ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

E. BLANC

Les ensembles surconvexes plans

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 60 (1943), p. 215-246

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1943_3_60__215_0>

LES ENSEMBLES SURCONVEXES PLANS

PAR M. E. BLANC.

INTRODUCTION.

Dans un Mémoire de 1921 ([1]) consacré à l'étude des courbes orbiformes, H. Lebesgue décrit sans trop de détails un processus destiné à « compléter » ([2]) un ensemble par l'adjonction de « lentilles » appropriées. Peut-être faut-il voir là une première et très fugitive apparition de l'idée de surconvexité.

En 1935, M. Anton Mayer ([3]) utilise, lui aussi, dans un Mémoire sur les orbiformes, une propriété qu'ils possèdent (sans qu'elle leur soit caractéristique), celle, pour un orbiforme de largeur d, de contenir en même temps que deux de ses points, deux arcs de cercle de rayon d qui passent par ces points. Ayant porté son attention sur cette propriété, l'ayant en quelque sorte isolée et étudiée pour elle-même, M. Mayer la généralise par l'intervention d'une métrique de Minkowski et par le remplacement des arcs de rayon d par des arcs de la courbe étalon de cette métrique; cette propriété ainsi étendue constitue dans un Mémoire légèrement ultérieur du même auteur ([4]), la définition de la surconvexité (*Überkonvexität*).

Presque simultanément, M. Bückner, toujours à propos des orbiformes ([5]), était amené à définir la notion de « corps arrondi (*abgerundet*) à l'index d ».

([1]) H. LEBESGUE, *Sur quelques questions de minimum*, etc. (*Journal de Mathématiques*, t. 4, 1921, p. 67-96).

([2]) Un ensemble *complet* est un ensemble auquel on ne peut adjoindre aucun point sans que son diamètre en soit augmenté. Cette définition est due à MEISSNER [*Über Punktmengen konstanter Breite* (*Vjschr. Naturf. Ges. Zürich*, t. 56, 1911, p. 42-50)]. Les ensembles complets sont identiques aux orbiformes.

([3]) A. MAYER, *Der Inhalt der Gleichdicke* (*Math. Ann.*, t. 110, 1935, p. 97-127).

([4]) A. MAYER, *Eine Überkonvexität* (*Math. Zeit.*, t. 39, 1935, p. 511-531). Nous désignerons ce mémoire par la lettre **U**.

([5]) H. BÜCKNER, *Über Fläche von fester Breite* (*Jahr. Deut. Math. Ver.*, t. 46, 1936, p. 96-139). Ce Mémoire sera désigné par la lettre **B**.

Ses recherches étaient faites à un tout autre point de vue que celles de M. Mayer et indépendamment des travaux de celui-ci; ses définitions sont relatives à la métrique euclidienne; mais il n'en reste pas moins que le corps arrondi de M. Bückner coïncide dans cette métrique avec le corps surconvexe de M. Mayer.

Il ne faut pas trop s'étonner de voir la surconvexité apparaître à propos de l'étude des orbiformes. Elle est dans la nature de la question car tout orbiforme la possède comme nous l'avons dit plus haut. Cette notion pouvait cependant s'introduire aussi dans l'étude du parallélisme et M. Nicolesco ([1]) ne semble pas avoir été très loin de la pressentir. Enfin les ensembles surconvexes-R sont, comme nous le verrons, susceptibles d'une autre définition; *intersection* ([2]) *d'une famille finie ou infinie de sphères de rayon* R; il pouvait donc paraître naturel à qui s'occupait des propriétés des *réunions* de telles sphères ([3]), de chercher à étudier aussi les intersections et d'arriver ainsi à la notion de surconvexité. C'est ainsi que j'ai été amené en 1938 à définir la surconvexité indépendamment des recherches faites par les auteurs que je viens de citer. De cette époque date la rédaction du premier Chapitre du présent Mémoire et quelques-uns des résultats du second et du quatrième. Ce n'est qu'en 1939 que j'ai eu connaissance des travaux de Mayer, de Bückner et des autres auteurs dont je viens de parler. Le premier Chapitre était à cette époque déjà rédigé dans sa forme actuelle; bien qu'il contienne peu de résultats nouveaux, j'ai cru possible et intéressant de le conserver, d'abord à cause d'une différence essentielle dans la définition donnée, à cause ensuite de certains principes de raisonnement qui ne se trouvent pas dans les Mémoires cités, enfin pour l'importance que j'y donne à la définition des ensembles surconvexes comme intersections de familles de cercles : cette définition citée comme simple propriété par Bückner et passée sous silence par Mayer est en effet celle qui peut se prêter à une extension aux espaces simplement métriques.

En 1938 paraissaient deux travaux inspirés par les définitions de Mayer (il ne semble pas que les auteurs aient eu connaissance du Mémoire de Bückner). Le premier de ces travaux est la dissertation inaugurale d'un élève de M. Van der Corput, M. Buter ([4]); le deuxième est un article de M. Van der Corput ([5]) lui-même.

([1]) Miron Nicolesco, *Sur quelques points de géométrie finie directe* (*Bull. Class. Sciences Ac. Roy. Belg.*, 1933, fasc. 7, p. 738-754). Ce mémoire sera désigné par la lettre **N**.

([2]) Au sens de la théorie des ensembles.

([3]) E. Blanc, *Les espaces métriques quasi-convexes.* (*Thèse*, Paris, 1938). Ce mémoire sera désigné par **EM**.

([4]) A. Buter, *Hyperconvexe Punktverzamelingen* (*Dissertation*, Gröningen, 1938) en hollandais avec résumé allemand, désigné par la lettre **H**.

([5]) Van der Corput, *Überkonvexe Mengen in der Ebene* (*Proc. Kon. Ned. Ac. Wetens*, vol. XLI, 1938, p. 946-955), désigné par la lettre **V**.

Le Mémoire de M. Buter approfondit dans le détail certains points des recherches de Mayer. Il apporte une nouveauté importante : la notion *d'enveloppante surconvexe*-R (¹) d'un ensemble E définie comme intersection de tous les ensembles surconvexes-R qui contiennent E. Les derniers théorèmes de ce travail énoncent des résultats intéressants sur l'enveloppante surconvexe d'un système de n points. Malheureusement, leur démonstration n'est pas entièrement rigoureuse, ce qui n'enlève rien à leur exactitude.

Le Mémoire de M. Van der Corput est consacré à l'édification axiomatique de la notion plus générale et plus abstraite de surconvexité sur un ensemble donné du plan. L'auteur, contrairement à ses devanciers, emploie non des « arcs unitaires », mais des « lentilles » pour établir sa définition.

Pour en finir avec ces indications bibliographiques, je dois enfin citer un Mémoire de M. Vincensini (²) où celui-ci, s'appuyant sur la définition de Mayer, établit d'abord un critère de surconvexité basé sur la courbure, et étudie ensuite la surconvexité pour les séries linéaires d'ensembles.

La surconvexité n'a pas, à ma connaissance, suscité d'autres recherches jusqu'ici.

Après le premier Chapitre consacré à la définition de la surconvexité et à la caractérisation des ensembles surconvexes, le second chapitre du présent Mémoire contient l'étude des ensembles-adjoints, et de la correspondance entre les points de leurs frontières. Cette étude me conduit à celle du front-R d'un ensemble puis à celle de l'enveloppante surconvexe définie comme adjoint de l'adjoint. Il m'a été commode dans cette étude de nommer *classe* d'un ensemble le rayon de son cercle circonscrit. Cette notion de classe d'un ensemble paraît avoir une grande importance dans la théorie de la surconvexité. Les notions d'adjoint et de front-R sont dues à M. Nicolesco, celle d'enveloppante est due, nous l'avons vu, à M. Buter; on ne s'étonnera pas de retrouver ici quelques résultats de ces auteurs, mais la plupart des résultats contenus dans cet important Chapitre sont entièrement nouveaux.

Le Chapitre III est consacré tout entier à la démonstration du théorème suivant : *Tout continu d'ordre deux relativement à la famille des droites et des cercles de rayon supérieur à* R, *est soit la frontière d'un ensemble surconvexe*-R, *soit un arc d'une telle frontière*. Ce théorème généralise certains résultats de M. André Marchaud relatifs aux continus d'ordre deux.

(¹) **H**, p. 45.

(²) PAUL VINCENSINI, *Sur les figures superconvexes planes* (*Bull. Soc. Math.*, 1936, p. 197-208).

CHAPITRE I.

DÉFINITION ET CARACTÉRISATION DES ENSEMBLES SURCONVEXES.

Définition.

1. Étant donnés dans le plan deux points A et B distants au plus de $2R$, considérons la « lentille fermée de rayon R définie par ces deux points », c'est-à-dire l'ensemble des points communs aux deux cercles fermés (¹) de rayon R qui passent par A et B. Cet ensemble fermé, que nous désignerons dans tout ce qui suit par $L(A, B; \overline{R})$, a pour frontière les deux arcs de cercles de rayon R, de mesures inférieures ou égales à π, limités par A et B. Ces deux arcs n'ont d'ailleurs pour mesure π que si $AB = 2R$; dans ce cas $L(A, B; \overline{R})$ se confond avec le cercle fermé de diamètre AB.

Soit maintenant un ensemble *fermé* E quelconque et ne *contenant pas tout le plan* (²).

Nous dirons qu'il est *surconvexe pour le rayon* R (en abrégé scvR) *si, étant donné dans* E *un couple de points quelconque* A, B, *lorsque la distance* AB *est au plus égale à* $2R$, *la lentille* $L(A, B; \overline{R})$ *est contenue dans* E (³).

Un ensemble constitué par un point unique sera, d'après cette définition, considéré comme surconvexe pour n'importe quelle valeur de R.

Tout cercle fermé de rayon R, toute lentille de rayon R sont des ensembles scvR.

Cette définition n'impose aucune condition aux couples de points dont la distance est supérieure à $2R$. Rien ne s'oppose donc à ce qu'un ensemble scvR soit formé de plusieurs composants séparément scvR et tels que la plus petite distance de l'un à l'autre soit supérieure à $2R$. Il n'existera aucun autre lien obligatoire entre deux de ces composants. *On pourra donc borner l'étude des ensembles scv*R *à ceux d'entre eux qui sont connexes.*

Nous établirons par la suite qu'un tel ensemble est toujours de diamètre inférieur à $2R$.

(¹) Un cercle fermé de centre A et de rayon R est l'ensemble $C(A, \overline{R})$ des points M tels que $AM \leqq R$; le cercle ouvert $C(A, R)$ est l'ensemble des points M tels que $AM < R$.

(²) Nous préférons ne pas avoir à considérer comme scvR un ensemble contenant tout le plan. L'intérêt de la surconvexité réside en effet en des propriétés de frontières qui ne sauraient se poser pour un tel ensemble.

(³) Cette définition offre avec celles de Mayer et Bückner les différences suivantes :

1° Ces auteurs supposent qu'aucun couple A, B de E n'a une distance supérieure à $2R$.

2° Ils exigent que les deux arcs de cercle qui limitent la lentille (et non pas la lentille elle-même) appartiennent à E. Alors que la première de ces différences est essentielle, la seconde est de peu d'importance.

THÉORÈME I. — *L'intersection (partie commune) d'une famille finie ou infinie d'ensembles* scvR *est encore un ensemble* scvR *à moins qu'elle ne soit vide.*

Si cette partie commune ne contient qu'un seul point la chose est évidente. Si elle contient deux points A et B, chacun des ensembles de la famille considérée contient $L(A, B; \overline{R})$ et cette lentille appartient donc à leur intersection.

COROLLAIRE. — *L'intersection d'une famille finie ou infinie de cercles fermés de rayon* R *est un ensemble* scvR. *Cet ensemble est évidemment connexe.*

Le but essentiel du présent Chapitre sera d'établir la réciproque suivante de ce corollaire :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Tout ensemble* scvR *connexe* [1] *est l'intersection d'une famille de cercles fermés de rayon* R.

Nous aurons pour cela à établir un certain nombre de théorèmes préliminaires concernant les ensembles surconvexes et leurs frontières.

THÉORÈME II. — *Tout ensemble* scvR E, *connexe ou non, de diamètre inférieur à* 2R, *est en même temps* scvR' *si* $R' \geqq R$.

Soit en effet un couple A, B extrait de E; puisque AB est inférieur à 2R et *a fortiori* à 2R', les lentilles $L(A, B; \overline{R})$ et $L(A, B; \overline{R'})$ existent et l'on a évidemment :

$$L(A, B; \overline{R}) \supset L(A, B; \overline{R'});$$

la première des deux est contenue dans E en vertu de l'hypothèse; la seconde l'est donc aussi, ce qui justifie la conclusion.

Remarque. — L'hypothèse faite sur le diamètre de E est nécessaire pour que E ne contienne aucun couple dont la distance soit intermédiaire entre 2R et 2R'; pour un tel couple $L(A, B; \overline{R})$ n'existerait pas et le raisonnement ne pourrait se poursuivre.

THÉORÈME III. — *Tout ensemble* scvR E *de diamètre inférieur à* 2R *est en même temps convexe (et par conséquent connexe).*

Le segment AB est en effet contenu quel que soit R dans la lentille $L(A, B; \overline{R})$ et l'hypothèse faite sur le diamètre entraîne comme plus haut l'existence de cette lentille.

On peut remarquer que ce théorème rentre dans le précédent si l'on considère le segment AB comme la lentille $L(A, B; \infty)$.

---

(1) L'hypothèse de connexité joue ici et dans ce qui va suivre un rôle capital. Elle se substituera à celle de limitation du diamètre. En d'autres termes, il y a identité entre les ensembles scv R *connexes* et les ensembles « arrondis à l'index R » de M. Bückner.

La définition de la convexité apparaît ainsi comme le cas limite pour R infini de la définition de la surconvexité R.

Frontière d'un ensemble scvR [1].

2. *La frontière* F *d'un ensemble* scvR E *de diamètre inférieur à* 2R *est un continu de Jordan fermé, sans point multiple; en chaque point de cette frontière existent deux demi-tangentes qui sont d'ailleurs opposées sauf en une infinité dénombrable de sommets. Par chaque point de cette frontière passe en outre une droite d'appui de l'ensemble; en un point où la tangente existe, cette droite d'appui se confond avec elle; en un sommet il y a une infinité de droites d'appui remplissant tout l'angle compris entre les supports des demi-tangentes.*

Ce sont là en effet des propriétés appartenant aux frontières d'ensembles convexes.

Remarque. — Toutes celles de ces propriétés qui sont locales resteront valables même si l'on ne limite plus le diamètre à 2R. On pourrait en effet dans ce cas remplacer E par son intersection E′ avec le cercle de rayon $R_1 < R$ ayant pour centre le point de la frontière au voisinage duquel on veut l'étudier. On sait (Th. I) que ce nouvel ensemble est aussi scvR.

3. Théorème IV. — *Étant donnés trois points* A, B, C *de la frontière* F *d'un ensemble scv*R E [2], *si le diamètre de l'ensemble* (A, B, C) *n'excède pas* $R\sqrt{3}$, *le rayon du cercle qui passe par ces trois points n'excède pas* R.

Considérons en effet trois points A, B, C appartenant à F et tels que leurs distances mutuelles n'excèdent pas $R\sqrt{3}$; *a fortiori* seront-elles inférieures à 2R et les trois lentilles : $L(A, B; \overline{R})$, $L(B, C; \overline{R})$, $L(C, A; \overline{R})$ existeront. De plus, le point C par exemple devra être extérieur à $L(A, B; \overline{R})$ ou sur sa frontière, sinon l'ensemble E étant scvR, C en serait un point intérieur. Il en sera de même pour A et B relativement à $L(B, C; \overline{R})$ et à $L(C, A; \overline{R})$.

Soient alors a, b, c, r respectivement les trois côtés du triangle ABC et le rayon de son cercle circonscrit. Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $a \geqq b \geqq c$. Trois cas sont possibles :

1° *Les trois angles sont aigus.* — A est au moins égal à $\frac{\pi}{3}$, et l'on a

$$r = \frac{a}{2\sin A} \leqq \frac{a}{\sqrt{3}} < R.$$

---

(1) Tout ce qui suit n'aurait aucun sens si la frontière n'existait pas, c'est-à-dire, si l'ensemble contenait tout le plan. Ceci explique la restriction faite à ce sujet au paragraphe 1.

(2) Aucune restriction n'étant plus apportée au diamètre de l'ensemble E.

2° *L'angle* A *est obtus.* — Le point A doit alors se trouver à la fois à l'intérieur du cercle de diamètre $BC = a$ et à l'intérieur ou sur la frontière de $L(B, C; \overline{R})$. Ceci n'est possible que si

$$\frac{a}{2} < r \leqq R.$$

3° A *est droit.* — Le même raisonnement donne

$$\frac{a}{2} = r \leqq R.$$

Ainsi dans tous les cas, r est au plus égal à R. C. Q. F. D.

4. Si l'on fait maintenant tendre vers un même point M les trois points A, B, C, le diamètre de l'ensemble ABC tend vers o et le théorème précédent devient applicable pourvu que A, B, C soient assez voisins de M. La plus grande limite de $r(A, B, C)$ lorsque A, B, C tendent vers M sera donc au plus égale à R. En d'autres termes :

Théorème V. — *La courbure inférieure au sens de M. Menger*[1] *de la frontière d'un ensemble scvR en un de ses points est supérieure ou égale à* $\frac{1}{R}$.

5. Nous continuerons maintenant à étudier les propriétés de la frontière au voisinage d'un de ses points M en remplaçant l'ensemble E par l'ensemble E′ intersection de E et du cercle de centre M et de rayon $R\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ceci ne change rien aux propriétés que l'on veut étudier et le nouvel ensemble est à la fois scvR et convexe (*voir* remarque du paragraphe 2).

Considérons deux points P et Q de la frontière F′ de E′. On a

$$r(M, P, Q) \leqq R.$$

Faisons tendre P vers M, Q restant fixe : MP tend vers l'une des demi-tangentes à F′ en M, soit MT; le cercle MPQ tend vers le cercle γ passant par Q et tangent en M à MT. Le rayon ρ de γ est donc au plus égal à R.

Si l'on considère alors le cercle C_M de rayon R, tangent en M à MT et situé

---

[1] Menger, *Über allgemeine Metrik. Vierte Untersuchung* (*Math. Ann.*, t. 103, p. 480).

Le théorème reste bien entendu valable pour une courbure entendue au sens de *Alt* (Dissertation-Vienne, 1932).

M. A. Mayer démontre un théorème équivalent à celui-ci, mais avec une métrique de Minkowski (**U**, § 6). Il va de soi que le procédé de démonstration donné ici serait difficilement généralisable à une telle métrique.

Enfin M. Vincensini (*loc. cit.*, p. 199-200) établit, en supposant que F possède en tout point une courbure continue (au sens euclidien), une relation entre la courbure de F et celle de la courbe unitaire de la métrique minkowskienne utilisée. Cette relation se réduit à celle énoncée ci-dessus dans le cas où la courbe unitaire est un cercle. La démonstration est basée sur un résultat dû à M. B. Segre. Il semble que l'on pourrait ramener l'un à l'autre les théorèmes de Mayer et de Vincensini.

du même côté que γ de MT, il résulte de ce qui précède que γ est contenu dans C_M ou au plus confondu avec lui. Le point Q étant un point quelconque de F', on voit que F' est formé de points intérieurs à C_M ou situés sur sa frontière. Il en sera de même de E' car l'existence d'un point de E' extérieur à C_M entraînerait celle d'au moins un point de F' extérieur à C_M. Nous dirons que C_M est un *cercle d'appui* de E' (1). Il peut évidemment se faire que certains points de E soient extérieurs à C_M; nous dirons donc que C_M constitue pour E un *cercle d'appui local*.

Si au point M les deux demi-tangentes sont opposées, il passe en ce point un cercle d'appui unique de rayon R. Si elles ne le sont pas, on obtient par la construction précédente pour E' deux cercles d'appui distincts; E' est donc localisé dans la lentille fermée constituée par ces deux cercles; mais alors tout cercle de même rayon passant par M et tangent à une quelconque droite d'appui issue de M, contient cette lentille, c'est donc aussi un cercle d'appui pour E'. Les centres de ces cercles forment un arc $\alpha\beta$ du cercle C(M, R), α et β étant les centres des deux cercles correspondant aux demi-tangentes. Ainsi :

THÉORÈME VI. — *Par tout point de la frontière d'un ensemble* scvR, *passe au moins un cercle de rayon* R, *cercle d'appui local pour cet ensemble. Par un sommet de cette frontière passent une infinité de cercles d'appui local, ayant en commun une lentille dite d'appui local* (2).

Intersection d'un ensemble scvR avec une circonférence de rayon R.

6. Soit l'ensemble scvRE et soit une circonférence C de rayon R. Si ces deux ensembles ont en commun deux points α et β, il est évident qu'ils auront aussi en commun le plus petit des deux arcs $\alpha\beta$ situés sur le cercle C; si d'autre part

---

(1) M. G. Bouligand appelle cercle d'appui d'un ensemble un cercle qui ne contient à *son intérieur* aucun point de l'ensemble. Il est évident que si l'on veut étendre la notion de droite d'appui au cas d'un cercle, les deux extensions par l'intérieur ou l'extérieur sont aussi plausibles l'une que l'autre. On pourrait dans le cas actuel parler de cercle d'appui enveloppant. Je ne le ferai que dans le cas où la nécessité s'en ferait sentir pour éviter toute ambiguïté.

(2) L'existence d'une courbe unitaire d'appui en tout point de la frontière d'un ensemble surconvexe est démontrée par M. A. Mayer, **U**, p. 516 et M. Buter (M. Bückner ne s'en préoccupe pas). Il s'agit pour ces auteurs de figures surconvexes à leurs sens, c'est-à-dire définies par arcs unitaires (et non par lentilles), avec une métrique de Minkowski, *le diamètre ne devant pas dépasser* 2R.

Leur résultat revient donc à l'existence d'une courbe unitaire d'appui local si l'on se libère de cette dernière restriction. Si l'on fait intervenir maintenant l'hypothèse de connexité, mes raisonnements ultérieurs restent valables pour une métrique de Minkowski. On voit donc que, même pour une telle métrique, les ensembles surconvexes définis par lentilles (au sens de M. Van der Corput ou au mien) pourvu qu'on les suppose connexes, auront un diamètre inférieur à 2R et posséderont les propriétés qui caractérisent les ensembles surconvexes fermés de Mayer.

Je dois ajouter que M. A. Mayer n'établit ses conditions de courbure qu'après avoir établi l'existence du cercle d'appui. La marche inverse que je me trouve avoir suivie paraît être difficilement utilisable dans le cas de la métrique de Minkowski.

ils ont en commun deux points diamétralement opposés de C, E contiendra les deux demi-circonférences, et s'ils ont en commun trois points α, β, γ non situés sur une même moitié de la circonférence C, E contiendra les arcs $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, c'est-à-dire la totalité de C. Il résulte de là que 4 cas seulement sont possibles (¹) :

1° C ne coupe pas E,
2° C a en commun un seul point avec E.
3° C a en commun avec E un arc inférieur à une demi-circonférence,
4° C est contenu tout entier dans E.

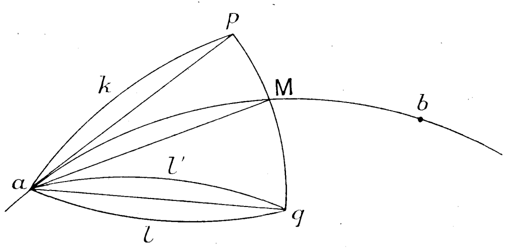
Dans le second cas le point commun unique ne peut être qu'un point frontière de E. Dans le troisième cas *ou bien l'arc commun* $\alpha\beta$ *est entièrement formé de points frontières de* E, *ou bien tous ses points sont des points intérieurs à l'exception de ses extrémités* α *et* β. Enfin, dans le quatrième cas, *ou bien tous les points de* C *sont des points frontières de* E, *ou bien ce sont tous des points intérieurs*. Ceci résulte immédiatement du théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Soient a et b deux points communs à* E *et* C, *et soit* M *un point du plus petit arc ab sur* C *; si* M *est un point intérieur de* F, *il en est de même de tous les points de ab sauf peut-être a et b.*

Nous avons, d'après les hypothèses faites

$$\overline{a\mathrm{M}} < 2\mathrm{R}; \quad \overline{b\mathrm{M}} < 2\mathrm{R};$$

M étant supposé intérieur à E, on peut déterminer sur le cercle de centre a et de rayon aM deux points p et q situés de part et d'autre de M, assez voisins de



ce point pour que tout point de l'arc pq soit lui-même intérieur à E. En vertu de la scvR de E, la figure limitée par l'arc pq, l'arc akp (obtenu en faisant tourner $\widehat{a\mathrm{M}}$ d'un angle égal à Map autour de a) et l'arc alq (obtenu en faisant tourner $\widehat{\mathrm{AM}}$ d'un angle égal à Maq autour de a, puis en faisant une symétrie par rapport à aq) fait tout entière partie de l'ensemble E; il est visible que cette figure

(¹) *Voir* à ce sujet pour le cas de la métrique minkowskienne Buter (**H**, th. 22 et 23).

contient à son *intérieur* tous les points de aM sauf peut-être a. On montrerait de la même façon que tous les points de bM, sauf peut-être b sont intérieurs à E. C. Q. F. D.

Caractérisation des scvR connexes.

7. Abordons maintenant la démonstration du théorème fondamental. Nous établirons pour cela un lemme :

LEMME I. — *Tout cercle d'appui local de rayon* R *d'un ensemble scv*R *connexe est un vrai cercle d'appui.*

Soient E l'ensemble considéré, M un point frontière, C_M l'un des cercles d'appui local de rayon R en M. Montrons que E ne peut avoir aucun point extérieur à C_M.

En premier lieu il ne peut exister sur la circonférence de C_M aucun point A intérieur à E. En effet, tout l'arc AM (sauf M) serait dans ce cas formé de points intérieurs à E. Il y aurait donc dans tout voisinage de M des points *intérieurs* à E situés sur C_M et par conséquent des points de E extérieurs à C_M; ce dernier ne serait plus alors un cercle d'appui local.

Supposons qu'il existe un point N de E extérieur à C_M. E étant connexe et fermé, il existera sur C au moins un point K de E limite de points de E extérieurs à C_M; K ne pouvant être un point intérieur de E, en est un point frontière; le plus petit arc MK appartient alors tout entier à la frontière de E; l'une des demi-tangentes à cette frontière en K est la demi-tangente à cet arc; le cercle C_M est donc l'un des cercles d'appui local en K, mais ceci est contradictoire avec la présence à l'extérieur de C_M et au voisinage de K de points de E (1). C. Q. F. D.

Il est évident que tout ensemble possédant des cercles d'appui est contenu dans la partie commune à ces cercles d'appui. Le théorème fondamental sera donc démontré lorsque nous aurons fait voir que :

LEMME II. — *Tout point qui n'appartient pas à* E *est extérieur à au moins un cercle d'appui de rayon* R.

Soit N un point du complémentaire de E; E étant fermé, la distance de N à E est différente de o et il existe sur E un point M tel que MN soit égal à cette distance (projection de N sur E). M est un point frontière de E; il passe en M une droite d'appui MT, et à cette droite correspond un cercle d'appui C_M; E et N

(1) Ainsi se trouve établi dès à présent que tout ensemble scvR connexe est de diamètre au plus égal à 2R. Les théorèmes II et III peuvent donc être énoncés comme suit :

THÉORÈME II-III *bis*. — *Tout ensemble scv*R *connexe est scv*R' *si* R' > R*; un tel ensemble est aussi convexe.*

étant de part et d'autre de ce cercle, E lui étant intérieur, N lui sera extérieur [1]. C. Q. F. D.

Si l'on associe au théorème fondamental sa réciproque (corollaire du théorème I), on obtient le résultat suivant :

*Il y a identité dans le plan entre les ensembles scv*R *connexes et les intersections de sphères fermées de rayon* R.

Le raisonnement fait pour établir le lemme II est valable pour tout ensemble fermé tel qu'en chacun de ses points passe un cercle d'appui de rayon R.

Un tel ensemble coïncide alors avec la partie commune à tous ses cercles d'appui; il est donc scvR et connexe (th. I). Ainsi :

THÉORÈME VIII. — *Tout ensemble fermé tel que par chacun de ses points frontières il passe un cercle d'appui de rayon* R *est un ensemble scv*R *et connexe* [2].

8. En combinant avec le théorème II-III *bis* les résultats du paragraphe 6, nous obtiendrons la généralisation suivante de certaines propriétés des ensembles convexes :

THÉORÈME IX. — *Soit* E *un ensemble scv*R *connexe, et soit* K *une droite ou une circonférence de rayon supérieur à* R *: ou bien* K *ne coupe pas* E, *ou bien* K *n'a en commun avec* E *qu'un seul point nécessairement frontière, ou bien* K *coupe la frontière de* E *en deux points; dans ce dernier cas le segment de droite ou le plus petit arc déterminé sur* K *par ces deux points est entièrement formé de points intérieurs à* E.

On peut dire que F frontière de E est un continu d'ordre 2 relativement aux cercles de rayon supérieur à R [3]. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

9. Remarquons enfin qu'un ensemble scvR de diamètre égal à 2R *ne peut être qu'un cercle fermé de rayon* 2R.

Cet ensemble étant scv est en effet fermé; il contient donc au moins deux points A et B distants de 2R, et il contient par conséquent tout le cercle fermé de diamètre AB. Il ne peut contenir de points extérieurs à ce cercle car son diamètre deviendrait alors supérieur à 2R.

---

(1) Cette démonstration coïncide avec celle donnée par M. Bückner (**B**, § 4) pour démontrer le théorème suivant :

« Tout corps arrondi à l'index *d* est l'intersection de toutes les sphères de rayon *d* qui le contiennent ». Les hypothèses de M. Bückner diffèrent des miennes car un corps « arrondi à l'index *d* » est pour lui un corps scvR de *diamètre inférieur à* 2R. Aussi n'a-t-il pas besoin de démontrer le lemme I. Les développements des paragraphes 3 à 7 se trouvent ici nécessités par l'abandon de l'hypothèse diamétrale pour celle de connexité. M. Buter donne aussi avec la même démonstration un énoncé équivalent au lemme II.

(2) *Voir* MAYER (**U**, th. 3).

(3) *Voir* Chapitre III.

CHAPITRE II.

ENSEMBLES ADJOINTS. ENVELOPPANTES.

La construction R.

10. Définition. — Prenons un ensemble E non vide quelconque et considérons la famille des cercles fermés de rayon R centrés sur E. Si cette famille a une intersection non vide, nous désignerons par RE cette intersection, qui est nécessairement un ensemble fermé, connexe et scvR. Si cette intersection est vide, nous conviendrons d'écrire $RE = 0$. Nous désignerons par construction R l'opération ci-dessus définie qui fait passer de E à RE ([1]). La longueur R sera le « rayon » de la construction.

Nota. — Dans tout ce qui suit nous omettrons lorsqu'elle ne sera pas indispensable l'indication du rayon. Ainsi, lorsque nous parlerons de cercles d'appui, d'adjoints, d'enveloppantes, sans autres précisions, il s'agira toujours de cercle de rayon R, d'adjoints-R, d'enveloppantes-R ([2]).

11. Propriété I (P_1). — *Quels que soient* E_1 *et* E_2, *on a*

$$R(E_1 + E_2) = RE_1 . RE_2$$

ceci résulte immédiatement de la définition. Cette propriété entraîne comme corollaire la

Propriété II (P_2). — *Si l'on a* $E \subset E'$ *on a aussi* $RE \supseteq RE'$.

En particulier, il pourrait se faire que RE′ soit nul sans que RE le soit. La propriété II pour si évidente qu'elle apparaisse jouera un rôle essentiel dans les raisonnements qui vont suivre.

Propriété III (P_3). — *Quels que soient* E *et* E′, *on a*

$$R(E.E') \supseteq RE + RE'.$$

En effet, tout point de RE par exemple étant commun à tous les cercles générateurs centrés sur E, appartient *a fortiori* à tous ceux d'entre eux qui sont centrés sur E.E′.

En général l'égalité n'a pas lieu car le second membre ne représente pas forcément un ensemble scvR. Il n'y a donc pas dualité complète entre P_1 et P_3.

([1]) Bückner (**B**, p. 109) donne cette construction et note son résultat $\mathfrak{A}_R$ ou $\mathfrak{B}_R$ suivant qu'il opère dans le plan ou dans l'espace. Sans s'attacher à une étude détaillée de ces ensembles il en indique et utilise certaines propriétés dans le but précis de construire à partir de E un ensemble complet ayant même diamètre. Le mot d'adjoint-R est emprunté à la terminologie introduite par M. Nicolesco, dans une étude consacrée à la notion de parallélisme (**N**, p. 718).

([2]) Les définitions seront données plus loin.

Propriété IV (P_4). — *En désignant par* $\bar{E}$ *la fermeture de* E, *on a toujours*

$$RE = R\bar{E}.$$

D'après P_2 on a $RE \supseteq R\bar{E}$.

Prenons alors un point B de RE. Soit dans $\bar{E}$ un point A n'appartenant pas à E et soit $A_1, \ldots, A_n \ldots$ une suite de points de E admettant A comme point d'accumulation. Nous aurons $A_n B \leq R$ quel que soit r, et par conséquent $AB \leq R$, ce qui prouve que B appartient au cercle fermé $C(A, \bar{R})$. Comme A est quelconque dans $\bar{E}$, on voit que B appartient à $R\bar{E}$. C. Q. F. D.

Cette propriété nous permettra, lorsque ce sera nécessaire, de supposer sans diminution de la généralité que E *est fermé* puisqu'on pourra toujours le remplacer au besoin par sa fermeture.

Ensembles adjoints.

12. Nous appellerons adjoint-R de l'ensemble E, le résultat RE de la construction R.

Voici quelques exemples :

1° l'adjoint-R d'un point A est le cercle $C(A, \bar{R})$

2° *a*) l'adjoint-R d'un cercle de rayon R se réduit à son centre; *b*) l'adjoint-R d'un cercle de rayon $r < R$ est le cercle concentrique de rayon $R - r$; *c*) l'adjoint-R d'un cercle de rayon supérieur à R est vide;

3° l'adjoint-R de l'ensemble formé par deux points est la lentille commune aux cercles de rayon R centrés sur ces deux points;

4° l'adjoint-R de l'ensemble formé par les trois sommets d'un triangle équilatéral de côté R est le triangle de Reuleaux ayant ces trois points pour sommets.

Existence de l'adjoint. Classe d'un ensemble.

13. Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *ait un adjoint*-R *non vide est qu'il soit contenu dans au moins un cercle fermé de rayon* R.

Le fait que cette condition est suffisante résulte immédiatement de l'exemple 2° *a* et de P_2. Le fait qu'elle est nécessaire est une conséquence immédiate de la définition. Tout point de RE est en effet à une distance au plus égale à R de tous les points de E; c'est donc le centre d'un cercle fermé de rayon R contenant l'ensemble E.

Notons qu'en particulier tout ensemble scvR admet un adjoint-R.

Étant donné un ensemble borné E, on sait qu'il existe un cercle fermé unique contenant E et de rayon minimum; c'est *le cercle circonscrit* à E. Son rayon ne peut bien entendu être nul que dans le cas où E se réduit à un point.

En dehors de ce cas le cercle circonscrit s'appuie sur la frontière de E ou bien en deux points G et H diamétralement opposés (à la fois sur le cercle et sur l'ensemble), ou bien en au moins trois points I, J, K formant un triangle acutangle (¹).

Le diamètre $2R_0$ de ce cercle est dans le premier cas égal au diamètre D de l'ensemble, dans le second cas il lui est supérieur sans toutefois dépasser la valeur $\frac{2D}{\sqrt{3}}$ (²).

Soit alors R un nombre quelconque :

1° Si $R < R_0$, l'adjoint-R de E est vide.

2° Si $R \geqq R_0$, E possède un adjoint-R non vide. Si $R = R_0$, cet adjoint se réduit à un point unique : le centre du cercle circonscrit. En effet ce centre est le seul point commun soit aux deux cercles $C(G, R_0)$ et $C(H, R_0)$, soit aux trois cercles $C(I, R_0)$, $C(J, R_0)$ et $C(K, R_0)$.

DÉFINITION. — *Nous dirons qu'un ensemble dont le cercle circonscrit est de rayon* R_0 *est de la classe* R_0 (³).

Remarquons que tout ensemble de classe finie est borné et que tout ensemble borné possède, d'après ce qui précède, une classe finie et bien déterminée.

Un ensemble réduit à un point sera dit *de classe nulle*, un ensemble non borné sera dit de *classe infinie*.

Avec cette terminologie le théorème I peut se mettre sous la forme suivante :

THÉORÈME I *bis*. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *possède un adjoint* — R *non vide est qu'il soit de classe inférieure ou égale à* R.

Points opposés.

14. THÉORÈME II. — *Si* A *appartient à* E, B *à* RE, *et si* AB = R, A *est point frontière de* E, B *point frontière de* RE.

Appelons M un point variable décrivant E; si A était un point intérieur à E, la distance BM ne pourrait passer en ce point par un maximum (⁴); il y aurait donc dans E des points dont la distance à B serait supérieure à R, ce qui est impossible. On verrait exactement de la même manière que B est point frontière de RE.

(¹) *Voir* par exemple T. BONNESEN. *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gauthier-Villars, 1929, p. 44.

(²) L. CHAMARD, *Sur les propriétés de la distance à un ensemble ponctuel* (*Thèse*, Poitiers, 1933, p. 23).

(³) Cette notion n'a rien de commun avec celle que M. Lucien Chamard a introduite sous le même nom [*voir* ci-après, p. 230, note (¹)].

(⁴) Ceci correspond à ce que M. Nicolesco appelle le parallélisme de seconde sorte.

Dans ces conditions le cercle $C(A, \overline{R})$ passe par B et contient la totalité de l'ensemble RE; c'est donc un cercle d'appui de cet ensemble en B; le cercle $C(B, \overline{R})$ est pour la même raison cercle d'appui de E en A. Les tangentes AX et BX′ à ces cercles en A et B sont droites d'appui respectivement à E et RE. La droite AB est perpendiculaire à ces deux tangentes; c'est la normale commune aux deux cercles.

Définition. — *Lorsque deux points* A *et* B *satisfont aux hypothèses du théorème* II (*ce qui entraîne tous les détails de configuration qui viennent d'être décrits*), *nous dirons qu'ils sont opposés dans le couple* (E, RE) [1].

Existence des opposés.

15. Théorème III. — *Étant donné un point* B *de la frontière de* RE, *il existe dans* F *au moins un point* A *opposé à* B.

Nous pouvons supposer E fermé. Si A n'existait pas, la distance BM aurait, lorsque M décrit E, un maximum R′ nécessairement inférieur à R; E serait alors contenu dans le cercle C(B, R′) et d'après P_2, RE contiendrait entièrement l'adjoint de ce cercle, c'est-à-dire le cercle C(B, R — R′). Alors, contrairement à l'hypothèse, B serait point intérieur de RE.

Théorème IV. — RE *est le lieu des centres des cercles fermés de rayon* R *contenant* E; *la frontière de* RE *est le lieu des centres des cercles d'appui de* E.

Il résulte en effet de tout ce qui précède que tout point de RE appartient au premier lieu, tout point de $(RE)_f$ au second; d'autre part, tout centre B d'un cercle fermé de rayon R qui contient E se trouve à une distance de tout point de E au plus égale à R; un tel point appartient donc à RE; si de plus le cercle dont il est le centre est cercle d'appui de E, il existe sur sa circonférence un point A de E; A et B sont alors opposés et B appartient à $(RE)_f$.

Théorème III *bis*. — *Étant donné un point* A *de la frontière de* E, *à tout cercle d'appui de* E *passant par* A *correspond dans* RE *un point opposé à* A : *si par* A *ne passe aucun cercle d'appui de* E, A *ne possède aucun point opposé dans* RE.

Soit en effet Γ un cercle d'appui passant par A et soit B son centre; E étant contenu dans Γ, RE contient l'adjoint de Γ, c'est-à-dire B. Comme AB = R, B est opposé à A.

Si par A passent deux cercles d'appui, il y en passe une infinité dont les centres forment un arc de cercle de centre A et de rayon R, et cet arc appartient tout entier à la frontière de RE.

[1] Le mot « opposé » ne doit pas cependant faire croire qu'il y ait en général réciprocité entre ces deux points.

La seconde partie du théorème résulte de ce que s'il existe B opposé à A, B est centre d'un cercle s'appuyant sur E au point A.

La comparaison des théorèmes III et III *bis* prouve bien qu'il n'y a pas en général réciprocité entre les points de la frontière de E et ceux de la frontière de RE, mais l'énoncé même du théorème III *bis* nous indique immédiatement à quelle condition cette réciprocité sera réalisée.

THÉORÈME V. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'à tout point frontière de* E *corresponde un point opposé est que* E *soit un ensemble* scvR *et connexe.*

En effet, par tout point frontière d'un tel ensemble, il passe un cercle d'appui; réciproquement, si par tout point frontière d'un ensemble fermé passe un cercle d'appui de rayon R, nous avons vu (Chap. I, § 7) que cet ensemble est scvR et connexe.

Front-R.

16. Revenant au cas général, nous sommes amenés à distinguer sur la frontière F d'un ensemble E deux sortes de points; ceux par lesquels passe au moins un cercle d'appui de E et ceux par lesquels ne passe aucun cercle d'appui de E. Les points de la première espèce constituent par définition le front-R(¹), Φ_R de E; ceux de la seconde espèce constituent le complémentaire Ψ_R de Φ_R sur F. Avec ces définitions, les théorèmes III *bis* et V prennent les formes suivantes :

THÉORÈME III *ter*. — *Tout point de* Φ_R *possède au moins un opposé, aucun point de* Ψ_R *n'en possède.*

(¹) M. Nicolesco (**N**, p. 750) est amené par des considérations différentes à étudier cet ensemble sous le nom de front-R de seconde espèce. Il suit ainsi, en la complétant, une terminologie introduite par M. G. Bouligand [*voir* p. e., G. I. D., p. 104). Ce dernier appelle en effet front-R d'un ensemble E, la réunion de tous les points de cet ensemble par lesquels passe un « cercle d'appui » de E, c'est-à-dire [*voir* ci-dessus, p. 222, note (¹)] un cercle ne contenant à son intérieur aucun point de E. On voit que la définition donnée ici ne diffère de celle de M. Bouligand que par le sens qu'il faut donner à l'expression « cercle d'appui ». Ici, comme plus haut, j'ai préféré ne pas alourdir le texte par une précision que l'absence d'ambiguïté possible rendait superflue.

D'ailleurs les deux fronts-R ainsi définis constituent en réalité deux cas différents d'une seule notion, et il serait facile d'en unifier la définition en faisant intervenir une convention de signe pour R; par exemple R négatif donnerait cercles d'appui et fronts au sens de M. Bouligand, R positif à mon sens ou vice versa. Dans cette théorie unifiée les ensembles scvR d'une part, les ensembles ayant pour frontière une courbe CM (*voir* G. I. D., p. 103) d'autre part, apparaissent comme deux aspects d'une même notion : celle des ensembles dont la frontière coïncide avec le front-R, les premiers correspondant à des valeurs positives, les seconds à des valeurs négatives de R. Ces derniers ensembles sont d'ailleurs, à quelque chose près, ceux que M. Chamard [67ᵉ Congrès des Sociétés savantes 1934, (*Sur une généralisation de la notion de figure convexe*)] a nommés ensembles de classe R et que nous préférerions nommer ensembles *sous-convexes*.

THÉORÈME V *bis*. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* Φ_R *coïncide avec* R, *c'est-à-dire pour que* Ψ_R *soit vide, est que* E *soit* scvR *et connexe*.

Existence du front-R.

17. THÉORÈME VI. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *possède un front-*R *non vide est que* E *soit de classe inférieure ou égale à* R.

La condition est évidemment nécessaire puisqu'il doit exister au moins un cercle d'appui de rayon R et que ce cercle doit avoir un rayon supérieur ou égal à celui R_0 du cercle circonscrit.

Elle est suffisante, puisque si elle est réalisée, les points d'appui du cercle circonscrit font partie de Φ_R. Le cercle de rayon R qui passe par un de ces points contient en effet le cercle circonscrit et par conséquent l'ensemble E.

On voit en outre que :

THÉORÈME VII. — *Pour tout ensemble dont la classe est inférieure ou égale à* R *sans toutefois être nulle* (1), Φ_R *contient au moins deux points*.

Remarquons à ce sujet que si le cercle circonscrit ne touche pas F en deux points diamétralement opposés, nous obtenons sur Φ_R trois points formant un triangle acutangle. Il ne faudrait pas en conclure que si Φ_R ne contient que trois points, ils forment nécessairement un triangle acutangle; on peut tout au plus affirmer que s'il n'en est pas ainsi, deux d'entre eux sont les extrémités d'un diamètre de E. Nous reviendrons un peu plus loin là-dessus (§ 26).

Adjoint de la frontière de E.

18. La comparaison de RE et de RF conduit au théorème suivant :

THÉORÈME VIII. — 1° *Si* RF *n'est pas vide, l'un des deux ensembles* E *ou* CE (2) *est de classe inférieure ou égale à* R *et l'on a, suivant le cas*,

$$RF = RE \qquad \text{ou} \qquad RF = R(CE).$$

2° *Si* RF *est vide, on a*

$$RF = RE = R(CE) = 0.$$

Rappelons d'abord que tout cercle fermé Γ qui contient F contient E ou CE. Si en effet Γ ne contient pas E, c'est qu'il y a des points de E à l'extérieur de Γ; il est impossible qu'on puisse y trouver aussi des points de CE, car on y trouverait encore des points de F, ce qui contredirait l'hypothèse; donc Γ contient CE.

---

(1) Un ensemble de classe nulle se réduit par définition à un point; Φ_R est alors constitué par ce point unique.

(2) CE désigne l'ensemble complémentaire de E.

Remarquons encore que des deux ensembles E et CE, l'un au moins n'étant pas borné ne peut être contenu dans aucun cercle.

Ceci posé :

1° Si $RF \neq 0$, tout cercle Γ (de rayon R) centré sur RF contient F et contient donc soit E, soit CE; l'un de ces deux ensembles est donc borné et c'est lui qui se trouve nécessairement contenu dans tous les cercles Γ. Il admet donc un adjoint non vide qui contient (P_2, ex. 2° a) les centres de tous les Γ, c'est-à-dire qui contient RF. D'autre part F appartient aussi bien à $\overline{E}$ qu'à $\overline{CE}$, donc RF contient les adjoints de $\overline{E}$ et de $\overline{CE}$. Ces deux inclusions en sens inverses entraînent l'égalité et l'on a

$$RF = RE \qquad \text{ou} \qquad RF = R(CE),$$

suivant que c'est l'un ou l'autre des deux ensembles qui admet un adjoint non vide.

2° Si $RF = 0$, RE et R(CE) qui y sont contenus sont également vides.

Le théorème précédent montre que la connaissance de la frontière d'un ensemble suffit à déterminer son adjoint. On peut aller plus loin encore dans cette voie, comme l'indique le théorème suivant :

Théorème IX. — *Si* E *est de classe* R_0, on a

$$R\Phi_R = RF = RE,$$

pourvu que l'on ait $R \geqq R_0$.

R étant contenu dans F, on a

$$R\Phi_R \supseteq RF;$$

il reste donc à montrer qu'un point M, s'il est étranger à RF, ne saurait appartenir à $R\Phi_R$. Il existe en effet alors dans l'ensemble fermé RF un point P (projection de M sur RF) dont la distance à M est minimum. La perpendiculaire PH élevée sur PM laisse d'un côté RF et de l'autre le point M. L'ensemble RF étant scvR, il passe par P (qui appartient à sa frontière) tangentiellement à PH un cercle C(Q, R) qui est d'appui pour cet ensemble. Ce cercle laisse M à son extérieur. D'autre part le centre Q de ce cercle est opposé à P dans le couple (F, RF) et le cercle C(P, R) est un cercle d'appui de E au point Q (§ 14). Q fait donc partie de Φ_R et M extérieur à C(Q, R) n'appartient pas à $R\Phi_R$.

C. Q. F. D.

Itération de l'opération R. Enveloppante surconvexe-R.

19. Si l'on effectue sur RE, lorsqu'il existe, l'opération R, on obtient un nouvel ensemble que nous désignerons par R^2E. Cet ensemble ne peut être vide puisque RE est contenu dans tous les cercles de rayon R centrés sur E.

Il est bien entendu scvR et connexe; il contient E d'après le théorème IV. Une condition nécessaire pour qu'il coïncide avec E est que E soit lui-même un ensemble connexe scvR (et par conséquent fermé).

Cette condition est suffisante; en effet si E et R^2E ne coïncidaient pas, il existerait (puisque ces deux ensembles sont fermés) des points étrangers à E, donc aussi des points frontières de E qui seraient *intérieurs* à R^2E. Supposons que A soit un tel point; E étant supposé scvR et connexe, il existe dans RE un point B opposé à A(th. V), et par conséquent tel que $AB = R$. Mais A appartenant à R^2E sera alors opposé à B dans le couple (RE, R^2E); A sera donc un point frontière de R^2E, ce qui entraîne contradiction. Ainsi :

Théorème X. — *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait*

$$R^2E = E$$

est que E *soit* scvR *et connexe.*

Il y a dans ce cas une parfaite réciprocité entre E et RE, chacun d'eux étant l'adjoint de l'autre; nous dirons alors que ces deux ensembles sont R — complémentaires.

Les raisons de cette dénomination seront données dans un chapitre ultérieur consacré à ce cas très important ([1]). Remarquons pour finir que dans la démonstration qui vient d'être donnée l'hypothèse de surconvexité n'intervient que pour assurer l'existence au point A d'un cercle d'appui de E. Le théorème suivant se trouve établi par la même occasion :

Théorème XI. — *Tout point de* Φ_R *appartient à la frontière de* R^2E.

Ce théorème jouera un rôle important dans l'étude de la frontière de l'enveloppante surconvexe d'un ensemble (§ 24).

20. Théorème XII. — *Si un ensemble* E′ *est tel que*

$$E \subseteq E' \subseteq R^2E, \tag{1}$$

on a

$$R^2E' = R^2E.$$

En effet, de (1) et du théorème I, on tire

$$RE \supseteq RE' \supseteq RR^2E,$$

puis

$$R^2E \subseteq R^2E' \subseteq R^2R^2E.$$

([1]) M. Nicolesco (**N**, p. 751) mentionne sans l'avoir démontré la possibilité pour deux ensembles d'être adjoints l'un de l'autre et fait alors remarquer que cette notion revient à celle d'ensembles « bi-parallèles de seconde sorte ».

Mais R^2E étant scvR, on a, d'après le théorème XII,

$$R^2R^2E = R^2E,$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème XIII. — *Tout ensemble* scvR *qui contient* E *contient aussi* R^2E.

Soit K un tel ensemble; l'ensemble $K' = K.R^2E$ satisfait aux hypothèses du théorème précédent, il est de plus scvR comme intersection de deux ensembles scvR. On a donc simultanément :

$$R^2K' = R^2E; \quad R^2K' = K'$$

d'où

$$R^2E = K' \subseteq K. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi l'ensemble R^2E est un ensemble scvR contenant E et contenu dans tout autre ensemble jouissant de ces deux propriétés; il peut donc être considéré :

D'une part comme l'intersection de tous les ensembles scvR qui contiennent E (¹); d'autre part comme l'ensemble saturé inférieurement par rapport aux deux propriétés : contenir E, être scvR.

A ce double titre, il mérite le nom *d'enveloppante* scvR de E (en abrégé : enveloppante-R). Nous le désignerons par K_RE et plus simplement par K_R ou même par K lorsque l'ambiguïté n'est pas possible. D'après le début du paragraphe 19 et le théorème I, *la condition nécessaire et suffisante pour que* E *possède une enveloppante*-R *est qu'il soit de classe inférieure à* R (²).

21. Voici quelques remarques sur les enveloppantes surconvexes. Ce sont des applications immédiates du théorème XIII.

Remarque 1. — *Si* $E \supset E'$, *on a*

$$K_RE \supseteq K_RE',$$

puisque K_RE est un ensemble surconvexe contenant E, donc E'.

Remarque 2. — Si $R' > R$, K_RE *étant* scvR *est aussi* scvR', et l'on aura

$$K_RE \supseteq K_{R'}E.$$

Les enveloppantes d'un même ensemble pour des rayons de plus en plus grands, sont donc emboîtées les unes dans les autres. La première de toutes qui

(¹) C'est la définition adoptée par MM. Van der Corput et Buter. Ces auteurs ne font d'ailleurs aucun emploi des ensembles adjoints et de l'opération-R. En ce qui concerne l'étude proprement dite des enveloppantes, M. Buter se borne à déterminer l'enveloppante d'un système de n points et M. Van der Corput à démontrer la convexité des enveloppantes surconvexes (problème qui ne se pose que si l'on adopte les définitions plus générales de cet auteur).

(²) Cette condition revient à celle donnée sous une forme un peu différente par MM. Buter et Van der Corput (**H** p. 45 et **V** p. 951). Tous les autres résultats donnés ici sur les enveloppantes sont nouveaux.

les contient toutes est K_{R_0}, c'est-à-dire le cercle circonscrit à E. Chacune d'elles étant convexe et contenant E, contiendra aussi l'enveloppante convexe $\mathfrak{K}$E.

Remarque 3. — Si E est scvR, il est aussi scvR′ pour toute valeur R′ supérieure à R. Il se confond alors (th. X) avec son enveloppante K_R et toutes ses enveloppantes d'indice supérieur. Il est d'ailleurs aussi convexe et se confond aussi avec son enveloppante convexe.

Remarque 4. — En particulier l'enveloppante R de K_R est confondue avec K_R ainsi que ses enveloppantes d'indices supérieurs. Si $R'' < R$, $K_{R''}E$ est scvR″ et contient $K_R E$; $K_{R''}E$ contient donc l'enveloppante R″ de K_R; or cette dernière contient $K_{R''}E$ en vertu de la remarque 1. *On voit donc que* $K_{R''}(K_R E)$ *coïncide avec* $K_{R''}E$ *si* $R'' < R$. *On verrait de même que* $K_{R''}E$ *coïncide avec* $K_{R''}(\mathfrak{K}E)$ *quel que soit* R″.

Cette dernière remarque permettra dans l'étude des enveloppantes successives *de remplacer si on le désire* E *par* $\mathfrak{K}$, c'est-à-dire de supposer E convexe.

Le remplacement de E par $K_R E$ n'est possible que pour l'étude des enveloppantes d'indice inférieur à R.

22. Voici un aspect un peu différent de la notion d'enveloppante. En revenant à la définition de K_R comme partie commune à tous les cercles fermés de rayon R centrés sur RE et en s'appuyant sur le théorème IV, on est conduit à la définition suivante :

Définition II. — *L'enveloppante-*R *d'un ensemble est la partie commune à tous les cercles fermés de rayon* R *qui contiennent cet ensemble.*

Si enfin on s'appuie sur le théorème VIII et sur la deuxième partie du théorème IV, on obtient :

Définition III. — *L'enveloppante-*R *d'un ensemble est la partie commune à tous les cercles d'appui de rayon* R *de l'ensemble.*

23. Tout ce qui précède donne à penser que l'enveloppante-R généralisation naturelle de l'enveloppante convexe (aussi bien par sa définition comme ensemble saturé que par les deux définitions qui viennent d'être obtenues) lui est liée par un processus de passage à la limite.

Nous avons mis en évidence au paragraphe 12 une chaîne d'ensembles emboîtés dont le premier est le cercle circonscrit à E, dont le dernier est l'enveloppante convexe. Si E est scvR, tous les ensembles de cette chaîne à partir de K_R *sont d'ailleurs confondus avec* $\mathfrak{K}$ *qui apparaît ainsi à la fois comme la limite et comme l'intersection de tous les ensembles de la famille.*

Ce résultat sous cette dernière forme s'étend au cas général où E n'est pas scvR.

THÉORÈME XIV. — E *étant un ensemble borné quelconque, son enveloppante convexe* $\mathfrak{K}$ *est à la fois l'intersection de tous les* K_R *et l'ensemble limite de la famille des* K_R *lorsqu'on fait tendre* R *vers l'infini.*

Nous n'avons plus à démontrer ceci que dans le cas où E n'est scv pour aucune valeur de R. Il suffira d'établir que, quelle que soit la suite $\{R_i\}$ convergeant vers $+\infty$, la suite d'ensembles $\{K_{R_i}\}$ converge vers $\mathfrak{K}$.

Or, on a

$$K_{R_0} \supseteq R_{R_1} \supseteq \ldots \supseteq K_{R_n} \supseteq \ldots \supseteq \mathfrak{K} \supseteq E.$$

La suite $\{K_{R_n}\}$, en tant que suite d'ensembles emboîtés, admet à ce titre une limite $\mathfrak{K}'$ [à la fois limite de Borel, limite topologique et limite métrique (1)]. Cet ensemble $\mathfrak{K}'$ est d'ailleurs fermé comme intersection d'une famille d'ensembles fermés; on a, de plus,

$$\mathfrak{K}' \supseteq \mathfrak{K}.$$

C'est enfin un ensemble convexe en tant que limite métrique d'une suite d'ensembles convexes (2).

Je dis que $\mathfrak{K}' = \mathfrak{K}$.

Il reste à montrer pour cela qu'un point étranger à $\mathfrak{K}$ ne peut appartenir à $\mathfrak{K}'$.

Soit M un tel point, il existe une droite d'appui de $\mathfrak{K}$ qui le sépare de cet ensemble et donc de E. Soient Δ cette droite et C_0 le cercle circonscrit à $\mathfrak{K}$. Ce cercle touche $\mathfrak{K}$ soit en deux points diamétralement opposés, soit en trois points formant un triangle acutangle, en sorte que $\mathfrak{K}$ et *a fortiori* E se trouvent dans le plus grand des deux segments du cercle C_0 déterminés par Δ (avec le cas possible où Δ serait un diamètre de C_0 et où le segment de droite AB découpé sur Δ par C_0 ferait entièrement partie de la frontière de $\mathfrak{K}$; $\mathfrak{K}$ serait alors contenu dans une des moitiés de C_0).

Dans un cas comme dans l'autre, tout cercle de rayon supérieur à R_0, passant par AB et dont le centre est du même côté de Δ que $\mathfrak{K}$, contient à son intérieur le segment de C_0 qui contient $\mathfrak{K}$ et *a fortiori* $\mathfrak{K}$ lui-même, donc aussi E. Soient Γ un tel cercle, R son rayon; Γ étant scvR contiendra aussi K_R.

M étant séparé de E par Δ, on pourra trouver r assez grand pour que M devienne extérieur à Γ aussitôt que $R > r$. Alors K_{R_n} ne contient plus M dès que $R_n > r$ et M ne peut appartenir à $\mathfrak{K}'$ (3). C. Q. F. D.

(1) Sur la convergence topologique d'une suite monotone, *voir* G. BOULIGAND, *G. I. D.*, p. 156. Sur les différents types de limites et la coïncidence entre limite topologique et limite métrique, *voir* BLANC (**EM**, p. 50-61).

(2) BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, p. 60.

(3) On démontrerait d'une façon semblable que si R tend vers r en croissant, K_R tend vers K_r. On verrait aussi, sans grande difficulté, qu'il en est de même si R tend vers r en décroissant. K_R apparaît ainsi comme une « fonction » continue de la variable K au sens indiqué dans ma Thèse (**EM**, p. 60, note au bas de la page).

Il parait assez légitime maintenant de noter K_∞ l'enveloppante convexe $\mathfrak{K}$ lorsque E est borné; il ne semble pas qu'il y ait d'inconvénient à conserver cette notation lorsque E n'est plus borné. Enfin une extension naturelle sera, pour un ensemble convexe qui n'est surconvexe pour aucune valeur de R, de dire qu'il est scv ∞.

Structure de la frontière de K_R.

24. Nous nous proposons ici d'étudier les relations qui existent entre la frontière d'un ensemble, et en particulier le front-R de cet ensemble d'une part, et d'autre part la frontière de l'enveloppante K_R. Nous généraliserons ainsi certaines propriétés bien connues des frontières d'enveloppantes convexes.

Voici d'abord un théorème préliminaire, conséquence directe du théorème IX et de la définition de K_R.

Théorème XV. — *Pour un ensemble de classe inférieure à* R, *l'enveloppante*-R *de l'ensemble, celle de sa frontière et celle de son front*-R *coïncident.*

La connaissance du front-R d'un ensemble entraîne donc celle de l'enveloppante-R de cet ensemble (1).

Théorème XVI. — Φ_R *coïncide avec l'ensemble des points communs à* F *et à la frontière de* K_R.

a. Soit en effet P un point de F, appartenant aussi à la frontière de K_R; K_R étant scvR, il passe par P un cercle de rayon R contenant K_R et *a fortiori* E. On voit donc bien que P appartient à Φ_R.

b. Tout point de Φ_R appartient à la frontière de K_R d'après le théorème XI. Il appartient à F par définition. C. Q. F. D.

Les frontières de E et de K_R étant des ensembles fermés, *il en sera de même de leur intersection* Φ_R. En outre cette intersection sera fermée sur F et sur la frontière G de K_R. Cette dernière, frontière d'un ensemble surconvexe, est une courbe de Jordan. *Le complémentaire de* Φ_R *sur cette courbe* (2) *sera donc composé d'une famille au plus dénombrable d'arcs ouverts* (arcs contigus à Φ_R).

Nous allons montrer qu'un *tel arc appartient à un cercle de rayon* R *qui s'appuie au moins deux fois sur* R. Pour la démonstration nous pourrons supposer que E se réduit à Φ_R.

---

(1) On pourrait dire que vis-à-vis de l'enveloppante-R d'un ensemble, le front-R constitue en quelque sorte le squelette de cet ensemble.

(2) Il ne faut pas le confondre avec le complémentaire Ψ_R de Φ_R *sur F*.

Soit alors sur la frontière G de K_R un arc AB contigu à Φ_R; A et B font partie de Φ_R qui est fermé. Soit AX la demi-tangente en A à G du côté opposé à B et soit BY la demi-tangente en B à G du côté opposé à A. Ces demi-tangentes existent puisque G est une courbe convexe; elles sont portées par des droites d'appui de E.

L'ensemble K_R étant scvR, les cercles de rayon R respectivement tangents en A et B à AX et BY et situés du même côté de ces droites que l'ensemble E, sont des cercles d'appui pour K_R et la lentille $\mathcal{L}$ qu'ils forment contient K_R et *a fortiori* E.

La droite AB partage le plan en deux demi-plans; G étant convexe, l'un d'eux contient l'arc AB que nous étudions et l'autre l'arc de G qui en est le complément et en particulier tout l'ensemble Φ_R, c'est-à-dire E; AB est donc une droite d'appui double de E. Considérons enfin le cercle Γ de rayon R, qui passe par A et B et dont le centre est situé du même côté que E par rapport à AB. Ce cercle contient la portion de $\mathcal{L}$ qui est du même côté de AB que E. Il contient donc E. L'intersection S de ce cercle et de $\mathcal{L}$ contient donc E. C'est un ensemble scvR, il contient donc K_R.

D'autre part K_R contient la lentille $L(A, B; \overline{R})$ dont l'un des bords est justement l'arc AB de Γ situé du côté de AB opposé à E, arc qui fait aussi partie de la frontière de S. Cet arc fait donc simultanément partie de la frontière de S et de celle de K_R. Il se confond avec l'arc AB de G que l'on voulait étudier. Le cercle Γ dont il fait partie est d'appui pour E en A et B.

On peut résumer ceci dans l'énoncé suivant :

Théorème XVII. — *La frontière* G *de l'enveloppante*-R *d'un ensemble* E *est une courbe de Jordan fermée, sans points doubles, convexe et même scv*R, *pouvant éventuellement contenir une infinité au plus dénombrable d'arcs de cercle de rayon* R *disjoints les uns des autres. Un tel arc est porté par un cercle qui s'appuie sur* E *aux deux extrémités de l'arc. Le complément sur* G *de cette famille d'arcs de cercles est formé des points communs à* G *et à* F *et constitue le front*-R *de* E.

On voit que les points anguleux de G devront en particulier appartenir à Φ_R.

25. Portons maintenant notre attention sur les cercles d'appui de rayon R de l'ensemble E.

Soit C l'un de ces cercles; il contient K_R (déf. II, § 22). Soit A l'un de ses points d'appui sur E : A appartient par définition à Φ_R donc à G; A est donc aussi point d'appui sur l'ensemble K_R du cercle C qui en est aussi un cercle d'appui. Ainsi :

Théorème XVIII. — *Tout cercle d'appui de* E, *l'est aussi de* K_R, *et tout point d'appui d'un tel cercle sur* E *l'est aussi sur* K_R.

Il ne faudrait pas croire que la réciproque de la seconde partie soit vraie : supposons E formé de deux points A, B distants de moins de $2R$; K_R est la lentille $L(A, B; \overline{R})$. Chacun des deux cercles qui forment la lentille est cercle d'appui de E et de K_R, les points d'appui sur E étant A et B, tandis que les points d'appui sur K_R sont tous les points de l'un des deux arcs qui limitent la lentille.

26. Étant donné un cercle d'appui C commun à E et K_R, considérons l'ensemble de ses points d'appui sur K_R. Plusieurs cas sont possibles :

1° *Il y a un seul point d'appui :* il est nécessairement aussi le point d'appui sur E; il appartient donc à Φ_R.

2° *Il y en a deux soient* A *et* B *qui déterminent sur* C *deux arcs inégaux.*

De ces deux arcs appelons γ celui qui est inférieur à π : K_R étant scvR et contenant A et B contient γ, mais est contenu dans le cercle C dont γ fait partie. L'arc γ est donc commun à C et à la frontière G de K_R; il est donc entièrement formé de points d'appui de C sur K_R [1].

3° *Il y a au moins deux points d'appui diamétralement opposés sur* C.

On pourra répéter pour chacun des demi-cercles le raisonnement qui vient d'être fait. Tout le cercle fait partie de la frontière de K_R. Il en constitue alors la totalité. E est de classe R et K_R en est le cercle circonscrit.

4° *Il y a au moins trois points d'appui formant un triangle acutangle.* Le raisonnement ci-dessus s'applique aux trois arcs déterminés sur C par ces trois points. Les conclusions sont les mêmes qu'au 3°.

Il est évident que cette discussion épuise tous les cas possibles. Ainsi :

Théorème XIX. — *Tout cercle d'appui de* E *a sur* K_R *soit un point unique d'appui qui appartient alors à* Φ_R, *soit un arc moindre que* π *de points d'appui. Le seul cercle d'appui qui puisse avoir sur* K_R *deux points d'appui diamétralement opposés ou trois points d'appui en triangle acutangle est le cercle circonscrit à* E. *Dans ce cas* E *est de la classe* R.

27. Revenons en passant sur une question qui s'est posée au paragraphe 17 : celle de la configuration que l'on obtient lorsque Φ_R ne contient que trois points, c'est-à-dire lorsque la frontière G de K_R ne s'appuie sur E que par trois points A, B, C. On peut admettre que E se réduit à ces trois points (th. XV).

La frontière de K_R est alors formée de trois arcs de cercles de rayon R passant respectivement par A et B, B et C, C et A.

(1) Il est bon de remarquer que ce n'est pas forcément un arc contigu à Φ_R. Il peut soit être contenu dans un tel arc, soit contenir des points de Φ_R.

Il peut très bien se faire que le triangle ABC soit obtusangle, mais alors le plus grand côté est un diamètre de l'ensemble; supposons que ce soit AB. Le troisième sommet C ne doit pas être intérieur à la lentille $L(A, B; \overline{R})$, sinon C ne ferait pas partie de Φ_R. Mais alors l'angle ACB doit être inférieur à $\pi - \text{Arc}\sin\frac{D}{2R}$, D étant le diamètre AB de l'ensemble et la notation Arc sin désignant un angle aigu. L'angle en C étant le plus grand des trois angles du triangle, on voit que :

THÉORÈME XX. — *Si la frontière de l'enveloppante-*R *ne s'appuie qu'en trois points sur celle de* E, *chacun des angles du triangle formé par ces trois points est inférieur à* $\pi - \text{Arc}\sin\frac{D}{2R}$. (Dans le cas où ABC serait acutangle, cette condition est en effet automatiquement réalisée.)

Cette condition s'apparente à celle du triangle acutangle pour le cercle circonscrit qui est une K_R particulière.

28. Il est évident que si $R' > R$, tout point de Φ_R appartient à $\Phi_{R'}$. De même, quel que soit R, tout point de Φ_R appartient au front de convexité Φ_∞. En effet si en A passe un cercle d'appui C de rayon R, l'un des cercles de rayon R' qui lui est tangent le contient et contient aussi E.

D'autre part, on sait que la tangente en A à un tel cercle est droite d'appui de E. On peut donc écrire

$$\Phi_{R_0} \subseteq \Phi_{R_1} \subseteq \Phi_{R_2} \ldots \subseteq \Phi_{R_n} \ldots .$$

La suite $\{\Phi_{R_n}\}$ monotone et croissante est convergente aux sens topologique et métrique et tend vers une limite Φ. Il est évident que $\Phi \subseteq \Phi_\infty$, mais contrairement à ce qui se passe pour les enveloppantes elles-mêmes, Φ ne coïncide pas forcément avec Φ_∞. De même si R tend vers r en croissant, Φ_R ne tend pas forcément vers Φ_r. Il suffit pour le voir de supposer que F contient un arc de cercle moindre que π de rayon r. Cet arc ne peut appartenir à Φ_R tant que $R < r$, il appartient tout entier à Φ_R si $R \geqq r$. (Pour montrer la non-coïncidence de Φ et de Φ_∞, il suffit de supposer que la frontière de E contient un segment rectiligne.) Par contre, si R tend en décroissant vers r, Φ_R tend vers r. Soit en effet une suite décroissante $R_1, \ldots R_n, \ldots$ tendant vers r. La suite $\{\Phi_{R_n}\}$ est monotone et converge vers un ensemble Φ_{r+0} qui contiendra Φ_r; Φ_{r+0} est l'intersection de tous les Φ_{R_n}; par un point A de cet ensemble et tangentiellement à l'une quelconque des droites d'appui en ce point, passe donc un cercle d'appui de rayon R_1, un de rayon R_2, un de rayon R_n, etc. Tous ces cercles d'appui tangents entre eux ont pour limite un cercle fermé de rayon r. Aucun point de E ne peut être extérieur à ce cercle, car il serait aussi extérieur à l'un des cercles de rayon supérieur mais suffisamment voisin. Ce cercle limite de rayon r est donc aussi cercle d'appui et le point A appartient à Φ_r. Ainsi

$$\Phi_{r+0} \subseteq \Phi_r \qquad \text{d'où résulte que } \Phi_{r+0} = \Phi_r.$$

C. Q. F. D.

On peut donc conclure :

THÉORÈME XXI. — Φ_R *est une fonction de* R *continue à droite mais pas forcément à gauche*.

Une construction intuitive de l'enveloppante-R.

29. Soit E un ensemble de classe inférieure à R. *Adjoignons à* E *toutes les lentilles* $L(A, B; \overline{R})$ *relatives à tous les couples* A, B *de l'ensemble* E. *Recommençons la même opération sur l'ensemble* E_1 *ainsi obtenu. Nous obtiendrons ainsi un ensemble* E_2 *qui est l'enveloppante cherchée.*

Il est évident que K_R contenant E doit par suite de sa surconvexité, contenir E_1, et pour la même raison E_2. Il reste donc à démontrer que tout point de K_R appartient à E_2.

Considérons un point M de la frontière G de K_R; s'il appartient à Φ_R, il appartient à E, donc à E_1. S'il n'appartient pas à Φ_R, il appartient à un arc contigu AB; cet arc appartient à la frontière de $L(A, B; \overline{R})$. Les points A et B appartenant à E, le point M sera donc introduit dans la première étape et appartiendra à E_1.

Soit alors un point P de K_R n'appartenant ni à E, ni à E_1. Toute droite issue de P coupe G en deux points I et J et P est intérieur au segment IJ. Ces deux points appartenant à E_1, P a été introduit au cours de la deuxième étape. Il appartient donc à E_2 [1]. C. Q. F. D.

On peut se demander ce que donnerait cette construction pour un ensemble de classe supérieure à R.

E_2 ne pourrait être scvR puisque E_2 contient E qui ne peut l'être. Le processus d'adjonction des lentilles au lieu de se trouver arrêté dès la deuxième étape devrait donc se poursuivre et conduire à un ensemble E_3, puis à E_4, etc., aucun d'entre eux ne pouvant être scvR. L'ensemble limite E_ω de la suite monotone (et donc convergente) $\{E_n\}$ ne pourrait être non plus scvR. On pourrait donc définir $E_{\omega+1}$, etc., puis $E_{2\omega}$, etc., tous les ensembles successivement définis étant distincts à moins que l'un d'eux n'arrive à contenir tout le plan. La question de savoir si cela doit se produire après une infinité dénombrable d'opérations reste ouverte.

---

[1] La démonstration montre qu'il suffit dans la seconde opération de « convexifier » E_1, c'est-à-dire d'introduire des segments au lieu de lentilles.

En convexifiant deux fois un ensemble, on obtiendra de même son enveloppante convexe. Je n'ai trouvé ce dernier résultat énoncé ni démontré nulle part. Vu son caractère intuitif, je ne crois pas cependant qu'il soit nouveau.

On pourrait encore, pour obtenir K_R, faire d'abord une convexification (segments) puis une « surconvexification » (lentilles) du résultat. Dans la première étape, les arcs contigus de Φ_R sur r seront remplacés par des segments de droite et le reste de la démonstration est simple. On retrouvera ainsi comme cas particulier le résultat de Buter sur l'enveloppante d'un polygone convexe.

CHAPITRE III.

UNE APPLICATION DE GÉOMÉTRIE FINIE.

30. Rappelons que l'on désigne, dans le plan, par continu d'ordre k, tout continu coupé en k points au plus par toute droite du plan. Plus généralement, un continu est dit d'ordre k par rapport à une famille de courbe $\mathcal{F}$, s'il est coupé en k points au plus par toute courbe de la famille.

C'est dans ce sens qu'il faut comprendre une remarque faite plus haut (Chap. I, § 8) et qui fait apparaître les frontières d'ensembles scvR comme des continus d'ordre 2 par rapport à une famille $\mathcal{F}_R$ formée de toutes les droites du plan et de tous les cercles de rayon supérieur à R [1].

Nous nous proposons dans le présent chapitre de caractériser tous les continus qui possèdent la même propriété, c'est-à-dire qui sont d'ordre 2 par rapport à la famille $\mathcal{F}_R$. Nous montrerons en particulier qu'un tel continu est soit la frontière d'un ensemble scvR, soit un arc de cette frontière.

31. Remarquons tout d'abord qu'un tel continu $\mathcal{C}$ sera d'ordre 2 au premier sens du mot; les résultats de M. Marchaud (*loc. cit.*, Chap. II, p. 85) lui sont par conséquent applicables :

a. $\mathcal{C}$ est une courbe de Jordan rectifiable convexe ouverte ou fermée (c'est donc ou bien la frontière d'un ensemble convexe ou bien un arc de cette frontière; à ce titre, le théorème que nous voulons établir sera la généralisation directe de ce résultat).

---

(1) C'est M. André Marchaud [*Sur les continus d'ordre borné* (*Act. Math.*, t. 55, p. 67-115)] qui introduit la notion de continu d'ordre k, généralisation de celle de courbe d'ordre k due à M. C. Juel. Dans le même Mémoire, M. Marchaud définit aussi les continus d'ordre k par rapport à une famille de courbes et traite le cas où cette famille est constituée par *tous* les cercles du plan (*loc. cit.*, Chap. IV : *Continus plans d'ordre cyclique borné*). Il est à remarquer que les continus étudiés ici ne sont pas forcément des continus d'ordre cyclique 2 (il n'existe d'ailleurs aucun continu d'ordre cyclique 2), car rien n'empêche qu'ils soient coupés en plus de deux points par un cercle de rayon inférieur à R. Leur ordre cyclique peut même ne pas être borné. Nous en donnerons un exemple en appendice à ce chapitre.

Nous prenons ici les définitions avec leur sens absolu : un arc de cercle dont le rayon R_1 est supérieur à R, ne doit pas être regardé comme appartenant à la classe de continus qui nous occupe, puisqu'il existe un cercle de rayon supérieur à R qui le contient et par conséquent le coupe en une infinité de points; de même un segment de droite n'appartient pas à cette classe puisque sa droite de support a une infinité de points communs avec lui.

Remarquons enfin, dans le même ordre d'idées, qu'une frontière d'ensemble scvR, pouvant contenir des arcs de rayon R, n'est pas forcément d'ordre 2 par rapport à la famille $\mathcal{F}'_R$ obtenue en remplaçant « supérieur à R » par « supérieur ou égal à R » dans la définition de $\mathcal{F}_R$.

b. En tout point de $\mathcal{C}$, le contingent se réduit à deux demi-tangentes qui sont opposées, sauf en une infinité dénombrable de points.

c. Si en tous les points d'un arc de $\mathcal{C}$ les deux demi-tangentes sont opposées, la tangente qu'elles forment varie d'une façon continue lorsque le point de contact décrit l'arc.

32. En second lieu la catégorie de continus que nous venons de définir se confond avec une autre catégorie importante dont les frontières scvR nous ont déjà donné un exemple.

Soient sur $\mathcal{C}$ trois points distincts A, B, C : s'ils sont alignés nous dirons *que $\mathcal{C}$ possède sur le triplet* (A, B, C) *un indice de courbure nul*; s'ils ne sont pas alignés, nous appellerons *indice de courbure de $\mathcal{C}$ sur le triplet* (A, B, C) *l'inverse du rayon du cercle circonscrit à ce triplet* [1].

Dire que l'indice de courbure de $\mathcal{C}$ reste supérieur à un nombre K quel que soit le triplet choisi, revient évidemment à dire que toute droite et que tout cercle de rayon supérieur à $\frac{1}{K}$ ne peuvent avoir avec $\mathcal{C}$ plus de deux points communs. Ainsi :

La notion de continu d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$ est identique à celle de continu dont l'indice de courbure est borné inférieurement par $\frac{1}{R}$.

Il en résulte immédiatement, si l'on reproduit des raisonnements déjà faits (Chap. I, §§ 4 et 5) et uniquement basés sur la limitation de l'indice de courbure et sur le fait que $\mathcal{C}$ est une courbe convexe, que :

Théorème I. — *Tout continu d'ordre 2 relativement à $\mathcal{F}_R$ possède en chacun de ses points une courbure inférieure de Menger au moins égale à $\frac{1}{R}$; de plus il passe en ce point un cercle d'appui local du continu* [2].

---

(1) M. Menger dit simplement : courbure du triplet; il nous a paru nécessaire de compliquer ici légèrement la terminologie de façon à pouvoir distinguer entre : continus à courbure bornée, continus à courbure moyenne (*Biegung*) bornée, continus à courbure moyenne (*Durschnittkrümung*) bornée, et continus à indices de courbure bornée. La « Biegung » d'un arc fini est pour M. Carathéodory [*Die Kurven mit beschränkten Biegungen* (*Sitz. Preuss. Ak. Wiss. Ph. Math. Klasse*, 1933, III-IV, p. 102-125) le rapport de la déflexion (angle de contingence) à la longueur de l'arc, la « Durschnittkrumung » de M. Schmidt est le rapport de l'arc d'indicatrice à l'arc de courbe [*Über des Extremum der Bogenlänge* etc. (*Sitz. Preuss. Ak. Wiss.*, 1925, p. 185-190)].

M. Carathéodory établit d'ailleurs dans le Mémoire cité l'équivalence entre les catégories suivantes : continus à Biegung bornée supérieurement, continus à Durschnittkrümung bornée supérieurement, continus à indices de courbure bornée supérieurement. Cette équivalence n'a pas été établie jusqu'ici pour le cas de bornes inférieures.

(2) La dernière partie de ce théorème constitue une contre-partie de l'un des résultats obtenus par M. Carathéodory sur les courbes à indice de courbure borné *supérieurement*.

33. Théorème II. — *Tout continu $\mathcal{C}$ d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$ est de classe au plus égale à* R. *Il admet à ce titre une enveloppante* scvR, K_R.

Supposons en effet que le cercle Γ circonscrit à $\mathcal{C}$ soit de rayon R_1 supérieur à R; $\mathcal{C}$ étant d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$, Γ ne peut s'appuyer sur $\mathcal{C}$ en trois points. Il s'appuie donc nécessairement en deux points A et B diamétralement opposés et tels par conséquent que $AB = 2R_1$. Ces deux points ne peuvent être les seuls qui constituent $\mathcal{C}$ puisque $\mathcal{C}$ est un continu. Soit C un autre point de $\mathcal{C}$: si l'on veut satisfaire à l'hypothèse, les trois points A, B, C ne peuvent être ni alignés, ni sur un cercle de rayon supérieur à R, ce qui est absurde puisque si ces trois points ne sont pas alignés, le cercle qu'ils déterminent a un rayon forcément supérieur à $\frac{AB}{2}$ (1).

Théorème III. — *Étant donnés deux points* A *et* B *communs à $\mathcal{C}$ et à la frontière* G *de* K_R, *tout arc déterminé par* A *et* B *sur $\mathcal{C}$ appartient en entier à* G.

En effet, G étant frontière scvR est d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$; la droite AB ne la coupe donc qu'aux deux points A et B. D'autre part K_R contient la lentille $L(A, B; \overline{R})$; il existe donc dans K_R des points situés de part et d'autre de AB; ainsi G se compose de deux parties G_1 et G_2 situées de part et d'autre de AB et n'ayant en commun que ces deux points.

Sur $\mathcal{C}$, les points AB déterminent soit un arc, soit deux suivant que $\mathcal{C}$ est une courbe ouverte ou fermée. Suivant le cas, prenons cet arc unique ou l'un quelconque des deux et désignons-le par Γ; ne pouvant recouper AB, Γ est tout entier d'un même côté de cette droite. Nous conviendrons d'appeler G_1 celle des portions de G qui se trouve du même côté de AB que l'arc Γ. Nous appellerons π_1 celui des demi-plans déterminés par AB qui contient G_1 et Γ; π_2 sera le demi-plan complémentaire.

La réunion G de l'arc Γ et de G_2 constitue une nouvelle courbe de Jordan sans points multiples et limite un domaine fermé K' qui l'admet pour frontière. K' est évidemment contenu dans K_R. En tout point de Γ passe un cercle d'appui local de rayon R, puisque Γ fait partie du continu $\mathcal{C}$ dont l'indice de courbure est supérieur à $\frac{1}{R}$; en tout point de G_2 passe aussi un cercle d'appui local, puisque K_R y possède un tel cercle et que $K' \subset K$ (ce dernier raisonnement reste d'ailleurs valable en A et en B). Il en résulte (Chap. V, th. VIII) que K' est scvR. Si l'on parvient à établir que $\mathcal{C}$ est contenu dans K', ce dernier ensemble devra coïncider avec K_R en vertu de la définition même de l'enveloppante-R, et le théorème annoncé sera établi.

(1) Ce raisonnement ne serait pas concluant si nous n'avions pas exclu de la classe des continus $\mathcal{C}$ les segments de droite et les arcs de cercles de rayon supérieur à R.

Soit donc P un point de $\mathcal{C}$ supposé ne pas appartenir à K′. Ce point devant appartenir à K_R ne pourrait être dans π_2, car dans ce demi-plan, K′ et K_R coïncident. Il sera donc dans π_1, c'est-à-dire du même côté de AB que l'arc Γ, mais sans appartenir à cet arc qui fait lui-même partie de K′.

$\mathcal{C}$ étant une courbe de Jordan, il existe sur cette courbe soit un arc AP, soit un arc BP, soit les deux à la fois. Supposons, pour fixer les idées que le premier cas soit le bon; la droite AB ne pouvant recouper $\mathcal{C}$, tout l'arc AP serait d'un même côté de AB et par conséquent dans π_1. Soit Q un point quelconque de l'arc Γ; Q ne pouvant être sur AB, il existerait dans π_1, une demi-droite issue de B laissant A d'un côté, P et Q de l'autre; cette demi-droite devrait couper l'arc de Jordan AP entre A et P, l'arc AQ entre A et Q, et enfin le continu $\mathcal{C}$ au point B. Alors $\mathcal{C}$ ne serait pas du second ordre par rapport à $\mathcal{F}_R$.

C. Q. F. D.

34. Tout ensemble ayant au moins deux points communs avec son enveloppante convexe, *si $\mathcal{C}$ est une courbe fermée*, ces deux points A et B y déterminent deux arcs qui, l'un et l'autre, appartiendront à G. Cette dernière frontière étant elle-même une courbe fermée convexe ne pourra contenir de points étrangers à $\mathcal{C}$. *Dans ce cas* G *et $\mathcal{C}$ coïncident donc.*

Si maintenant $\mathcal{C}$ est une courbe ouverte, comme c'est un continu et par conséquent un ensemble fermé, l'ensemble des points qu'il a en commun avec G n'est autre que son front-R; c'est-à-dire un nouvel ensemble fermé. Si l'on parcourt $\mathcal{C}$ depuis son origine α jusqu'à son extrémité β (ces deux points étant confondus si $\mathcal{C}$ est une courbe fermée), on rencontrera un premier point A et un dernier point B appartenant à Φ_R. Le front-R étant formé d'au moins deux points, A et B sont distincts et le théorème précédent s'applique; l'arc AB appartient en entier à la frontière G. Il reste alors sur cette frontière un arc contigu à Φ_R et constitué par un arc de cercle de rayon R inférieur à un demi-cercle et joignant A et B; c'est cet arc qui joue le rôle de G_2.

Je dis que A coïncide alors nécessairement avec α et B avec β. S'il n'en est pas ainsi, soit P un point de αA par exemple. Il ne peut, nous l'avons vu, être du même côté de AB que l'arc AB. Il est donc du même côté que G_2; il ne peut pas être sur G_2, car alors A ne serait pas le premier point de Φ_R; il ne peut être à l'extérieur de la demi-lentille formée par G_2 et le segment AB; cette demi-lentille est en effet la partie de K_R située dans le demi-plan où se trouve P. Ainsi P serait à l'intérieur de cette demi-lentille; cela aussi est impossible car alors le cercle circonscrit à ABP aurait un rayon supérieur à R. On voit donc que :

Théorème IV. — *Tout continu $\mathcal{C}$ d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$, ou, ce qui revient au même, tout continu à indice de courbure borné inférieurement par $\frac{1}{R}$, est ou bien la frontière d'un ensemble* scvR, *ou bien un arc d'une telle frontière; dans* *ce dernier cas la frontière contient en outre un arc de cercle de rayon* R *inférieur à une demi-circonférence et possédant les mêmes extrémités que* $\mathcal{C}$.

Cette dernière partie de l'énoncé apporte en même temps la solution du problème du prolongement de $\mathcal{C}$ sans augmentation de son ordre (relatif à $\mathcal{F}_R$). Elle montre que l'adjonction d'un arc de cercle de rayon R convenablement choisi permet de « compléter » $\mathcal{C}$, c'est-à-dire d'en déduire un ensemble lui aussi d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$ mais non prolongeable (¹).

APPENDICE.

Exemple d'un continu d'ordre 2 par rapport à R et d'ordre cyclique non borné.

35. Sur le cercle Γ de rayon $\frac{R}{2}$, de centre origine (²), prenons les points M_0, $M_1, \ldots, M_n, \ldots, M_{-1}, M_{-2}, \ldots, M_{-n}, \ldots$ d'arguments respectifs

$$\pi,\quad \frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{3},\quad \ldots,\quad \frac{\pi}{n},\quad \ldots,\quad -\frac{\pi}{2},\quad -\frac{\pi}{3},\quad \ldots,\quad -\frac{\pi}{n},\quad \ldots.$$

Appelons α_k l'arc de Γ d'extrémités M_k, M_{k+1}. Nous tracerons dans chacun des segments M_{2p}, M_{2p+1} de Γ l'arc de cercle β_{2p} de rayon R passant par les points M_{2p}, et M_{2p+1}. Soit alors T_{2p+1} le point de rencontre de la tangente à β_{2p} au point M_{2p+1} et de la tangente à β_{2p+2} au point M_{2p+2}. Le triangle M_{2p+1}, M_{2p+2}, T_{2p+1} contient à son intérieur l'arc $M_{2p+1}\,M_{2p+2}$ de Γ. Traçons l'arc de cercle γ_{2p+1} passant par $M_{2p+1}\,M_{2p+2}$ et tangent par exemple à la bissectrice intérieure de l'angle formé par $M_{2p+2}\,T_{2p+1}$ et par la tangente à Γ en M_{2p+2}; γ_{2p+1} sera intérieur au triangle $M_{2p+1}\,M_{2p+2}\,T_{2p+1}$; il sera en outre extérieur au cercle Γ et comme tel de rayon inférieur à $\frac{R}{2}\cdot$ La courbe formée par l'ensemble de tous les arcs β_{2p} et γ_{2p+1} est une courbe convexe présentant un sommet en chacun des points M_i; sa courbure est égale à $\frac{1}{R}$ en tout point d'un arc β, supérieure à $\frac{2}{R}$ en tout point d'un arc γ. C'est donc une courbe scvR et par conséquent d'ordre 2 par rapport à $\mathcal{F}_R$; et pourtant le cercle Γ la coupe en une infinité de points.

(¹) Sur le problème du prolongement (*Ordnungsfeste Erweiterung*) et de la transformation en ensemble complet du même type (*Vervollständigung*), *voir* le Mémoire de M. Otto Haupt, *Ordnungsfeste Erweiterung ebener Bogen und Kurven* (*Math. Zeits.*, t. 39, 1936, p. 126-136). M. Haupt y donne pour les courbes planes d'ordre quelconque (au sens usuel) une solution complète du problème.

(²) Le lecteur est prié de faire la figure.