Max Eger

Les systèmes canoniques d'une variété algébrique à plusieurs dimensions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 60 (1943), p. 143-172
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1943_3_60__143_0>

LES SYSTÈMES CANONIQUES

D'UNE

VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE A PLUSIEURS DIMENSIONS

PAR M. MAX EGER.

INTRODUCTION.

Depuis la fin du siècle dernier les propriétés principales des courbes algébriques (et partant, des êtres algébriques ∞^1) sont fixées, du moins en ce qui concerne les propriétés invariantes par transformations birationnelles. En particulier la théorie des séries linéaires de groupes de points sur une courbe a reçu de ses fondateurs sa forme presque définitive, sinon dans ses méthodes, du moins dans ses résultats essentiels : c'est ainsi qu'apparût l'importance du rôle de la *série canonique* d'une courbe de genre $p > 1$, série invariante par toute transformation birationnelle.

Il semble que l'extension, naturelle et tentante, des propriétés dégagées dans le cas des courbes algébriques, aux surfaces, puis aux variétés algébriques de dimension quelconque soit aisée. En réalité on ne put aboutir qu'à une *analogie partielle* avec le cas curviligne : c'est ainsi que la théorie des courbes canoniques d'une surface, puis des hypersurfaces canoniques (à $n-1$ dim.) d'une variété à n dimensions fut élaborée d'assez bonne heure. Encore convient-il de remarquer la différence du mode d'invariance de ces systèmes : alors que la série canonique d'une courbe algébrique est invariante pour tout le groupe des transformations birationnelles, déjà dans le cas des surfaces le système canonique, défini au moyen de l'adjonction par exemple, n'est plus un *invariant absolu*. D'une manière précise ce système demeure inchangé seulement pour les transformations birationnelles sans exception, c'est-à-dire pour les *transformations birationnelles topologiques*. Dans le cas contraire s'introduisent comme parties intégrantes du système transformé quelques-unes des courbes exceptionnelles de la transformation. D'où la nécessité, si l'on s'attache à tout prix à obtenir des éléments invariants par toute transformation birationnelle, d'épurer le système canonique brut afin de parvenir au système canonique pur ou réduit complètement invariant.

On peut d'ailleurs se placer à un autre point de vue, ce qui revient à restreindre le groupe des transformations dont on étudie les invariants. En ne conservant du groupe total que le sous-groupe des transformations birationnelles topologiques, on obtient des propriétés invariantes nommées *relatives*, par opposition aux invariants du groupe complet appelés *absolus*. Avec cette distinction les propriétés des variétés algébriques les plus faciles à mettre en évidence sont les propriétés invariantes relatives. L'étude des invariants absolus est plus délicate, car cette étude présuppose que l'on domine complètement le groupe des transformations birationnelles d'une variété de dimension quelconque, ce qui n'est pas le cas. Dominerait-on complètement ce groupe, il n'est malgré tout pas sûr que l'on épuiserait ainsi la liste des invariants, car il semble naturel que des sous-variétés de dimensions $0, 1, \ldots, n-2$, soient aussi susceptibles d'introduire des caractères invariants. Cette considération des propriétés attachées à des sous-variétés de dimension quelconque ne fut pas immédiatement génératrice de résultats. Il fallut attendre 1932 où, grâce aux travaux de Severi (¹), s'ouvrit l'ère de nouvelles recherches. La raison de ce retard est facile à expliquer : dans le cas des hypersurfaces d'une variété on possède un critère pour *identifier* comme appartenant à une même *classe* deux hypersurfaces, ce critère est celui de *l'équivalence*, de sorte que l'on étudie en réalité des *classes invariantes d'équivalence*. Une telle notion manquait pour des sous-variétés d'une dimension inférieure de plus d'une unité à celle de la variété support. Par la suite les travaux de Severi (²) visant à combler cette lacune ont permis, par l'introduction du concept de variétés équivalentes, la recherche systématique de nouvelles propriétés.

Dans le cas spécial des surfaces, Severi lui-même, Enriques, Segre, Campedelli ont dégagé les invariants fondamentaux. Pour le cas des variétés à 3 dimensions, deux mémoires de Segre (³) ont épuisé la question, en introduisant, pour une telle variété, d'une part des séries de groupes de points, d'autre part des séries de courbes invariantes.

Un travail semblable restait à accomplir pour une variété de dimension quelconque : une des principales difficultés de ce cas résidait dans le choix d'un algorithme qui se prêtât d'une manière aisée à des formules générales, car l'exemple de $n = 3$ donnait des relations numériquement assez compliquées. Cette extension fut réalisée en 1937 simultanément par deux auteurs, d'une manière indépendante, d'une part dans un Mémoire de J. Todd (⁴), d'autre part dans des Notes des *Comptes rendus* publiées par l'auteur du présent travail (⁵).

(¹) *Commentarii math. Helvetici*, Vol. 4, 1932.
(²) *Cf.* aussi J. Todd, *Annales of Math*, 2ᵉ série, Vol. 35, 1934.
(³) *Mém. Reale Acc. d'Italia*, Vol. V, 1934, p. 479.
(⁴) *Proc. London Math. Soc.*, 2ᵉ série, Vol. 43, 1937, p. 127.
(⁵) *C. R. Acad. Sc.*, t. 204, 1937, p. 92 et 217.

Ces deux extensions généralisent des propriétés déjà connues, mais en partant de points de vue différents. Le premier des Mémoires indiqués utilise la méthode algébrico-géométrique de l'école italienne; le deuxième accorde la préférence à la méthode transcendante, point de vue de l'école française et qu'ont illustré les travaux de Picard et de Humbert. Toutefois cette dernière méthode présente un inconvénient : elle n'est pas absolument générale et requiert l'existence sur la variété de formes différentielles de première espèce, ou formes de Picard. Elle ne semble donc pas s'appliquer aux variétés régulières : cependant il est possible d'étendre les propriétés introduites à de telles variétés, en procédant par récurrence et prenant par définition certaines combinaisons de systèmes covariants comme système canonique. J'ajoute d'ailleurs que l'emploi du jacobien a été adopté avec fruit par certains géomètres de l'école italienne, notamment par M. de Franchis ([1]).

Le premier Chapitre du présent Mémoire est consacré à l'introduction, par la considération des formes différentielles de première espèce, c'est-à-dire par voie transcendante, des systèmes canoniques de toute dimension sur une variété irrégulière. L'objet du Chapitre II est l'extension des concepts de variétés canoniques au cas de variété régulière : dans ce but il commence par l'examen de certains problèmes géométriques, problèmes de contact, dont la solution conduit à celle de la définition directe et générale des systèmes canoniques par voie purement géométrique. Dans le troisième Chapitre sont groupées des formules auxquelles on peut donner le nom de théorèmes d'adjonction, car ces formules permettent d'exprimer les variétés canoniques de variétés immergées dans une V_n donnée au moyen de l'*intersection* de ces variétés avec certaines combinaisons *ne faisant intervenir que les systèmes canoniques* de V_n elle-même. Ces formules s'opposent ainsi à celles développées dans le Chapitre précédent qui introduisent les systèmes canoniques de *sous-variétés de* V_n. Ce dualisme des formules se reflète dans l'emploi de deux symbolismes dont les liens sont examinés au n° 24. Ces formules, bien que non nécessaires au développement de la théorie, sont néanmoins utiles dans la pratique, ainsi que le montrent les exemples du Chapitre IV, en permettant de présenter sous une forme nouvelle les résultats des chapitres antérieurs, forme intéressante dans certaines applications. Une partie de celles-ci fait l'objet du quatrième Chapitre : j'ai dû me borner dans cette matière, tant à cause du champ étendu des applications possibles, qu'à cause des difficultés techniques qui subsistent dans l'emploi des formules générales malgré le symbolisme mis en œuvre. C'est ainsi que je n'ai pas examiné le comportement des systèmes canoniques (*invariants relatifs*) par une transformation birationnelle sinon arbitraire, du moins assez générale : cette question fait d'ailleurs l'objet d'un Mémoire

([1]) *Rendiconti. Circolo. Math. Palermo*, t. LVI, 1932, p. 223; t. LX, 1936, p. 161.

de J. Todd [1]. En outre cet Auteur envisage également les invariants de nature arithmétique analogues au genre, introduits par les nouvelles variétés [2]. Dans le présent travail j'ai laissé ce point de vue de côté, de même que l'interprétation topologique ou l'application aux problèmes d'équivalence qui seraient cependant d'une étude intéressante.

Dans le dessein d'obtenir une théorie transcendante, uniforme, valable pour toutes les variétés, j'ai été amené à élargir le champ des formes différentielles au delà des formes de Picard. Dans deux Notes aux *Comptes rendus* [3], je reprends la question des variétés canoniques sous des bases nouvelles, par la considération des « formes permises ». Cette notion n'est pas exploitée dans le présent Mémoire, celui-ci étant en majeure partie de rédaction antérieure à celle des Notes précitées et sa publication ayant été retardée par les événements. D'autre part le développement de la Théorie des variétés canoniques à partir de la notion de forme permise fera l'objet d'un Mémoire ultérieur.

En terminant cet exposé, je voudrais exprimer ma déférente gratitude à M. Élie Cartan, pour l'intérêt qu'il n'a cessé de témoigner à mes recherches, ainsi qu'à M. René Garnier pour la bienveillante compétence avec laquelle il a bien voulu examiner ce travail.

CHAPITRE I.

DÉFINITION DES SYSTÈMES CANONIQUES.

I. — Rappel des résultats relatifs aux courbes et aux surfaces.

1. Considérons sur une courbe C de genre $p > 0$ une forme différentielle [4] de première espèce $u = d\mathrm{I}$. Le *groupe jacobien* de cette forme, c'est-à-dire le groupe des points doubles de l'involution (*transcendante*) $\mathrm{I} = \text{const.}$, se compose, comme l'on sait, d'un groupe de la *série canonique* [5] de la courbe. La connaissance de cette série permet de trouver le groupe jacobien, ou plus

---

(1) *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, ser. 2, Vol. 5, 1937, p. 117.

(2) *Proc. London Math. Soc.*, ser. 2, Vol. 43, 1937, p. 190.

(3) *C. R. Acad. Sc.*, t. 209, 1939, p. 82 et t. 211, 1940, p. 156.

(4) Dans ce Mémoire, nous adopterons la terminologie et les notations de M. É. Cartan sur les formes différentielles envisagées comme formes algébriques (*cf.* par exemple : *Leçons sur les Invariants Intégraux*, p. 55). De plus une lettre minuscule grecque désignera une forme différentielle rationnelle quelconque (une variété *polaire* d'une telle forme sera une variété polaire pour quelqu'un de ses coefficients); une minuscule latine, une forme de première espèce. (On sait d'ailleurs qu'une telle forme est nécessairement une différentielle exacte.)

(5) L'introduction, par voie géométrique, de la série canonique est due à Brill et Noether. L'identité d'un groupe de la série canonique et du groupe jacobien d'une intégrale de première espèce résulte simplement de la relation, due à Riemann, entre les intégrales abéliennes de première espèce et les courbes adjointes de degré $n - 3$, d'une courbe plane de degré n.

précisément, de déterminer un groupe de points équivalent sur C à ce groupe, d'une involution définie par une relation de la forme $\varphi = 0$, où $\varphi = df$ est une forme différentielle rationnelle quelconque attachée à C, élément d'une intégrale abélienne.

En effet, reprenant un raisonnement connu, considérons sur C le rapport

$$\delta = \frac{df}{dt} : \frac{d\mathrm{I}}{dt} = \frac{\varphi}{u},$$

où t est une variable uniformisante (locale) de C. δ est une *fraction rationnelle du point de* C, puisque u et φ sont des différentielles rationnelles. Par suite le groupe des zéros et celui des pôles de δ sont équivalents. Or le groupe des zéros est formé du groupe jacobien de φ, que l'on désignera par la notation $\{\varphi\}$. Le groupe des pôles comprend : 1° le groupe des zéros du dénominateur de δ; 2° les groupes provenant des singularités (polaires et logarithmiques) de f. On voit tout de suite qu'un pôle r-uple de f est un pôle $(r+1)$-uple de δ, et qu'un point singulier logarithmique est pôle simple de δ.

On obtient par suite, en définitive,

$$(1) \qquad \{\varphi\} \equiv \{u\} + (r+1)\mathrm{P}_\varphi + \mathrm{L}_\varphi,$$

où P_φ désigne les pôles de f et L_φ les points singuliers logarithmiques.

En particulier si f est une *fraction rationnelle*, on obtient la formule classique donnant le groupe jacobien d'une *série linéaire*

$$(1') \qquad \{\varphi\} \equiv \{u\} + 2\mathrm{P}_\varphi.$$

Remarquons enfin que la formule (1′) est susceptible de nous donner une *définition directe* de la *série* $\{u\}$: il suffit en effet de montrer que la différence $\{\varphi\} - 2\mathrm{P}_\varphi$ *est indépendante* de φ, ce que la considération d'un rapport tel que δ fournit immédiatement.

2. Passons maintenant au cas d'une surface, et tout d'abord considérons une surface d'irrégularité positive. Soient sur une telle surface S, u une forme différentielle totale de première espèce, élément d'une intégrale simple de Picard, déterminant un faisceau (*transcendant*) de courbes, solution de $u = 0$. Envisageons le groupe jacobien $\{u\}$ de ce faisceau : en un point de ce groupe, on a, par définition, $u = 0$ pour toutes les directions de déplacement sur S de sorte qu'un tel point est donné par : $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t_1} = 0$, $\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t_2} = 0$, où t_1 et t_2 sont deux variables uniformisantes en ce point. Dans le cas général $\{u\}$ comporte un nombre fini de points (¹) et n'est autre qu'un groupe de la série W de Severi de la surface S (²).

(¹) Il n'en serait pas ainsi, par exemple, si le faisceau $u = 0$ était composé avec un faisceau algébrique (SEVERI, *loc. cit.* dans la note suivante, p. 289).

(²) SEVERI, *Comm. Math. Helvetici*, 4, 1932, p. 268.

Si l'on envisage sur S une deuxième forme différentielle de première espèce, v, elle détermine en général, avec la première, une *courbe des contacts* de u et v sur S : lieu des points où il existe une droite tangente commune à chacune des courbes des faisceaux $u = 0$ et $v = 0$ passant par ce point, ou encore lieu des points où $[uv] = 0$, en notant par $[uv]$ le produit extérieur des deux formes u et v. Désignons une telle courbe par $\{u, v\}$ et remarquons que l'on a les inclusions suivantes : $\{u\} \subset \{u, v\}$; $\{v\} \subset \{u, v\}$. La courbe $\{u, v\}$, manifestement algébrique, est fournie par l'annulation du jacobien

$$\frac{D(u, v)}{D(t_1, t_2)} = 0, \qquad \text{ou } [u, v] = 0.$$

Ce n'est autre qu'une courbe du *système canonique* (impur) de S.

3. De même que pour le cas d'une courbe, le *système canonique* et la série W (que l'on nomme encore *série canonique*) d'une surface permettent de résoudre de nombreux *problèmes de contact entre faisceaux*, algébriques ou non (mais, dans ce cas, solutions d'équations différentielles algébriques sur la surface). Dans ce but nous emploierons une méthode de récurrence consistant à comparer entre elles deux courbes relatives à des problèmes de contact différant seulement par la nature d'une seule forme différentielle : cette méthode sera fréquemment appliquée dans la suite.

Prenons d'abord une forme différentielle de première espèce, u, et une différentielle de fraction rationnelle φ, et proposons-nous la recherche de la *courbe des contacts* $\{u, \varphi\}$. Soit v une deuxième forme différentielle de première espèce, et considérons le rapport [1]

$$\delta = \frac{D(u, \varphi)}{D(u, v)} = \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Procédant de la même manière qu'au n° 1 pour une courbe algébrique, on trouve que la courbe des zéros de la *fraction rationnelle* δ n'est autre que la courbe des contacts cherchée : $\{u, \varphi\}$.

La courbe polaire de δ comprend : $\{u, v\}$ lieu des pôles du premier ordre, puis la courbe polaire de φ soit P_φ. (Il est entendu que dans P_φ chaque lieu de pôles r-uples est compté r fois : ainsi, si φ est la différentielle d'une fraction rationnelle possédant une courbe polaire simple, S, alors $P_\varphi = 2\,S$.) On a donc l'équivalence

$$\{u, \varphi\} \equiv \{u, v\} + P_\varphi. \tag{2}$$

---

[1] Il est entendu, ici et dans tous les cas analogues ultérieurs, que ce rapport est à concevoir comme le quotient des deux déterminants $\dfrac{D(u, \varphi)}{D(t_1, t_2)}$ et $\dfrac{D(u, v)}{D(t_1, t_2)}$; où t_1 et t_2 sont encore des variables uniformisantes locales de la surface. (La théorie des déterminants fonctionnels apprend d'ailleurs que le choix de ces variables n'influe par sur δ.)

Soient maintenant φ et ψ deux différentielles rationnelles et recherchons leur courbe des contacts $\{\varphi, \psi\}$. La fraction rationnelle

$$\delta' = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(\varphi, u)} = \frac{\partial\psi}{\partial u}$$

fournit de la même manière que plus haut

$$(2') \qquad \{\varphi, \psi\} \equiv \{\varphi, u\} + P_\psi,$$

ce qui, confronté avec (2), donne

$$(3) \qquad \{\varphi, \psi\} \equiv \{u, v\} + P_\varphi + P_\psi.$$

4. La formule (3) permet de trouver une courbe équivalente à la *jacobienne d'un réseau*, R, par la méthode suivante, méthode dite de *dégénérescence* que nous retrouverons encore plus loin (n° 16) : prenons dans un système linéaire ∞^3, Σ, (*un tissu*), deux faisceaux sans courbe commune d'équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Leur courbe des contacts est donnée par (3), où $P_\varphi \equiv P_\psi \equiv 2S$, et où S est une courbe de tissu. On vérifie de la manière la plus simple les équivalences précédentes en prenant, si F et G sont les deux courbes bases du faisceau φ, d'équations respectives $f = 0$, $g = 0$, soit $\varphi = d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}$, soit $\varphi = d\log\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df}{f} - \frac{dg}{g}$. Dans le premier cas φ admet la courbe polaire *double* $G \equiv S$; dans le deuxième les deux courbes polaires simples $F \equiv G \equiv S$. Dans les deux cas on a bien $P_\varphi \equiv 2S$. Si maintenant les faisceaux φ et ψ varient continûment jusqu'à acquérir une courbe en commun C, la courbe $\{\varphi, \psi\}$ définie par (3) reste équivalente à elle-même et se scinde à la limite dans les courbes suivantes : la courbe C et la jacobienne J du réseau R somme linéaire ou joint des positions limites des deux faisceaux.

On en conclut, puisque $C \equiv S$, que l'on a

$$(4) \qquad J \equiv \{u, v\} + 3S.$$

5. Proposons-nous maintenant la recherche du *groupe jacobien* $\{\varphi\}$ d'un faisceau linéaire.

Pour cela envisageons sur $\{\varphi, u\}$ le rapport déjà utilisé maintes fois $\delta = \frac{\varphi}{u}$. Le groupe des zéros de δ comprend évidemment le groupe $\{\varphi\}$ et en outre un autre groupe ε, dont les points sont caractérisés ainsi : la courbe $\{\varphi, u\}$ est tangente à la courbe φ en un point simple de celle-ci, de sorte que, par suite de la définition de $\{\varphi, u\}$, cette courbe est aussi tangente à la courbe u, passant par ce point. Le groupe ε annule donc le dénominateur de δ, et par suite, s'élimine lorsque l'on écrit l'équivalence des zéros et des pôles de δ.

(Une analyse plus précise se montre d'ailleurs que ε n'est autre que le groupe des *points d'osculation des faisceaux* φ et u.)

Le groupe des pôles de δ comprend en dehors du groupe $\{u\} + \varepsilon$: 1° le groupe intersection de $\{\varphi, u\}$ avec la *courbe polaire* de φ, en dehors des points-bases de celui-ci, et un tel groupe est formé de pôles doubles pour δ et en outre 2° le groupe de φ formé de pôles simples. Or un point commun à $\{u, \varphi\}$ et à P_φ en dehors de φ^2 n'est qu'un *groupe canonique* de P_φ : désignons-le par $\varkappa_\varphi$. On obtient par suite l'équivalence

$$\{\varphi\} \equiv \{u\} + 2\varkappa\varphi + \varphi^2. \tag{5}$$

6. Les formules (3), (4) et (5), bien connues, permettent d'introduire la *série* (*virtuelle*) $\{u\}$ et le *système canonique* $\{u, v\}$ sur des surfaces régulières pour lesquelles l'analyse précédente n'est plus valable. Cette extension ne présente aucune difficulté, et se fait toujours par la considération de déterminants fonctionnels, *fonctions rationnelles* du point de la variété sur laquelle on opère (courbe ou surface).

II. — Cas d'une variété de dimension quelconque.

7. Il est facile maintenant de passer à une variété V_n de dimension n, supposée actuellement *privée de singularité*. Si l'on se donne $\lambda + 1$ formes différentielles rationnelles, ou formes de Pfaff, $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda$, on définit ainsi $\lambda + 1$ faisceaux d'hypersurfaces [1] obtenus en égalant chaque ω_j à zéro.

Dans le cas général où les faisceaux sont en position générique les uns par rapport aux autres, ils déterminent sur V_n une *variété algébrique* à λ dimensions des *contacts* de ces faisceaux, c'est-à-dire lieu du point de V_n où il existe un $[n - \lambda]$ tangent commun [2] à une surface de chaque faisceau passant par ce point (alors qu'en général les hypersurfaces ont un $[n - \lambda - 1]$ tangent commun seulement) ou encore : en un tel point le produit extérieur $[\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda] = 0$. Cette variété des contacts sera désignée par le symbole : $\{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda\}$.

Analytiquement, elle est définie par l'annulation [3] de la matrice

$$\left\| \frac{\partial \omega_j}{\partial (dt_k)} \right\| \qquad (j = 0, 1, \ldots, \lambda;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

(annulation qui est bien une conséquence de $[\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda] = 0$) les t_k désignant comme toujours des variables uniformisantes (locales) de V_n.

8. Envisageons en premier lieu le cas particulier où V_n possède des *intégrales de Picard de première espèce*, c'est-à-dire où l'irrégularité superficielle q de V_n

(1) On désigne ainsi une variété à $n - 1$ dimensions dans une variété à n dimensions (les mots de surface et de courbe étant réservés aux cas des variétés à 2 ou 1 dimensions).

(2) Je désignerai, lorsqu'il n'y aura point de confusion possible, un espace projectif à k dimensions par $[k]$.

(3) Pour abréger on dira qu'une matrice de type quelconque est nulle si elle n'est pas de rang maximum.

est positive. Si l'on choisit λ tel que $\lambda+1 \leqq q$ on peut prendre, pour les ω_j du numéro précédent, $\lambda+1$ formes différentielles de première espèce $u_0, u_1, \ldots, u_\lambda$. L'hypothèse que les faisceaux ω_j sont génériques se traduit par le fait que ces formes différentielles de première espèce sont *fonctionnellement indépendantes* : c'est ce que nous supposerons.

Dans ce cas nous dirons que la variété

$$\{u_0, u_1, \ldots, u_\lambda\}$$

définie au moyen de $\lambda+1$ formes de première espèce est une *variété canonique de dimension* λ de V_n, et nous la représenterons par la notation $K_\lambda(V_n)$, où le symbole K_λ joue ainsi le rôle d'un opérateur à gauche de V_n ou plus simplement, lorsqu'aucune ambiguïté ne sera possible, par K_λ^n.

Pour que cette définition soit intéressante, il faut montrer que, comme pour les courbes et les surfaces, les variétés canoniques d'une même dimension λ *forment un seul système d'équivalence*.

Nous envisagerons d'abord le cas de deux variétés $W=\{u_0, u_1, \ldots, u_\lambda\}$ et $\overline{W}=\{\overline{u}_0, u_1, \ldots, u_\lambda\}$ ne différant que par une seule des formes. La démonstration est aisée, tout au moins dans le cas où $\lambda+2 \leqq q$: prenons en effet une $(\lambda+2)^{\text{ième}}$ forme différentielle $\overline{u}_0$ et considérons la variété canonique à $\lambda+1$ dimensions

$$T=\{u_0, \overline{u}_0, u_1, \ldots, u_\lambda\}.$$

Sur cette T, les variétés

$$W_\rho=\{u_0+\rho\overline{u}_0, u_1, \ldots, u_\lambda\},$$

où ρ est un paramètre, forment un faisceau comprenant pour $\rho=0$ ou $\rho=\infty$, respectivement les variétés W et $\overline{W}$. Ces deux variétés sont tracées sur T par les hypersurfaces J_ρ du *faisceau linéaire*

$$J_\rho=\{u_0+\rho\overline{u}_0, u_1, \ldots, u_\lambda, \omega_1, \ldots, \omega_p\},$$

où les ω_j sont $p=n-\lambda-1$ formes différentielles arbitraires. L'intersection de la variété T par une hypersurface J_ρ comprend, outre la variété W_ρ, un résidu ε se caractérisant ainsi : en chaque point M de ε les $\lambda+1$ formes différentielles $v=u_0+\rho\overline{u}_0$, u_i ont un $[n-\lambda-1]$ tangent commun, tangent aussi à $\overline{u}_0$ puisque d'une part M est sur T et que d'autre part

$$[u_0, \overline{u}_0, u_1, \ldots, u_\lambda]=[v, \overline{u}_0, \ldots, u_\lambda];$$

enfin M appartenant à J_ρ les n formes v, u_i, ω ont un élément linéaire intégral commun, élément linéaire appartenant nécessairement au $[n-\lambda-1]$ tangent précédent [si l'on suppose le choix des ω_j tel que la varieté $\{\omega_1\omega_2\ldots\omega_\rho\}$ n'ait pas de points communs avec T [1]] : par suite aux points de ε il existe un élément linéaire tangent commun aux $(n+1)$ formes ω_j, u_0, $\overline{u}_0$, u_i. Cette variété ε est donc variété-base du faisceau découpé sur T par les *jacobiennes* J_ρ. La partie

[1] Ce choix est possible, car la variété $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p\}$ est à $p-1$ dimensions, et la variété T est à $\lambda+1$ dimensions : or $(p-1)+(\lambda+1)=n-1<n$.

variable, c'est-à-dire la variété W_ρ appartient donc à un système d'équivalence. (En se reportant au renvoi du n° 11 on reconnaît que ε est l'intersection de T avec la variété des contacts *extérieurs* des $n+1$ formes considérées.)

On passe ensuite facilement au cas général, car deux K_λ^n peuvent toujours se réunir par une chaîne de variétés de contacts ayant deux à deux λ faisceaux en commun.

Le système d'équivalence auquel appartiennent les variétés canoniques de dimension λ se nommera le *système canonique de dimension* λ de V_n et se dénotera par $|K_\lambda^n|$.

9. Avant de donner une extension des systèmes canoniques aux variétés n'entrant pas dans la catégorie envisagée précédemment, par exemple variétés d'irrégularité superficielle nulle, ou même variétés possédant un système ∞^{n-k} d'indice 1, de variétés à k dimensions, cas où $n-k+1$ formes différentielles de première espèce sont toujours fonctionnellement dépendantes (1), nous traiterons différents *problèmes de contact*, que les K_λ^n permettent de résoudre, problèmes dont les énoncés sont analogues à ceux rencontrés aux n^os 3, 4, et 5.

CHAPITRE II.

PROBLÈMES DE CONTACT.

I. — Problèmes de contact entre intégrales de première espèce et fractions rationnelles.

10. Faisons tout d'abord quelques remarques d'ordre géométrique sur la variété des contacts de $\lambda+1$ faisceaux, dans le cas où l'un de ceux-ci possède une *variété base*, ainsi que cela se produit pour des faisceaux linéaires par exemple.

Envisageons donc $\lambda+1$ faisceaux $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda$ et supposons que le faisceau ω_0 ait une variété base (à $n-2$ dimensions) que nous désignerons par W. A part cela, les $\lambda+1$ faisceaux sont toujours placés en position générique.

Appelons T la variété $T=\{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_\lambda\}$ et τ la variété $\tau=\{\omega_1, \ldots, \omega_\lambda\}_W$, c'est-à-dire la *variété des contacts des* λ faisceaux $\omega_1, \ldots, \omega_\lambda$ sur W. τ *qui est à* $\lambda-1$ *dimensions appartient à* T.

En effet, soit M un point de τ : les λ faisceaux ω_i ont en commun un $[(n-2)-(\lambda-1)]=[n-\lambda-1]$ tangent situé dans le $[n-2]$ tangent à W en M, par définition de τ. D'autre part, les hyperplans tangents en M à ces λ faisceaux se coupent suivant un $[n-\lambda]$ contenant le $[n-\lambda-1]$ précédent. Cet $[n-\lambda]$ et le $[n-2]$ tangent à W ont donc comme réunion

(1) *Cf.* SEVERI, *Ann. di Matematica*, 20, 1913, p. 201.

un $[n-\lambda+n-2-(n-\lambda-1)]=[n-1]$. Il existe par suite une hypersurface de faisceau u_0 admettant cet $[n-1]$ comme hyperplan tangent à M, ce qui montre que M appartient à T.

Il en résulte que la section T par une hypersurface arbitraire du faisceau ω_0, hypersurface que nous désignerons par la même lettre, comporte tout d'abord la variété τ. On peut se proposer la recherche de la partie résiduelle. On voit facilement que celle-ci n'est autre que la variété $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda\}_{\omega_0}$, c'est-à-dire la variété de contacts des faisceaux ω_i sur l'hypersurface ω_0. Par suite on a l'égalité (¹)

$$(T, \omega_0,) = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda\}_W + \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\lambda\}_{\omega_0}. \tag{6}$$

11. Considérons maintenant $\lambda+1$ faisceaux sur V_n, comprenant ρ formes différentielles de première espèce et $\lambda+1-\rho$ différentielles rationnelles.

Désignons par $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho}$ les différentielles rationnelles et par $u_1, \ldots, u_\rho$ les formes différentielles de première espèce. Proposons-nous la recherche de la variété

$$T = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho}, u_1, \ldots, u_\rho\}.$$

Introduisons pour cela, employant encore la méthode du n° 3, une $(\rho+1)^{\text{ième}}$ forme de première espèce u_0 et considérons, *sur la variété*

$$\Theta = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho}, u_0, u_1, \ldots, u_\rho\},$$

le déterminant fonctionnel δ déjà employé plusieurs fois

$$\delta = \frac{D(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, u_1, \ldots, u_\rho)}{D(u_0, \varphi_1, \ldots, u_1, \ldots, u_\rho)} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_0}.$$

Exprimons l'équivalence sur Θ des variétés pôles et zéros de la fraction rationnelle δ. Les zéros du numérateur ne sont autres que les points de la variété

$$\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho}, u_0, \ldots, u_\rho\}_\Theta.$$

Il est manifeste que cette variété comprend : 1° la variété T inconnue; 2° une variété ε que l'on peut caractériser ainsi : en un point M de ε les $\lambda+1$ hypersurfaces $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, u_\rho$ ont un $[n-\lambda-1]$ tangent commun coupant le $[\lambda+1]$ tangent à Θ en M suivant *une droite* d'après la définition de la variété de contacts de $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, u_\rho$ sur Θ. Mais cet $[n-\lambda-1]$ est aussi tangent à la surface u_0 qui y passe puisque M appartient à Θ donc les points de ε sont tels que le $[n-\lambda-1]$ tangent aux $\varphi_0, \ldots, u_\rho$ coupe le $[\lambda+1]$ tangent à Θ suivant une droite, ou encore ε est le lieu des points de Θ où les $[\lambda+2]$ faisceaux u_i, φ_j ont une droite tangente commune [on peut dire qu'en un point de ε le système de Pfaff $u_i=0$, $\varphi_j=0$ admet un élément intégral linéaire. ε se nommera *variété des contacts extérieurs* des $\lambda+2$ faisceaux sur Θ pour rappeler qu'en un point

(¹) Conformément aux notations usuelles en géométrie algébrique, je désignerai par (A, B) l'intersection des deux variétés A et B.

de ε le *produit extérieur régressif* (1) (au sens de Grassmann) des $\lambda + 2$ formes différentielles données est nul].

Il suit de là que ε a une *définition symétrique* par rapport aux faisceaux et que par suite on n'a pas à en tenir compte puisqu'il figure aussi dans les zéros du dénominateur de δ.

D'autre part, la section de Θ par une surface polaire d'un faisceau φ_j où $j \neq 0$ figure comme lieu de pôles aussi bien au numérateur qu'au dénominateur de δ : ces sections n'apportent donc aucune contribution dans l'équivalence cherchée. Il reste à évaluer les pôles de δ provenant de la section de Θ par la surface polaire φ_0. D'après la formule (6), cette section comprend les variétés

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho}, u_0, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0} \quad \text{et} \quad \{\varphi_1, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0^2},$$

en désignant par φ_0^2 la variété base du faisceau φ_0 (*variété caractéristique* de φ_0).

Mais il est facile de voir que la première de ces variétés est un lieu de *pôles doubles de* δ (en supposant φ_0 hypersurface polaire simple), alors que la seconde (qui est en quelque sorte la section de Θ avec la *variété d'indétermination* de φ_0) est un lieu de *pôles simples* seulement.

On obtient ainsi l'équivalence fondamentale analogue à (5) :

$$(7) \quad \{\varphi_0, \ldots; u_1, \ldots, u_\rho\} \equiv \{\varphi_1, \ldots; u_0, u_1, \ldots, u_\rho\} \\ + 2\{\varphi_1, \ldots; u_0, u_1, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0} + \{\varphi_1, \ldots; u_0, u_1, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0^2}.$$

Ce qui montre que le problème se ramène à un problème analogue avec une différentielle rationnelle de moins : on parvient ainsi à des variétés de contacts où ne figurent plus que des formes de première espèce; or, pour cette dernière catégorie, la réponse est donnée immédiatement par la définition des *variétés canoniques*. Explicitons donc les calculs.

12. Prenons d'abord le cas d'une seule différentielle rationnelle φ_0; alors la formule (7) nous donne

$$\{\varphi_0; u_1, \ldots, u_\rho\} \equiv \{u_0, \ldots, u_\rho\} + 2\{u_0, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0} + \{u_0, \ldots, u_\rho\}_{\varphi_0^2},$$

ce qui s'écrit par définition des variétés canoniques

$$\{\varphi_0; u_1, \ldots, u_\rho\} \equiv K_\rho^n + 2K_\rho^{\varphi_0} + K_\rho^{\varphi_0^2}$$

ou encore *symboliquement*

$$(8) \qquad \{\varphi_0; u_1, \ldots, u_\rho\} \equiv K_\rho(1 + \varphi_0)^2.$$

L'interprétation du second membre est aisée : on fait jouer à la variété V_n, dans laquelle on prend les variétés de contacts, le rôle d'*unité*

$$[K_\rho(1) = K_\rho^n].$$

(1) Cf. *Enzykl. d. Math. Wiss.*, III, AB 11, p. 1442; É. CARTAN, *Invariants intégraux*, p. 58.

La forme (8) suggère la formule suivante

$$(9)\qquad \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\lambda-\rho};\ u_1, \ldots, u_\rho\} \equiv K_\lambda[(1+\varphi_0)^2(1+\varphi_1)^2\ldots(1+\varphi_{\lambda-\rho})^2],$$

dans laquelle chaque produit des φ_j dans le développement du polynome du second membre désigne l'intersection des φ_j correspondants.

La formule (9) se démontre facilement au moyen de la formule (7) par le procédé d'induction complète.

En effet (9) étant admise pour $(\lambda - \rho)$ faisceaux linéaires, le second membre de (7) s'écrit

$$K_\lambda(1+\varphi_1)^2\ldots(1+\varphi_{\lambda-\rho})^2 + 2K_\lambda\varphi_0(1+\varphi_1)^2\ldots(1+\varphi_{\lambda-\rho})^2 + K_\lambda\varphi_0^2(1+\varphi_1)^2\ldots(1+\varphi_{\lambda-\rho})^2.$$

Ce qui n'est autre que l'expression développée de

$$K_\lambda(1+\varphi_0)^2\ldots(1+\varphi_{\lambda-\rho})^2.$$

13. Il est loisible dans la formule (9) de faire $\rho = 0$ de sorte que l'on obtient la formule suivante exprimant la *variété de contact* $\lambda + 1$ *faisceaux linéaires* en position générique :

$$(10)\qquad \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\} \equiv K_\lambda \prod_0^\lambda (1+\varphi_i)^2.$$

Or cette formule nous donne la possibilité d'introduire les *systèmes canoniques* sans *utiliser* les formes différentielles de première espèce de sorte que ces systèmes peuvent se considérer sur des *variétés quelconques*. Bien entendu les variétés introduites pourront être *virtuelles*.

En supposant les variétés canoniques déjà définies dans les variétés de dimension $\leqq n-1$ pour lesquelles la formule (10) sera valable, on peut montrer que la variété virtuelle $K_\lambda(1)$ *définie* par la formule (10) reste *équivalente à elle-même lorsqu'on varie les faisceaux.*

A cet effet, on peut observer, en imitant le raisonnement employé au n° 8, que la variété des contacts $W = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}$ peut encore être définie comme intersection complète des variétés du type $J = \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p\}$, où les $p = n - \lambda - 1$ formes ω_i sont choisies arbitrairement (de manière toutefois à constituer avec les φ_j une base pour les différentielles de la variété). Introduisons une $(\lambda+2)^{\text{ième}}$ forme différentielle $\overline{\varphi}_0$, désignons par $\overline{W}$ et $\overline{J}$ les lieux analogues à W et J où $\overline{\varphi}_0$ remplace φ_0, et soit T la variété $\{\varphi_0, \overline{\varphi_0}, \ldots, \varphi_\lambda\}$. Recherchons la nature de l'intersection (JT). Celle-ci comprend en premier lieu W, puis les sections de T par chaque variété-base des $\lambda+2$ faisceaux φ_i (d'après le n° 10 cette section d'ailleurs est la variété des contacts des $\lambda+1$ autres faisceaux sur cette base). Enfin en dehors de ces points existe un résidu ε qui, on le reconnaît comme au n° 11, n'est autre que l'intersection de T avec la variété des contacts extérieurs des $n+1$ faisceaux considérés ω_i et φ_j. Par suite l'intersection $(\overline{J}T)$ ne diffère de la précédente que par $\overline{W}$ et la section de T par la base du faisceau $\overline{\varphi}_0$. On peut donc écrire en désignant par β les sections de T par les bases des faisceaux $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda$ et par $F(\overline{F})$ une hypersurface de $\varphi_0(\overline{\varphi}_0)$:

$$(JT) \equiv \{\overline{\varphi}_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{F^2} + \beta + \varepsilon + W,$$

de même

$$(\overline{J}T) \equiv \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{\overline{F}^2} + \beta + \varepsilon + \overline{W}.$$

Ici, à l'inverse de ce qui a lieu au n° 8, les variétés J et $\overline{J}$ ne sont plus équivalentes dans le cas général, par suite de la présence des variétés bases, mais la théorie classique des hypersurfaces adjointes [1] apprend que les deux combinaisons $J + 2\overline{F}$ et $\overline{J} + 2F$ sont équivalentes. On a par suite, en coupant par T,

$$(JT) + 2(\overline{F}T) \equiv (\overline{J}T) + 2(FT).$$

Or, d'après la formule (6),

$$(FT) \equiv \{\overline{\varphi}_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_F + \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{F^2}$$

et une équivalence analogue pour $(\overline{F}T)$. Par suite, en omettant des termes communs aux deux membres, on peut dire l'expression

$$W + \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\lambda\}_{F^2} + 2\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{\overline{F}} + 2\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{\overline{F}^2}$$

ne change pas si l'on permute φ_0 et $\overline{\varphi}_0$ ou encore que l'expression

$$E \equiv W + 2\{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{\overline{F}} + \{\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda\}_{\overline{F}^2}$$

jouit de la même propriété.

Si maintenant on admet la formule (10) pour les variétés jusqu'à la dimension $(n-1)$, on voit que E peut s'écrire

$$E \equiv W + K_\lambda(\overline{\varphi}_0^2 + 2\overline{\varphi}_0)(1+\varphi_0)^2 \ldots (1+\varphi_\lambda)^2$$

retranchant de E la variété symétrique (comprenant des variétés canoniques déjà définies) :

$$K_\lambda[(1+\varphi_0)^2(1+\overline{\varphi}_0)^2(1+\varphi_1)^2 \ldots (1+\varphi_\lambda)^2 - 1],$$

on obtient la variété

$$K_\lambda(1) \equiv W - K_\lambda[(1+\varphi_0)^2(1+\varphi_1)^2 \ldots (1+\varphi_\lambda)^2 - 1]$$

qui, par hypothèse, est invariante si l'on permute φ_0 et $\overline{\varphi}_0$; comme de plus elle est *symétrique* et indépendante de $\overline{\varphi}_0$ on reconnaît que $K_\lambda(1)$ est indépendante des faisceaux φ_i.

On appellera alors *système canonique de dimension* λ le système d'équivalence de ces variétés $K_\lambda(1)$ de sorte que la formule (10) restera valable dans une variété à n dimensions.

---

[1] Cf. par exemple *Enzykl. d. Math., Wiss.*, III, (6 *b*), p. 763, ou Severi, *Rendic. d. Cir. Math. Palermo*, 28, 1909, p. 33.

II. — Problème de contact entre formes différentielles de première espèce et systèmes linéaires.

14. Un système linéaire de dimension λ d'hypersurfaces dans V_n représente l'ensemble des hypersurfaces de niveau constant pour une fraction rationnelle contenant linéairement $\lambda - 1$ constantes arbitraires et dont la variété des pôles est fixe. Dans ce qui suit un faisceau transcendant (tel que celui déterminé par une forme différentielle de première espèce) sera considéré comme un système linéaire de dimension 1, à cela près que pourra manquer la variété base du faisceau.

Envisageons k systèmes linéaires de dimensions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Par un point générique de V_n passe λ_i hypersurfaces indépendantes du système de dimension λ_i, hypersurfaces ayant en ce point leurs hyperplans tangents linéairement indépendants. On a ainsi $\sum_1^k \lambda_i$ hyperplans en chaque point de V_n déterminant un $[n - \Sigma\lambda_i]$ tangent commun à toutes les hypersurfaces appartenant aux systèmes linéaires. Nous appellerons *variété de contact* des systèmes linéaires donnés, le lieu des points de V_n, où les hypersurfaces qui y passent ont en commun un *espace linéaire d'une dimension supérieure d'une unité à la dimension normale*, c'est-à-dire le lieu des points où il existe un $[n - \Sigma\lambda_i + 1]$ tangent commun à toutes les hypersurfaces des systèmes linéaires.

Pour exprimer qu'un point M appartient à la variété de contact précédente, il suffit d'exprimer que le dernier hyperplan tangent contient le $[n - \Sigma\lambda_i + 1]$ déterminé par les $\Sigma\lambda_i - 1$ autres, ce qui donne $n - \Sigma\lambda_i + 1$ conditions si l'on tient compte du fait que l'hyperplan considéré passe déjà par M; il suit de là que cette variété de contacts est à $\lambda = \Sigma\lambda_i - 1$ dimensions. De même que dans le cas des faisceaux envisagés au paragraphe I de ce Chapitre, nous noterons la variété de contacts de k systèmes linéaires dont $F_1, F_2, \ldots, F_k$ représentent respectivement une hypersurface générique, par l'écriture $\{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$.

15. On peut démontrer relativement à ces variétés de contacts, des propositions analogues à celles formant l'objet du n° 10 : la démonstration est en tous points analogue : si l'on désigne par W la variété base (lorsqu'elle existe) du système linéaire de dimension λ_1 (W est à $n - \lambda_1 - 1$ dim.) et par τ la variété $\tau = \{F_2, \ldots, F_k\}_W$, c'est-à-dire la variété de contacts de systèmes F_2, $F_3, \ldots, F_k$ sur W, alors τ appartient à $T = \{F_1, F_2, \ldots, F_k\}$.

Le reste de l'intersection de T et d'une hypersurface arbitraire $\overline{F}_1$ du système F_1 est formé par la *variété de contacts sur* $\overline{F}_1$ des autres systèmes linéaires considérés et du système (à $\lambda_1 - 1$ dimensions) *caractérisque* de F_1 sur $\overline{F}_1$ soit f_1. En effet soit M un point commun à T et à $\overline{F}_1$ n'appartenant pas à W, alors par M passent seulement λ_1 hypersurfaces indépendantes du système F_1, dont $\overline{F}_1$ est l'une d'elles. Les $\lambda_1 - 1$ autres sont précisément celles du système caractéristique f_1. Le $[n - \Sigma\lambda_i + 1]$ tangent commun en M à tous les systèmes F_i appartient à l'hyperplan tangent en M à $\overline{F}_1$, et se trouve bien tangent commun aux sections des systèmes f_1, F_2, ..., F_k par $\overline{F}_1$.

16. Partant de ces propriétés on peut procéder comme au n° 2 pour exprimer les variétés de contact au moyen de systèmes canoniques, par la considération de déterminants fonctionnels et l'évaluation des ordres de multiplicité des variétés polaires des systèmes pour ces déterminants.

Mais on peut aussi suivre une méthode plus directe et de structure davantage géométrique, la méthode de *dégénérescence*. Elle repose sur la proposition suivante : prenons, dans un système linéaire L de dimension $\lambda + 2$, un système linéaire de dimension p, Φ, et un système à q dimensions, Σ, *non sécant* avec Φ, c'est-à-dire Φ et Σ n'ont aucune hypersurface commune et tels de plus que $p + q = \lambda + 1$. L est alors la somme linéaire des systèmes Φ et Σ. Si l'on envisage la variété de contact de Φ, Σ et d'un certain nombre d'autres systèmes linéaires R_1, R_2, ..., dont l'ensemble sera désigné par R et la somme des dimensions par ρ (cet ensemble peut manquer), cette variété de contact, soit τ, est tracée sur la variété T de contact du système L et des systèmes restants R. Si maintenant Σ et Φ varient continûment jusqu'à acquérir une hypersurface S en commun et par suite à déterminer un système somme linéaire $L^\star$ à $\lambda + 1$ dim., τ varie aussi avec continuité, et se scinde à la limite dans les variétés suivantes : $\tau^\star$ de contact entre $L^\star$ et les systèmes résiduels, et $\varkappa$ de contact entre ces systèmes et le *système caractéristique* du système L sur S, soit $(L)_S$. Soient en effet $\overline{\Phi}$, $\overline{\Sigma}$, $\overline{\tau}$, les limites de Φ, Σ, τ. Pour qu'un point M appartienne à $\overline{\tau}$, il faut et il suffit que passent en M : 1° ρ hypersurfaces (sous-entendu : indépendantes) de R; 2° p hypersurfaces de $\overline{\Phi}$; 3° q hypersurfaces de $\overline{\Sigma}$; et que ces $\lambda + \rho + 1$ hypersurfaces admettent un $[n - (\lambda + \rho + 1) + 1] = [n - \lambda - \rho]$ tangent commun Θ. Si les $p + q = \lambda + 1$ hypersurfaces des catégories 2° et 3° sont indépendantes, ce sont les $\lambda + 1$ hypersurfaces de $L^\star$ qui passent en M et celui-ci est alors un point de $\tau^\star$. Dans le cas contraire, c'est que M appartient à S et il reste en dehors de S, λ hypersurfaces indépendantes qui appartiennent à L. Si maintenant on observe que le $[n - 1]$ tangent en M à S contient l'espace tangent commun Θ, *en faisant de la géométrie sur* S, on voit qu'en M les hypersurfaces suivantes : 1° ρ hypersurfaces R; 2° λ hypersurfaces de $(L)_S$ admettent un espace linéaire tangent commun d'une dimension supérieure d'une unité à la normale, c'est-à-dire que M appartient à $\varkappa$. Les réciproques sont immédiates.

On a par suite l'égalité

$$\overline{\tau} = \tau^\star + \varkappa,$$

d'où l'équivalence

$$\tau \equiv \tau^\star + \varkappa$$

ou, sous une forme plus explicite,

$$\{\Phi, \Sigma, R\} \equiv \{L^\star, R\} + \{(L)_S, R\}.$$

On se trouve ainsi ramené à des problèmes où un des systèmes linéaires a une dimension de moins, ou à des problèmes analogues dans un espace à dimension d'une unité moindre.

17. On arrive ainsi par réductions successives à des problèmes de contact entre faisceaux linéaires que l'on a appris à résoudre au paragraphe précédent.

La formule exprimant le résultat final, analogue à la formule (9) est la suivante

$$\{F_1, F_2, \ldots, F_k, u_1, u_2, \ldots, u_\rho\} \equiv K_\lambda \prod_1^k (1 + F_i)^{\lambda_i + 1}, \tag{11}$$

où

$$\lambda = \Sigma \lambda_i + \rho - 1,$$

et où ont été mises en évidence les formes différentielles de première espèce pouvant figurer parmi les systèmes linéaires et qui n'apportent aucune contribution au second membre. Pour l'interprétation de celui-ci, se rapporter au n° 12. Admettons en effet (11) démontrée pour des variétés à moins de n dimensions, et pour des variétés à n dimensions lorsque la dimension du système F_1 est λ_1. Établissons-la pour le cas d'un système de dimension $\lambda_1 + 1$. Pour simplifier je désignerai par F le système F_1, par λ sa dimension, et par R les systèmes résiduels $F_2, \ldots, F_k, u_1, \ldots, u_\rho$. Imaginons que F appartienne à un système linéaire L à $\lambda + 2$ dimensions et prenons dans L un faisceau Φ non sécant avec F. Par les résultats du numéro précédent, où Σ est remplacé par F, on a

$$\{F, \Phi, R\} \equiv \{L^\star, R\} + \{(L)_S, R\}.$$

Par hypothèse (11) s'applique au premier membre et au deuxième terme du second membre, on a ainsi en particulier

$$\{F, \Phi, R\} \equiv K_\lambda[(1 + F)^{\lambda+1}(1 + F)^2 P] = K_\lambda[(1 + F)^{\lambda+3} P],$$

où

$$P = (1 + F_2)^{\lambda_2+1}(1 + F_k)^{\lambda_k+1};$$

et de même

$$\{(L)_S, R\} \equiv K_\lambda[F(1 + F)^{\lambda+2} P]$$

d'où, par différence,

$$\{L^\star, R\} \equiv K_\lambda[(1 + F)^{\lambda+3} P - F(1 + F)^{\lambda+2} P] \equiv K_\lambda[(1 + F)^{\lambda+2} P],$$

ce qui n'est autre que la formule (11) pour un premier système $L^\star$ à $\lambda + 1$ dimensions. Partant alors de (10) on parvient à justifier (11) dans tous les cas. Naturellement les formes de première espèce peuvent manquer, et l'on obtient alors une formule analogue à la formule (10) que j'omets d'écrire pour simplifier.

III. — Problème des jacobiennes.

18. *Le problème des variétés jacobiennes* ou des *jacobiennes* est en quelque sorte une dégénérescence des problèmes de contact entre systèmes linéaires traités dans le paragraphe II : on peut dire que c'est un *problème de contact inté-*

rieur au système considéré. On sait en quoi ce problème consiste : étant donné un système linéaire L de dimension $\lambda + 1$, il existe en général ∞^{λ} hypersurfaces de L (formant un système algébrique) ayant une *singularité nouvelle* que ne possède pas l'hypersurface générique du système L. Le lieu de ces singularités est en général à λ dimensions et se nomme variété jacobienne du système considéré.

Dans ce qui suit nous supposerons que le système donné est non-extraordinaire, c'est-à-dire qu'il possède une variété base de dimension normale $(n - \lambda - 2)$, qu'il n'a aucun point multiple assigné et que les singularités nouvelles acquises par les hypersurfaces du système L sont en général des points doubles. La jacobienne d'un tel système est alors le lieu des points de V_n, où une des hypersurfaces de L qui y passe possède un point double.

Il suit de là que, parmi les $\lambda + 1$ hypersurfaces indépendantes qui passent par ce point, λ seulement ont un véritable hyperplan tangent, de sorte que toutes les hypersurfaces passant en ce point sont tangentes à un $[n - \lambda]$ (alors qu'en général il n'existe qu'un $[n - \lambda - 1]$ tangent commun seulement) : on voit bien apparaître ainsi le caractère de variété de *contact intérieur* de la jacobienne.

19. La méthode de dégénérescence utilisée au n° 16 pour les problèmes de contact entre systèmes linéaires s'applique ici à peu près textuellement : choisissons dans le système L à $\lambda + 1$ dimensions envisagé, un faisceau φ et un système Σ à $(\lambda - 1) + 1 - 1 = \lambda - 1$ dimensions non sécant avec φ. La variété de contact de φ et de Σ (à $\lambda - 1$ dimensions d'après le n° 14) est tracée sur la jacobienne du système considéré, et tend à la limite, lorsque φ et Σ se meuvent de manière à acquérir une hypersurface en commun, S, déterminant ainsi un système $L^{\star}$ à λ dimensions, vers les variétés suivantes : variété jacobienne $\tau^{\star}$ de $L^{\star}$ et variété jacobienne du *système caractéristique*, du système L considéré sur S.

De même qu'au n° 16 on ramène le problème à un problème analogue où la dimension, soit du sytème linéaire, soit de la variété support, est réduite d'une unité.

20. On parvient ainsi à la formule suivante, exprimant la jacobienne J_{λ} d'un système linéaire à $\lambda + 1$ dimensions, dont F désigne une hypersurface générique :

$$J_{\lambda} \equiv K_{\lambda}(1 + F)^{\lambda+2}, \tag{12}$$

où des conventions analogues à celles posées dans la formule (9) sont utilisées.

Un cas particulier intéressant de cette formule s'obtient en posant $\lambda = 0$, et en supposant que le faisceau ainsi obtenu est celui d'une forme différentielle de première espèce u. J_0 se réduit dans ce cas à K_0^n, groupe canonique de la variété qui se trouve ainsi être le groupe (virtuel) jacobien $\{u\}$ d'une forme de première espèce.

CHAPITRE III.

THÉORÈMES D'ADJONCTION.

21. Les résultats obtenus dans le Chapitre précédent font intervenir les variétés canoniques d'une même dimension prises dans des variétés du type *intersections complètes ou variétés caractéristiques* ainsi que l'exprime le symbole K_λ placé devant les seconds membres des formules (9), (11) et (12).

Il peut être désirable de n'introduire que les variétés canoniques K_λ^n de *la variété* V_n *dans laquelle on opère*.

Dans ce but on est amené à trouver les variétés canoniques de la variété intersection complète de deux variétés (équivalentes ou non, le premier cas correspondant aux variétés caractéristiques) en fonction d'éléments dépendant de ces variétés et des systèmes canoniques de V_n.

Le cas où l'une de ces variétés est une hypersurface de V_n et l'autre la variété *unité* (c'est-à-dire V_n elle-même) est particulièrement intéressant, et conduit à des théorèmes auxquels on peut donner le nom de *théorèmes d'adjonction*, car ils font intervenir des variétés covariantes, généralisant les classiques variétés adjointes d'une hypersurface.

22. Le premier de ces théorèmes est celui exprimé par la formule suivante :

$$K_\lambda^F \equiv (F, K_{\lambda+1}^F + K_{\lambda+1}^n), \tag{13}$$

où F désigne l'hypersurface d'un système linéaire $|F|$. En particulier, pour $\lambda = n-2$, on obtient

$$K_{n-2}^F \equiv (F, F + K_{n-1}^n),$$

car $K_{n-1}^F = F$, ce qui n'est autre que la classique formule d'adjonction rappelée à la fin du numéro précédent.

Pour démontrer (13) on peut procéder par récurrence en se servant de la formule (12) : remarquons tout d'abord que la formule (13) conduit par application répétée à la formule suivante

$$K_\lambda^{F\rho} \equiv (F, K_{\lambda+1}^{F\rho} + K_{\lambda+1}^{F\rho-1}), \tag{14}$$

où $F\rho$ désigne la $\rho^{\text{ème}}$ variété caractéristique de $|F|$, intersection de ρ variétés équivalentes à F (pour $\rho = 0$ on pose $F^0 = 1$, c'est-à-dire V_n). Cela étant, considérons un système linéaire $|F|$ de dimension $\lambda + 2$ et soit $J_{\lambda+1}$ la jacobienne de ce système donnée par l'application de (12)

$$J_{\lambda+1} \equiv K_{\lambda+1}(1 + F)^{\lambda+2}.$$

Il est facile de voir que la variété $(F, J_{\lambda+1},)$, intersection d'une hypersurface de $|F|$ et de J_λ n'est autre que la jacobienne du système caractéristique de $|F|$

sur F et se trouve par suite donnée par

$$(F, J_{\lambda+1}) \equiv (J_{\lambda}^{|F|})_F \equiv K_\lambda F(1+F)^{\lambda+2},$$

car il faut dans le second membre de (12), prendre F comme *variété unité*, c'est-à-dire *multiplier* ce second nombre par F *avant* le symbole K_λ.

On déduit des deux relations précédentes

$$(F, K_{\lambda+1}(1+F)^{\lambda+3}) \equiv K_\lambda F(1+F)^{\lambda+2}$$

ou encore

$$[F, K_{\lambda+1}(1+F)(1+F)^{\lambda+2}] \equiv K_\lambda F(1+F)^{\lambda+2}.$$

Si maintenant on admet la relation (14) pour $\rho \geqq 2$, on voit qu'à chaque terme de la forme [1] $K_\lambda \binom{\lambda+2}{\alpha} F^{\alpha+1}$ dans le second membre, correspond un terme de la forme $\left[F, K_{\lambda+1}\binom{\lambda+2}{\alpha}(F^\alpha+F^{\alpha+1})\right]$ dans le premier membre qui lui est équivalent si $\alpha > 0$. Pour $\alpha = 0$, on a la relation (13) elle-même qui se trouve ainsi démontrée.

23. La formule (13) indique que l'on obtient le système canonique de dimension λ de f en coupant cette hypersurface par une variété à $\lambda+1$ dimensions somme d'une variété canonique à $\lambda+1$ dimensions de F et d'une variété analogue de V_n. Si donc nous appelons *variété adjointe* d'indice λ cette dernière somme de variétés canoniques, (13) peut s'écrire

$$K_\lambda^F \equiv (F, A_\lambda^F) \qquad \text{avec} \quad A_\lambda^F \equiv K_{\lambda+1}^F + K_{\lambda+1}^n,$$

mais dans l'expression de A_λ^F, $K_{\lambda+1}^F$ peut s'écrire à son tour

$$K_{\lambda+1}^F \equiv (F, A_{\lambda+1}^F) \qquad \text{avec} \quad A_{\lambda+1}^F \equiv K_{\lambda+2}^F + K_{\lambda+2}^n$$

et ainsi de suite.

Le dernier terme auquel on arrive correspond à $\lambda + k = n$ et l'on a

$$A_{\lambda+k-1}^F \equiv K_n^n \equiv 1.$$

Par suite l'adjointe d'indice λ de F peut s'écrire

$$A_\lambda^F \equiv K_{\lambda+1}^n + (F, K_{\lambda+2}^n) + \ldots + F^{(n-\lambda-1)}$$

ou encore, comme la *somme* de la *série*

$$A_\lambda^F \equiv K_{\lambda+1}^n + (F, K_{\lambda+2}^n) + (F^2, K_{\lambda+3}^n) + \ldots,$$

en considérant un terme tel que K_ρ^n comme *nul* si $\rho > n$ de sorte que l'on a

---

[1] Conformément à un usage répandu je désigne par $\binom{n}{p}$ le coefficient de x^p dans le développement de $(1+x)^n$, c'est-à-dire pour n et p entiers le coefficient $\dfrac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p$.

symboliquement (avec le sens qui vient d'être précisé) [1]

$$A_\lambda^F \equiv \frac{K_{\lambda+1}^n}{1 - FK}. \tag{15}$$

La formule (14) est susceptible d'une forme toute semblable et s'écrit

$$K_\lambda^{F\rho} \equiv (F^\rho, A_\lambda^{F\rho}) \qquad \text{avec} \quad A_\lambda^{F\rho} \equiv \frac{K_{\lambda+1}^n}{(1 - FK)^\rho}. \tag{16}$$

L'application de (16) se fait selon les mêmes principes que pour (15) : on *développe en série* par rapport à FK le second membre $\left[\text{terme général } \binom{-\rho}{\alpha}(-1)^\alpha F^\alpha K^\alpha = \binom{\rho+\alpha-1}{\alpha} F^\alpha K^\alpha\right]$, en ne conservant que les termes ayant un sens.

24. Le problème posé au n° 21 est ainsi résolu par (15) et (16) pour des hypersurfaces de V_n et leurs variétés caractéristiques des différentes dimensions. Il reste maintenant à traiter le cas des *variétés intersections complètes* et tout d'abord le cas de l'intersection de deux hypersurfaces, F_1 et F_2.

Soit $W = (F_1, F_2)$; si *nous faisons de la géométrie dans* F_1, W se trouve être une hypersurface de cette variété et la formule (15) est applicable et donne

$$K_\lambda^W = (WA_\lambda^W) \qquad \text{avec} \quad A_\lambda^W \equiv \frac{K_{\lambda-1}^{F_1}}{1 - WK},$$

ou développée

$$A_\lambda^W \equiv \sum_0^\infty (W^\alpha K_{\lambda+1+\alpha}^{F_1})_{F_1}$$

(l'∞ comme indice supérieur de sommation indique simplement que l'on prend tous les termes ayant un sens, les suivants étant remplacés par zéro, et le F_1 placé en indice indique que l'on doit prendre les intersections dans F_1). Si *l'on veut faire de la géométrie dans* V_n, on voit que le terme

$$(W^\alpha K_{\lambda+1+\alpha}^{F_1})_{F_1} = (F_1^\alpha F_2^\alpha K_{\lambda+1+\alpha}^{F_1})$$

s'écrit

$$(F_2^\alpha K_{\lambda+1+\alpha}^{F_1}),$$

où cette fois les intersections sont *prises dans* V_n.

Si dans la formule ainsi obtenue :

$$A_\lambda^W \equiv \sum_0^\infty (F_2^\alpha K_{\lambda+1+\alpha}^{F_1})$$

---

(1) Il est à noter que, dans la formule (15) et les suivantes, les opérations symboliques indiquées au deuxième membre ont un sens différent de celui employé au n° 12 [dans la formule (8) par exemple]. Au n° 12 le symbole K_λ est un opérateur portant sur la variété *écrite à sa droite*, opérateur distributif par définition et permutable avec les coefficients numériques. Dans la formule (15) l'opérateur K et ses puissances ne portent *que sur la variété* V_n *dans laquelle on opère :* c'est la raison pour laquelle, dans le développement des formules analogues K est toujours écrit à *droite* des symboles représentant les autres variétés. (La variété unité, c'est-à-dire V_n étant supposée implicitement écrite à droite de K.)

on remplace chaque $K_\rho^{F_1}$ par son expression déduite au moyen de (15), on a

$$A_\lambda^W \equiv \sum_{0,0}^{\infty} (F_1^\beta F_2^\alpha K_{\lambda+2+\alpha+\beta}^n),$$

ce qui n'est autre que le développement de la *fraction rationnelle* en K

$$A_\lambda^W \equiv \frac{K_{\lambda+2}^n}{(1-F_1K)(1-F_2K)}.$$

On entrevoit maintenant la réponse au problème dans le cas général d'une variété W, *intersection complète* de k formes $F_1, F_2, \ldots, F_k$

$$W = (F_1, F_2, \ldots, F_k),$$

on a, pour les systèmes canoniques de W,

$$K_\varepsilon^W \equiv (WA_\lambda^W) \qquad \text{avec} \quad A_\lambda^W \equiv \frac{K_{\lambda+k}^n}{(1-F_1K)(1-F_2,K)\ldots(1-F_kK)}. \tag{88}$$

En particulier, si l'on suppose toutes les hypersurfaces F_i équivalentes à une même hypersurface F, on retombe sur la formule (16).

La formule (18) nous permet le passage du symbolisme actuel à celui employé dans le Chapitre II [*cf.* note (¹), page 163].

Soient par exemple A et B deux hypersurfaces de V_n et $\varphi(A, B)$ une fraction rationnelle en A et B dont le développement en série est supposé à coefficients *entiers*

$$\varphi = \sum_{0,0}^{\infty} C_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta.$$

En vertu de (18), la variété canonique $K_\lambda[\varphi(A, B)]$, s'écrit

$$\sum C_{\alpha\beta} K_\lambda (A^\alpha B^\beta) = \sum C_{\alpha\beta} \frac{A^\alpha B^\beta K_{\lambda+\alpha+\beta}}{(1-AK)^\alpha (1-BK)^\beta} = \varphi\left(\frac{AK}{1-AK}, \frac{BK}{1-BK}\right).$$

Inversement, une variété U, se présentant sous la forme

$$U = \psi(AK, BK) K_\lambda,$$

peut encore s'exprimer, avec l'opérateur K_λ *à gauche*

$$U = K_\lambda \left[\psi\left(\frac{A}{1+A}, \frac{B}{1+B}\right)\right].$$

On peut ainsi transformer les formules du présent Chapitre en formules adaptées au symbolisme du Chapitre II.

Remarquons enfin que si l'on introduit la *fonction génératrice* de Laplace des différentes variétés canoniques, celle de V_n sera

$$\varphi(t) = \sum_{0}^{\infty} K_\lambda^n t^\lambda = \frac{1}{1-Kt},$$

celle de W sera

$$\varphi_W(t) = W \frac{K_k}{(1-F_1K)\ldots(1-F_kK)} \frac{1}{1-Kt},$$

par suite en introduisant les fonctions génératrices attachées aux hypersurfaces F_i, soit

$$\varphi_i(t) = \frac{F_i K}{1 - Kt},$$

on a la formule simple

$$\varphi_W(t) = \varphi_1(F_1)\,\varphi_2(F_2)\ldots\varphi_k(F_k)\,\varphi(t).$$

25. Au moyen de la formule (18) on peut exprimer chacun des termes qui figurent dans les seconds membres des formules (10), (11) et (12) au moyen des variétés canoniques de V_n, ce qui répond au desideratum formulé au début de ce Chapitre. La formule (11)

$$\{F_1, F_2, \ldots, F_k; u_1, \ldots, u_\rho\} \equiv K_\lambda \prod_k^1 (1 + F_i)^{\lambda_i + 1}$$

devient ainsi

$$\{\ldots\} \equiv K_\lambda \prod_1^k \sum \binom{\lambda_i + 1}{\alpha_i} F_i^{\alpha_i} \qquad \text{où } 0 \leqq \alpha_i \leqq \lambda_i + 1.$$

En supposant le deuxième membre développé, on a des termes de la forme

$$\binom{\lambda_1 + 1}{\alpha_1}\binom{\lambda_2 + 1}{\alpha_2}\cdots\binom{\lambda_k + 1}{\alpha_k} F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2}\ldots F_k^{\alpha_k}$$

dont il faut prendre une variété canonique de dimension λ. En vertu de la formule (18) cela revient à remplacer chaque F_i par le symbole $\frac{F_i K}{1 - F_i K}$ et à multiplier le tout à droite par K_λ. La somme de tous ces termes n'est autre évidemment que l'expression du second membre de (11) où l'on a remplacé dans les binomes $(1 + F_i)$, F_i par $\frac{F_i K}{1 - F_i K}$, c'est-à-dire

$$\prod_1^k \left(1 + \frac{F_i K}{1 - F_i K}\right)^{\lambda_i + 1} K_\lambda$$

ou encore

$$\frac{K_\lambda^n}{(1 - F_1 K)^{\lambda_1 + 1}(1 - F_2 K)^{\lambda_2 + 1}\ldots(1 - F_k K)^{\lambda_k + 1}};$$

on a donc la formule suivante, transformée de (11),

$$\{F_1, F_2, \ldots; u_1, u_2, \ldots, u_\rho\} \equiv \frac{K_\lambda^n}{\prod_1^k (1 - F_i K)^{\lambda_i + 1}}. \tag{19}$$

D'une manière toute semblable on transforme la formule (12), donnant la jacobienne d'un système linéaire, sous la forme

$$J_\lambda \equiv \frac{K_\lambda^n}{(1 - FK)^{\lambda + 2}}. \tag{20}$$

On peut observer que cette jacobienne apparaît par comparaison avec (18) comme l'*adjointe d'indice* — 2 de $F^{\lambda+2}$, c'est-à-dire l'adjointe d'indice — 2 de la *variété base* du système.

Remarque. — Les formules (15), (16) et (18) ont été établies en supposant que l'hypersurface F était suffisamment *générique* dans V_n, c'est-à-dire pouvait varier dans un système linéaire suffisamment ample (au moins $\infty^{\lambda+1}$ pour pouvoir exprimer K_λ^F). Ces mêmes formules peuvent servir à *définir* les systèmes $|K_\lambda^F|$ dans les cas où les raisonnements précédents ne seraient plus valables : par exemple si F est *isolée* dans V_n, ou *réductible* ou virtuelle. De même si F possède quelque singularité la formule (18) définit les $|K_\lambda^W|$ en considérant ces singularités comme virtuellement inexistantes.

26. On a obtenu précédemment les variétés canoniques d'une *intersection complète* d'hypersurfaces : on peut, au moyen de la formule obtenue, exprimer les variétés canoniques de la *somme* de deux hypersurfaces; bien entendu cette expression a le sens précisé à la fin du numéro précédent : si F_1 et F_2 sont deux hypersurfaces, une variété canonique de la somme F_1+F_2 est une variété canonique d'une variété F générique (lorsqu'elle existe) vérifiant l'équivalence $F \equiv F_1+F_2$.

Si une telle variété n'existe pas, (14) donnera par *définition* la variété canonique cherchée; on obtient ainsi

$$K_\lambda^{F_1+F_2} \equiv \frac{(F_1+F_2)\,K_{\lambda+1}^n}{1-(F_1+F_2)K}, \tag{21}$$

formule qui se généralise avec facilité au cas d'un nombre quelconque d'hypersurface.

En particulier (21) donne les variétés canoniques du *multiple* d'une hypersurface

$$K_\lambda^{(pF)} \equiv \frac{pFK_{\lambda+1}^n}{1-pFK}. \tag{22}$$

CHAPITRE IV.

EXEMPLES DE VARIÉTÉS CANONIQUES.

27. Commençons par remarquer que, étant donnée une variété V_n, la recherche effective de ses systèmes canoniques peut se faciliter si l'on connaît un système $|F|$ d'hypersurfaces dont les *variétés canoniques des différentes caractéristiques sont connues*, car alors la formule (12) montre que, pour trouver K_λ^n, il suffit de faire varier F dans un système $\infty^{\lambda+1}$ et de prendre la jacobienne J_λ de ce système; dans le second membre de (12) tous les termes sont connus sauf le premier, $K_\lambda(1)$, c'est-à-dire la variété K_λ^n que l'on désire. D'une manière toute semblable la formule (20), transformation de (12) au moyen des théorèmes d'adjonction, fournit K_λ^n à partir d'un système $|F|$, cette fois les variétés canoniques de dimension supérieure à λ étant supposées connues.

On peut aller plus loin dans cette voie en donnant à λ dans (20) successivement les valeurs $n-1$, $n-2$, ..., $\lambda+1$, λ; on aboutit ainsi à un système d'équations linéaires qui, résolu en K_λ, donne l'expression suivante

$$K_\lambda^n \equiv \sum_0^\infty (-1)^\alpha \binom{\lambda+1+\alpha}{\alpha} (F^\alpha J_{\lambda+\alpha}), \tag{23}$$

avec la convention habituelle relative à la limite supérieure de α,

$$(J_n \equiv 1,\ J_\rho \equiv 0 \text{ si } \rho > n)$$

(23) peut s'écrire *symboliquement*

$$K_\lambda^n \equiv \frac{J^\lambda}{(1+FJ)^{\lambda+2}}. \tag{23'}$$

28. Appliquons ce qui précède à la recherche des variétés canoniques d'un *espace projectif* à n dimensions, $[n]$. Dans un tel espace on voit immédiatement un système d'hypersurfaces F particulièrement simple : celui formé des hyperplans de $[n]$; dans ces conditions on a

$$J_\rho \equiv 0, \qquad \text{si } \rho \neq n,$$

car un système linéaire d'hyperplan ne possède pas de variété jacobienne. Le seul terme non nul dans le développement (23) est celui correspondant à $\lambda+\alpha=n$ pour lequel $J_n=1$, d'où

$$K_\lambda^{[n]} \equiv (-1)^{n-\lambda} \binom{n+1}{\lambda+1} F^{(n-\lambda)}; \tag{24}$$

dans la suite nous désignerons par P un hyperplan d'un espace projectif, de sorte que (24) s'écrit

$$K_\lambda^n \equiv (-1)^{n-\lambda} \binom{n+1}{\lambda+1} P^{(n-\lambda)},$$

$P^{(n-\lambda)}$ représente ainsi un espace projectif à λ dimensions $[\lambda]$ [1]. Remarquons que la formule (24) eût très bien pu se démontrer par le premier procédé indiqué au numéro précédent les variétés caractéristiques de F sont en effet toutes des *espaces projectifs* et le procédé d'induction complète est tout indiqué dans ce cas.

29. Faisons une application de la formule (24) à la recherche du degré de la jacobienne d'un système linéaire de formes de $[n]$ de degré p.

Dans ce cas, on a $F \equiv pP$ et la formule (20), qui développée s'écrit

$$J_\lambda \equiv \sum_0^\infty \binom{\lambda+1+\alpha}{\alpha} (F^\alpha K_{\lambda+\alpha}^{[n]}),$$

devient, compte tenu de ce qui précède et de (24),

$$J_\lambda \equiv \sum_0^\infty \binom{\lambda+1+\alpha}{\alpha} (-1)^{n-\lambda-\alpha} p^\alpha P^\alpha \binom{n+1}{\lambda+\alpha+1} P^{n-\lambda-\alpha}$$

---

[1] En particulier pour $n=1$, $\lambda=0$, on retrouve le fait que le groupe canonique d'une droite (ou d'une courbe rationnelle) est formé de -2 points. Pour $n=2$ on obtient la courbe canonique et la série de Severi du plan projectif.

ou

$$J_\lambda \equiv \sum_0^\infty (-1)^{n-\lambda} P^{n-\lambda} \binom{\lambda+1+\alpha}{\alpha} \binom{n+1}{\lambda+\alpha+1} (-p)^\alpha;$$

mais

$$\binom{\lambda+1+\alpha}{\alpha} \binom{n+1}{\lambda+\alpha+1} = \binom{n+1}{\lambda+1} \binom{n-\lambda}{\alpha},$$

d'où

$$J_\lambda \equiv (-1)^{n-\lambda} \binom{n+1}{\lambda+1} P^{n-\lambda} \sum_0^\infty \binom{n-\lambda}{\alpha} (-p)^\alpha.$$

Dans le second membre la sommation va jusqu'à $\alpha = n - \lambda$, car les termes suivants sont identiquement nuls; dans ces conditions la somme n'est autre que le développement de $(1-p)^{n-\lambda}$ et est égal à $(-1)^{n-\lambda}(p-1)^{n-\lambda}$, d'où l'expression définitive de J_λ

$$J_\lambda \equiv (p-1)^{n-\lambda} \binom{n+1}{\lambda+1} P^{(n-\lambda)}. \tag{25}$$

Remarque. — Si $p = 0$, on retrouve pour J_λ la *variété canonique* K_λ^n en vertu de (24); le fait est général, K_λ^n peut se considérer comme la jacobienne à λ dimensions d'un système linéaire formé de variétés (virtuelles) *nulles* $F \equiv 0$, ainsi que le montre (12) ou (20).

30. Passons maintenant à la détermination des systèmes canoniques d'une *hypersurface* de degré p de $[n]$, $F \equiv pP$. Il est indiqué de se servir de la formule (2?) donnant les systèmes canoniques du multiple d'une hypersurface. On a immédiatement la variété adjointe de F

$$A_\lambda^F \equiv \sum_0^\infty p^\alpha P^\alpha K_{\lambda+1+\alpha}^{[n]},$$

ou, en tenant compte de (24),

$$A_\lambda^F \equiv (-1)^{n-\lambda-1} P^{n-\lambda-1} \sum_0^\infty \binom{n+1}{\lambda+2+\alpha} (-p)^\alpha. \tag{26}$$

L'infini est atteint ici pour $\lambda + 2 + \alpha = n + 1$, c'est-à-dire pour $\alpha = n - \lambda - 1$. Le degré de A_λ^F est

$$\binom{n+1}{0} p^{n-\lambda-1} + \ldots + (-1)^\beta \binom{n+1}{\beta} p^{n-\lambda-1-\beta} + \ldots + (-1)^{n-\lambda-1} \binom{n+1}{\lambda+2}.$$

Nous verrons au numéro suivant sous quelle forme on peut mettre ce degré (et celui de la variété canonique correspondante, section de F par A_λ^F).

31. De la même manière on peut appliquer la formule (18) pour la détermination des systèmes canoniques d'une variété W, intersection complète de k formes de $[n]$ [supposée privée de points multiples, du moins virtuellement ainsi que cela a été indiqué à propos de l'application de la formule (18) dans la remarque du n° 25] soient $F_i \equiv p_i P$ ($i = 1, 2, \ldots, k$), les k formes, on a

$$A_\lambda^W \equiv \frac{K_{\lambda+k}^{[n]}}{\prod_1^k (1 - p_i PK)}.$$

Pour donner au second membre une forme commode, désignons par $\varphi(t)$ la fraction rationnelle

(27) $$\varphi(t) = \frac{1}{\prod_1^k (1 - p_i t)} = \sum_0^\infty c_\alpha t^\alpha$$

(l'expression explicite de c_α en fonction des p_i serait aisée à obtenir, mais est inutile ici).

L'expression de A_λ^W devient ainsi

(28) $$A_\lambda^W \equiv \sum_0^\infty c_\alpha (P^\alpha K_{\lambda+k+\alpha}^{[n]}),$$

dans laquelle il faut remplacer $K_{\lambda+k+\alpha}^{[n]}$ par sa valeur tirée de (24), c'est-à-dire par $(-1)^{n-\lambda-k-\alpha}\binom{n+1}{\lambda+1+k+\alpha} P^{n-\lambda-k-\alpha}$, $P^{n-\lambda-k}$ se met alors en facteur et l'on a

$$A_\lambda^W \equiv P^{n-\lambda-k}\omega,$$

où ω est le degré de A_λ^W égal à

$$\omega = \sum_0^\infty c_\alpha (-1)^\alpha \binom{n+1}{\lambda+1+k+\alpha} (-1)^{n-\lambda-k}.$$

Si maintenant on envisage le polynome

$$\psi(t) \equiv \binom{n+1}{0} - \binom{n+1}{1} t + \ldots \equiv (1-t)^{n+1},$$

on voit que le coefficient de $t^{n-\lambda-k}$ dans le produit $\varphi\psi$ n'est autre que ω; on a par suite [1]

$$\omega = [\varphi(t)\,\psi(t)]_{(n-\lambda-k)} = \left[\frac{(1-t)^{n+1}}{\Pi(1-p_i t)}\right]_{(n-k-\lambda)},$$

ou encore (en vertu des propriétés rappelées en note)

(29) $$\omega = \left[\frac{(t-1)^{n+1}}{\Pi(t-p_i)}\right]_{(\lambda+1)}.$$

32. On peut encore obtenir une expression analogue de ω par un procédé intéressant pour la suite (n° 33).

Remarquons pour cela que $K_\lambda^{[n]}$ pour un espace projectif, n'est autre, d'après le développement du second membre de (23) qui nous a conduit à (24), que le coefficient de J^n dans le développement de la fraction rationnelle $\frac{J^\lambda}{(1+J)^{\lambda+2}}$, au facteur $P^{n-\lambda}$ près.

Il suit de là que, si l'on remplace les $K_\lambda^{[n]}$ par ces développements dans l'expression (28) de A_λ^n, on obtient une fraction rationnelle en J dont il suffit de

(1) Je désigne par $[f(t)]_\alpha$ le coefficient de t^α dans le développement de $f(t)$ en série de Laurent autour de $t = 0$. On a les égalités évidentes

$$[t^k f]_{\alpha+k} = [f]_\alpha; \qquad [f(-t)]_\alpha = (-1)^\alpha [f(t)]_\alpha; \qquad \left[f\left(\frac{1}{t}\right)\right]_\alpha = [f(t)]_{(-\alpha)}.$$

prendre le coefficient du terme en J^n pour avoir ω. Or (28) donne

$$\omega = \left[\sum_0^\infty c_\alpha \frac{J^{\lambda+k+\alpha}}{(1+J)^{\lambda+k+\alpha}} \frac{1}{(1+J)}\right]_{(n)},$$

c'est-à-dire

$$\omega = \left[\frac{J^{\lambda+k}}{(1+J)^{\lambda+k+2}} \varphi\left(\frac{J}{1+J}\right)\right]_{(n)},$$

d'après le développement (27) de $\varphi(t)$; mais

$$\varphi\left(\frac{J}{1+J}\right) = \frac{(1+J)^k}{\Pi(1-\overline{p-1}\,J)};$$

par suite la valeur de ω est, avec un léger changement inessentiel de notation,

$$\omega = \left[\frac{1}{(1+t)^{\lambda+2}\Pi(1-\overline{p-1}\,t)}\right]_{(n-\lambda-k)}. \tag{30}$$

L'identité des deux expressions (*polynomes* en p_i) (30) et (29) est facile à vérifier (par l'égalité pour $p_i = 1$ des dérivées partielles en p_i) [1]. En particulier pour $p_i = 1$ on retrouve bien la valeur $(-1)^{n-\lambda-k}\binom{n-k+1}{\lambda+1}$ qui convient à un espace linéaire à $(n-k)$ dimensions d'après (24). Si dans les formules précédentes on fait $k = 1$, on retrouve les résultats du n° 30 mis sous une forme plus condensée.

Vérification directe des résultats qui précèdent.

33. Il n'est pas sans intérêt de vérifier directement les formules (30) et (28) que nous venons d'obtenir, par le calcul du degré de A_λ^W à partir des équations de cette variété. De plus ce même calcul nous donnera aussi une vérification de la formule générale (20) donnant la jacobienne d'un système linéaire d'hypersurfaces.

Envisageons donc dans l'espace projectif $[n]$, dont $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ sont des coordonnées homogènes, la variété W intersection complète de k formes des degrés p_i

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad f_k = 0. \tag{31}$$

---

[1] On peut aussi observer que

$$[f(t)]_{(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt,$$

où le contour C entoure l'origine dans le sens direct.

Par suite si dans l'intégrale :

$$\omega_{30} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\theta^{\lambda+k-n-1}}{(1+\theta)^{\lambda+2}\Pi(1-\overline{p_i-1}\,\theta)}\,d\theta,$$

on fait le changement de variables (suggéré par la remarque de la fin du n° 24) $t = \frac{1+\theta}{\theta}$, on obtient l'intégrale

$$\omega_{29} = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(t-1)^{n+1}}{t^{\lambda+2}\Pi(t-p_i)}\,dt$$

où le contour C entoure le point à l'infini du plan (t). L'égalité de ces deux intégrales montre ainsi l'identité des expressions (29) et (30) de ω.

Coupons cette variété par un système $\infty^{\lambda+1}$ de formes de $[n]$ de degré ν. Soient

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad F_{\lambda+1} = 0,$$

$(\lambda + 2)$ formes linéairement indépendantes servant de base à ce système.

Proposons-nous de définir la jacobienne J_λ^F. En un point M de cette variété les $\lambda + 1$ hyperplans tangents à $\lambda + 1$ hypersurfaces du système et les k plans tangents aux formes (31) définissant W ont un $[n - \lambda - k]$ en commun d'après la définition de J_λ.

Il suit de là que les $\lambda + 2 + k$ hyperplans polaires de M par rapport aux formes f_i et F_j ont un $[n - \lambda - k - 1]$ commun. Cela veut dire que la matrice (à $\lambda + 2 + k$ lignes et $n + 1$ colonnes)

$$(32) \qquad \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_k}{\partial x_0} & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_k}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial F_0}{\partial x_0} & \dfrac{\partial F_0}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_0}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_{\lambda+1}}{\partial x_0} & \dfrac{\partial F_{\lambda+1}}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_{\lambda+1}}{\partial x_n} \end{matrix} \right\|$$

est de rang égale à $\lambda + k + 1$, c'est-à-dire que cette matrice est nulle.

Par suite J_λ est défini comme l'intersection de W avec la variété représentée par (32) égalée à zéro [qui est bien $n - (n + 1 - \lambda - k - 1) = \lambda + k$ dimensions; avec les k conditions imposées par (31) cela donne bien λ comme dimension de J_λ]. Il suffit donc d'évaluer le degré de (32).

Or, cette évaluation est classique ([1]) connaissant les degrés des termes de la matrice : ici cette dernière a une composition uniforme par rapport aux colonnes, et le degré des termes d'une ligne est $p_i - 1$ pour la ligne de rang $i \leqq k$ et $\nu - 1$ pour les lignes suivantes.

Il suit de là que ce degré est donné par le déterminant :

$$\delta = \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n+1-\lambda-k} \\ 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-\lambda-k} \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1, \ldots, \rho_1 \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$(1 - \overline{\nu - 1}\, t)^{\lambda+2} \prod^{k} (1 - \overline{p_i - 1}\, t) = \sum^{\infty} \rho_\alpha t^\alpha$$

ou encore δ n'est autre (avec la notation introduite au n° 31, que

$$(33) \qquad \delta = \left[\frac{1}{(1 - \overline{\nu - 1}\, t)^{\lambda+2} \Pi (1 - \overline{p_i - 1}\, t)} \right]_{(n-k-\lambda)}$$

([1]) *Cf.* par exemple *Enzykl. Math. Wiss.*, III, C. 7, p. 828 et suiv.

Pour simplifier posons $p_i = 1 + n_i$, on a

$$\delta = \left[\frac{1}{(1 - \overline{\nu - 1}\, t)^{\lambda+2} \Pi(1 - n_i t)} \right]_{(n-k-\lambda)}. \tag{34}$$

Développons δ en le considérant comme une fonction de ν : *a priori* la série du binome montre que $\delta(\nu)$ est un polynome de degré $(n - k - \lambda)$ en ν. Cherchons-en le développement au moyen de la formule de Mac-Laurin (1), en remarquant qu'il est légitime de dériver sous le signe [ ] par rapport à ν. On a ainsi

$$\delta'(\nu) = \left[\frac{(\lambda + 2)t}{(1 - \overline{\nu - 1}\, t)^{\lambda+3}} \frac{1}{\Pi(1 - n_i t)} \right]_{n-k-\lambda}$$

et d'une façon générale

$$\delta^{(\alpha)}(\nu) = \frac{(\lambda + 1 + \alpha)!}{(\lambda + 1)!} \left[\frac{t^\alpha}{(1 - \overline{\nu - 1}\, t)^{\lambda+2+\alpha} \Pi(1 - n_i t)} \right]_{(n-k-\lambda)},$$

d'où la valeur des dérivées à l'origine

$$\delta^{(\alpha)}(0) = \frac{(\lambda + 1 + \alpha)!}{(\lambda + 1)!} \left[\frac{1}{(1 + t)^{\lambda+2+\alpha} \Pi(1 - n_i t)} \right]_{n-k-\lambda-\alpha}$$

et par suite le développement requis

$$\delta(\nu) = \sum_{0}^{n-k-\lambda} \binom{\lambda + \alpha + 1}{\alpha} h(\lambda + \alpha) \nu^\alpha \tag{35}$$

en posant

$$h(\mu) = \left[\frac{1}{(1 + t)^{\mu+2} \prod_{1}^{k} (1 - n_i t)} \right]_{(n-k-\mu)}. \tag{36}$$

Le fait que le coefficient de $\binom{\lambda + \alpha + 1}{\alpha}\nu^\alpha$ dans l'expression de $\delta(\nu)$, qui *a priori* est une fonction de λ et de α ne dépend en réalité que de la somme $\lambda + \alpha$ est très important, car si l'on désigne par $H_{k+\mu}$ une variété à $k + \mu$ dimensions de degré $h(\mu)$ et par K_μ^W l'intersection $(WH_{k+\mu})$, en remarquant que F est de degré ν et que par suite F^α est de degré ν^α, on voit que la formule (35) exprime que la jacobienne J_λ est de même degré que la combinaison second membre développé de (20) :

$$\sum_{0}^{\infty} \binom{\lambda + \alpha + 1}{\alpha} (K_{\lambda+\alpha}^W F^\alpha).$$

Bien entendu cela ne prouve point l'équivalence des deux variétés (du moins pour $k > 1$), mais cela donne une vérification numérique de la formule (20).

On voit que $h(\mu)$ n'est autre que le degré de l'adjointe A_μ^W, degré obtenu aux nos 31 et 32; les deux formules (36) et (30) ne sont en effet qu'une seule et même formule.

(1) On pourrait aussi poser $\varphi(\nu, t) = \dfrac{1}{(1 - \overline{\nu - 1}\, t)^{\lambda+2} \Pi(1 - n_i t)}$ et développer $\varphi(\nu, t)$ par rapport à ν en appliquant la série du binome.