ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ANDRÉ LICHNEROWICZ

Sur les équations relativistes de l'électromagnétisme

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 60 (1943), p. 247-288
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1943_3_60__247_0>

SUR

LES ÉQUATIONS RELATIVISTES

DE

L'ÉLECTROMAGNÉTISME

PAR M. ANDRÉ LICHNEROWICZ.

INTRODUCTION.

Dans des travaux antérieurs [1] consacrés à la théorie mathématique des équations de la gravitation relativiste, j'ai montré comment l'on peut étendre aux espaces-temps gravitationnels, extérieurs ou associés à une distribution matérielle, les principaux résultats de la théorie du potentiel et de l'hydrodynamique classique. C'est en me plaçant à un point de vue tout à fait analogue que j'envisage dans le présent travail, la théorie mathématique des équations relativistes de l'électromagnétisme et leur intégration.

Les équations que j'adopte ici sont les équations « naïves » de l'électrodynamique einsteinienne et non celles résultant de telle ou telle théorie unitaire dont l'intérêt apparaît, dans l'état actuel des choses, comme assez douteux. En particulier, l'identification, à un scalaire multiplicatif près du potentiel-vecteur et du vecteur-courant, à laquelle on est naturellement conduit par la théorie de Weyl-Eddington, semble entraîner des difficultés telles qu'elles ont fait abandonner la théorie. Ce sont donc les équations relativistes de l'électromagnétisme telles qu'elles résultent du tenseur d'énergie bien connu que j'étudie ici. Les difficultés relatives à l'addition pure et simple de l'énergie d'origine matérielle et de l'énergie d'origine électromagnétique semblent disparaître si on l'envisage comme une décomposition purement géométrique d'un tenseur symétrique donné.

(1) LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en Mécanique relativiste* (*Actual. Scient. Ind.*, Hermann, 1939, n° 833); *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste* (*Ann. École Normale Supérieure*, 1941, fasc. IV); *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps* (sous presse au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*).

La première partie de ce travail est consacrée précisément à l'esquisse d'une telle définition purement géométrique des processus matériels et électromagnétiques à partir du tenseur d'énergie. Les principaux schémas comportant un champ électromagnétique, schéma purement électromagnétique, schémas matière-champ électromagnétique et fluide parfait — champ électromagnétique, sont étudiés en détail. Dans les seconde et troisième parties, je rappelle les équations microscopiques rigoureuses de l'électrodynamique einsteinienne, et je forme les conditions de conservation correspondantes dont le rôle est essentiel pour le problème de l'intégration de ces équations.

La quatrième partie contient une étude du schéma purement électromagnétique et principalement celle de l'*intégration des équations d'Einstein-Maxwell* dans le cas analytique. On y trouvera aussi un théorème qui lie la possibilité d'introduire dans un domaine une distribution purement électromagnétique à la présence dans ce domaine de singularités du champ de gravitation extérieur. Dans la cinquième partie j'introduis l'équation de transfert de l'électricité de Lorentz et j'étudie le *problème de Cauchy* pour les équations de l'électromagnétisme liées à une distribution mixte, matérielle et électromagnétique, ainsi que les singularités du champ électromagnétique engendré par une telle distribution.

On trouvera dans la sixième partie l'extension aux schémas considérés de ma théorie de l'hydrodynamique relativiste : les équations du mouvement admettent *un invariant intégral linéaire* simple, d'où l'on déduit aisément une théorie des tourbillons, des mouvements irrotationnels et des applications aux mouvements permanents. Le Mémoire se termine par l'étude du mouvement de l'électron, compte tenu des tensions mécaniques qui s'exercent sur lui, et par quelques remarques sur les équations macroscopiques.

Les notations sont celles du calcul différentiel absolu classique. En particulier, on a posé

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \partial_\alpha.$$

I. — Les processus matériels et le tenseur d'énergie.

1. *Le tenseur d'énergie et les directions principales de l'espace-temps.* — Considérons un domaine d'espace-temps traversé par une forme quelconque d'énergie. A l'intérieur de ce domaine, la métrique de l'espace-temps :

$$(1.1)\qquad ds^2 = g_{\alpha\beta}\,dx^\alpha\,dx^\beta \qquad (\alpha,\ \beta \text{ et tout indice grec} = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

satisfait aux équations d'Einstein du cas intérieur

$$(1.2)\qquad S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta},$$

où

$$(1.3)\qquad S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$$

est un tenseur symétrique de signification purement géométrique, χ une constante et où $T_{\alpha\beta}$ représente un tenseur symétrique de signification purement mécanique, descriptif de l'énergie considérée. On donne au tenseur $T_{\alpha\beta}$ le nom de *tenseur d'énergie*.

On appelle *directions principales* d'un espace de Riemann en un point déterminé, les directions conjuguées communes au cône isotrope en ce point :

$$g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = 0, \tag{1.4}$$

et au cône de Ricci

$$R_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = 0.$$

Il résulte de (1.2) et de (1.3) que, pour un espace-temps intérieur, les directions principales sont conjuguées communes au cône de lumière (1.4) et au cône

$$T_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = 0, \tag{1.5}$$

associé au tenseur d'énergie. Pour abréger nous désignerons par $T(\vec{X})$ la forme quadratique qui figure au premier membre de (1.5), par $g(\vec{X})$ celle qui figure au premier membre de (1.4).

2. *Détermination du repère principal.* — La détermination des directions principales de l'espace-temps se trouve donc ramenée à celle des vecteurs propres de la matrice $(T_{\alpha\beta})$ relativement à la matrice $(g_{\alpha\beta})$. Les valeurs propres de cette matrice relativement à $(g_{\alpha\beta})$ sont les racines de l'équation en s

$$|T_{\alpha\beta} - s g_{\alpha\beta}| = 0. \tag{2.1}$$

Nous supposerons essentiellement que le tenseur $T_{\alpha\beta}$ *est tel que ses quatre valeurs propres soient réelles. Il en est en particulier ainsi si la forme quadratique* $T(\vec{X})$ *est définie positive.*

A chaque valeur propre s_λ de $(T_{\alpha\beta})$, correspond un vecteur propre $\vec{V}^{(\lambda)}$ satisfaisant à l'équation

$$(T_{\alpha\beta} - s g_{\alpha\beta}) V^{(\lambda)\alpha} = 0, \tag{2.2}$$

pour $s = s_\lambda$ et que nous normerons à l'aide de la condition

$$g_{\alpha\beta} V^{(\lambda)\alpha} V^{(\lambda)\beta} = \pm 1.$$

Nous obtenons ainsi quatre vecteurs propres normés, orthogonaux deux à deux; trois d'entre eux $\vec{V}^{(1)}$, $\vec{V}^{(2)}$, $\vec{V}^{(3)}$ sont orientés dans l'espace et le quatrième $\vec{V}^{(4)}$ est orienté dans le temps. Ces quatre vecteurs forment un repère tétrarectangle, que nous appellerons le *repère principal* de l'espace-temps au point considéré. Dans le cas où l'une des valeurs propres est double, il peut exister pour le repère principal une certaine indétermination.

Supposons l'espace-temps rapporté au point considéré à son repère principal et désignons par $\vec{X}^{\alpha'}$ les composantes du vecteur $\vec{X}$ par rapport à ce repère. Les vecteurs du repère principal étant normés et orthogonaux deux à deux

$$g(\vec{X}) = (X^{4'})^2 - (X^{1'})^2 - (X^{2'})^2 - (X^{3'})^2. \tag{2.3}$$

En vertu des équations (2.2), on a alors

$$T(\vec{X}) = s_4(X^{4'})^2 - s_1(X^{1'})^2 - s_2(X^{2'})^2 - s_3(X^{3'})^2. \tag{2.4}$$

De cette relation, nous allons déduire une expression du tenseur d'énergie à partir de ses valeurs propres et des vecteurs $\vec{V}^{(\lambda)}$ correspondants.

3. *Expressions de $g_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$ à partir des $\vec{V}^{(\lambda)}$.* — Dans ce qui suit, nous aurons besoin de la convention suivante : si deux indices ne différant que par la présence du signe $'$ figurent dans une même formule, ils ont nécessairement la même valeur numérique.

Supposons l'espace-temps rapporté au point considéré à un repère quelconque. On passe des composantes $X_{\lambda'} = - X^{\lambda'}$ du vecteur $\vec{X}$ à ses composantes covariantes générales X_α par les formules

$$X_\alpha = A_\alpha^{\lambda'} X_{\lambda'}.$$

Pour les vecteurs $\vec{V}^{(\lambda)}$, on obtient en particulier

$$\left\{\begin{aligned} V_\alpha^{(i)} &= -A_\alpha^{i'} \\ V_\alpha^{(4)} &= A_\alpha^{4'} \end{aligned}\right. \qquad (i \text{ et tout indice latin} = 1, 2, 3). \tag{3.1}$$

Introduisons les symboles suivants :

$$\delta_{\alpha\beta} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ -1 & \text{si } \alpha = \beta = i, \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta = 4; \end{array}\right. \qquad s_{\alpha\beta} = \left\{\begin{array}{ll} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ -s_i & \text{si } \alpha = \beta = i, \\ s_4 & \text{si } \alpha = \beta = 4. \end{array}\right.$$

Des formules de transformation

$$g_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\lambda'} A_\beta^{\mu'} \delta_{\lambda'\mu'},$$
$$T_{\alpha\beta} = A_\alpha^{\lambda'} A_\beta^{\mu'} s_{\lambda'\mu'};$$

et des équations (3.1) on déduit les expressions suivantes de $g_{\alpha\beta}$ et $T_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{4} \delta_{\lambda\mu} V_\alpha^{(\lambda)} V_\beta^{(\mu)} = V_\alpha^{(4)} V_\beta^{(4)} - V_\alpha^{(1)} V_\beta^{(1)} - V_\alpha^{(2)} V_\beta^{(2)} - V_\alpha^{(3)} V_\beta^{(3)}, \tag{3.2}$$

$$T_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda,\mu=1}^{4} s_{\lambda\mu} V_\alpha^{(\lambda)} V_\beta^{(\mu)} = s_4 V_\alpha^{(4)} V_\beta^{(4)} - s_1 V_\alpha^{(1)} V_\beta^{(1)} - s_2 V_\alpha^{(2)} V_\beta^{(2)} - s_3 V_\alpha^{(3)} V_\beta^{(3)} \tag{3.3}$$

valables par rapport à un repère quelconque.

4. *Schéma normal et schéma exceptionnel.* — Étant donné, dans un domaine d'espace-temps, un champ de tenseurs symétriques $T_{\alpha\beta}$, nous dirons que ce champ définit, dans le domaine, un schéma matériel. Nous dirons que le schéma est *normal* si la forme quadratique $T(\vec{X})$ associée à $T_{\alpha\beta}$ est partout définie positive. Dans le cas contraire, le schéma sera dit *exceptionnel*.

5. *Le schéma normal le plus général ou schéma-fluide quelconque.* — Considérons un tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ correspondant à un schéma normal. La forme quadratique $T(\vec{X})$ étant définie positive, la matrice $(T_{\alpha\beta})$ a ses quatre valeurs propres réelles. De plus, en vertu de (2.4), trois d'entre elles s_1, s_2, s_3 sont négatives et la quatrième s_4 est positive.

Nous appellerons désormais *vecteur-vitesse unitaire* du schéma matériel considéré, le vecteur propre normé orienté dans le temps de la matrice $(T_{\alpha\beta})$. Nous posons

$$u_\alpha = V_\alpha^{(4)},$$
$$\rho = s_4, \qquad p_{(i)} = -s_i,$$

où ρ et $p_{(i)}$ désignent ainsi des scalaires positifs. Avec ces notations, les formules (3.2) et (3.3) prennent la forme

$$g_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta - \sum_{i=1}^{3} V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)} \tag{5.1}$$

et

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + \sum_{i=1}^{3} p_{(i)} V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)}. \tag{5.2}$$

Ainsi, dans le cas du schéma normal le plus général, le tenseur d'énergie peut être mis sous la forme (5.2). Nous dirons que cette forme correspond au schéma-fluide quelconque. Le scalaire positif ρ sera dit la *densité d'énergie propre* du fluide et les scalaires positifs $p_{(i)}$ ses *pressions partielles propres*; les trois directions principales orientées dans l'espace et les pressions $p_{(i)}$ correspondantes définissent, au point considéré du fluide, la quadrique des pressions. Nous énoncerons :

Théorème. — *Tout schéma normal peut toujours être interprété comme un schéma-fluide quelconque.*

6. *Le schéma exceptionnel « champ électromagnétique pur ».* — Considérons un tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ défini par la formule

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}(F_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}) - g^{\lambda\mu}F_{\lambda\alpha}F_{\mu\beta}, \tag{6-1}$$

où $F_{\lambda\mu}$ désigne un tenseur antisymétrique. Nous dirons que la forme (6.1) du tenseur $T_{\alpha\beta}$ correspond au *schéma « champ électromagnétique pur »* et que le tenseur $F_{\lambda\mu}$ est le tenseur champ électromagnétique. Il résulte d'une étude due à Synge ([1]) que pour qu'un tenseur d'énergie corresponde au schéma champ électromagnétique, il faut et il suffit que la matrice $(T_{\alpha\beta})$ admette quatre valeurs propres réelles deux à deux égales ou opposées, définies par

$$s_1 = s_2 = -K, \qquad s_2 = s_4 = K.$$

Le schéma ainsi défini est donc un schéma exceptionnel.

7. *Le schéma exceptionnel « matière pure ».* — Nous dirons qn'un schéma matériel est un *schéma « matière pure »* si, pour le tenseur d'énergie correspondant, la matrice $(T_{\alpha\beta})$ admet les valeurs propres réelles

$$s_i = 0, \qquad s_4 = \rho > 0.$$

Ce schéma est évidemment exceptionnel et l'espace-temps correspondant n'admet qu'une seule direction principale privilégiée orientée dans le temps. Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ prend la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta. \tag{7-1}$$

8. *Le schéma exceptionnel « matière-champ électromagnétique ».* — Nous dirons qu'un schéma matériel est un *schéma « matière champ électromagnétique »*, si, pour le tenseur d'énergie correspondant, la matrice $(T_{\alpha\beta})$ admet les valeurs propres réelles

$$s_1 - s_2 = -s_3 = -K, \qquad s_4 = \rho > 0.$$

Ce schéma est encore exceptionnel et l'espace-temps correspondant admet deux directions principales privilégiées, une orientée dans l'espace et une dans le temps. Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ prend la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + K[-V_\alpha^{(1)}V_\beta^{(1)} - V_\alpha^{(2)}V_\beta^{(2)} + V_\alpha^{(3)}V_\beta^{(3)}],$$

soit

$$T_{\alpha\beta} = \rho^\star u_\alpha u_\beta + \tau_{\alpha\beta}, \tag{8.1}$$

où $\rho^\star = \rho - K$ et où $\tau_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'énergie d'un schéma champ électromagnétique.

9. *Le schéma fluide parfait.* — Nous dirons qu'un schéma matériel est un *schéma fluide parfait* (où parfaitement parfait selon la dénomination de van Dantzig), s'il est normal et admet une valeur propre triple. Les pressions partielles propres sont alors égales

$$p_1 = p_2 = p_3 = p.$$

([1]) SYNGE, *Proc. London Math. Soc.*, 2e série, 43, 1937, pp. 385-386.

et, de la formule (5.2) il vient,

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + p \sum_{i=1}^{3} V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)}.$$

En exprimant $\Sigma V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)}$ à l'aide de (5.1), on peut mettre le tenseur $T_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$(9.1) \qquad T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}.$$

Comme dans le schéma matière pure, l'espace-temps correspondant n'admet qu'une direction principale privilégiée orientée dans le temps.

10. *Le schéma fluide parfait-champ électromagnétique* [1]. — Considérons un schéma matériel normal admettant une valeur propre double. Les pressions partielles propres sont alors

$$p_1 = p_2 = p, \qquad p_3 = p'$$

et, de la formule (5.2), on déduit

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta + p \sum_{i=1}^{2} V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)} + p' V_\alpha^{(3)} V_\beta^{(3)}.$$

Nous poserons

$$\rho^* = \rho - K.$$

En introduisant un scalaire encore indéterminé p^*, on peut mettre le teuseur $T_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$T_{\alpha\beta} = (\rho^* + p^*) u_\alpha u_\beta - p^* g_{\alpha\beta} + K u_\alpha u_\beta + (p - p^*) \sum_{i=1}^{2} V_\alpha^{(i)} V_\beta^{(i)} + (p' - p) V_\alpha^{(3)} V_\beta^{(3)}.$$

L'ensemble des deux premiers termes figurant au second membre constitue le tenseur d'énergie d'un fluide parfait. L'ensemble des autres termes constituera le tenseur d'énergie d'un champ électromagnétique si l'on peut choisir p^* de façon que

$$p - p^* = -p' - p^* = K.$$

Nous dirons alors que le *schéma est un schéma fluide parfait-champ électromagnétique*.

Nous poserons donc

$$(10.2) \qquad p^* = \frac{p + p'}{2}, \qquad K = \frac{p - p'}{2},$$

et le tenseur $T_{\alpha\beta}$ considéré prend la forme

$$(10.3) \qquad T_{\alpha\beta} = (\rho^* + p^*) u_\alpha u_\beta - p^* g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta},$$

---

[1] *Cf.* LICHNEROWICZ, *Comptes rendus*, 212, 1941, p. 421.

où $\tau_{\alpha\beta}$ est le tenseur d'énergie d'un schéma champ électromagnétique. L'espace-temps correspondant à ce tenseur admet deux directions principales privilégiées, une dans le temps et une dans l'espace.

11. *Remarques sur les schémas normaux et exceptionnels.* — Si, abandonnant momentanément le point de vue exclusivement géométrique adopté jusqu'ici, nous nous plaçons à un point de vue physique, nous pouvons dire que le tenseur $T_{\alpha\beta}$ est destiné à assurer une représentation, aussi complète que possible, du milieu en mouvement considéré. Ce tenseur contiendra différents termes correspondant aux différentes sortes d'énergie que peut admettre celui-ci; le terme le plus important expérimentalement est toujours celui qui correspond à l'énergie pondérable qui l'emporte de beaucoup en particulier sur l'énergie provenant des forces de pression. Si l'on tient compte de ces deux sortes d'énergie le schéma matériel correspondant est un schéma normal. Mais, dans ce schéma, la densité d'énergie propre doit être considérée comme grande par rapport aux pressions partielles propres.

Il est alors aisé d'interpréter les schémas exceptionnels que nous avons mis en évidence. Le schéma champ électromagnétique correspond à l'absence de toute énergie pondérable, ce qui explique son caractère exceptionnel. Les schémas matière pure et matière pure-champ électromagnétique correspondent au cas où l'on néglige totalement l'énergie provenant des pressions. Ces schémas correspondent par suite à une schématisation assez grossière de la matière en mouvement et l'on doit leur préférer, dans la mesure du possible, les schémas normaux tels que le schéma fluide parfait complété ou non par un champ électromagnétique.

A ce sujet, il importe de noter que, *si dans* (10.3) *on fait tendre p^* vers zéro*, il résulte de (10.2) que p et p' et par suite K tendent vers zéro. *Ainsi le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ tend vers le tenseur identiquement nul. L'existence du champ électromagnétique apparaît dans ce cas comme automatiquement liée à l'existence de tensions mécaniques équilibrant les tensions d'origine électrique*, ce qui corrobore des résultats bien connus de la théorie classique des électrons [1].

II. — Les équations relativistes de l'électromagnétisme.

12. *Analogie avec la théorie des électrons de Lorentz.* — Adoptant un point de vue analogue à celui de Lorentz dans sa théorie classique des électrons, nous indiquerons en premier lieu les équations qui apparaissent, dans la théorie de la relativité générale, comme les équations rigoureuses de l'électromagnétisme. L'élément essentiel qui entre dans ces équations, le tenseur antisymétrique

[1] *Cf.* BECKER, *Théorie des électrons*, trad. Labin, Paris, 1938, p. 386.

champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$, varie énormément dans l'espace-temps au sein des particules élémentaires ou dans leur voisinage. Les grandeurs macroscopiques correspondantes qui varient relativement peu dans tout le domaine d'espace-temps balayé par des portions finies de matière et qui se déduisent des grandeurs microscopiques par la formation de moyenne dans l'espace-temps, seront étudiées en détail dans une partie ultérieure de ce travail.

13. *Les équations d'Einstein.* — Soit $T_{\alpha\beta}$ un tenseur d'énergie définissant un schéma comportant un champ électromagnétique (schémas des paragraphes 6, 8, 10 par exemple). D'après les considérations rappelées au paragraphe 1, le champ électromagnétique et la métrique de l'espace-temps gravitationnel correspondant sont liés par les équations d'Einstein du cas intérieur

$$S_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta}. \tag{13.1}$$

où $S_{\alpha\beta}$ est le tenseur géométrique défini par les équations (1.3).

14. *Les équations de Maxwell-Lorentz.* — Le champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ est astreint en outre à satisfaire à deux systèmes d'équations différentielles, les équations de Maxwell-Lorentz. Désignons par ∇_α l'opérateur de dérivation covariante dans l'espace de Riemann (1.1). Nous imposons tout d'abord aux $F_{\alpha\beta}$ les quatre conditions

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta, \tag{14.1}$$

où le vecteur J^β décrit le courant d'électricité dans l'espace-temps. Ce vecteur qui figure au second membre des équations (14.1) joue pour ces équations le même rôle que le tenseur d'énergie au second membre des équations d'Einstein. Nous reviendrons ultérieurement sur l'expression de J^β auquel on donne le nom de *vecteur-courant électrique*.

Désignons maintenant par $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}$ l'indicateur classique de permutation des quatre indices α, β, γ, λ. Le second système des équations de Maxwell-Lorentz sera formé par l'ensemble des quatre équations

$$\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} = 0, \tag{14.2}$$

qui expriment, comme nous le verrons, la non-existence d'une densité de masse magnétique. Les équations (13.1), (14.1), (14.2) constituent les équations relativistes « rigoureuses » de l'électromagnétisme.

15. *Autre forme des équations de Maxwell* (14.2). *Le potentiel vecteur.* — En explicitant $\nabla_\alpha F_{\beta\gamma}$, on peut mettre les équations (14.2) sous une forme souvent commode et qui permet de les interpréter d'une manière simple. On a

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} = \partial_\alpha F_{\beta\gamma} - \Gamma^\rho_{\alpha\beta} F_{\rho\gamma} - \Gamma^\rho_{\alpha\gamma} F_{\beta\rho}.$$

Or un calcul facile montre que

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}[\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}F_{\rho\gamma}+\Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma}F_{\beta\rho}]=0.$$

Par suite les équations (14.2) peuvent être mises sous la forme équivalente

(15.1) $$\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\partial_{\alpha}F_{\beta\gamma}=0.$$

Il résulte immédiatement des équations (15.1) qu'il existe un vecteur φ_{α} tel que le tenseur antisymétrique $F_{\alpha\beta}$ soit son rotationnel

(15.2) $$F_{\alpha\beta}=\partial_{\alpha}\varphi_{\beta}-\partial_{\beta}\varphi_{\alpha}.$$

Le vecteur φ_{α} est le *potentiel vecteur* d'où dérive le champ électromagnétique considéré.

Ce vecteur n'est manifestement défini qu'à un gradient additif près, de telle sorte qu'on peut encore l'astreindre à la condition supplémentaire

(15.3) $$\nabla_{\alpha}\varphi^{\alpha}=0.$$

III. — Les conditions de conservation.

16. *Condition de conservation relative aux équations de Maxwell-Lorentz* (14.1). — Désignons par D^{λ} le vecteur figurant au premier membre des équations de Maxwell (14.1)

$$D^{\lambda}=\nabla_{\alpha}F^{\alpha\lambda},$$

et évaluons sa divergence

(16.1) $$\nabla_{\lambda}D^{\lambda}=\nabla_{\lambda\alpha}F^{\alpha\lambda}.$$

Il résulte d'un théorème classique de la géométrie des espaces de Riemann que l'on a

$$\nabla_{\lambda\alpha}F^{\alpha\lambda}=\nabla_{\alpha\lambda}F^{\alpha\lambda}.$$

On en déduit par échange des indices α et λ

$$\nabla_{\lambda}D^{\lambda}=\nabla_{\lambda\alpha}F^{\lambda\alpha}=-\nabla_{\lambda\alpha}F^{\alpha\lambda},$$

soit, par comparaison avec l'équation (16.1),

(16.2) $$\nabla_{\lambda}D^{\lambda}=0.$$

Le vecteur D^{λ} est donc conservatif. Il en résulte qu'il en est nécessairement de même pour le vecteur-courant électrique qui figure au second membre des équations (14.1)

(16.3) $$\nabla_{\lambda}J^{\lambda}=0.$$

et nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Le vecteur-courant électrique J^λ est conservatif.*

Ce théorème traduit dans notre théorie la conservation de l'électricité.

17. *Condition de conservation relative aux équations de Maxwell-Lorentz* (15.1). — Désignons par E^λ la densité vectorielle figurant au premier membre des équations (15.1)

$$E^\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\partial_\alpha F_{\beta\gamma},$$

et évaluons sa pseudo-divergence $\partial_\lambda E^\lambda$. Il vient

(17.1) $$\partial_\lambda E^\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\partial_{\lambda\alpha}F_{\beta\gamma},$$

soit en échangeant les indices α et λ

$$\partial_\lambda E^\lambda = \frac{1}{2}\varepsilon^{\lambda\beta\gamma\alpha}\partial_{\alpha\lambda}F_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}\partial_{\lambda\alpha}F_{\beta\gamma}.$$

En comparant avec l'équation (17.1) on obtient la condition de conservation

(17.2) $$\partial_\lambda E^\lambda = 0,$$

qui joue un rôle important dans la théorie des équations de Maxwell-Lorentz.

18. *Les conditions de conservation relatives aux équations d'Einstein.* — Il résulte des identités de Bianchi que le tenseur géométrique $S_{\alpha\beta}$ satisfait aux quatre conditions de conservation

$$\nabla_\alpha S^\alpha_\beta = 0.$$

Il en est par suite de même pour le tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ qui vérifie les équations

(18.1) $$\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = 0.$$

Nous adopterons pour le tenseur $T_{\alpha\beta}$ la forme

$$T_{\alpha\beta} = r u_\alpha u_\beta - \theta_{\alpha\beta},$$

où u_α désigne le vecteur-vitesse unitaire, r un scalaire positif et $\theta_{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique quelconque. Le vecteur u_α étant unitaire, il vient

(18.2) $$u^\alpha u_\alpha = 1\,! \qquad u^\alpha \nabla_\beta u_\alpha = 0.$$

Avec les notations précédentes, les équations de conservation (18.1) peuvent s'écrire

$$\nabla_\alpha(r u^\alpha u_\beta) = \nabla_\alpha \theta^\alpha_\beta.$$

Introduisons au lieu du tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ le vecteur K_β défini par les équations

$$\nabla_\alpha \theta^\alpha_\beta = r K_\beta.$$

En tenant compte des équations (18.2) dans les conditions de conservation, on obtient les équations fondamentales

$$(18.3) \qquad \nabla_\alpha(r u^\alpha) = r K_\alpha u^\alpha,$$

$$(18.4) \qquad u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) K_\alpha;$$

(18.3) joue, comme nous le verrons, le rôle d'une équation de continuité; les lignes de courant, lignes tangentes en chacun de leurs points au vecteur-vitesse u^α, seront déterminées par les équations différentielles (18.4).

Dans un travail précédent [1], j'ai introduit la notion de *milieu holonome* : un tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ définit un milieu holonome lorsque le tenseur $\theta_{\alpha\beta}$ peut être choisi de façon que le vecteur K_α ne dépende que des x^α et dérive d'un potentiel. Examinons ce cas particulier et soit $\log F$ ce potentiel. Les équations (18.4) prennent la forme

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = (g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) \frac{\partial_\alpha F}{F}$$

et peuvent être interprétées de la manière suivante : les lignes de courant sont des géodésiques de la métrique riemannienne

$$\overline{ds}^2 = F^2 ds^2.$$

Pour un tel milieu, l'équation (18.3) peut s'écrire

$$(18.5) \qquad \nabla_\alpha u^\alpha + u^\alpha \left(\frac{\partial_\alpha r}{r} - \frac{\partial_\alpha F}{F} \right) = 0.$$

Lorsque la congruence des lignes de courant est d'expansion nulle, le milieu holonome considéré est dit incompressible. Dans ce cas

$$\nabla_\alpha u^\alpha = 0,$$

et en vertu de (18.5), $\frac{r}{F}$ demeure constant tout le long d'une ligne de courant.

19. *Le vecteur K_α pour un tenseur d'énergie électromagnétique.* — Désignons par

$$(19.1) \qquad \tau^\alpha_\beta = \frac{1}{4} g^\alpha_\beta F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F^{\alpha\lambda} F_{\beta\lambda}$$

---

(1) LICHNEROWICZ, *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste* (*Annales de l'École Normale*, 1941, t. 58, fasc. IV).

le tenseur d'énergie associé au champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ et cherchons à évaluer le vecteur correspondant

$$r K_\beta = \nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta.$$

Il vient immédiatement

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta = \frac{1}{2} F^{\lambda\mu} \nabla_\beta F_{\lambda\mu} - F^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha F_{\beta\lambda} - F_{\beta\lambda} \nabla_\alpha F^{\alpha\lambda}.$$

Or en échangeant les noms des indices α et λ et tenant compte de l'antisymétrie du tenseur $F_{\alpha\beta}$, on obtient

$$F^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha F_{\beta\lambda} = \frac{1}{2} F^{\alpha\lambda} [\nabla_\alpha F_{\beta\lambda} + \nabla_\lambda F_{\alpha\beta}],$$

Il résulte par suite des équations de Maxwell (14.2) que l'on a

$$F^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha F_{\beta\lambda} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\lambda} \nabla_\beta F_{\lambda\alpha} = \frac{1}{2} F^{\lambda\mu} \nabla_\beta F_{\lambda\mu}.$$

On en déduit

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta = - F_{\beta\lambda} \nabla_\alpha F^{\alpha\lambda},$$

c'est-à-dire d'après l'expression de $\nabla_\alpha F^{\alpha\lambda}$ fournie par les équations de Maxwell (14.1)

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha_\beta = - F_{\beta\alpha} J^\lambda. \tag{19.2}$$

Nous allons appliquer la formule (19.2) à la formation explicite des conditions de conservation (18.3), (18.4) qui correspondent à des schémas comportant un champ électromagnétique.

20. *Les conditions de conservation pour le schéma champ électromagnétique pur.* — Nous dirons qu'un champ électromagnétique $F_{\alpha\beta}$ est *normal*, si la densité scalaire associée

$$d = \frac{1}{4} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} \tag{20.1}$$

est différente de zéro. Considérons le schéma champ électromagnétique pur associé à un champ électromagnétique normal. Si τ^α_β désigne le tenseur défini par l'équation (19.1), on a pour un tel schéma

$$T^\alpha_\beta = \tau^\alpha_\beta,$$

d'où, en vertu de l'équation (19.2),

$$\nabla_\alpha T^\alpha_\beta = - F_{\beta\alpha} J^\alpha = 0. \tag{20.2}$$

Or un calcul aisé fournit, pour le déterminant $D(F_{\alpha\beta})$ des composantes $F_{\alpha\beta}$ du champ électromagnétique, l'expression simple

$$D(F_{\alpha\beta}) = \frac{1}{4} d^2 \neq 0.$$

Le système (19.2), qui se présente comme un système de quatre équations linéaires homogènes aux inconnues J^α, n'admet par suite que la solution nulle. Il vient ainsi

$$J^\alpha = 0.$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Pour tout schéma champ électromagnétique pur, le vecteur courant électrique est nul.*

21. *Les conditions de conservation pour le schéma matière-champ électromagnétique.* — Considérons un schéma matière-champ électromatique; son tenseur d'énergie peut, d'après l'équation (8.1), être mis sous la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho^\star u_\alpha u_\beta + \tau_{\alpha\beta},$$

où le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ est défini par l'équation (19.1). A ce schéma correspond le vecteur K_β donné par la formule

$$\rho^\star K_\beta = -F_{\alpha\beta} J^\alpha. \tag{21.1}$$

Par suite les conditions de conservation (18.3) et (18.4) prennent, dans ce cas, respectivement la forme

$$\nabla_\alpha(\rho^\star u^\alpha) = -F_{\alpha\beta} J^\alpha u^\beta, \tag{21.2}$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = -\frac{1}{\rho^\star}(g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta) F_{\lambda\alpha} J^\lambda. \tag{21.3}$$

22. *Les conditions de conservation pour le schéma fluide parfait-champ électromagnétique.* — Considérons un schéma fluide parfait-champ électromagnétique dont le tenseur d'énergie peut s'écrire d'après l'équation (10.3)

$$T_{\alpha\beta} = (\rho^\star + p^\star) u_\alpha u_\beta - \theta_{\alpha\beta}$$

avec

$$\theta_{\alpha\beta} = p^\star g_{\alpha\beta} - \tau_{\alpha\beta},$$

$T_{\alpha\beta}$ désignant toujours le tenseur symétrique associé à un champ électromagnétique.

A ce schéma correspond le vecteur K_β donné par la formule

$$(\rho^\star + p^\star) K_\beta = \partial_\beta p^\star - F_{\alpha\beta} J^\alpha, \tag{22.1}$$

par suite les conditions de conservation (18.3) et (18.4) peuvent être mises sous la forme

$$\nabla_\alpha[(\rho^\star + p^\star) u^\alpha] = (\partial_\beta p^\star - F_{\alpha\beta} J^\alpha) u^\beta, \tag{22.2}$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \frac{1}{\rho^\star + p^\star}(g^\alpha_\beta - u^\alpha u_\beta)(\partial_\alpha p^\star - F_{\lambda\alpha} J^\lambda). \tag{22.3}$$

Ces dernières conditions de conservation jouent un rôle fondamental dans la théorie de l'électron avec tensions.

IV. — Le schéma champ électromagnétiqne pur.

23. *Le problème de Cauchy.* — Le problème essentiel de la théorie des espaces-temps induits par un champ électromagnétique pur est en fait le problème de Cauchy relatif au système des équations d'Einstein et de Maxwell-Lorentz. De ce problème des conditions initiales (Anfangswert-probleme) nous pouvons donner l'énoncé suivant :

Étant donnés sur une hypersurface S la métrique et les champs gravifique et électromagnétique, déterminer la métrique et les champs correspondants dans tout leur domaine d'existence.

Donnons-nous donc une hypersurface S orientée d'une manière arbitraire et que nous supposons quatre fois différentiable et deux fois continûment différentiable. Si cette hypersurface est représentée par l'équateur $f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$, le paramètre différentiel du premier ordre correspondant $\Delta_1 f$ est le signe quelconque. Nous pouvons toujours effectuer le changement de variables

$$x^{1'} = x^1, \qquad x^{2'} = x^2, \qquad x^{3'} = x^3, \qquad x^{4'} = f(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

et nous ramener ainsi au cas où S est définie par l'équation $x^4 = 0$ et admet pour paramètre différentiel $\Delta_1 x^4 = g^{44}$. Sur l'hypersurface S, nous nous donnons les valeurs des potentiels, de gravitation $g_{\alpha\beta}$ qui définissent la métrique, celles des dérivées premières $\partial_4 g_{\alpha\beta}$ (dérivées d'indice 1 relativement à S) qui définissent avec les $g_{\alpha\beta}$ le champ de gravitation, et enfin les valeurs des composantes $F_{\alpha\beta}$, du champ électromagnétique. Les vingt fonctions $g_{\alpha\beta}$, $\partial_4 g_{\alpha\beta}$ et les six fonctions $F_{\alpha\beta}$ constituent, pour le problème posé, les données de Cauchy relatives à S. Nous nous proposons de déterminer les valeurs sur S des dérivées successives du champ de gravitation et du champ électromagnétique. L'étude des discontinuités à la traversée de S et, du moins dans le cas analytique, celle de l'existence et de l'unicité des solutions [1] en résultera immédiatement.

24. *Les discontinuités des dérivées des champs.* — Les seules dérivées qui puissent être discontinues à la traversée de S sont les dérivées $\partial_{44} g_{\alpha\beta}$ et $\partial_4 F_{\alpha\beta}$ (dérivées obliques sur S). Une simple dérivation sur S fournit les valeurs de toutes les autres dérivées des deux champs. Il nous faut donc mettre en évidence ces dérivées dans les équations d'Einstein et dans celles de Mawell-Lorentz.

---

[1] L'unicité dans le cas non analytique a été établie par Stellmacher pour des hypersurfaces exclusivement orientées dans l'espace (*Math. Annalen*, t. 115, 1937, pp. 136-152).

On sait (1) qu'à ce point de vue les équations d'Einstein du cas intérieur

$$(24.1) \qquad Q_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta} - \chi T_{\alpha\beta} = 0$$

peuvent être partagées en deux systèmes distincts. *Lorsque g^{44} est différent de zéro*, le système (24.1) est équivalent à l'ensemble d'un système de six équations

$$(24.2) \qquad Q_{ij} \equiv S_{ij} - \chi\left[\frac{1}{4} g_{ij}(F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}) - g^{\alpha\beta}F_{\alpha i}F_{\beta j}\right] = 0,$$

et d'un système de quatre équations

$$(24.3_a) \qquad Q_i^4 \equiv S_i^4 + \chi F_{ij}F^{4j} = 0,$$

$$(24.3_b) \qquad Q_4^4 \equiv S_4^4 - \chi\left[\frac{1}{4}(F_{ij}F^{ij}) - \frac{1}{2}F_{4i}F^{4i}\right] = 0.$$

Il est connu que les seules dérivées obliques qui figurent dans le système (24.2) sont les dérivées $\partial_{44} g_{ij}$ et que, sous l'hypothèse essentielle $g^{44} \neq 0$, les équations du système sont résolubles par rapport à ces six dérivées. Dans les équations (24.3) n'entre au contraire aucune dérivée oblique.

De même, lorsque g^{44} n'est pas nul, le premier système des équations de Maxwell qui s'écrit ici

$$(24.4) \qquad D_\alpha \equiv g^{\beta\gamma}\nabla_\beta F_{\gamma\alpha} = 0,$$

est équivalent à l'ensemble du système

$$(24.5) \qquad D_i \equiv g^{44}\partial_4 F_{4i} + g^{4k}\partial_4 F_{ki} + \Phi_i(g_{\alpha\beta}, \partial_\gamma g_{\alpha\beta}, F_{\alpha\beta}, \partial_k F_{\alpha\beta}) = 0,$$

où les fonctions Φ_i ont par conséquent sur S des valeurs connues, et de l'équation

$$(24.6) \qquad D^4 \equiv g^{i\alpha} g^{4\beta} \nabla_i F_{\alpha\beta} = 0,$$

où n'entre aucune dérivée oblique.

Enfin le second système des équations de Maxwell se partage en le système de trois équations

$$(24.7) \qquad E^i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma i}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0,$$

où entrent les dérivées obliques $\partial_4 F_{jk}$ et l'équation unique

$$(24.8) \qquad E^4 \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{jkh4}\partial_j F_{kh} = 0,$$

qui ne renferme aucune dérivée oblique.

---

(1) *Cf.* LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en mécanique relativiste* (*Actual. scient. ind.*, Hermann, n° 833, 1939, pp. 15 et 27-29).

Il résulte des équations (24.2), (24.5), (24.7) que les *dérivées du champ de gravitation et du champ électromagnétique sont nécessairement continues à la traversée de toute hypersurface* S *pour laquelle* g^{44} *est différent de zéro.* En effet les équations (24.2) fournissent les valeurs sur S des six dérivées $\partial_{44} g_{ij}$ et l'on sait que l'on peut toujours annuler les discontinuités éventuelles des dérivées $\partial_{44} g_{\alpha 4}$. D'autre part les équations (24.7) fournissent les valeurs sur S des dérivées $\partial_4 F_{jk}$, et l'on déduit enfin des équations (24.5) celles des dérivées $\partial_4 F_{4i}$.

La conclusion précédente s'étend aux dérivées d'ordre supérieur des deux champs : il suffit pour s'en rendre compte de dériver les équations (24.2), (24.5), (24.7) par rapport à la variable x^4. Au total la présente étude ne fait intervenir que ces équations à l'exclusion des équations (24.3), (24.6), (24.8).

Si la variété S est telle que g^{44} soit identiquement nul, les dérivées du champ de gravitation et du champ électromagnétique peuvent au contraire être discontinues à la traversée de S. Nous pouvons, par suite, énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il y a identité entre les variétés caractéristiques des équations d'Einstein et celles des équations de Maxwell-Lorentz. Ces variétés sont les solutions de l'équation*

$$\Delta_1 f = 0.$$

Nous retrouvons ainsi, sous une forme absolument rigoureuse, l'identité des ondes gravifiques et des ondes électromagnétiques et, par suite, l'identité des lois de propagation des deux champs.

25. *Théorème d'existence et d'unicité.* — L'étude précédente nous conduit à partager le système des équations d'Einstein et de Maxwell-Lorentz en deux systèmes distincts :

a. Le système des équations (24.2), (24.5), (24.7) qui détermine l'évolution des champs de gravitation et électromagnétique. Il sera désigné dans la suite par la notation système (E).

b. Le système des équations (24.3), (24.6), (24.8) où n'entre aucune dérivée oblique des champs. Il sera désigné dans la suite par la notation système (C).

Sur la variété S donnons-nous des données de Cauchy telles que, sur S, g^{44} soit différent de zéro. Dans le cas analytique, le théorème de Cauchy-Kovalewska nous assure que ces données déterminent, à un changement de variables près, une solution unique $g_{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta}$ du système (E), solution dont nous connaissons le développement selon les puissances de x^4.

Il nous faut encore satisfaire au système (C). Les équations de ce système ne contenant aucune dérivée oblique des données de Cauchy, ces données sont nécessairement astreintes à vérifier *sur la variété* S, les équations du système (C). Le théorème suivant lèvera alors toute difficulté.

THÉORÈME. — *Si une solution du système* (E) *satisfait sur l'hypersurface* S *aux équations du système* (C), *elle satisfait à ces équations dans tout le domaine d'espace-temps considéré.*

Ce théorème est une conséquence des conditions de conservation relatives aux systèmes d'Einstein et de Maxwell-Lorentz et établies antérieurement. En effet, pour toute solution de (24.7), la condition de conservation (17.2) se réduit à l'équation

$$\partial_4 E^4 = 0\,;$$

par suite si l'équation (24.8) est vérifiée sur S, elle est vérifiée dans tout le domaine d'existence des champs considérés. De même, pour toute solution de (24.5), la condition de conservation (16.2) se réduit à l'équation

$$\partial_4 D^4 = -\partial_i\left(\frac{g^{i4}}{g^{44}} D^4\right) - \Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} \frac{g^{\mu 4}}{g^{44}} D^4.$$

Cette équation considérée comme équation aux dérivées partielles en D^4 est linéaire et homogène et est résolue par rapport à la dérivée $\partial_4 D^4$. Pour D^4 nul sur S, elle n'admet donc pas d'autre solution que la solution nulle. Il en résulte que l'équation (24.6) est, elle aussi, satisfaite dans tout le domaine d'espace-temps considéré.

Les équations (24.5) et (24.6) étant satisfaites, J^β est nul et le tenseur T^β_α est conservatif. Il en est par suite de même du tenseur $Q^\beta_\alpha = S^\beta_\alpha - \chi T^\beta_\alpha$, et il vient

$$\nabla_\alpha Q^\alpha_\beta = 0. \tag{25.1}$$

Pour toute solution de (24.2) on a, par un calcul facile,

$$Q^\beta_i = \frac{g^{\beta 4}}{g^{44}} Q^4_i\,; \qquad Q^\beta_4 = \frac{g^{\beta 4}}{g^{44}} Q^4_4 + \frac{g^{\beta i} g^{44} - g^{4\beta} g^{4i}}{(g^{44})^2} Q^4_i,$$

et les conditions (25.1) prennent la forme

$$\begin{aligned}
\alpha = i\,; \qquad \partial_4 Q^4_i = {} & -\partial_k\left(\frac{g^{k4}}{g^{44}} Q^4_i\right) - \Gamma^\beta_{\beta\rho} \frac{g^{\rho 4}}{g^{44}} Q^4_i \\
& + \frac{1}{g^{44}}\left[\Gamma^k_{\beta i} g^{\beta 4} + \Gamma^4_{ji} \frac{g^{jk} g^{44} - g^{4i} g^{4k}}{g^{44}}\right] Q^4_k + \Gamma^4_{\beta i} \frac{g^{\beta 4}}{g^{44}} Q^4_4, \\
\alpha = 4\,; \qquad \partial_4 Q^4_4 = {} & -\partial_k\left(\frac{g^{kj}}{g^{44}} Q^4_4\right) - \partial_j\left[\frac{g^{4k} g^{44} - g^{4j} g^{4k}}{(g^{44})^2} Q^4_k\right] \\
& - \Gamma^i_{i\beta}\left[\frac{g^{\beta 4}}{g^{44}} Q^4_i + \frac{g^{\beta j} g^{44} - g^{4\beta} g^{4j}}{(g^{44})^2} Q^4_j\right] + \Gamma^k_{4\beta} \frac{g^{\beta 4}}{g^{44}} Q^4_k.
\end{aligned}$$

Pour toute solution de (24.2), les Q^4_β vérifient donc un système de quatre équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes, résolues par rapport aux dérivées $\partial_4 Q_\beta^4$. Pour des données nulles sur S, ce système n'admet par suite que la solution nulle et les équations (24.3) sont satisfaites dans tout le domaine d'espace-temps considéré, ce qui démontre le théorème énoncé.

Nous pouvons résumer toute cette étude par le théorème d'existence et d'unicité suivant :

THÉORÈME. — *Pourvu que les données de Cauchy satisfassent, sur la variété* S, *aux équations du système* (C) *et soient telles que, sur* S, g^{44} *soit différent de zéro, le système des équations d'Einstein et de Maxwell-Lorentz correspondant au schéma champ éléctromagnétique pur admet dans le cas analytique une solution unique.*

26. *Le système des conditions initiales.* — Le problème de l'intégration des équations relativistes de l'électromagnétisme se trouve donc ramené au problème suivant : trouver les systèmes de données de Cauchy ($g_{\alpha\beta}$, $\partial_4 g_{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta}$), ou « conditions initiales » satisfaisant aux six équations du système (C) :

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} Q_i^4 &\equiv S_i^4 + \chi F_{ij} F^{4j} = 0,\\ Q_4^4 &\equiv S_4^4 - \chi\left[\frac{1}{4} F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2} F_{4i}F^{4i}\right] = 0,\\ D^4 &\equiv g^{i\alpha} g^{4\beta} \nabla_i F_{\alpha\beta} = 0,\\ E^4 &\equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{jkh4}\partial_j F_{kh} = 0. \end{aligned}\right.$$

Le système (C) sera dit le système des conditions initiales pour les deux champs. Je reviendrai ultérieurement sur la théorie de ce système qui peut se développer d'une manière assez analogue à celle que j'ai donnée [1] pour le système des conditions initiales associé aux équations d'Einstein du cas extérieur.

27. *Les singularités du champ de gravitation.* — J'ai consacré une partie d'un travail récent [2] à l'étude des champs de gravitation qui sont tels que l'on ne puisse introduire de masses matérielles dans un champ extérieur donné que dans des domaines où ce champ admet préalablement des singularités. J'ai en particulier établi la proposition suivante :

Étant donné un champ de gravitation extérieur statique du type le plus général, tout tube d'univers de ce champ, qui peut être meublé par une distribution matérielle du schéma fluide parfait produisant un champ intérieur statique compatible avec le champ extérieur, contient nécessairement des singularités du champ de gravitation extérieur.

---

(1) Cf. *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des corps* (sous presse *au Journal de Mathématiques pures et appliquées*).

(2) Cf. *Problèmes globaux en Mécanique relativiste*, 1939, Chapitre III.

Je me propose, dans les paragraphes qui vont suivre, d'étendre cette proposition au cas où la distribution purement matérielle considérée est remplacée par une distribution comportant un champ électromagnétique. Je développerai le raisonnement dans le cas le plus intéressant au point de vue physique, celui où la distribution considérée correspond au schéma champ électromagnétique pur.

28. *Signe de la composante* T_4^4 *du tenseur d'énergie.* — Dans tout ce qui suit on désignera par x^4 celle des variables qui présente le caractère temporel. D'après une remarque classique de Hilbert (¹) complétée par l'auteur (²), cela signifie que les deux potentiels g_{44} et g^{44} sont positifs et que par suite les deux formes quadratiques

$$g^{ij}X_iX_j, \quad g_{ij}X^iX^j$$

sont définies négatives. Les lignes le long desquelles la variable x^4 varie seule sont dites lignes de temps, les hypersurfaces $x^4 =$ const. sections d'espace.

Cela étant posé, la méthode utilise essentiellement le signe de la composante T_4^4 du tenseur d'énergie

$$T_4^4 = \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} - \frac{1}{2}F_{4i}F^{4i}.$$

En exprimant par exemple en fonction des composantes covariantes toutes les composantes du tenseur champ électromagnétique, il vient

$$T_4^4 = \frac{1}{4}g^{ih}g^{jk}F_{ij}F_{hk} - \frac{1}{2}(g^{44}g^{ij} - g^{4i}g^{4j})F_{4i}F_{4j}.$$

Or, en vertu du caractère temporel de la variable x^4, la quantité

$$H^2 = g^{ih}g^{jk}F_{ij}F_{hk},$$

carré de la mesure du « champ magnétique » F_{ij}, est strictement positive. De même du caractère temporel de x^4, on déduit encore que la forme quadratique de coefficients $(g^{44}g^{ij} - g^{4i}g^{4j})$ est définie négative et que, par suite, la quantité

$$L^2 = (g^{44}g^{ij} - g^{4i}g^{4j})F_{4i}F_{4j}$$

est aussi strictement positive. Il en résulte

$$T_4^4 = \frac{1}{4}H^2 + \frac{1}{2}L^2 > 0.$$

29. *Existence des singularités du champ de gravitation dans le cas statique.* — Supposons tout d'abord que nous nous donnions un espace-temps *statique*

(¹) HILBERT, *Math. Annalen*, 92, p. 11-12.
(²) Cf. *Problèmes globaux*, etc., 1939, p. 23-24.

associé à un schéma champ électromagnétique pur et étudions, pour un certain choix de l'hypersurface frontière, quel champ extérieur on peut lui associer.

Nous admettons qu'à la traversée de S et dans le système de coordonnées de Gauss associé à cette variété, la métrique, le champ de gravitation et le champ électromagnétique sont continus. Il en résulte que, nécessairement, sur l'hypersurface frontière S, le champ électromagnétique doit s'annuler. D'autre part le caractère statique de l'espace temps intérieur ne correspondra à aucune réalité physique, si les lignes de temps, trajectoires du groupe d'isométrie de l'espace-temps sont susceptibles de sortir du tube d'univers auquel nous limitons cet espace-temps. L'hypersurface S sera par suite supposée engendrée par des lignes de temps.

Ayant ainsi choisi l'hypersurface S limitant l'espace-temps intérieur, il est facile de déterminer l'espace-temps extérieur associé, soit (x^1, x^2, x^3, x^4) un système de coordonnées de Gauss associé à S, où x^3 désigne la distance géodésique normale à S et où S est par suite représentée par l'équation $x^3 = 0$. Avec ces coordonnées, la donnée de l'espace-temps intérieur nous fait connaître pour l'espace temps extérieur cherché un système de données de Cauchy $(g_{\alpha\beta}, \partial_3 g_{\alpha\beta})$ portées par S qui demeure invariant par un groupe de la forme

$$\overline{x}^4 = x^4 + h.$$

Ces données déterminent un espace-temps extérieur et un seul qui admet par suite le même groupe. L'espace-temps considéré est donc nécessairement statique et les lignes de temps qui lui correspondent se déduisent de celles qui engendrent S par la construction même de Gauss.

Inversement, supposons que nous nous donnions un espace-temps extérieur statique du type le plus général, rapporté à ses lignes de temps et à des sections d'espace correspondantes, et considérons dans cet espace-temps un tube d'univers limité à une hypersurface S engendrée par des lignes de temps. Nous nous proposons de montrer que si ce tube d'univers peut être meublé par une distribution purement électromagnétique produisant un espace-temps intérieur statique, l'espace-temps extérieur donné est nécessairement singulier à l'intérieur de S. A cet effet, nous utiliserons (¹) essentiellement le fait que, dans le cas statique général, il existe un vecteur d'espace

$$h^i = -g^{i\mu}\Gamma^4_{4\mu}; \qquad h^4 = 0,$$

dont la divergence est égale à R^4_4. Par suite si Σ désigne une hypersurface fermée limitant un volume V, dans lequel l'espace-temps considéré est régulier, on a

$$\text{flux}_\Sigma \vec{h} = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int_V R^4_4 \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4. \tag{29.1}$$

(¹) Cf. *Problèmes globaux*, etc., 1939, p. 64-65.

Le vecteur $\vec{h}$ introduit ne dépend que des $g_{\alpha\beta}$ et de leurs dérivées premières. Une étude de raccordement des deux espaces-temps permet d'en déduire que le long de S les vecteurs $\vec{h}$ attachés à l'espace-temps intérieur et à l'espace-temps extérieur coïncident.

30. Ces résultats étant rappelés, la démonstration cherchée s'en déduit aisément. Soient Σ_e et Σ'_e deux sections d'espace arbitraires de l'espace-temps extérieur, Σ_i et Σ'_i les deux sections d'espace de l'espace-temps intérieur qui se raccordent avec les précédentes le long de la paroi S du tube d'univers. Nous désignerons par D le domaine à trois dimensions déterminé sur S par l'un ou 'autre groupe des sections d'espace, et nous appellerons V_e et V_i les deux hypervolumes limités respectivement à D.

Appliquons à l'hypervolume V_i, l'équation (29.1) dans le cas de l'espace-temps intérieur, T étant nul, la composante R^4_4 du tenseur de Ricci est égale à T^4_4, D'autre part le flux de $\vec{h}$ à travers les sections d'espace Σ_i et Σ'_i est nul. L'équation considérée prend donc la forme

$$\text{flux}_D \vec{h} = \iiiint_{V_i} T^4_4 \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4,$$

où T^4_4 est une quantité essentiellement positive. Par suite le flux à travers D du vecteur $\vec{h}$ est positif et ne peut, en aucun cas, se réduire à zéro. Or, si le champ extérieur considéré était régulier dans V_e, le même raisonnement, appliqué à l'espace-temps extérieur et à l'hypervolume V_e correspondant, conduirait à la relation

$$\text{flux}_D \vec{h} = 0.$$

Ainsi l'espace-temps extérieur ne peut être supposé régulier dans le domaine V_e, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donné un champ de gravitation extérieur statique du type le plus général, tout tube d'univers de ce champ qui peut être meublé par une distribution purement électromagnétique produisant un champ intérieur statique compatible avec le champ extérieur, contient nécessairement des singularités du champ de gravitation extérieur* (1).

V. — L'équation de transfert de Lorentz.

31. *L'équation de transfert de Lorentz.* — Hors le cas d'une distribution purement électromagnétique, les équations fondamentales de l'électricité

---

(1) J'ai annoncé antérieurement ce résultat dans une Note aux *Comptes rendus*, (Cf. *C. R. Acad. Sc.*, 1939, t. 209, p. 533).

données à la partie II du présent travail, demeurent incomplètes tant que l'on ne connaît pas une expression du vecteur-courant électrique J^λ. Nous allons compléter ces équations qui, jusqu'ici, ne font pas intervenir l'hypothèse électronique, par une équation supplémentaire portant sur le vecteur-courant et qui traduit explicitement cette hypothèse. Dans la « théorie microscopique rigoureuse » que nous envisageons, tout courant électrique doit être nécessairement un courant de convection. Autrement dit le vecteur-courant électrique J^λ doit être colinéaire au vecteur-vitesse matérielle unitaire u^λ. Nous sommes ainsi conduits de la manière la plus naturelle à adjoindre aux équations d'Einstein et de Maxwell l'équation

$$J^\lambda = \mu u^\lambda, \tag{31.1}$$

où μ désigne un scalaire variable appelé *densité de charge électrique*. A l'équation (31.1) on donne le nom d'équation de transfert de Lorentz.

32. *La densité de charge pour le schéma matière-champ électromagnétique.* — Prenons d'abord le cas d'un schéma matière-champ électromagnétique. Grâce à l'équation de transfert (31.1), les conditions de conservation (16.3), (21.2), (21.3) relatives aux équations de Maxwell et d'Einstein prennent une forme particulièrement simple.

On a d'abord pour l'équation (16.3)

$$\nabla_\lambda(\mu u^\lambda) = 0. \tag{32.1}$$

En reportant l'expression (31.1) du vecteur-courant dans le second membre de l'équation (21.2), on obtient pour ce second membre

$$-\mu F_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta,$$

expression qui est nulle par suite de l'antisymétrie du tenseur $F_{\alpha\beta}$. L'équation (21.2) se réduit ainsi à l'équation

$$\nabla_\lambda(\rho^\star u^\lambda) = 0. \tag{32.2}$$

Les équations (32.1) et (32.2) peuvent se mettre respectivement sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} &\nabla_\lambda u^\lambda + u^\lambda \frac{\partial_\lambda \rho^\star}{\rho^\star} = 0, \\ &\nabla_\lambda u^\lambda + u^\lambda \frac{\partial_\lambda \mu}{\mu} = 0. \end{aligned}\right. \tag{32.2}$$

Par soustraction, on en déduit l'équation

$$u^\lambda \partial_\lambda \left(\log \frac{\mu}{\rho^\star}\right) = 0,$$

qui exprime que le rapport $\frac{\mu}{\rho^\star}$ demeure constant tout le long d'une ligne de courant. Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME. — *Le rapport de la densité de charge électrique à la densité de matière ρ^* demeure constant le long d'une ligne de courant.*

En général la quantité $K = \frac{\mu}{\rho^*}$ varie d'une ligne de courant à l'autre et le schéma considéré est dit *hétérogène*. Nous dirons que le schéma est *homogène* si K est une constante absolue dans tout le domaine d'espace-temps considéré.

Enfin le système différentiel aux lignes de courant (21.3) peut être écrit sous la forme

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = K F_{\alpha\beta} u^\alpha. \tag{32.4}$$

33. *La densité de charge pour le schéma fluide parfait-champ électromagnétique.* — Plaçons-nous maintenant dans le cas d'un schéma fluide parfait-champ électromagnétique à pression constante : la pression p^* est supposée constante le long de toute ligne de courant

$$u^\lambda \partial_\lambda p^* = 0. \tag{33.1}$$

En tenant compte de l'équation de transfert et de l'équation (33.1), les équations de conservation (16.3) et (22.2) prennent respectivement la forme

$$\nabla_\lambda(\mu u^\lambda) = 0, \qquad \nabla_\lambda[(\rho^* + p^*) u^\lambda] = 0.$$

On en déduit comme précédemment que, le long de toute ligne de courant, le rapport $K = \frac{\mu}{\rho^* + p^*}$ est constant. Le schéma est encore dit *homogène* si K est constant dans tout le domaine d'espace-temps envisagé.

Quant au système différentiel aux lignes de courant (22.3), il peut être mis sous la forme

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = \frac{\partial_\beta p^*}{\rho^* + p^*} + K F_{\alpha\beta} u^\alpha. \tag{33.2}$$

34. *Cas où la congruence des lignes de courant est d'expansion nulle.* — Si la congruence des lignes de courant est d'expansion nulle, on a, par définition,

$$\nabla_\lambda u^\lambda = 0.$$

Plaçons-nous dans le cas d'un schéma matière-champ électromagnétique; les équations (32.3) prennent la forme

$$u^\lambda \partial_\lambda \rho^* = 0, \qquad u^\lambda \partial_\lambda \mu = 0.$$

Par suite les densités de masse et de charge électrique demeurent toutes deux constantes le long d'une ligne de courant. Ces résultats s'étendent immédiatement à un schéma quelconque du type fluide parfait-champ électromagnétique.

35. *Le problème de Cauchy pour une distribution mixte.* — Proposons-nous d'étudier ce que devient le problème de Cauchy dans le cas de champs gravifique et électromagnétique produits par une distribution mixte, matérielle et électromagnétique. Nous raisonnerons dans les hypothèses du schéma matière champ électromagnétique.

Par extension de l'équation (24.1) posons

$$Q_{\alpha\beta} \equiv S_{\alpha\beta} - \chi\tau_{\alpha\beta},$$

où $\tau_{\alpha\beta}$ désigne la partie du tenseur d'énergie associée au champ électromagnétique.

Les équations d'Einstein s'écrivent

$$(35.1) \qquad Q_{\alpha\beta} = \chi\rho^* u_\alpha u_\beta \qquad \text{avec} \quad g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1 \qquad (\rho^* > 0),$$

et les équations de Maxwell-Lorentz

$$(35.2) \qquad g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha F_{\beta\lambda} = \mu u_\lambda,$$

$$(35.3) \qquad \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} \partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0.$$

Étant données sur une hypersurface S. les valeurs des potentiels $g_{\alpha\beta}$ et φ_α et de leurs dérivées premières qui déterminent les champs, nous nous proposons de déterminer les valeurs sur S des dérivées successives de ces potentiels ainsi que les valeurs de ρ^*, μ, des u_α et de leurs dérivées. Comme au paragraphe 24, nous supposerons que l'hypersurface S est définie par l'équation $x^4 = 0$ et qu'elle n'est tangente en aucun de ses points au cône élémentaire ($g^{44} \neq 0$). Dans ces conditions, le système (35.1) est équivalent au système des équations

$$(35.4) \qquad Q_{ij} = \chi\rho^* u_i u_j,$$

$$(35.5) \qquad Q_\lambda^4 = \chi\rho^* u_\lambda u^4,$$

$$(35.6) \qquad g^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 1; \qquad \rho^* > 0.$$

Les quantités Q_λ^4 ne contenant aucune dérivée oblique des champs, les données de Cauchy déterminent les valeurs sur S de ces quantités. On tire ainsi des équations (35.5)

$$u_\lambda = \frac{Q_\lambda^4}{\chi\rho^* u^4},$$

et en reportant dans (35.6)

$$(\chi\rho^* u^4)^2 = g^{\alpha\beta} Q_\alpha^4 Q_\beta^4.$$

Nous supposons que la quantité $g^{\alpha\beta} Q_\alpha^4 Q_\beta^4$ est sur S essentiellement positive. Il vient dans ces conditions en posant

$$g^{\alpha\beta} Q_\alpha^4 Q_\beta^4 = P^2,$$

$$(35.7) \qquad u_\lambda = \frac{Q_\lambda^4}{P}; \qquad u^4 = \frac{Q^{44}}{P}; \qquad \chi\rho^* = \frac{P^2}{Q^{44}},$$

ρ étant positif, *nous sommes amenés à supposer* Q^{44} *positif*. Les valeurs de $\rho^\star$ et des u_λ étant connues, les équations (35.4) nous fournissent alors les valeurs sur S des dérivés $\partial_{44} g_{ij}$.

Passons maintenant aux équations de Maxwell (35.2). Elles peuvent se mettre sous la forme

$$(35.8) \qquad g^{44}\partial_{44}\varphi_i = \mu u_i - \xi_i,$$

$$(35.9) \qquad -g^{4i}\partial_{44}\varphi_i = \mu u_4 - \xi_4,$$

où ξ_λ désigne un vecteur dont les composantes ont sur S des valeurs connues. De (35.9) on déduit que l'on connaît la valeur sur S de la quantité

$$\mu u^4 = \xi^4,$$

soit

$$\mu = \frac{\xi^4}{u^4} = \frac{\xi^4 P}{Q^{44}}.$$

Connaissant μ, les équations (35.8) fournissent les valeurs sur S des $\partial_{44}\varphi_i$. Quant aux équations (35.3) elles se trouvent satisfaites d'elles-mêmes grâce à l'emploi du potentiel-vecteur.

Observons, d'autre part, que nos inconnues doivent satisfaire aux conditions de conservations (32.1) et (32.4) que nous écrirons ici sous la forme

$$(35.10) \qquad u^4\partial_4 u^\lambda = A^\lambda\left(g_{\alpha\beta},\ \partial_\gamma g_{\alpha\beta},\ F_{\alpha\beta},\ u^\alpha,\ \partial_i u^\alpha,\ \frac{\mu}{\rho^\star}\right),$$

$$(35.11) \qquad u^4\partial_4\rho^\star + \rho^\star\partial_4 u^4 = B(g_{\alpha\beta},\ \partial_\gamma g_{\alpha\beta},\ u^\alpha,\ \partial_i u^\alpha,\ \rho^\star,\ \partial_i\rho^\star).$$

$$(35.12) \qquad u^4\partial_4\mu + \mu\,\partial_4 u^4 = C(g_{\alpha\beta},\ \partial_\gamma g_{\alpha\beta},\ u^\alpha,\ \partial_i u^\alpha,\ \mu,\ \partial_i\mu).$$

Les seconds membres prennent sur S des valeurs connues; u^4 étant différent de zéro (puisque Q^{44} est différent de zéro les équations (35.10), (35.11), (35.12) fournissent les valeurs des dérivées $\partial_4 u^\lambda$, $\partial_4\rho^\star$, $\partial_4\mu$.

Cela étant posé, il apparaît immédiatement que des dérivations successives par rapport à la variable x^4, effectuées soit sur le système (35.4), (35.8) et l'équation supplémentaire (15.3), soit sur le système (35.10), (35.11), (35.12), permettent d'obtenir les valeurs de toutes les dérivées cherchées. Dans cette recherche n'intervient aucune dérivation portant sur les équations (35.5), (35.6), (35.9).

Au point de vue de l'existence et de l'unicité de la solution, les considérations précédentes nous permettent d'affirmer du moins dans le cas analytique que, moyennant les hypothèses énoncées, les données de Cauchy sur S déterminent une solution et une seule du système (35.4), (35.8) et (35.10), (35.11), (35.12) qui satisfasse sur S aux équations (35.5), (35.6), (35.9). Il résulte de la théorie des systèmes en involution que ces dernières équations sont alors vérifiées partout. Par suite, dans les hypothèses énoncées, le problème de Cauchy relatif au système (35.1), (35.2), (35.3) admet une solution unique.

Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Si les données de Cauchy sur* S *sont telles que* g^{44} *soit différent de zéro et que* $g^{\lambda\mu}Q^4_\lambda Q^4_\mu$ *et* Q^{44} *soient positifs, le système des équations d'Einstein et de Maxwell-Lorentz* (35.1), (35.2), (35.3) *admet une solution unique se réduisant sur* S *à ces données.*

Le cas où Q^{44} est nul correspond au cas singulier où u^4 est nul, c'est-à-dire au cas où S est tangente à une ligne de courant ou engendrée par des lignes de courant.

Dans le cas du schéma fluide parfait-champ électromagnétique, le problème de Cauchy conduit à des conclusions analogues; il apparait une nouvelle classe de variétés exceptionnelles constituée par les fronts d'onde de l'hydrodynamique.

36. *Les singularités du champ électromagnétique.* — A l'intérieur d'un tube d'univers S, considérons une distribution mixte, matérielle et électromagnétique satisfaisant à l'équation de transfert de Lorentz et proposons-nous tout d'abord d'étudier les champs gravifique et électromagnétique engendrés à l'extérieur de S par cette distribution. Par extension des conditions classiques de Schwarzschild, nous sommes conduits à leur imposer les conditions suivantes : *il existe un système de coordonnées tel que les potentiels* $g_{\alpha\beta}$ *et* φ_α *ainsi que leurs dérivées premières soient continus à la traversée de la variété* S [1].

Nous sommes ainsi amenés à rechercher s'il existe des champs gravifique et électromagnétique satisfaisant aux équations du schéma champ électromagnétique pur et se raccordant le long de S, au sens précédent, avec les champs intérieurs à S associés à la distribution. Nous dirons que nous traitons le problème électromagnétique du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur.

THÉORÈME. — *Pour que le problème électromagnétique du prolongement de l'intérieur vers l'extérieur admette une solution unique, il faut et il suffit :*

1° *que la variété* S *soit engendrée par des lignes de courant du champ intérieur;*
2° *que dans le cas du schéma fluide parfait-champ électromagnétique, la pression* $p^\star$ *s'annule le long de* S.

La condition est nécessaire. — Supposons qu'il existe des champs gravifique et électromagnétique correspondant au schéma électromagnétique pur, exté-

---

(1) Il en résulte comme dans le cas purement gravitationnel, qu'il y a nécessairement continuité des potentiels et de leurs dérivées premières dans le système de coordonnées de Gauss relatif à S (*Cf.* LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en Mécanique relativiste*, p. 32-33).

rieurs à S et se raccordant le long de S (défini par $x^4=0$) avec les champs intérieurs. Les premiers membres des équations du système (C) étant continus à la traversée de S, les quantités Q_i^4, D^4, E^4 relatives aux champs intérieurs s'annulent nécessairement sur S. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que u^4 et $p^\star$, dans le schéma fluide parfait-champ électromagnétique, prennent partout sur S la valeur zéro.

La condition est suffisante. — L'hypersurface S étant supposée engendrée par des lignes de courant est partout orientée dans le temps. Par suite si nous raisonnons dans le système de coordonnées de Gauss attaché à S, nous nous trouvons ramenés à la résolution du problème de Cauchy relatif au schéma champ électromagnétique pur, les données de Cauchy étant portées par une variété non tangente au cône élémentaire et vérifiant sur S les équations du système (C). Nous avons vu qu'un tel problème admet, au moins dans le cas analytique, une solution unique, l'existence de cette solution n'étant d'ailleurs assurée que dans un certain voisinage de S.

37. Inversement donnons-nous, dans un espace-temps rapporté à un système de coordonnées (x^α), des champs gravifique et électromagnétique satisfaisant aux équations du schéma champ électromagnétique pur, le champ gravifique étant supposé partout régulier dans l'espace. Étant donné un tube d'univers limité à une hypersurface $S\,(x^3=0)$, supposons que l'on puisse meubler ce tube d'univers par une distribution matérielle et électromagnétique, *dont la densité de charge est de signe constant* et qui produit à l'intérieur de S des champs compatibles avec les champs extérieurs à S. Nous nous proposons de montrer que, dans ces conditions, le champ électromagnétique *extérieur* ne peut être supposé régulier à l'intérieur de S.

A cet effet nous commencerons par observer que l'on peut mettre les équations de Maxwell-Lorentz (14.1) sous la forme

$$\nabla_\alpha F^{\alpha(\beta)} = \mu u^\beta,$$

où l'indice β du premier membre est un indice mort, c'est-à-dire n'est pas soumis à l'opérateur de dérivation covariante. Pour $\beta=4$, il vient

$$\nabla_\alpha k^\alpha = \mu u^4,$$

où k^α désigne le vecteur d'espace

$$k^i = F^{i4}, \qquad k^4 = 0.$$

Par suite si H désigne une hypersurface fermée limitant un hypervolume V dans lequel les champs considérés sont réguliers

$$\text{(37.1)} \qquad \operatorname{flux}_H \vec{k} = \iiiint_V \mu u^4 \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4.$$

Soit alors $\Sigma(x^4 = 0)$ une hypersurface orientée dans l'espace et telle que dans le domaine de Σ intérieur à S *la densité de charge* μ *ait un signe constant.* On peut toujours trouver une section d'espace $\Sigma'(x^4 = h)$ telle que, dans l'hypervolume V limité par S, Σ et Σ', le scalaire μ garde un signe constant. D'ailleurs, d'après les résultats du paragraphe 32, μ admet un signe constant le long de toute ligne de courant. Les sections d'espace, correspondant aux valeurs de x^4 de l'intervalle $(0, h)$ étant orientées dans l'espace, ne peuvent être tangentes à une ligne de courant. Par suite dans l'hypervolume V, u^4 conserve aussi un signe déterminé. Désignons par D le domaine à trois dimensions déterminé sur S par Σ et Σ' et appliquons à l'hypervolume V l'équation (37.1). Le flux de $\vec{k}$ à travers Σ et Σ' étant nul, il vient

$$(37.2) \qquad \text{flux}_D \vec{k} = \int\int\int\int_V \mu u^4 \sqrt{-g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3\, dx^4.$$

Ce flux a par suite un signe bien déterminé et ne peut se réduire à zéro. Or, le long de S les vecteurs $\vec{k}$ associés aux champs électromagnétiques extérieur et intérieur à S coïncident. Si le champ électromagnétique extérieur était régulier dans V, le raisonnement précédent, appliqué aux champs extérieurs, conduirait à la relation

$$\text{flux}_D \vec{k} = 0,$$

résultat en contradiction avec (37.2). Nous énoncerons :

THÉORÈME. — *Étant donnés des champs gravifique et électromagnétique satisfaisant aux équations du schéma champ électromagnétique pur, tout tube d'univers, dans lequel la métrique est régulière et qui peut être meublé par une distribution matérielle et électromagnétique de signe constant produisant des champs intérieurs compatibles avec les champs extérieurs donnés, contient nécessairement des singularités du champ électromagnétique extérieur.*

VI. — Sur l'invariant intégral de l'Électromagnétisme.

38. *Variation de l'intégrale* Φ. — Nous raisonnerons tout d'abord dans le cas du schéma matière-champ électromagnétique; nous verrons ultérieurement comment les résultats obtenus s'étendent au cas du schéma fluide parfait-champ électromagnétique à pression constante.

Plaçons-nous donc dans un domaine dans lequel se trouve défini un schéma matière-champ électromagnétique *homogène* et supposons tracée, dans ce domaine, une courbe C le long de laquelle les x^α sont des fonctions d'un certain paramètre u dont nous désignerons par $\dot{x}^\alpha$ les dérivées. A la courbe C nous ferons correspondre l'intégrale calculée le long de C

$$\Phi = \int_{u_0}^{u_1} W(x^\alpha, \dot{x}^\beta)\, du,$$

où

$$W = \frac{ds}{du} - k\varphi_\alpha \dot{x}^\alpha = (g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{\frac{1}{2}} - k\varphi_\alpha \dot{x}^\alpha$$

est une fonction homogène et du premier degré des $\dot{x}^\alpha$.

Si l'on varie la courbe C, extrémités comprises, la variation correspondante de l'intégrale Φ est donnée par la formule (¹)

$$\text{(38.1)} \qquad \delta\Phi = [\omega(\delta)]_1 - [\omega(\delta)]_0 - \int_{u_0}^{u_1} \left[\frac{d}{du} \frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial W}{\partial x^\alpha} \right] \delta x^\alpha\, du,$$

où $\omega(\delta)$ se réduit, par suite de l'homogénéité de W, à la forme linéaire

$$\omega(\delta) = \frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha} \delta x^\alpha.$$

Explicitons la formule (38.1) pour la fonction W donnée. Il vient

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{g_{\alpha\beta}\, \dot{x}^\beta}{(g_{\lambda\mu}\, \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu)^{\frac{1}{2}}} - k\varphi_\alpha,$$

$$\frac{\partial W}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\partial_\alpha g_{\lambda\mu}\, \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu}{(g_{\lambda\mu}\, \dot{x}^\lambda \dot{x}^\mu)^{\frac{1}{2}}} - k\, \partial_\alpha \varphi_\lambda \dot{x}^\lambda.$$

En reportant ces expressions dans (38.1) et en prenant pour paramètre u l'abscisse curviligne s de la courbe C, on peut mettre $\delta\Phi$ sous la forme

$$\text{(38.2)} \quad \delta\Phi = [\omega(\delta)]_1 - [\omega(\delta)]_0 - \int_{s_0}^{s_1} \left[\frac{d}{ds}(V_\alpha - k\varphi_\alpha) - \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu + k\, \partial_\alpha \varphi_\lambda v^\lambda \right] \delta x^\alpha\, ds,$$

où

$$\text{(38.3)} \qquad \omega(\delta) = (V_\alpha - k\varphi_\alpha)\, \delta x^\alpha$$

et où V_α désigne le vecteur unitaire de la courbe (C).

39. *Le principe d'extremum.* — Appliquons la formule (38.2) au cas où la courbe C est variée à extrémités fixes. Dans ces conditions, la variation de l'intégrale Φ se réduit à

$$\delta\Phi = -\int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{d}{ds}(V_\alpha - k\varphi_\alpha) - \frac{1}{2} \partial_\alpha g_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu + k\, \partial_\alpha \varphi_\lambda v^\lambda \right] \delta x^\alpha\, ds$$

$$= -\int_{M_0}^{M_1} [v^\beta \nabla_\beta v_\alpha - k v^\beta F_{\beta\alpha}]\, \delta x^\alpha\, ds,$$

(¹) *Cf.* par exemple LICHNEROWICZ, *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste* (*Ann. École Normale*, fasc. IV, 1941).

et les courbes qui réalisent l'extremum de Φ sont les solutions des équations différentielles

$$v^\alpha \nabla_\alpha v_\beta = k F_{\alpha\beta} v^\alpha, \tag{39.1}$$

qui coïncident avec les équations différentielles (32.4) aux lignes de courant. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour tout schéma matière-champ électromagnétique homogène, les lignes de courant sont les extrémales de l'intégrale*

$$\Phi = \int_{u_0}^{u_1} \left[(g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{\frac{1}{2}} - k\varphi_\alpha \dot{x}^\alpha \right] du.$$

40. *L'invariant intégral relatif.* — Soit

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = u^\alpha; \tag{40.1)_a$$

$$u^\alpha \nabla_\alpha u_\beta = k F_{\alpha\beta} u^\alpha \tag{40.1)_b$$

le système différentiel aux lignes de courant du schéma envisagé. Considérons une suite continue à un paramètre σ de telles lignes de courant et limitons chaque ligne de courant à un arc M_0M_1 variable avec σ. En vertu de la formule (32.2), la variation de l'intégrale Φ, quand on passe de la ligne (σ) à la ligne ($\sigma + \delta\sigma$), est égale à

$$\delta\Phi = [\omega(\delta)]_{M_1} - [\omega(\delta)]_{M_0}.$$

Par conséquent, si notre suite forme un tube de lignes de courant sur lequel le point M_0 décrit une courbe fermée Γ_0 et le point M_1 une courbe fermée Γ_1, la variation totale de l'intégrale Φ, lorsqu'on revient à la ligne de courant initiale, est nulle et l'on a

$$\int_{\Gamma_1} [\omega(\delta)]_{M_1} = \int_{\Gamma_0} [\omega(\delta)]_{M_0}.$$

Nous pouvons donc énoncer :

THÉORÈME. — *Le système différentiel aux lignes de courant* (40.1) *admet l'invariant intégral relatif :*

$$\int \omega(\delta) = \int (u_\alpha - k\varphi_\alpha)\, \delta x^\alpha. \tag{40.2}$$

L'invariant intégral (40.2) fait intervenir le vecteur

$$i_\alpha = u_\alpha - k\varphi_\alpha.$$

Nous donnerons à ce vecteur i_α, le nom de *vecteur-impulsion* généralisé du schéma homogène considéré. Les lignes tangentes en chaque point au vecteur-impulsion sont appelées lignes d'impulsion.

41. *L'invariant intégral absolu à deux dimensions.* — De la forme différentielle linéaire

$$\omega(\delta) = (u_\alpha - k\varphi_\alpha)\,\delta x^\alpha,$$

on déduit par différentiation extérieure, la forme quadratique extérieure

$$D\omega = \Omega_{\alpha\beta}\,|\,\delta x^\alpha\,\delta x^\beta\,|$$

avec

$$(41.1) \qquad \Omega_{\alpha\beta} = \partial_\alpha i_\beta - \partial_\beta i_\alpha = \partial_\alpha u_\beta - \partial_\beta u_\alpha - k F_{\alpha\beta}.$$

Si Δ désigne un domaine à deux dimensions limité à un contour fermé Γ, on a

$$\int_\Gamma \omega = \iint_\Delta D\omega;$$

on en déduit immédiatement le théorème.

THÉORÈME. — *Le système différentiel aux lignes de* **courant** (40.1) ***admet*** *l'invariant intégral absolu.*

$$\iint_\Delta D\omega = \iint_\Delta \Omega_{\alpha\beta}\,\delta x^\alpha\,\delta x^\beta.$$

Au tenseur antisymétrique $\Omega_{\alpha\beta}$, nous donnons le nom *de tenseur de tourbillon généralisé* du schéma considéré.

42. *Schémas à mouvement rotationnel et à mouvement irrotationnel.* — Le système différentiel aux lignes de courant

$$(42.1) \qquad \frac{dx^1}{u^1} = \frac{dx^2}{u^2} = \frac{dx^3}{u^3} = \frac{dx^4}{u^4},$$

où u^α satisfait aux équations $(40\text{-}1)_b$, admet les invariants $\int \omega$ et $\iint D\omega$. Inversement cherchons à former tous les systèmes différentiels de la forme (42.1) admettant ces invariants intégraux. De la considération du système caractéristique de la forme, on déduit que, pour que le système différentiel

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3} = \frac{dx^4}{v^4}$$

laisse invariantes les formes ω et $D\omega$, il faut et il suffit que le vecteur V^β satisfasse au système linéaire

$$(42.2) \qquad \Omega_{\alpha\beta}\,v^\beta = 0.$$

D'après un théorème classique sur la classe d'une forme quadratique extérieure, le système (42.2) est nécessairement de rang pair, et ce rang est inférieur à 4, puisqu'il existe un système différentiel laissant invariantes les formes ω et $D\omega$. Le système (42.2) est donc de rang 2 ou 0.

a. Si le système (42.2) est de rang 2, le schéma est dit *à mouvement rotationnel*. La forme $D\omega$ admet des variétés caractéristiques à deux dimensions, que l'on peut engendrer par des lignes de courant.

b. Si le système (42.2) est de rang 0, le schéma est dit à *mouvement irrotationnel*. Dans ce cas, le tenseur $\Omega_{\alpha\beta}$ est identiquement nul et les lignes *d'impulsion forment une congruence de normales*.

43. *Étude des schémas à mouvement rotationnel. Lignes de tourbillon.* — Plaçons-nous dans le cas d'un schéma à mouvement rotationnel et étudions les variétés caractéristiques à deux dimensions correspondantes. L'élément plan tangent à ces variétés sera complètement défini si nous connaissons, outre la direction u^α, une seconde direction de cet élément-plan, direction que nous choisirons orthogonale à la première. Nous sommes ainsi amenés à chercher un vecteur θ^β satisfaisant aux équations

$$\Omega_{\alpha\beta}\,\theta^\beta = 0, \qquad u_\beta\,\theta^\beta = 0.$$

Un calcul facile fournit pour ces équations la solution

$$\theta^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}(-g)^{-\frac{1}{2}}\,u_\beta\,\Omega_{\gamma\delta}. \tag{43.1}$$

Le vecteur θ^α ainsi défini est le *vecteur-tourbillon* du schéma envisagé. Les lignes trajectoires du champ de vecteurs sont les *lignes de tourbillon*. Étant orthogonales aux lignes de courant, elles sont partout orientées dans l'espace. Le système différentiel

$$\frac{dx^1}{\theta^1} = \frac{dx^2}{\theta^2} = \frac{dx^3}{\theta^3} = \frac{dx^4}{\theta^4}$$

laissant invariantes les formes ω et $D\omega$, on en déduit immédiatement *une théorie complète des tourbillons*, analogue à celle de l'hydrodynamique classique ou relativiste [1]. En particulier la circulation du vecteur-impulsion est la même le long de tout circuit fermé tracé sur un tube de tourbillon et en faisant une fois le tour. Les variétés caractéristiques considérées admettent une double génération par les lignes de courant et par les lignes de tourbillon.

44. *Étude des schémas à mouvement irrotationnel.* — La propriété essentielle des mouvements irrotationnels est leur *permanence*, qui est fondée sur le théorème suivant :

Théorème. — *Si le tenseur de tourbillon s'annule sur une hypersurface* S *partout orientée dans l'espace, il s'annule identiquement et le mouvement est irrotationnel :*

---

[1] Cf. Lichnerowicz, *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste* (*Ann. École Normale Supérieure*, 1941, 58, fascicule 4).

D'après les considérations du paragraphe 42, le vecteur u^α satisfait au système linéaire

$$\Omega_{\alpha\beta} u^\beta = 0. \tag{44.1}$$

Rapportons alors le schéma considéré à un système de référence tel que les lignes de temps coïncident avec les lignes de courant du schéma. Pour un tel système de référence

$$u^1 = u^2 = u^3 = 0,$$

et il résulte du système (44.1)

$$\Omega_{14} = \Omega_{24} = \Omega_{34} = 0. \tag{44.2}$$

L'hypersurface S étant orientée dans l'espace, nous pouvons l'adopter désormais pour variété $x^4 = 0$. Comme le tenseur $\Omega_{\alpha\beta}$ est le rotationnel d'un champ de vecteurs, il satisfait au système

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} \partial_\alpha \Omega_{\beta\gamma} = 0;$$

pour $\lambda = i$, ce système fournit, compte tenu de (44.2), les équations

$$\partial_4 \Omega_{23} = \partial_4 \Omega_{31} = \partial_4 \Omega_{12} = 0. \tag{44.3}$$

Les composantes Ω_{23}, Ω_{31}, Ω_{12} s'annulant sur S, il résulte des équations (44-3) que ces composantes sont identiquement nulles, ce qui démontre le théorème.

Ce théorème constitue l'extension à notre théorie du théorème de Lagrange de l'hydrodynamique classique.

45. *Mouvements permanents.* — Supposons l'espace-temps rapporté à un système de coordonnées quelconque (x^α) dans lequel la variable x^4 présente le caractère temporel. Nous dirons qu'un schéma matière pure-champ électromagnétique définit un *mouvement permanent* si les potentiels de gravitation et électromagnétiques $g_{\alpha\beta}$ et φ_α sont indépendants de la variable temporelle x^4.

Il résulte de l'étude antérieurement faite du problème de Cauchy que le vecteur u^α est indépendant de la variable x^4 et que, par suite, le système différentiel aux lignes de courant (42.1) admet la transformation infinitésimale

$$\partial f = \partial_4 X f.$$

De l'existence de la forme quadratique invariante

$$D\omega = [\delta i_\alpha, \delta x^\alpha],$$

on déduit alors celle d'une forme linéaire invariante $D\omega(X, \delta)$, il vient

$$D\omega(X, \delta) = \frac{\partial(D\omega)}{\partial(\delta x^4)} = -\delta i_4.$$

Par suite la quantité i_4 est intégrale première du système (42-1) et, nous pouvons énoncer :

THÉORÈME. — *Dans tout mouvement permanent, la composante $i_4 = u_4 - k\varphi_4$ conserve une valeur constante le long de chaque ligne de courant.*

Plus généralement, i_4 demeure constant sur toute variété caractéristique de la forme et en particulier demeure constant le long de chaque ligne de tourbillon. Ces différents résultats constituent la transposition du théorème classique de Bernouilli.

46. *Cas du schéma fluide parfait-champ électromagnétique.* — Les résultats précédents s'étendent sans difficultés aux hypothèses du paragraphe 33, c'est-à-dire au cas d'un schéma fluide parfait-champ électromagnétique dont la pression $p^\star$ est supposée constante le long de toute la ligne de courant. Si $\rho^\star$ et $p^\star$ sont liés par une équation d'état, on peut établir les propositions suivantes :

Les lignes de courant sont les extrémales de l'intégrale

$$\overline{\Phi} = \int_{u_0}^{u_1} \left[\mathrm{F}(g_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta)^{\frac{1}{2}} - k\varphi_\alpha \dot{x}^\alpha \right] du,$$

où F. désigne *l'indice* du fluide

$$\mathrm{F} = \exp. \int_{p_0}^{p^\star} \frac{dp^\star}{\rho^\star + p^\star}.$$

Le système différentiel correspondant des lignes de courant admet l'invariant intégral relatif défini par la forme linéaire

$$\overline{\omega} = (\mathrm{F}\mu_\alpha - k\varphi_\alpha)\,\delta x^\alpha.$$

La théorie des tourbillons, ainsi que celle des mouvements permanents s'en déduisent aisément.

VII. — Équations du mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique.

47. *Le problème de raccordement.* — A l'intérieur d'un tube d'univers S considérons une distribution correspondant au schéma fluide parfait-champ électromagnétique, qui produit à l'intérieur de S un champ électromagnétique, $\mathrm{F}^\star_{\alpha\beta}$. A l'extérieur de S règnent des champs gravifiques et électromagnétiques, correspondant au schéma champ électromagnétique. Nous désignerons par $\mathrm{F}_{\alpha\beta}$ ce dernier champ électromagnétique. L'hypersurface S qui limite la distribution donnée doit nécessairement être engendrée par des lignes de courant de cette distribution.

Supposons d'abord comme au paragraphe 36, que les potentiels et champs gravifiques et électromagnétiques soient continus à la traversée de S. On en déduit, comme dans le cas du simple schéma fluide parfait, que la pression $p^\star$ doit s'annuler le long de S. Considérons en particulier le tube d'univers décrit par une très petite masse matérielle électrisée; $p^\star$ s'annulant sur S, il résulte des considérations du paragraphe 11 que le tenseur électromagnétique $\tau_{\alpha\beta}$ est très petit à l'intérieur de S et tend identiquement vers zéro, quand on réduit le tube d'univers à une ligne d'univers. Ainsi dans ces hypothèses on n'obtient pas le modèle d'une très petite particule électrisée.

Nous sommes ainsi amenés à supposer que, à la traversée de S, le champ de gravitation reste continu, mais que le champ électromagnétique subit une discontinuité correspondant à la pression $p^\star$ non nulle sur S. La théorie correspondante de l'électron que nous allons maintenant esquisser sera dite *théorie de l'électron avec tensions mécaniques*.

48. *Une évaluation de la discontinuité du champ électromagnétique.* — Soit $f(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$ l'équation de S dans un système de coordonnées arbitraire. Nous rapporterons les deux champs considérés au système de coordonnées de Gauss relatif à S. La surface S est alors représentée par l'équation $x^4 = 0$, et l'on a

$$g_{4i} = 0, \qquad g_{44} = 1.$$

Les quantités S^4_λ ne dépendant pas des dérivées obliques des données de Cauchy sur S, ces grandeurs ont, sur S, mêmes valeurs pour le champ intérieur et pour le champ extérieur. On en déduit l'égalité des composantes T^4_λ et $T^{\star 4}_\lambda$ des tenseurs d'énergie de ces deux champs et par suite les équations

$$\lambda = i; \qquad (\rho^\star + p^\star) u_i u^4 - F^\star_{ij} F^{\star 4j} = - F_{ij} F^{4j},$$

$$\lambda = 4; \qquad (\rho^\star + p^\star) u_4 u^4 - p^\star + \frac{1}{4} F^\star_{ij} F^{\star ij} - \frac{1}{2} F^\star_{4i} F^{\star 4i} = \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} F_{4i} F^{4i}.$$

Or le tube S étant engendré par des lignes de courant, u^4 est nul et il vient

$$F^\star_{ij} F^{\star 4j} = F_{ij} F^{4j}, \tag{48.1}$$

$$\frac{1}{4} F^\star_{ij} F^{\star ij} - \frac{1}{2} F^\star_{4i} F^{\star 4i} = p^\star + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} F_{4i} F^{4i}. \tag{48.2}$$

Pour évaluer la discontinuité de champ électromagnétique, nous poserons

$$F^{\star\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} + \alpha \varphi^{\alpha\beta}, \tag{48.3}$$

où α est scalaire de l'ordre de $p^\star$ et où $\varphi^{\alpha\beta}$ est le tenseur antisymétrique défini en coordonnées arbitraires par l'équation

$$\varphi^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\rho} \frac{g^{\rho\sigma} \partial_\sigma f \partial_\delta f}{\Delta_1 f}, \tag{48.4}$$

avec

$$\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}[D(F_{\lambda\mu})]^{-\frac{1}{2}}, \tag{48.5}$$

$D(F_{\lambda\mu})$ désignant le déterminant des composantes $F_{\lambda\mu}$ du champ électromagnétique. En coordonnées de Gauss, la formule (48.4) fournit les composantes

$$\varphi^{ij} = \eta^{ijk4} F_{k4}; \qquad \varphi^{4i} = 0.$$

On en déduit aisément

$$\varphi_{ij} = \overline{\eta}_{ijk4} F^{k4}; \qquad \varphi_{4i} = 0,$$

avec

$$\overline{\eta}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}[D(F^{\lambda\mu})]^{-\frac{1}{2}}.$$

En reportant l'expression (48.3) du champ électromagnétique $F^{\star\alpha\beta}$ dans les premiers membres des équations (48.1), il vient

$$F^{\star}_{ij} F^{\star 4j} = (F_{ij} + \alpha\varphi_{ij}) F^{4j},$$

et comme

$$\varphi_{ij} F^{4j} = -\overline{\eta}_{ijk4} F^{j4} F^{k4} = 0,$$

les équations (48.1) sont identiquement vérifiées.

En procédant de même au premier membre de (48-2), il vient

$$\frac{1}{4} F^{\star}_{ij} F^{\star ij} - \frac{1}{2} F^{\star}_{4i} F^{\star 4i} = \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} F_{4i} F^{4i} + \frac{1}{2}\alpha (F_{ij}\varphi^{ij}) + \alpha^2 \varphi_{ij}\varphi^{ij},$$

or

$$\frac{1}{2} F_{ij}\varphi^{ij} = \frac{1}{2}\eta^{ijk4} F_{ij} F_{k4} = 1.$$

Par suite, pour $\alpha = p^{\star}$, l'équation (48.2) est vérifiée à des termes en $(p^{\star})^2$ près. Il en résulte que nous adopterons, pour évaluer la discontinuité, la formule

$$F^{\star\alpha\beta} = F^{\alpha\beta} + p^{\star}\varphi^{\alpha\beta}. \tag{48.6}$$

49. *Équations de Maxwell vérifiées sur* S. — Nous supposerons dans la suite que $p^{\star}$ est une constante absolue, caractérisant l'électron considéré. Dans cette hypothèse, nous allons établir que les équations de Maxwell qui doivent être vérifiées sur S

$$D^4 \equiv \nabla_{\lambda} F^{\star\lambda(4)} = 0, \tag{49.1}$$

$$E^4 \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk4}\nabla_i F^{\star}_{jk} = 0 \tag{49.2}$$

le sont effectivement pour le champ électromagnétique défini par la formule (48.6).

Tout d'abord pour (49.1) il vient

$$D^4 \equiv \nabla_{\lambda} F^{\star\lambda(4)} = p^{\star}\nabla_{\lambda}\varphi^{\lambda(4)},$$

et les composantes de $\varphi^{\lambda 4}$ étant nulles,

$$\nabla_\lambda F^{\star\lambda 4} = 0.$$

Passons à l'équation (49.2). Nous pouvons toujours supposer que le système de coordonnées sur S a été choisi de façon que sur S

$$D(F^{\alpha\beta}) = 1.$$

Dans ce système de coordonnées, l'on a

$$E^4 \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk4}\nabla_i F^{\star}_{jk} = \frac{1}{2}p^{\star}\varepsilon^{ijk4}\varepsilon_{jkh4}\nabla_i F^{h4},$$

soit

$$E^4 \equiv \frac{1}{2}p^{\star}\delta^i_h \nabla_i F^{h4} = 0.$$

Ainsi l'équation (49.2), elle aussi, se trouve vérifiée sur S. Dans l'hypothèse faite, le champ électromagnétique (48.6) est donc bien compatible avec les équations de Maxwell.

50. *Les équations du mouvement de l'électron (avec tension).* — Plaçons-nous de nouveau en coordonnées quelconques. En vertu des équations (33.2) et de l'hypothèse de la constance de $p^{\star}$, les lignes de courant du champ intérieur à S satisfont au système différentiel.

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u^{\beta} = kF^{\star\alpha\beta}u_{\alpha}.$$

A la frontière le champ électromagnétique intérieur est donné par la formule (48.6), et les lignes de courant qui engendrent S satisfont aux équations

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u^{\beta} = k\left[F^{\alpha\beta} + p^{\star}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\rho}\frac{g^{\rho\sigma}\partial_{\sigma}f\,\partial_{\delta}f}{\Delta_1 f}\right]u_{\alpha}.$$

Par passage à la limite on obtient les équations du mouvement d'un électron dans un champ électromagnétique donné

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}u^{\beta} = k[F^{\alpha\beta} + p^{\star}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\rho}V^{\rho}V_{\delta}]u_{\alpha}, \tag{50.1}$$

où $\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est donné par la formule (48.5) et où V^{ρ} désigne le vecteur unitaire de la normale principale à la ligne d'univers considérée.

VIII. — Les équations macroscopiques de l'Électromagnétisme.

51. *Les valeurs moyennes des grandeurs électromagnétiques.* — Dans les domaines d'espace temps considérés, les potentiels et champs de gravitation ainsi que leurs dérivées premières varient relativement peu. Au contraire, comme nous l'avons déjà remarqué, les grandeurs microscopiques d'origine

électromagnétique qui interviennent dans les équations rigoureuses de la partie II subissent de grandes variations au sein des particules élémentaires ou dans leur voisinage. Pour caractériser macroscopiquement l'état électrodynamique de la matière, nous partirons comme dans la théorie classique des grandeurs microscopiques, et nous prendrons leur moyenne dans un domaine fini d'espace temps, par exemple dans la pseudo-sphère définie par

$$\sum_{\alpha=1}^{4} (\xi^\alpha - x^\alpha)^2 \leqq a^2,$$

de centre le point de coordonnées (x^α).

Pour obtenir de cette manière les grandeurs dites maxwelliennes, il nous faut supposer (¹) que le pseudo-rayon a été choisi de façon que les moyennes obtenues aient des valeurs indépendantes de a. Par suite on doit pouvoir traiter un nombre a tel que, d'une part, la pseudo-sphère de rayon a contienne un grand nombre de particules élémentaires et que, d'autre part, les grandeurs maxwelliennes varient infiniment peu à l'intérieur de cette sphère.

Dans cette hypothèse nous allons essayer de former les moyennes des différents membres des équations microscopiques (13.1) (14.1) (14.2). L'opération de dérivation, ordinaire ou covariante, par rapport aux variables x^α et celle de multiplication par le tenseur fondamental sont toutes deux échangeables avec l'opération de formation de la moyenne conformément à des notations classiques, nous désignerons par $\overline{f}$ la valeur moyenne de la fonction f.

52. *Le tenseur d'énergie et les équations d'Einstein.* — Dans la théorie macroscopique, intervient d'une manière essentielle le tenseur antisymétrique obtenu en prenant la valeur moyenne du champ électromagnétique

$$H_{\alpha\beta} = \overline{F}_{\alpha\beta}. \tag{52.1}$$

D'après la propriété de commutativité des opérations de multiplication par le tenseur fondamental et de formation de la moyenne, on a aussi

$$H^{\alpha\beta} = \overline{F}^{\alpha\beta}. \tag{52.2}$$

On donne au tenseur $H^{\alpha\beta}$ le nom de tenseur champ électrique-induction magnétique (en abrégé tenseur c. e. i. m).

Essayons de former les équations provenant des équations d'Einstein (13.1) en nous plaçant par exemple dans l'hypothèse d'un schéma matière-champ électromagnétique. Le tenseur d'énergie $T_{\alpha\beta}$ étant quadratique par rapport au champ F, sa valeur moyenne ne peut s'exprimer seulement à l'aide du tenseur

(¹) BECKER, *Théorie des électrons*, Paris, 1938, p. 123.

maxwellien $H_{\alpha\beta}$. Il est possible de montrer que l'on peut mettre le tenseur $T_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$(52.3) \qquad T_{\alpha\beta} = \rho^{**} U_\alpha U_\beta + \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} G_{\lambda\mu} H^{\lambda\mu} - g^{\lambda\mu}(G_{\lambda\alpha} H_{\mu\beta} + G_{\mu\beta} H_{\lambda\alpha}),$$

où U_α est un vecteur unitaire et $G_{\alpha\beta}$ un tenseur antisymétrique. A ce tenseur on donne le nom de tenseur *induction électrique-champ magnétique* (en abrégé tenseur i. e. c. m). Dans un grand nombre d'interprétations physiques s'introduit le tenseur

$$(52.4) \qquad M_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta},$$

qui sera dit le tenseur *d'aimantation-polarisation* du milieu considéré. Dans ces conditions les équations d'Einstein macroscopiques prendront la forme

$$(52.5) \qquad S_{\alpha\beta} = \chi \overline{T}_{\alpha\beta},$$

où $\overline{\overline{T}}_{\alpha\beta}$ est défini par l'équation (52.3).

53. *Les équations de Maxwell.* — Les équations (14.1) et (14.2) étant linéaires par rapport aux composantes $F_{\alpha\beta}$ du champ électromagnétique, la formation des équations macroscopiques correspondantes ne présente aucune difficulté. Des équations (14.1), complétées par l'hypothèse de transfert de Lorentz

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu u^\beta,$$

on déduit immédiatement

$$\nabla_\alpha H^{\alpha\beta} = \overline{\mu u}^\beta.$$

En exprimant le tenseur $H^{\alpha\beta}$ en fonction du tenseur i. e. c. m. $G^{\alpha\beta}$ et du tenseur d'aimantation-polarisation à l'aide de la formule (52.4), on obtient

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \overline{\mu u}^\beta + \nabla_\alpha M^{\alpha\beta}.$$

Nous poserons

$$(53.1) \qquad S^\beta = \overline{\mu u}^\beta + \nabla_\alpha M^{\alpha\beta}.$$

Il vient ainsi le premier groupe des équations de Maxwell macroscopiques

$$(53.2) \qquad \nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = S^\beta,$$

où le vecteur S^β est dit vecteur-courant macroscopique.

Des équations (14.2), on déduit le second groupe d'équations de Maxwell macroscopiques

$$(53.3) \qquad \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} \nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0.$$

54. *Le vecteur courant macroscopique.* — Le vecteur courant macroscopique, défini par l'équation (53.1), provient du courant électronique $\overline{\mu u}^\beta$ et du courant

d'aimantation-polarisation $\nabla_\alpha M^{\alpha\beta}$. Ce vecteur S^β peut être décomposé d'une manière et d'une seule en une somme de deux vecteurs, dont l'un est colinéaire au vecteur vitesse macroscopique U^β et l'autre lui est orthogonal. Nous poserons donc

$$S^\beta = C^\beta + L^\beta, \tag{54.1}$$

avec

$$C^\beta = \mu^\star U^\beta, \qquad L^\beta U_\beta = 0. \tag{54.2}$$

Le vecteur C^β est appelé courant de convection et le vecteur L^β courant de conduction. Au scalaire

$$\mu^\star = S^\beta U_\beta, \tag{54.3}$$

nous donnerons le nom de densité maxwellienne de charge.

55. *Les équations de liaison.* — Aux équations d'Einstein et de Maxwell, il nous faut adjoindre les équations de liaison permettant d'évaluer le tenseur c. e. i. m. $H^{\alpha\beta}$ et le tenseur i. e. c. m. $G^{\alpha\beta}$, l'un à partir de l'autre et permettant de calculer le vecteur-courant macroscopique. A partir de la théorie classique ([1]), on obtient tout d'abord entre $H^{\alpha\beta}$ et $G^{\alpha\beta}$ les équations de liaison

$$G^{\alpha\beta} U_\beta = l H^{\alpha\beta} U_\beta, \tag{55.1}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} H_{\alpha\beta} U_\gamma = m\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} G_{\alpha\beta} U_\gamma, \tag{55.2}$$

où le scalaire l désigne le pouvoir diélectrique et le scalaire m est la perméabilité magnétique du milieu considéré.

Pour évaluer le vecteur S^α, il nous suffit, compte tenu de (54.1) et (54.2), d'évaluer le courant de conduction L^α. Nous poserons

$$L^\alpha = \sigma H^{\alpha\beta} U_\beta, \tag{55.3}$$

où σ désigne la conductibilité électrique du milieu.

Les scalaires l, m, σ étant donnés dans le domaine d'espace-temps considéré, on peut faire pour les équations (52.1), (52.2), (53.3), complétées par (54.1), (54.2), (55.1), (55.2), (55.3), une étude du problème de Cauchy en tout point analogue à celle du paragraphe 35.

Quant aux lignes de courant macroscopiques, trajectoires des vecteurs U_α, on peut montrer qu'elles sont géodésiques d'un espace de Finsler généralisé, tel que ceux que j'ai étudiés dans deux Notes récentes ([2]). Je me propose de revenir sur cette question dans un travail ultérieur.

([1]) Cf. Becker, *Théorie des électrons*, Paris, 1938, p. 364.

([2]) Cf. Lichnerowicz, *Comptes rendus*, **214**, 1942, p. 599; **216**, 1943, p. 25.

BIBLIOGRAPHIE.

BECKER, *Théorie des électrons,* trad. Lubin; Paris, 1938.

E. CARTAN, *Leçons sur les invariants intégraux,* Hermann, Paris, 1922.

EISENHART, *Trans. of the Americ. Math. Soc.,* 1924, p. 206.

HILBERT, *Math. Annalen,* **92**, 1924, p. 11.

LICHNEROWICZ, *Problèmes globaux en mécanique relativiste* (*Actual. Scient. Ind.*, n° 833, Hermann, Paris, 1939; *Sur l'invariant intégral de l'hydrodynamique relativiste* (*Ann. École Normale Sup.*, 1941, fasc. IV); *L'intégration des équations de la gravitation relativiste et le problème des n corps*, sous presse au *Journal de Mathématiques pures et appliquées; Comptes rendus,* **209**, 1939, p. 533; **212**, 1941, p. 421.

STELLMACHER, *Math. Annalen,* **115**, 1937, p. 136.

SYNGE, *Proc. London Math. Soc.,* 2e série, **43**, 1937, p. 385.