menant par les projections de ses points sur xOy les parallèles aux normales correspondantes, et rattachées ensuite aux correspondances conformes inverses du plan par la construction indiquée dans l'Introduction, sont intéressantes à un autre titre. La propriété caractéristique obtenue au numéro précédent, suivant laquelle les développables d'une congruence (H) déterminent, dans le plan moyen (xOy), un réseau orthogonal isotherme, identifie ces congruences avec celles d'une famille étudiée par M. Vaulot [1]. Au Chapitre V de son travail (§ 3), M. Vaulot effectue la recherche des congruences de Ribaucour à surface moyenne plane qui sont en même temps

[1] M. Vaulot, *Congruences rectilignes, qui sont en même temps* W *et de Ribaucour* (*Thèse*, Paris, 1923).

des congruences W. Il arrive à cette conclusion que ces congruences sont précisément caractérisées par le fait que leur réseau moyen est un réseau orthogonal isotherme. Les congruences (H) du travail actuel, définies comme il vient d'être rappelé à partir des surfaces harmoniques, sont donc bien les congruences à la fois W et de Ribaucour envisagées par M. Vaulot. Et la remarquable simplicité de la construction (ne mettant en jeu qu'une simple projection orthogonale sur le plan xOy) qui fait dériver les congruences (H) des surfaces harmoniques, ajoute encore à l'intérêt géométrique que présente ce type intéressant de surfaces.

6. Le caractère W des congruences (H), que le rapprochement précédent vient de mettre en évidence, peut être rattaché aux considérations du travail actuel moyennant l'application du théorème bien connu suivant de G. Darboux.

Pour qu'une droite dépendant de deux paramètres u et v engendre une congruence W, *il faut et il suffit que ses six coordonnées pluckériennes vérifient une même équation aux dérivées partielles linéaire et homogène du second ordre*

$$(3) \qquad \mathrm{A}\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\mathrm{B}\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\mathrm{C}\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+\mathrm{D}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\mathrm{E}\frac{\partial\theta}{\partial v}+\mathrm{F}\theta=0.$$

Les points $m[x(u, v)], y(u, v)]$ et $m'[x'(u, v), y'(u, v)]$ décrivant, dans le plan xOy, deux réseaux transformés de Christoffel l'un de l'autre, on obtient comme l'on sait la congruence (H) la plus générale en menant, par chaque point m, la parallèle D à la droite Im', I étant un point fixe quelconque de l'espace, par exemple le point de Oz de cote -1.

Les coordonnées pluckériennes X, Y, Z, L, M, N de D sont

$$\mathrm{X}=x', \qquad \mathrm{Y}=y', \qquad \mathrm{Z}=1, \qquad \mathrm{L}=y, \qquad \mathrm{M}=-x, \qquad \mathrm{N}=xy'-yx'.$$

On a les relations (2) du n° 2 qui se réduisent ici à

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u}&=h\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial x'}{\partial v}&=-h\frac{\partial x}{\partial v},\\ \frac{\partial y'}{\partial u}&=h\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial y'}{\partial v}&=-h\frac{\partial y}{\partial v}, \end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut adjoindre les suivantes :

$$(5) \qquad \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}=0, \qquad \frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v}+\frac{\partial y'}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v}=0,$$

exprimant l'orthogonalité des réseaux (x, y) et (x', y').

En outre, x et y vérifient (*voir* le n° 2) l'équation de Laplace

$$(6) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\frac{1}{2h}\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v}=0.$$

Il s'agit de montrer que les six fonctions

$$x, \quad y, \quad x', \quad y', \quad xy'-yx', \quad 1$$

vérifient une équation (6), laquelle devant être vérifiée pour $\theta = 1$ aura la forme

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + B\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + D\frac{\partial\theta}{\partial u} + E\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0. \tag{7}$$

Formons les expressions de $\frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial^2 N}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 N}{\partial v^2}$ $(N = xy' - yx')$. On obtient aussitôt

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial N}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u}y' + \frac{\partial y'}{\partial u}x - \frac{\partial y}{\partial u}x' - \frac{\partial x'}{\partial u}y,\\
\frac{\partial N}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v}y' + \frac{\partial y'}{\partial v}x - \frac{\partial y}{\partial v}x' - \frac{\partial x'}{\partial v}y,\\
\frac{\partial^2 N}{\partial u^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}y' + \frac{\partial^2 y'}{\partial v^2}x - \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}x' - \frac{\partial^2 x'}{\partial v^2}y,\\
\frac{\partial^2 N}{\partial v^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}y' + \frac{\partial^2 y'}{\partial v^2}x - \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}x' - \frac{\partial^2 x'}{\partial v^2}y.
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Les quatre dérivées partielles de N figurant dans (8) sont, comme l'on voit, *une même combinaison linéaire et homogène des dérivées homologues de* x, y', y, x'.

Cela étant, envisageons le déterminant des coefficients de y', x, $-x'$, $-y$ aux seconds membres des relations (8), soit

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y'}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x'}{\partial u}\\
\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y'}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial x'}{\partial v}\\
\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y'}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 x'}{\partial u^2}\\
\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y'}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 x'}{\partial v^2}
\end{vmatrix}.$$

Si l'on développe ce déterminant suivant la règle de Laplace, en tenant compte des relations (4), (5), et de l'équation (6) vérifiée par x, y, on constate qu'il est identiquement nul. Il existe donc une même relation linéaire homogène entre les éléments des différentes colonnes.

Les quantités x', y' y, x (les coordonnées pluckériennes X, Y, L, M) vérifient par suite une même équation de la forme (7) avec $B = 0$, soit

$$A\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + C\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + D\frac{\partial\theta}{\partial u} + E\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0. \tag{9}$$

La remarque relative à la constitution linéaire des dérivées $\frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial^2 N}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 N}{\partial v^2}$ données par les formules (8), montre que N vérifie cette même équation aux dérivées partielles (9).

Les coordonnées pluckériennes X, Y, Z, L, M, N d'un rayon quelconque D de la congruence (H) envisagée vérifiant une même équation aux dérivées partielles linéaire et homogène du second ordre, (H) est une congruence W, d'après le théorème de Darboux ci-dessus rappelé.

7. Une remarque intéressante à faire au sujet des congruences (H) envisagées en tant que congruences de Ribaucour est la suivante :

Toute congruence de Ribaucour admettant pour surface moyenne une surface donnée, peut être construite à partir d'une certaine surface (dite *génératrice* de la congruence) correspondant à la surface moyenne avec orthogonalité des éléments linéaires. La congruence s'obtient en menant par chaque point de la surface moyenne, la parallèle à la normale au point correspondant de la surface génératrice.

Envisageons alors une congruence (H) définie par la construction indiquée dans ce travail, consistant à mener, par la projection orthogonale m d'un point quelconque M d'une surface harmonique S sur le plan xOy, la parallèle à la normale en M à S. Adjoignons à S la surface harmonique *conjuguée* S′ [définie par la fonction harmonique $z'(x, y)$ conjuguée de la fonction $z(x, y)$ définissant S]. Soit M′ le point de S′ se projetant sur xOy au même point m que M. On vérifie sans peine que si l'on fait tourner S′ de $-\frac{\pi}{2}$ autour de Oz, ce qui amène S′ en S_1 et M′ en M_1, la normale en M_1 à S_1 est parallèle à la normale en M à S ([1]). La correspondance que les points M_1 et m établissent entre la surface S_1 et le plan xOy est évidemment une correspondance par éléments linéaires orthogonaux, et S_1 est la surface *génératrice* de la congruence (H) considérée. On peut donc dire :

Les surfaces génératrices des congruences (H) *considérées en tant que congruences de Ribaucour sont des surfaces harmoniques*, et ces surfaces sont (à une rotation d'un angle droit près) les *conjuguées* des surfaces harmoniques dont les congruences (H) dérivent par la construction indiquée au début de ce travail.

Les congruences (H) sont donc liées de deux façons différentes aux surfaces harmoniques. Tout d'abord par la construction classique qui fait dériver une congruence (H) de la surface harmonique *génératrice*, puis par la construction, particulièrement simple, qui consiste à mener par la projection de chaque point d'une surface harmonique sur le plan xOy la parallèle à la normale correspondante.

([1]) Cette remarque est due à M. A. Charrueau, *Sur les surfaces représentatives des fonctions harmoniques* (*Bull. des Sc. math.*, 2e série, t. 67, p. 168 et 179). J'ai moi-même utilisé cette remarque, en la généralisant, dans le Mémoire du *Bulletin des Sc. math.* cité dans l'Introduction. J'en ai déduit, en particulier, diverses propriétés de certaines familles de congruences de Ribaucour associées aux surfaces harmoniques.

8. Il résulte de ce qui précède qu'en prenant comme point de départ les formules de M. Vaulot (*Mém. cité*, Chap. V, § 3) on peut, de deux façons différentes, obtenir les formules définissant au moyen de deux fonctions arbitraires d'une variable la surface harmonique la plus générale, et intégrer pour ainsi dire géométriquement l'équation $r+t=0$.

En modifiant légèrement les notations de M. Vaulot, on peut définir un point quelconque du plan moyen de la congruence W et de Ribaucour à surface moyenne plane (xOy) la plus générale [de la congruence (H) la plus générale] par les formules

$$(10)\qquad \begin{cases} x = i\left[\displaystyle\int \frac{d\alpha}{f'} - \int \frac{d\beta}{\varphi'}\right], \\ y = \displaystyle\int \frac{d\alpha}{f'} + \int \frac{d\beta}{\varphi'}, \end{cases}$$

les paramètres directeurs du rayon de la congruence issu du point (x, y) du plan moyen étant

$$(11)\qquad p = i(f-\varphi), \qquad q = -(f+\varphi), \qquad -1,$$

et f, φ désignant deux fonctions arbitraires des paramètres respectifs α et β dont les dérivées sont f', φ'.

Si l'on a égard à la construction des congruences (H) à partir des surfaces harmoniques rappelée à la fin du numéro précédent, on peut dire qu'il existe une surface harmonique dont les projections des différents points sur le plan xOy ont les expressions (10), les normales correspondantes ayant leurs paramètres directeurs p, q, -1 définis par les formules (11), cette surface étant d'ailleurs la surface harmonique la plus générale.

La troisième coordonnée z de la surface est définie par

$$z = \int p\,dx + q\,dy.$$

La quantité sous le signe $\int$ est nécessairement une différentielle exacte, et son intégration, immédiate, donne

$$z = -2\left[\int \frac{f}{f'}\,d\alpha + \int \frac{\varphi}{\varphi'}\,d\beta\right].$$

La surface harmonique la plus générale est donc définie par les équations

$$(12)\qquad \begin{cases} x = i\left[\displaystyle\int \frac{d\alpha}{f'} - \int \frac{d\beta}{\varphi'}\right], \\ y = \displaystyle\int \frac{d\alpha}{f'} + \int \frac{d\beta}{\varphi'}, \\ z = -2\left[\displaystyle\int \frac{f}{f'}\,d\alpha + \int \frac{\varphi}{\varphi'}\,d\beta\right], \end{cases}$$

f et φ étant des fonctions arbitraires de α et β respectivement.

Les surfaces réelles s'obtiennent en prenant pour f et φ des fonctions imaginaires conjuguées, les variables α et β étant également imaginaires conjuguées,

Les équations (12) mettent en évidence les deux familles de courbes $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, qui définissent la surface harmonique la plus générale comme surface de translation. Pour rapporter la surface à ses asymptotiques il suffit de poser $\alpha = u + iv$, $\beta = u - iv$.

A titre de vérification, nous pouvons constater que, conformément à la propriété caractéristique (a) de l'Introduction, la correspondance entre les points $m(x, y)$ et $m'(p, q)$ du plan xOy est conforme. On a, en effet, en désignant par ds et ds' les éléments linéaires correspondants décrits par m et m'

$$ds^2 = \frac{4}{f'\varphi'}\,d\alpha\,d\beta, \qquad ds'^2 = 4f'\varphi'\,d\alpha\,d\beta,$$

et par suite

$$ds'^2 = f'^2\varphi'^2\,ds^2.$$

Si nous nous plaçons dans le cas où la surface (12) est réelle, nous constatons aussitôt que l'on a

$$\frac{D(p, q)}{D(x, y)} = -f'^2\varphi'^2 \qquad (< 0),$$

ce qui prouve que la correspondance conforme ($m \to m'$) est *inverse*, conformément à la proposition (a).

9. De même qu'à toute congruence (H) on peut attacher deux surfaces harmoniques, à toute surface harmonique S on peut immédiatement associer deux congruences (H), soient H_1 et H_2, à rayons homologues parallèles, l'une H_1 obtenue en considérant S comme surface génératrice au sens classique, l'autre H_2 obtenue en considérant S comme génératrice au sens de la construction (b) de l'Introduction.

Dans le premier cas, H_1 s'obtient en faisant tourner la projection orthogonale m de chaque point M de S sur le plan xOy de l'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de O, et en menant par le point obtenu la parallèle à la normale en M à S. Dans le second cas on obtient H_2 en menant par chaque point m la parallèle à la normale en M.

Les développables de H_1 correspondent, comme l'on sait, aux asymptotiques de S. Quant aux développables de H_2, elles correspondent, comme il est facile de le voir, à un réseau conjugué de la même surface S. La congruence H_2 peut, en effet, être considérée comme admettant pour génératrice (au sens classique) la surface S_1 déduite de la conjuguée S' de S par rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de Oz. Ses développables correspondent donc aux asymptotiques de S_1, donc de S', et ces dernières asymptotiques correspondent (par projection cylindrique parallèle à Oz) à un réseau conjugué de S.

Indiquons pour mémoire (*voir* l'article cité du *Bulletin des Sc. Math.*), que, si l'on soumet l'ensemble des points où les différents rayons d'une congruence H quelconque percent le plan xOy à une transformation conforme *directe* quelconque du plan, et que par les nouveaux points obtenus on mène les parallèles aux rayons correspondants de H, on obtient une nouvelle congruence du type (H). Les congruences H_1 et H_2 ci-dessus sont dans la relation que l'on vient d'indiquer, la transformation conforme directe étant une rotation d'un angle droit autour de O.

10. On pourrait se demander si la propriété que possèdent les congruences H d'être des congruences W, n'appartiendrait pas aussi aux congruences de Ribaucour générales admettant pour réseau moyen un réseau orthogonal isotherme *arbitraire*. Le calcul montre qu'il n'en est rien. La raison géométrique de ce fait est simple. Considérons une congruence de Ribaucour (G) admettant pour réseau moyen un réseau orthogonal isotherme (R), et soit S la surface support de ce réseau. (R') étant le réseau transformé de Christoffel de (R) [défini à une homothétie près], et m, m' désignant deux points correspondants de (R), (R'), le rayon générateur D de (G) est la parallèle issue de m à la droite joignant m' à un certain point fixe I de l'espace. Projetons orthogonalement le voisinage de m sur (S) sur le plan π tangent en m à S; soit μ_1 la projection d'un point quelconque m_1 de ce voisinage. Projetons de même le voisinage de m' sur le plan tangent π' en m' au support S' de (R'), et soit μ'_1 la projection d'un point quelconque m'_1 de ce voisinage.

La correspondance entre m et m' sur S et S' étant une correspondance conforme inverse, il en est de même des correspondances entre les voisinages (plans) de m et m' sur π et π' (correspondance entre les points μ_1 et μ'_1). Si donc on mène par les différents points μ_1 les parallèles aux droites $I\mu'_1$ correspondantes, on obtient un élément de congruence de Ribaucour (g) [tangent à l'élément homologue de la congruence (G) initialement envisagée le long du rayon D]. Les éléments métriques du premier ordre (positions des foyers, des points limites, angle des plans focaux, etc.) relatifs au rayon D sont les mêmes pour (G) et pour (g), mais il n'en est pas de même, en général, pour ceux du second ordre.

Le fait qu'une congruence conjuguée à un réseau orthogonal isotherme est de Ribaucour ne mettant en jeu que les positions des foyers sur les différents rayons; la construction ci-dessus donnant les congruences de Ribaucour à réseau moyen *plan* donne aussi les congruences de Ribaucour admettant pour réseau moyen un réseau orthogonal isotherme *gauche* quelconque. Mais le caractère W des congruences (H) à surface moyenne plane disparaît en général lorsqu'on passe du réseau moyen plan au réseau moyen gauche, car, le fait qu'une congruence est W met en jeu les asymptotiques des surfaces focales, c'est-à-dire les éléments du *deuxième ordre* attachés au rayon générateur.

III.

11. En ce qui concerne le problème de la recherche des congruences de Ribaucour admettant pour réseau moyen un réseau à invariants égaux donné, on peut faire les remarques suivantes :

Soient (R) le réseau moyen supposé donné, (R′) le réseau à invariants égaux parallèle à (R) (défini à une homothétie près), m et m' deux points homologues quelconques des deux réseaux. On obtient deux congruences de Ribaucour distinctes (G_1), (G_2) admettant (R) pour réseau moyen, en joignant m' à deux points fixes quelconques I_1, I_2 de l'espace, et en menant par m les parallèles D_1 et D_2 aux deux droites $I_1 m'$, $I_2 m'$.

Prenons sur la droite $I_1 I_2$ un point fixe quelconque I; il lui correspond une congruence de Ribaucour (G) de réseau moyen (R) dont le rayon générateur D, parallèle à Im', est situé dans le plan ($mD_1 D_2$). Aux ∞^1 points I de $I_1 I_2$ correspond ainsi un faisceau de ∞^1 congruences de Ribaucour (G) à rayons homologues coplanaires admettant (R) pour réseau moyen. Le rapport anharmonique de quatre rayons homologues quelconques de quatre congruences (G_1), (G_2), (G_3), (G_4), du faisceau précédent, est égal au rapport anharmonique des quatre points I_1, I_2, I_3, I_4 correspondants; ce rapport anharmonique est donc *constant*.

Toute droite $I_1 I_2$ de l'espace donnant lieu à une configuration géométrique analogue à la précédente, on peut énoncer le résultat suivant :

Avec les ∞^3 congruences de Ribaucour admettant un réseau moyen donné on peut former ∞^4 faisceaux de congruences, tels que, pour les ∞^1 congruences d'un même faisceau, les rayons homologues issus d'un point quelconque m du réseau moyen soient coplanaires, quatre rayons homologues quelconques étant en rapport anharmonique constant.

De pareilles configurations projectives de rayons peuvent évidemment aussi être obtenues avec des congruences conjuguées à un réseau quelconque (R). Il suffit, pour le voir, de se reporter à la construction des congruences conjuguées à (R) au moyen d'un réseau quelconque (R′) parallèle à (R) et d'un point fixe quelconque I de l'espace rappelée au n° 1, et de reprendre le raisonnement précédent. Mais ici on a beaucoup plus de latitude pour la construction des configurations projectives en question, le réseau (R′) étant l'un *quelconque* des réseaux parallèles à (R), et sa détermination dépendant, comme l'on sait, d'une équation de Laplace.

En considérant, au lieu de la droite $I_1 I_2$, un plan quelconque ($I_1 I_2 I_3$), et en construisant les congruences (de Ribaucour ou non) conjuguées à un réseau donné (R), on met en évidence la possibilité de répartir l'ensemble des congruences conjuguées à (R) en familles de ∞^2 congruences, telles que les gerbes de ∞^2 rayons homologues de ces congruences issus d'un même point quelconque du réseau (R) soient projectivement identiques. Les familles en question sont en nombre ∞^3 pour les congruences de Ribaucour de réseau moyen (R) [(R′) est alors déterminé à une homothétie près, indifférente puisque le plan $I_1 I_2 I_3$ est un plan quelconque de l'espace]. Dans le cas général les différentes familles correspondent, pour chaque position du plan $(I_1 I_2 I_3)$, aux différentes solutions de l'équation de Laplace dont dépendent les réseaux (R′) parallèles à (R).

12. Les remarques du numéro précédent conduisent à rechercher les groupes de congruences conjuguées à un réseau (R) donné, dont les systèmes de rayons homologues forment une figure *métriquement* (et non plus seulement projectivement) invariable.

Si l'on se borne, pour commencer, à la considération des congruences de Ribaucour, on peut aisément donner une réponse complète à la question précédente.

Si (R) est un réseau à invariants égaux arbitraire, il est généralement impossible de former, avec les congruences de Ribaucour admettant (R) pour réseau moyen, des groupes tels que les rayons homologues d'un même groupe forment une figure invariable (se coupent deux à deux sous un angle invariable). Les réseaux à invariants égaux pour lesquels il existe des configurations invariables de groupes de rayons homologues sont :

1° les réseaux à invariants égaux parallèles aux réseaux à invariants égaux des tores, pour lesquels il existe *deux* congruences de Ribaucour dont les rayons homologues forment un angle invariable;

2° les réseaux de courbure des surfaces minima, pour chacun desquels il existe ∞^2 couples de congruences de Ribaucour à rayons homologues orthogonaux.

Soit (R) un réseau à invariants égaux. Supposons que deux congruences de Ribaucour (G_1) et (G_2) admettant (R) pour réseau moyen, soient telles que les rayons homologues D_1, D_2 issus d'un même point quelconque de (R) forment un angle constant α. Soient (R′) le réseau à invariants égaux parallèle à (R) (défini à une homothétie près), et I_1, I_2 les deux points fixes associés à (R′) dans les constructions donnant respectivement (G_1) et (G_2). Si m' est le point de (R′) correspondant au point m de (R), les droites $I_1 m'$ et $I_2 m'$, respectivement parallèles à D_1 et D_2, forment l'angle constant α. Il résulte de là que le réseau (R′) est tracé sur un tore d'axe $I_1 I_2$, engendré par la rotation, autour de la droite $I_1 I_2$, d'un cercle passant par I_1, I_2 et coupant $I_1 I_2$ sous l'angle α.

Il convient de distinguer les cas où l'angle α est différent de $\frac{\pi}{2}$ ou égal à $\frac{\pi}{2}$. Dans le premier cas on voit que les seul réseaux à invariants égaux (R) tels qu'il existe des couples de congruences de Ribaucour les admettant pour réseaux moyens, deux rayons homologues quelconques formant un angle constant $\alpha\left(\neq\frac{\pi}{2}\right)$ sont les réseaux à invariants égaux parallèles aux réseaux à invariants égaux d'un tore quelconque (lesquels dépendent de deux fonctions arbitraires d'une variable). Pour tout réseau (R) de cette espèce, il existe deux congruences (G_1), (G_2) de Ribaucour (et manifestement pas davantage) dont les couples de rayons homologues se coupent sous un angle constant. On les obtient en menant, par chaque point m de (R), les parallèles aux droites joignant le point correspondant m' du tore associé, aux deux points I_1, I_2 où le tore coupe son axe de révolution. (G_1) et (G_2) ne sont réelles que si le cercle méridien du tore coupe l'axe de révolution.

Si l'angle α est droit, le réseau (R′) parallèle à (R) est porté par une sphère Σ de diamètre I_1I_2. (R′) est donc un réseau *orthogonal isotherme* de Σ, et il en résulte que (R) est le *réseau de courbure d'une surface minima arbitraire*.

Comme, dans ce dernier cas, pour tout couple de points diamétralement opposés I_1, I_2 de la sphère Σ l'angle $\widehat{I_1 m' I_2}$ est droit, on voit que *toute surface minima* S *est la surface moyenne de* ∞^2 *couples de congruences de Ribaucour à rayons homologues orthogonaux*. Pour avoir l'un quelconque de ces couples, on joint un point quelconque m' de la sphère Σ à deux points diamétralement opposés quelconques I_1, I_2, puis on mène par le point m de S d'image sphérique m' les parallèles à I_1m' et I_2m'.

13. Parmi les réseaux à invariants égaux du tore, que l'on a été conduit à envisager dans le cas où $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$, figure évidemment le réseau des lignes de courbure (méridiens et parallèles). (R) est alors le réseau de courbure de la transformée de Christoffel du tore, et sa détermination peut se faire par une quadrature. Nous saisirons, à ce sujet, l'occasion de signaler une forme particulièrement simple des équations définissant les couples de surfaces de révolution transformées de Christoffel l'une de l'autre [équations (13) et (13′) de ce paragraphe].

Soient, S une surface quelconque de révolution autour de Oz, dont la méridienne L dans le plan xOz a pour équation $z=f(x)$, et S′ la transformée de Christoffel de S de méridienne L′. Désignons par X, Z les coordonnées du point m' de S′ correspondant au point m de S. En m et m' les plans tangents à S et S′ sont parallèles, et la correspondance entre S et S′ est une correspondance conforme inverse. Traduisons ces conditions. Supposons les coordonnées X et Z de m' exprimées en fonction de l'abscisse x de m. X aura une expression de la forme $X=\varphi(x)$, et l'on devra avoir, pour le parallélisme des plans tangents, $\frac{dZ}{dX}=f'(x)$, soit

$$Z=\int\varphi'(x)f'(x)\,dx.$$

Exprimons que la correspondance entre S et S′ est conforme. Il faut, et il suffit pour cela, que les éléments d'arcs décrits par m pour une rotation infinitésimale autour de Oz et pour une variation infinitésimale de x, soient proportionnels aux éléments d'arcs décrits par m' pour la même rotation infinitésimale et la même variation de x. En écrivant cette proportionnalité, on obtient aussitôt

$$\varphi'(x) = \pm \frac{\varphi(x)}{x},$$

d'où l'on déduit, C étant une constante arbitraire, soit

$$\varphi(x) = Cx,$$

soit

$$\varphi(x) = \frac{C}{x}.$$

Dans le premier cas S′ est homothétique de S (la correspondance conforme est directe). Le deuxième cas fournit la transformée de Christoffel S′ de S.

Les équations paramétriques définissant, par sa méridienne, S′ à partir de S, sont, en prenant par exemple la constante d'homothétie C égale à *un*,

$$X = \varphi(x) = \frac{1}{x},$$

$$Z = \int \varphi'(x) f'(x)\, dx = -\int \frac{f'(x)}{x^2}\, dx.$$

L'élimination de x entre les équations précédentes donne immédiatement l'équation de la méridienne S′ sous la forme cartésienne ordinaire :

$$Z = \int f'\left(\frac{1}{X}\right) dX.$$

Ainsi, les équations définissant par leurs méridiennes (dans le plan xOz) le couple le plus général de surfaces de révolution transformées de Christoffel l'une de l'autre sont

$$z = f(x), \tag{13}$$

$$Z = \int f'\left(\frac{1}{X}\right) dX. \tag{13'}$$

Les points homologues sur les méridiennes (13) et (13′) correspondent aux abscisses respectives x et $X = \frac{1}{x}$. La réciprocité des deux surfaces se lit d'ailleurs sur les équations (13), (13′).

Ces équations mettent, par exemple, immédiatement en évidence les associations comme surfaces transformées de Christoffel, des paraboloïdes de révolution d'axe Oz et des surfaces engendrées par les courbes logarithmiques d'asymptote Oz tournant autour de Oz, ou encore des surfaces engendrées respectivement, par rotation autour de Oz, des cubiques $z = kx^3$ et des hyperboles équilatères admettant Oz pour asymptote.

Si l'une des surfaces est le tore de méridienne

$$x^2 + z^2 - 2ax - b^2 = 0,$$

l'équation (13) s'écrit

$$z = \pm\sqrt{-x^2 + 2ax + b^2},$$

et (13′) fournit aussitôt la surface transformée de Christoffel

$$\pm Z = \frac{a}{b^2}\sqrt{b^2X^2 + 2aX - 1} - \frac{b^2 + a^2}{b^3}\operatorname{Log}\left(b^2X + a + b\sqrt{b^2X^2 + 2aX - 1}\right).$$

Si $a = 0$, on obtient

$$X = \frac{1}{b}\operatorname{ch} bZ,$$

et l'on retrouve l'association bien connue de la sphère et du caténoïde.

14. Envisageons maintenant, d'une façon générale, le problème qui consiste, étant donné un angle de grandeur invariable, à lui imprimer un mouvement à deux paramètres dans lequel les deux côtés engendrent des congruences conjuguées à un même réseau (décrit par le sommet).

Si l'on exige seulement la correspondance des développables des congruences décrites par les deux côtés de l'angle (sans égard à la propriété de conjugaison qui exige que le réseau décrit par le sommet ne soit focal pour aucune des deux congruences), une solution immédiate est donnée par les normales à une surface quelconque et les tangentes à l'une des familles de lignes de courbure, une autre solution est fournie par les tangentes aux courbes des réseaux isogonaux (dont les tangentes font un angle constant) que j'ai étudiés en détail dans un Mémoire antérieur [1].

Une solution évidente du problème précis qui nous occupe est formée par la figure constituée par les ∞^1 positions, dans un plan (π), d'un angle constant dont la position dépend d'un paramètre variable, mise en rotation autour d'une droite quelconque du plan. Les congruences des deux côtés sont conjuguées au réseau de courbure de la surface de révolution engendrée par la courbe lieu du sommet de l'angle dans le plan (π). Le plan (π) pourrait d'ailleurs rouler sur une développable, et l'on obtiendrait alors des congruences conjuguées au réseau de courbure d'une surface moulure quelconque.

Le problème général peut être présenté sous la forme même envisagée au n° 12 au sujet des angles constants dont les côtés décrivent des congruences de Ribaucour de même réseau moyen.

---

(1) *Sur les généralisations de quelques problèmes de géométrie différentielle et sur certains cycles de congruences* (*Acta mathematica*, t. 71, 1939, p. 145).

La question revient alors à déterminer les réseaux (R) tels que, parmi les réseaux qui leur sont parallèles, il en existe deux (R′), (R″) pour lesquels les différents segments joignant les divers couples de points homologues m', m'' de (R′), (R″) soient vus d'un point fixe O de l'espace sous un angle constant.

Si l'on se place dans le cas où les réseaux (R′), (R″) sont homothétiques (on peut alors les supposer égaux et déduits l'un de l'autre par une translation), il suffit d'amener, par translation, (R″) en coïncidence avec (R′), pour être ramené au cas du n° 12. Il doit alors exister deux points I_1, I_2 tels que l'angle $\widehat{I_1 m' I_2}$ soit constant, et l'angle mobile s'obtient en menant, par le point m de (R) homologue du point m' de (R′), les parallèles à $I_1 m'$ et $I_2 m'$. (R′) est alors porté par un tore. (R) est un réseau parallèle à un réseau *quelconque* du tore, et les côtés D_1 et D_2 de l'angle sont les parallèles issues de m aux droites joignant m' aux deux points I_1, I_2 où le tore coupe l'axe de révolution.

Si l'angle mobile est droit le tore se réduit à une sphère. (R′) est un réseau orthogonal quelconque de la sphère, et I_1, I_2 sont deux points diamétralement opposés quelconques de la même sphère. Dans ce cas (R) est *un réseau orthogonal quelconque* (formé par les lignes de courbure d'une surface arbitraire).

A toute surface S on peut donc attacher, de ∞^2 façons différentes, un angle droit mobile dont le sommet décrit la surface et dont les côtés engendrent des congruences conjuguées au réseau de courbure de la surface. On obtient cet angle en effectuant la représentation sphérique de S et en menant, par chaque point de S, les parallèles aux droites joignant l'image sphérique de ce point à deux points diamétralement opposés fixes quelconques de la sphère image.

Mais ce ne sont là que des solutions particulières du problème qui nous occupe. Dans le cas général les réseaux (R′) et (R″) sont simplement *parallèles* (non nécessairement homothétiques entre eux) au réseau (R) décrit par le sommet de l'angle mobile.

Si un angle $\widehat{D_1 m D_2}$ est animé du mouvement à deux paramètres le plus général dans lequel les congruences décrites par les deux côtés D_1 et D_2 sont conjuguées à un même réseau (R) [décrit par le point m], il doit exister deux réseaux (R′), (R″) parallèles à (R), tels que le segment déterminé par les points m', m'' de (R′), (R″) homologues de m soit vu d'un point fixe O sous un angle constant $\left(\text{égal à l'angle } \widehat{D_1 m D_2}\right)$.

Réciproquement, si deux réseaux (R′), (R″) sont parallèles et s'il existe un point fixe O tel que les segments $m'm''$ joignant deux points homologues quelconques des deux réseaux soient vus d'un point fixe O sous un angle constant, tout réseau (R) parallèle à (R′) et (R″) fournit une solution du problème, que l'on obtient en menant par le point m de (R) homologue de m', m'' les parallèles aux droites Om', Om''.

Tout revient donc, comme l'on voit, à déterminer les couples de réseaux parallèles (R′), (R″) jouissant de la propriété énoncée.

Comme deux réseaux parallèles quelconques peuvent être considérés comme se correspondant dans une correspondance par plans tangents parallèles entre leurs surfaces supports, le problème peut en définitive être ramené à celui de la recherche des couples de surfaces telles que si l'on établit entre leurs points m' et m'' une correspondance par plans tangents parallèles, il existe un point fixe O d'où l'on voit les différents segments $m'm''$ sous un angle constant.

Tout couple de surfaces S', S'' vérifiant la condition précédente fournit une infinité de solutions, que l'on obtient en prenant le couple de réseaux homologues [(R'), (R'')] dans la représentation par parallélisme des plans tangents de l'une des surfaces sur l'autre, en déterminant les différents réseaux (R) parallèles à (R') et (R''), et en effectuant ensuite, à partir du point O, la construction précédemment indiquée.

15. Il est facile de se rendre compte du degré de généralité de la solution qui vient d'être exposée. Le point fixe O étant supposé placé à l'origine des coordonnées, donnons-nous la surface S' du couple [S', S''], et supposons-la définie tangentiellement par l'équation

$$Xx + Yy + Zz = M,$$

x, y, z étant les coordonnées courantes du plan tangent, X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale, et M la distance du point O au plan tangent au point courant m' de S'. X, Y, Z, M sont des fonctions des deux variables u, v fixant m' sur S', et sa représentation sphérique $\mu(X, Y, Z)$ sur une sphère Σ de centre O et de rayon 1. La représentation sphérique (qui peut être choisie arbitrairement) aura un certain ds^2

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

et, si $\Delta(\varphi, \psi)$ désigne le paramètre différentiel mixte de deux fonctions φ, ψ de u, v, par rapport à ce ds^2, les coordonnées du point m' de S' sont données par les formules de Weingarten

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \Delta(M, X) + MX,\\ y &= \Delta(M, Y) + MY,\\ z &= \Delta(M, Z) + MZ.\end{aligned}\right.$$

Cela étant, soit S'' une surface quelconque mise en correspondance par plans tangents parallèles avec S'. Elle sera définie tangentiellement par la distance $N(u, v)$ de son plan tangent à l'origine, et le point m'' de S'' correspondant au point m' de S' aura pour coordonnées

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{x} &= \Delta(N, X) + NX,\\ \overline{y} &= \Delta(N, Y) + NY,\\ \overline{z} &= \Delta(N, Z) + NZ.\end{aligned}\right.$$

L'angle $\widehat{m'Om''}$ est défini par

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{S}x\overline{x}}{\sqrt{\mathrm{S}x^2}\sqrt{\mathrm{S}\overline{x}^2}},$$

Soit en remplaçant (x, y, z), $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ par leurs expressions (14), (15) et en tenant compte des relations

$$\mathrm{S X}\Delta(\mathrm{M}, \mathrm{X}) = \mathrm{S X}\Delta(\mathrm{N}, \mathrm{X}) = 0 \qquad (\mathrm{SX}^2 = 1),$$

$$(16) \qquad \cos\alpha = \frac{\mathrm{S}\,\Delta(\mathrm{M}, \mathrm{X})\,\Delta(\mathrm{N}, \mathrm{X}) + \mathrm{MN}}{\sqrt{\mathrm{S}\,\overline{\Delta(\mathrm{M}, \mathrm{X})}^2 + \mathrm{M}^2}.\sqrt{\mathrm{S}\,\overline{\Delta(\mathrm{N}, \mathrm{X})}^2 + \mathrm{N}^2}}.$$

L'angle α et la fonction $\mathrm{M}(u, v)$ définissant S′ étant donnés, (16) est, pour la fonction N définissant la surface S″ à associer à S′, une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Les surfaces S″ à adjoindre à une surface donnée S′, pour obtenir une solution du problème qui nous occupe, dépendent donc d'une fonction arbitraire d'un argument (et, bien entendu, des trois constantes qui fixent la position de O par rapport à S′).

Ceci nous prouve que sur toute surface S′ il existe une infinité de réseaux (R′) (dont la généralité est celle d'une fonction arbitraire d'un argument), tels qu'à chacun d'eux on puisse associer un réseau parallèle (R″), le couple [(R′), (R″)] fournissant, par adjonction à (R′) et (R″) d'un réseau parallèle (R), une solution du problème du déplacement d'un angle de grandeur donnée dont les côtés décrivent des congruences conjuguées à un même réseau (décrit par le sommet).

Dans le mode d'exposition précédent de la recherche des couples de surfaces S′, S″, nous avons implicitement supposé que S′ et S″ n'étaient pas développables, puisque nous avons admis l'existence d'une représentation sphérique commune non réduite à une courbe.

Le cas où S′ (et par suite S″) serait développable se traite sans difficulté. S′ et S″ sont alors deux développables quelconques se correspondant par génératrices parallèles. Donnons-nous dès lors un point fixe quelconque O de l'espace et soient D′, D″ deux génératrices homologues quelconques de S′, S″. A chaque point m' de D′ correspondent deux points m''_1, m''_2 tels que les segments $(m'm''_1)$, $(m'm''_2)$ soient vus du point O sous un angle donné α. En choisissant l'un de ces points, m''_1 par exemple, et en le suivant par continuité lorsque m' décrit S′, on obtient une représentation par plans tangents parallèles des deux surfaces S′, S″ l'une sur l'autre (la plus générale d'ailleurs) du problème qui nous occupe relatif aux surfaces développables.

En envisageant le réseau conjugué de S′ parallèle à son homologue sur S″ (autre que celui formé par les asymptotiques D′) [1], en construisant l'un

[1] Ce réseau est constitué par les génératrices rectilignes de S′, et par les courbes (dépendant d'une équation différentielle du premier ordre) coupant les génératrices de S′ sous l'angle sous lequel les courbes correspondantes de S″ coupent les génératrices de cette deuxième surface.

quelconque (R) de ses parallèles, et en menant, par un point quelconque m de (R), les parallèles aux droites Om', Om''_1, on obient un angle de grandeur constante α dont les côtés décrivent des congruences conjuguées à (R).

Il résulte de l'étude qui précède qu'un réseau arbitrairement donné (R) ne peut pas, en général, être considéré comme conjugué à la fois à deux congruences dont les rayons homologues font un angle constant. Les réseaux jouissant de cette propriété sont des réseaux spéciaux dépendant (si l'on ne considère pas comme distincts deux réseaux parallèles) de deux fonctions arbitraires, l'une de deux arguments (celle qui définit la surface S′ dont il est question ci-dessus), l'autre d'un argument (fixant la surface S″ associée à S′ dans la détermination du réseau).

16. Explicitons par exemple l'équation (16) dans le cas où l'angle α est *droit*. L'équation est alors linéaire, et, moyennant un choix convenable de la représentation du couple [S′, S″] sur la sphère unitaire Σ, elle peut prendre une forme particulièrement simple.

Supposons Σ rapportée au système de ses génératrices rectilignes. On a alors

$$X = \frac{u+v}{1+uv}, \qquad Y = \frac{1}{i}\,\frac{u-v}{1+uv}, \qquad Z = \frac{uv-1}{1+uv},$$

$$ds^2 = \frac{4\,du\,dv}{(1+uv)^2}.$$

L'équation (16) se réduit à

$$\text{(17)} \qquad S\,\Delta(M, X)\,\Delta(N, X) + MN = 0,$$

et l'on a

$$\Delta(M, X) = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial M}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial M}{\partial v}\right),$$

$$\Delta(N, X) = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial N}{\partial u} + \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial v}\right).$$

Si l'on tient compte des relations

$$S\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = 0, \qquad S\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = 0, \qquad S\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = F = \frac{2}{(1+uv)^2},$$

on voit que l'équation (17) peut s'écrire

$$\frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial N}{\partial u} + \frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial N}{\partial v} + \frac{2}{(1+uv)^2}MN = 0.$$

Soit en posant $\log M = \mu$, $\log N = \nu$,

$$\text{(18)} \qquad \frac{\partial \mu}{\partial v}\frac{\partial \nu}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial u}\frac{\partial \nu}{\partial v} + \frac{2}{(1+uv)^2} = 0.$$

La surface S′ étant donnée, μ est une fonction connue de u et v, et il suffit d'intégrer l'équation linéaire du premier ordre (18) en ν pour obtenir les surfaces associées S″.

17. Je signale une solution particulière explicite assez étendue du problème de la recherche des couples de surfaces associées $[S', S'']$, remarquable en ce sens qu'elle fournit simultanément une infinité de couples $[S', S'']$ (autres que ceux déjà signalés au n° 14, issus d'une surface moulure arbitraire), tels que parmi eux il y en ait qui correspondent à un angle d'association absolument arbitraire.

Considérons la surface S′ définie par les équations

$$(S')\qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}(1-u^2)f(u) + \frac{1}{2}(1-v^2)\varphi(v), \\ y = \frac{i}{2}(1+u^2)f(u) - \frac{i}{2}(1+v^2)\varphi(v), \\ z = u f(u) + v\,\varphi(v), \end{cases}$$

où f et φ sont deux fonctions arbitraires des arguments respectifs u et v.

Cette surface est une surface de translation à réseau de translation imaginaire ([1]); elle est réelle si l'on prend u et v imaginaires conjuguées, les fonctions f et φ étant elles-mêmes imaginaires conjuguées. Associons-lui la surface S″, que nous appellerons S''_α, définie par les équations

$$(S''_\alpha)\qquad \begin{cases} x = \frac{e^{i\alpha}}{2}(1-u^2)f(u) + \frac{e^{-i\alpha}}{2}(1-v^2)\varphi(v), \\ y = \frac{i\,e^{i\alpha}}{2}(1+u^2)f(u) - \frac{i\,e^{-i\alpha}}{2}(1+v^2)\varphi(v), \\ z = e^{i\alpha} u f(u) + e^{-iv} y\,\varphi(v), \end{cases}$$

α étant une constante arbitraire.

S′ et S''_α sont évidemment en correspondance ponctuelle par plans tangents parallèles, le réseau conjugué commun étant le réseau de translation (u, v).

Si m' et m'' sont deux points homologues sur S′ et S''_α, les équations définissant les surfaces montrent aussitôt que l'on a, quel que soit le couple $(m'm'')$ envisagé,

$$\begin{cases} O m' = O m'', \\ \widehat{m' O m''} = \alpha. \end{cases}$$

La deuxième propriété $\left(\widehat{m' O m''} = \alpha\right)$ prouve que tout couple $[S', S''_\alpha]$ fournit une solution du problème de la recherche des couples de congruences conjuguées à un même réseau, les rayons homologues faisant l'angle

([1]) Les surfaces (S′) considérées sont les surfaces moyennes (lieux des milieux des segments focaux) des congruences normales à enveloppée moyenne point (dont les plans médiateurs des segments focaux passent par le point fixe O). Elles sont intimement liées aux surfaces minima [*voir* mon Mémoire *sur une transformation de l'espace réglé et sur les systèmes sphériques isothermes* (*Bull. Sc. Math.*, 2ᵉ série, t. LXV, juill.-août-sept. 1941).

J'y reviendrai prochainement à un autre point de vue.

constant α. Il suffit de prendre une surface quelconque S parallèle à S' et S''_α suivant le réseau de translation commun, puis de mener par chaque point m de cette surface (qui est de translation comme S' et S''_α) les parallèles D_1 et D_2 aux deux droites Om', Om''. D_1 et D_2 engendrent un couple de congruences répondant à la question.

Mais il y a plus. Si l'on considère par exemple les surfaces S' et $S''_{\frac{\pi}{2}}$, et si l'on désigne par P le plan déterminé par deux rayons vecteurs homologues Om', Om'' des deux surfaces, on constate que la variation de α laisse le rayon vecteur homologue des précédents relatif à S''_α dans ce même plan P. Si donc on mène, par chaque point m d'une surface S parallèle à S' suivant le réseau de translation (u, v), les parallèles aux rayons vecteurs correspondants des différentes surfaces S''_α, on obtient ∞^2 *faisceaux plans de droites métriquement identiques dont les rayons homologues fournissent* ∞^1 *congruences conjugées au réseau* (u, v) *de* S.

Nous avons déjà rappelé qu'en déplaçant le sommet d'un faisceau plan de droites (invariablement liées les unes aux autres) sur une surface de révolution ou sur une surface moulure quelconque, on peut obtenir, comme avec les surfaces S dont il vient d'être question, ∞^1 congruences conjuguées à un même réseau.

Il serait sans doute intéressant de rechercher toutes les solutions du problème du mouvement à deux paramètres d'un faisceau plan, dont les différents rayons sont invariablement liés les uns aux autres et engendrent ∞^1 congruences conjuguées à un même réseau (décrit par le sommet du faisceau).

18. Les réseaux conjugués aux congruences engendrées par les deux côtés d'un angle de grandeur invariable sont, comme nous l'avons dit, des réseaux spéciaux, formant d'ailleurs une famille assez étendue (n° 15). Cette famille contient en particulier, comme nous l'avons vu (n° 14), tous les réseaux orthogonaux (formé par les lignes de courbure d'une surface arbitraire). Il est facile de se rendre compte qu'elle contient aussi des réseaux dont les deux familles de courbes sont confondues, constitués par l'un des deux systèmes de lignes asymptotiques d'une surface, et que, pour cette raison, nous dirons *réseaux demi-asymptotiques*.

La recherche de ces réseaux revient à celle des couples de surfaces S', S'', entre lesquelles on peut établir une correspondance par plans tangents parallèles jouissant des propriétés suivantes :

1° les segments joignant les couples de points homologues sont vus d'un point fixe O sous un angle constant;

2° les images sphériques d'un système d'asymptotiques de chacune des deux surfaces sont confondues : il y a correspondance sur les deux surfaces, entre les courbes de l'un des deux systèmes d'asymptotiques (correspondance *demi-asymptotique*).

Si conformément aux notations du n° 15, M et N sont les distances à l'origine de deux plans tangents parallèles de S' et S'', la première condition s'exprime, comme on l'a vu, par une équation aux dérivées partielles du premier ordre entre les fonctions M et N. La deuxième condition s'exprime évidemment par une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre entre ces deux mêmes fonctions, et les couples cherchés sont définis par les différentes solutions (M, N) du système des deux équations en question.

Nous n'entrerons pas dans le détail de l'étude de ce système. Nous nous bornerons ici à observer que son existence prouve que l'un des systèmes de lignes asymptotiques d'une surface ne peut pas, en général, être considéré comme réseau conjugué commun aux congruences décrites par les deux côtés d'un angle de grandeur invariable. Les réseaux demi-asymptotiques jouissant de la propriété indiquée sont des réseaux demi-asymptotiques spéciaux dont nous donnerons plus loin des exemples. Les congruences engendrées par les deux côtés de l'angle constant attaché à un pareil réseau sont telles que pour chacune d'elles, les développables, qui correspondent aux courbes d'un réseau réduit à une seule famille de courbes, sont confondues. Les congruences en question sont donc paraboliques, et le problème envisagé peut être considéré comme celui de la recherche des couples de surfaces entre lesquelles on peut établir une correspondance ponctuelle telle que *l'un des systèmes d'asymptotiques de l'une des deux surfaces corresponde à l'un des systèmes de lignes asymptotiques de l'autre, les tangentes aux asymptotiques correspondantes en deux points homologues quelconques se coupant sous un angle constant.*

19. Il convient ici que nous fassions quelques remarques sur la construction des surfaces admettant, pour représentation sphérique de l'un de leurs deux systèmes de lignes asymptotiques, une famille de courbes donnée de la sphère image.

On sait qu'on ne peut pas se donner arbitrairement les deux familles de courbes (L_1), (L_2) constituant la représentation sphérique (sur une sphère Σ) des lignes asymptotiques d'une surface. Les doubles systèmes de courbes (L_1), (L_2) de Σ doivent satisfaire à la condition suivante : le réseau constitué par les projections des courbes (L_1) et (L_2) sur un plan, faites du centre O, doit être un réseau à invariants égaux. Si cette condition est remplie, et si la représentation sphérique $[(L_1), (L_2)]$ est connue, il existe *une* surface (définie à une homothétie près), que l'on peut obtenir par des quadratures, admettant pour images sphériques de ses asymptotiques les deux familles (L_1), (L_2).

Mais on peut se donner arbitrairement l'une des deux familles (L_1) de la représentation sphérique. Il existe alors une infinité de familles (L_2) constituant avec (L_1) la représentation sphérique des asymptotiques d'une surface. Pour avoir ces familles (L_2), il suffit de projeter du centre O de la sphère Σ (L_1) sur un plan, ce qui donne une famille (l_1), puis, d'adjoindre à (l_1) une famille quelconque (l_2) formant avec (l_1) un réseau à invariants égaux [il existe une infinité de familles (l_2) dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument] et de projeter du point O l'une quelconque de ces familles (l_2) en (L_2) sur Σ.

Proposons-nous alors de déterminer tous les réseaux *demi-asymptotiques* parallèles à un réseau demi-asymptotique donné (R_1). Effectuons, à cet effet, la représentation sphérique de (R_1) en prenant les traces, sur Σ, des perpendiculaires abaissées du centre O sur les plans osculateurs aux différentes courbes de (R_1) [c'est-à-dire sur les plans tangents au support de (R_1) le long des différentes courbes de (R_1)]. Nous obtenons ainsi une famille de courbes (L_1) sur Σ. Adjoignons à (L_1) l'une quelconque des familles (L_2) (dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument) formant avec (L_1) la représentation asymptotique d'une surface. Chacune de ces familles donne une surface S dont l'un des réseaux demi-asymptotiques (R) est parallèle au réseau donné (R_1).

En menant, par chaque point m_1 de la surface support de (R_1), la parallèle à la droite joignant un point fixe ω de l'espace au point correspondant m de l'une quelconque des surfaces S que l'on vient d'obtenir, on obtient toutes les congruences paraboliques conjuguées au réseau (R_1).

En déplaçant le point fixe ω sur une droite ou dans un plan on met en évidence, pour chaque choix de la surface S associée à S_1, ∞^1 ou ∞^2 congruences paraboliques conjuguées à (R_1) dont les rayons homologues forment des faisceaux plans ou des gerbes homographiques.

20. Pour donner des exemples de couples de surfaces en correspondance ponctuelle telle que l'un des systèmes d'asymptotiques de l'une corresponde à l'un des systèmes d'asymptotiques de l'autre, les tangentes à deux asymptotiques correspondantes en deux points homologues se coupant et formant un angle constant α, on peut recourir au tore dejà envisagé au n° 14.

Soient I_1, I_2 les points du tore situés sur l'axe de révolution et α l'angle sous lequel l'axe coupe la surface. Envisageons l'une quelconque (R') des deux familles d'asymptotiques du tore. Construisons, par le procédé indiqué au numéro précédent, l'une quelconque des surfaces S parallèles au tore suivant le réseau demi-asymptotique (R'). Si m est un point quelconque de l'une de ces surfaces et m' le point correspondant du tore, il suffit de mener, par m, les parallèles D_1 et D_2 à I_1m', I_2m', pour obtenir deux congruences paraboliques (D_1), (D_2) dont les nappes focales S_1 et S_2 sont dans la relation voulue. Les tangentes aux asymptotiques homologues de S_1 et S_2 en deux points homologues quelconques sont les droites D_1, D_2 et ces droites sont bien concourantes et forment l'angle constant α.

21. Je voudrais, pour terminer ce travail, signaler une propriété des surfaces de révolution se rattachant directement à la construction, indiquée au n° 3, des congruences de Ribaucour admettant pour réseau moyen un réseau orthogonal isotherme. Cette propriété met en relation une surface de révolution arbitraire avec l'hélicoïde minima réglé et peut être ainsi formulée :

Toute surface de révolution est représentable ponctuellement sur l'hélicoïde minima réglé avec orthogonalité des éléments linéaires.

On peut parvenir au résultat énoncé en cherchant les congruences *normales* de Ribaucour (G) déterminant sur la surface moyenne S un réseau orthogonal isotherme (R).

Supposons S rapportée au réseau (R), et soient u et v les paramètres fixant les deux familles de courbes du réseau. Soient m un point quelconque de S et m' son homologue sur la surface S' support du réseau (R') transformé de Christoffel de (R). Le rayon (D) d'une congruence (G), répondant à la question, issu du point m, est la parallèle, menée par m, à la droite Om' joignant m' à un certain point fixe O de l'espace.

La congruence (G) étant normale, ses plans focaux issus du rayon D sont rectangulaires, et comme ils doivent couper le plan tangent en m à S suivant les deux tangentes rectangulaires mU, mV aux courbes u (variable) et v du réseau (R), il faut que la droite D soit perpendiculaire à l'une au moins des deux tangentes mU, mV du réseau.

Supposons, par exemple, que D soit normale à mU. Alors Om' est normale à la courbe u du réseau (R'), qui, de ce fait, est tracée sur une sphère de centre O. Le réseau (R') transformé de Christoffel de (R) est donc tel que ses courbes u sont situées sur une famille de sphères concentriques (de centre O). Ces courbes étant lignes de courbure pour la surface S' support du réseau, S' est une surface moulure à directrice conique (de sommet O).

Si D est normale à la fois à mU et mV, S' devant avoir ses deux familles de lignes de courbure situées sur des sphères de centre O se réduit à une sphère de centre O. (R) est alors le réseau transformé de Christoffel d'un réseau orthogonal isotherme sphérique et son support S est une surface minima.

Une première famille de congruences normales de Ribaucour déterminant sur la surface moyenne un réseau orthogonal isotherme est donc constituée par les congruences des normales aux surfaces minima; cette solution particulière était évidente *a priori*.

Plaçons-nous dans le cas général où D n'est normale qu'à mU. S' est alors, comme nous l'avons vu, une surface moulure à directrice conique sur laquelle le réseau de courbure (u, v) est orthogonal isotherme (surface isothermique). Or il est bien connu que les seules surfaces moulures isothermiques sont les surfaces de révolution. S' est donc une surface de révolution (arbitraire) et

S est sa transformée de Christoffel, de révolution comme S′ et d'axe parallèle à celui de S′.

Les congruences (G) actuelles sont, comme l'on voit, les congruences des normales d'une surface de révolution arbitraire. Il était évident *a priori* que les congruences des normales aux surfaces de révolution fourniraient des solutions du problème puisque le réseau moyen d'une telle congruence est porté par une surface de révolution sur laquelle le réseau (u, v) est réseau de courbure (donc isotherme). Mais nous voyons en outre que ces congruences (avec les congruences des normales aux surfaces minima) constituent les seules solutions du problème envisagé.

Le résultat obtenu, assez banal en soi, peut prendre un certain intérêt si l'on a égard à la construction générale des congruences de Ribaucour à partir de leurs surfaces génératrices. D'une façon générale les plans focaux d'une congruence de Ribaucour sont perpendiculaires aux tangentes asymptotiques de la surface génératrice, laquelle correspond à la surface moyenne de la congruence avec orthogonalité des éléments linéaires, l'image sphérique des développables de la congruence étant celle des lignes asymptotiques de la génératrice. Si la congruence est normale, sa génératrice est une surface minima. Dans le cas qui nous occupe, où la congruence est la congruence des normales d'une surface de révolution, l'image sphérique des développables est formée par une famille de cercles parallèles et par les méridiens orthogonaux. Cette image étant aussi celle des asymptotiques de la surface génératrice, cette dernière est *quelle que soit* la congruence de révolution envisagée, l'*hélioïde minima réglé*.

Toute surface de révolution pouvant évidemment être regardée comme la développée moyenne d'une surface de révolution, ce qui précède nous montre que *toute surface de révolution d'axe* Δ *est susceptible d'une représentation avec orhogonalité des éléments linéaires sur un hélicoïde minima réglé d'axe* Δ.

Les formules permettant de passer, par une transformation par éléments linéaires orthogonaux, de l'hélicoïde minima réglé à une surface de révolution quelconque de même axe, sont faciles à obtenir

Négligeant une homothétie, donnons-nous l'hélicoïde minima $(\mathcal{H})$ par les équations

$$(19)\qquad \begin{cases} x = u\cos v, \\ y = u\sin v, \\ z = v. \end{cases}$$

Les paramètres directeurs de la normale au point (u, v) sont $(\sin v, -\cos v, u)$. Une congruence de normales à une surface de révolution autour de Oz, (G), pouvant, comme on l'a vu, être considérée comme une congruence de Ribaucour de surface génératrice $(\mathcal{H})$, il suffit pour obtenir une surface de révolution quelconque en correspondance par éléments linéaires orthogonaux avec $(\mathcal{H})$, de se donner (G), d'établir une correspondance par plans tangents et rayons orthogonaux entre $(\mathcal{H})$ et (G), et de faire correspondre à tout point de $(\mathcal{H})$ le point moyen du rayon correspondant de (G).

Définissons (G) en nous donnant l'une de ses surfaces orthogonales Σ, laquelle sera définie tangentiellement par une équation de la forme

$$\sin v X - \cos v Y + u Z - f(u) = 0,$$

f étant une fonction arbitraire de la seule variable u. Les coordonnées du point (u, v) de Σ sont

$$\begin{aligned} X &= -\sin v(uf' - f), \\ Y &= \cos v(uf' - f), \\ Z &= f'. \end{aligned}$$

La normale à Σ au point (u, v) est définie par les équations

$$\begin{aligned} X &= -\sin v(uf' - f) + \lambda \sin v, \\ Y &= \cos v(uf' - f) - \lambda \cos v, \\ Z &= f' + \lambda u. \end{aligned}$$

La valeur de λ correspondant au point moyen s'obtient sans difficulté et donne (une homothétie étant négligée) pour les coordonnées $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ de ce point les expressions

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \bar{x} &= [f - uf' - (1 + u^2)f''] \sin v, \\ \bar{y} &= -[f - uf' - (1 + u^2)f''] \cos v, \\ \bar{z} &= (2 + u^2)f' - uf - u(1 + u^2)f''. \end{aligned} \right.$$

Les équations (20), où f est une fonction arbitraire de u, définissent la surface de révolution la plus générale, mise en relation d'orthogonalité des éléments linéaires avec l'hélicoïde minima réglé défini par les équations (19). Les points correspondants sont ceux de mêmes coordonnées curvilignes (u, v).

22. Le résultat du numéro précédent explique géométriquement la possibilité de résoudre complètement, pour l'hélicoïde minima réglé, le problème de la déformation infiniment petite.

Le problème général de la déformation infiniment petite d'une surface a été ramené, par Weingarten et Darboux, à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaire du second ordre (équation *caractéristique*), et sa solution dépend linéairement de deux fonctions arbitraires d'une variable. Pour l'hélicoïde minima réglé rapporté à ses asymptotiques, l'équation caractéristique est une équation de Laplace admettant un invariant nul, d'où la possibilité indiquée.

Dans certains cas cette possibilité peut être mise en évidence par deux circonstances géométriques, assurant chacune l'existence d'une solution particulière du problème dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable;

la solution générale résulte alors de la superposition des deux solutions particulières. C'est ce qui arrive en particulier pour les quadriques (surfaces doublement réglées).

D'une façon générale, toute surface réglée admet une infinité de déformations finies (donc aussi infiniment petites) laissant les génératrices *rectilignes* et dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable. Pour l'hélicoïde minima réglé, on a donc une première solution du problème de la déformation infiniment petite dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable, due à l'existence des génératrices rectilignes. Une deuxième solution du même problème, distincte de la précédente et dépendant aussi d'une fonction arbitraire d'une variable, est fournie par les déformations infiniment petites attachées aux représentations avec orthogonalité des éléments linéaires de l'hélicoïde minima réglé sur les différentes surfaces de révolution admettant pour axe l'axe de l'hélicoïde. La superposition de ces deux solutions particulières fournit la solution complète du problème.

Il convient d'observer que la correspondance par éléments linéaires orthogonaux entre l'hélicoïde minima réglé (19) et la surface de révolution (20) permet de construire une infinité de congruences W dont l'une des deux nappes focales est une surface de révolution (arbitraire).

On sait que l'on obtient la congruence W la plus générale admettant pour première nappe focale une surface S quelconque, en envisageant une déformation infiniment petite quelconque de S et en menant, par chaque point de S, dans le plan tangent, la perpendiculaire à la direction du déplacement infiniment petit du point dans la déformation infinitésimale considérée. Cela étant, envisageons pour une surface de révolution quelconque (R) définie par les formules (20), la déformation infiniment petite fournie par la correspondance par orthogonalité des éléments entre (R) et l'hélicoïde minima réglé ($\mathcal{H}$) défini par les équations (19). La direction du déplacement infiniment petit d'un point quelconque $M(u, v)$ de (R) dans cette déformation a pour paramètres directeurs les coordonnées du point (u, v) de ($\mathcal{H}$)$[u\cos v, u\sin v, v]$. D'autre part, si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned} A &= f - uf' - (1+u^2)f'', \\ B &= (2+u^2)f' - uf - u(1+u^2)f'', \end{aligned}\right. \tag{21}$$

la direction de la normale au plan tangent en M à (R) a pour paramètres directeurs

$$-B'\sin v, \quad B'\cos v, \quad A'.$$

Le rayon de la congruence W issu du point M de (R) étant perpendiculaire aux deux directions précédentes, ses paramètres directeurs sont

$$\begin{gathered} B'v\cos v - A'u\sin v, \\ B'v\sin v + A'u\cos v, \\ -B'u. \end{gathered}$$

Les équations de la congruence W sont donc

$$\begin{aligned} x &= \quad \mathrm{A} \sin v + \lambda(\mathrm{B}' v \cos v - \mathrm{A}' u \sin v), \\ y &= -\mathrm{A} \cos v + \lambda(\mathrm{B}' v \sin v + \mathrm{A}' u \cos v), \\ z &= \quad \mathrm{B} - \lambda \mathrm{B}' u, \end{aligned}$$

λ étant le paramètre fixant les différents points (x, y, z) d'un rayon quelconque (u, v). A et B ayant les expressions (21) où f est une fonction arbitraire de u, et A′, B′ désignant les dérivées de A, B par rapport à u.

Si l'on fait subir à l'hélicoïde $(\mathcal{H})$ une translation h de direction quelconque δ, on ne modifie pas la relation d'orthogonalité entre $(\mathcal{H})$ et (R). Chaque valeur de h donne une congruence W admettant pour première nappe focale la surface de révolution (R). On obtient ainsi, pour chaque direction δ, ∞^1 congruences W dont les faisceaux de rayons homologues (relatifs aux différents points de R) sont évidemment homographiques.

Il est bien connu d'ailleurs que, d'une façon générale, toute congruence W, admettant pour première nappe focale une surface S, fait partie d'une infinité de familles de ∞^1 congruences W admettant la même première nappe focale, les faisceaux de rayons homologues d'une même famille situés dans les différents plans tangents à S étant homographiques.

Dans le cas actuel, la famille des ∞^1 congruences W obtenues en déplaçant $(\mathcal{H})$ parallèlement à Oz, est définie par les équations

$$\begin{aligned} x &= \quad \mathrm{A} \sin v + \lambda[\mathrm{B}'(v + h) \cos v - \mathrm{A}' u \sin v], \\ y &= -\mathrm{A} \cos v + \lambda[\mathrm{B}'(v + h) \sin v + \mathrm{A}' u \cos v], \\ z &= \quad \mathrm{B} - \lambda \mathrm{B}' u, \end{aligned}$$

où h est une constante arbitraire.