GUY HIRSCH

Sur des propriétés de représentations permutables et des généralisations d'un théorème de Borsuk

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 60 (1943), p. 113-142

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1943_3_60__113_0>

SUR

DES PROPRIÉTÉS DE REPRÉSENTATIONS PERMUTABLES

ET DES GÉNÉRALISATIONS D'UN THÉORÈME DE BORSUK

PAR M. GUY HIRSCH.

Je me propose d'établir un théorème concernant le nombre de Lefschetz [ou le nombre algébrique des points fixes (1)] d'une représentation (2) permutable avec des représentations topologiques.

Je rappelle un théorème de BORSUK (3) : *Le degré* (4) *de toute représentation T de la sphère* S^n *à n dimensions en elle-même, qui représente chaque paire de points diamétralement opposés de* S^n sur (*et pas seulement* en) *une paire de pareils points, est impair.*

On peut encore lui donner la forme suivante : *Le degré de toute représentation T permutable avec la représentation antipodique* (5) *de* S^n *en elle-même est impair.*

(1) *Voir* P. ALEXANDROFF et H. HOPF, *Topologie I*, Berlin, 1935, pp. 531 et 542. Les notions nécessaires à la lecture du présent article figurent en général dans cet ouvrage qui sera désigné ici par A. H., et aussi, en partie, dans H. SEIFERT et W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, Leipzig et Berlin, 1934 (ouvrage désigné ici par S. T.); on trouvera également une brève nomenclature d'un certain nombre de ces notions, avec leurs principales propriétés, dans une Note mentionnée plus loin (18), où j'ai résumé quelques-unes des propriétés démontrées dans ce travail.

(2) Toutes les représentations qui seront considérées dans ce travail sont des représentations *univoques et continues*; sauf mention contraire, elles ne seront donc, en général, pas *topologiques*, c'est-à-dire *bi*-univoques et *bi*-continues.

(3) K. BORSUK, *Drei Sätze über die n-dimensionale Euklidische Sphäre* (*Fund. Math.*, 20, 1932, pp. 177-190, théorème I); *voir* aussi A. H., p. 483. Une démonstration de ce théorème, par application de la méthode qui sera utilisée dans cet article, a été donnée dans ma Note mentionnée plus loin (18).

(4) Nous désignerons par $c(T)$ le degré de la représentation T. On en trouvera une définition notamment dans A. H., pp. 461 et 490, ainsi que dans S. T., p. 283.

(5) La représentation antipodique est la représentation (topologique) qui représente chaque point de S^n sur le point diamétralement opposé.

Ce théorème est un cas particulier du théorème $\mathbf{B}_c'^{*}$, que j'établirai plus loin (§ III, n° 2) : *Soit T une représentation L-quasi-sphérique du polyèdre* E *en lui-même, permutable avec une représentation A (topologique) périodique d'ordre a, de* E *en lui-même. Supposons que toutes les puissances de A (à l'exception de la représentation identique) soient sans points fixes. Alors le degré de T est premier avec a.*

En vertu de la formule de Lefschetz-Hopf [exprimant le nombre algébrique des points fixes de T (6)], cette conclusion est une conséquence du théorème $\mathbf{A}_c'^{*}$: *Soit A une représentation (topologique) périodique, d'ordre a, du polyèdre* E *en lui-même; supposons que toutes les puissances de A (à l'exception de la représentation identique) soient sans points fixes. Alors le nombre de Lefschetz de toute représentation T de* E *en lui-même, permutable avec A, est un multiple de a.*

J'établirai un théorème qui généralise aussi celui-là, et duquel on pourra déduire un certain nombre de conséquences.

Je démontrerai en effet le théorème suivant (théorème **A**), où E désigne un ensemble dont la nature sera précisée plus loin.

THÉORÈME **A**. — *Soit T une représentation de* E *en lui-même, permutable avec des représentations topologiques* (7) A_i *de* E *en lui-même. Désignons par* $\mathfrak{A}$ *le groupe engendré par ces représentations* A_i, *et par* $\mathfrak{B}$ *le sous-groupe de* $\mathfrak{A}$, *engendré par celles des représentations de* $\mathfrak{A}$ *qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de T; désignons par* $\frac{a}{b}$ *l'indice de* $\mathfrak{B}$ *dans* $\mathfrak{A}$ (8).

Alors le nombre de Lefschetz de T est un multiple de $\frac{a}{b}$ (9).

L'ensemble E sera ici un polyèdre fini. Il convient cependant de remarquer que, exception faite pour les réserves formulées ci-dessous concernant la nature des points fixes de T, nous ne devons imposer à E que l'unique condition suivante : E vérifie la formule de Lefschetz-Hopf (ainsi que le théorème d'invariance topologique de l'indice d'un point fixe régulier).

La méthode de démonstration du paragraphe I s'appliquera seulement aux représentations à points fixes réguliers (10); je déterminerai ultérieurement (§ II) des conditions suffisantes qu'il convient d'imposer à l'ensemble E et au groupe $\mathfrak{A}$

(6) A. H., pp. 531 et 541. Le nombre de Lefschetz d'une représentation T sera désigné ici par $l(T)$ [et non par $\Lambda(T)$ comme dans A. H.].

(7) Il suffirait même que les représentations A_i considérées soient topologiques seulement dans un voisinage des points fixes de T.

(8) Lorsque $\mathfrak{A}$ est d'ordre fini, nous appelons a l'ordre de $\mathfrak{A}$, et b l'ordre de $\mathfrak{B}$.

(9) Nous verrons plus loin que si $\frac{a}{b}$ n'est pas un nombre fini, le nombre de Lefschetz de T est égal à zéro. Nous observerons également qu'un théorème analogue reste valable encore lorsque T est seulement permutable avec le groupe $\mathfrak{A}$ de représentations sans l'être avec toutes les A_i séparément.

(10) A. H., p. 541.

(ainsi qu'au sous-groupe $\mathfrak{B}$) pour pouvoir éventuellement remplacer une représentation T dont tous les points fixes ne seraient pas réguliers par une représentation approchée à points fixes réguliers ([11]).

De ce théorème résulteront un certain nombre de conséquences, obtenues en portant l'attention sur la détermination algébrique du nombre de Lefschetz (au moyen des traces des autohomomorphismes des groupes de Betti); il contient en particulier (§ III) le théorème de Borsuk rappelé ci-dessus ([3]). D'autres conséquences de ce théorème seront développées plus tard : il est possible en effet d'en déduire des conclusions analogues au théorème de Borsuk-Ulam ([12]); il en résulte aussi une propriété des points fixes de représentations périodiques; enfin, on obtient d'autres théorèmes en l'appliquant à un recouvrement (« Überlagerung », et non pas « Überdeckung »), le groupe $\mathfrak{A}$ jouant le rôle du groupe des transformations de superposition (Decktransformationen). Je signalerai également que la démonstration que je donne ici est susceptible (sans en modifier le principe) d'une interprétation qui s'étend sans trop de difficultés aux représentations conservant les fibres (faserungstreue Abbildungen) d'espaces fibrés en eux-mêmes ([13]).

Je tiens à exprimer ma reconnaissance aux mathématiciens qui ont bien voulu m'aider de leurs conseils, particulièrement à M. H. Hopf dont les suggestions m'ont permis, à plusieurs reprises, d'apporter à ce travail d'heureuses modifications, ainsi qu'à M. K. Borsuk ([14]).

([11]) Je m'inspirerai pour cela de résultats obtenus par H. Hopf; *voir* A. H., p. 543, et H. Hopf, *Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, I* (*Math. Annalen*, 100, 1928, pp. 579-608); *voir* aussi mon article *Une propriété des points fixes des représentations de variétés en elles-mêmes* (*Bull. Sc. Math.*, t. 67, 1943, p. 158).

Il suffit par exemple, lorsque $\mathfrak{A}$ est un groupe d'ordre fini, de supposer qu'à l'ensemble obtenu en identifiant dans E les points équivalents par les représentations de $\mathfrak{A}$ s'applique le *théorème d'approximation* de H. Hopf (A. H., p. 543) (condition réalisée si cet ensemble est un polyèdre ou une variété topologique), ce qui signifie qu'on peut y remplacer une représentation dont tous les points fixes ne seraient pas réguliers par une représentation à points fixes réguliers aussi voisine que l'on veut de la première. En particulier, lorsque E est une variété, cette condition sera toujours remplie, quel que soit le groupe $\mathfrak{A}$, et il en résulte que le théorème est vrai sans aucune restriction lorsque E est une variété et lorsque le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est vide (théorème **A'**). Ces hypothèses fort larges seront vérifiées d'elles-mêmes dans la plupart des applications.

([12]) *Fund. Math.* 20 [article cité dans ([3])], théorème II; A. H., p. 486.

([13]) H. Hopf et M. Rueff, *Über faserungstreue Abbildungen der Sphären* (*Comment. Math. Helvet.*, 11, 1938, pp. 49-61). *Voir* par exemple ma Note, *Une propriété des variétés topologiques fibrées* (*C. R. du Congrès des Sciences Mathématiques*, Liége, 1939, pp. 128-131), ou *Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés et des complexes de recouvrement* (*Bull. Soc. Royale des Sciences de Liége*, 1941, pp. 246-260).

([14]) Ainsi que me l'a signalé M. Hopf, ces démonstrations pourraient aussi se faire en remplaçant la formule de Lefschetz-Hopf, dont on se sert ici, par la « formule généralisée d'Euler-Poincaré » (A. H., p. 530), et s'appliqueraient alors à des représentations simpliciales.

I. — Nombre algébrique des points fixes de représentations permutables. Cas de représentations à points fixes réguliers.

1. Nous dirons que deux représentations [2] R et S d'un même ensemble E en lui-même sont *permutables*, lorsque, pour tout point p de l'ensemble E, on a la relation

$$SR(\mathrm{p}) = RS(\mathrm{p}).$$

Nous dirons que la représentation T et le groupe $\mathfrak{G}$ (d'ordre fini ou non) de représentations G_i de E en lui-même sont *permutables*, lorsque, pour chaque indice i il existe un et un seul indice j, *et réciproquement*, tel que la relation

$$TG_i(\mathrm{p}) = G_j T(\mathrm{p})$$

soit vraie pour tout point p de E (les représentations G_i et G_j pouvant d'ailleurs être distinctes ou confondues).

On peut observer que T détermine ainsi dans $\mathfrak{G}$ un *auto-isomorphisme* [15] (et même deux automorphismes inverses), qui sera désigné par la notation $\mathfrak{T}$, et qui fait correspondre l'indice j à l'indice i :

$$A_j = \mathfrak{T}(A_i) \qquad (\text{avec } i = j \text{ ou } i \neq j).$$

Nous énoncerons d'abord quelques propriétés immédiates de représentations permutables.

1° Si R et S sont toutes deux permutables avec T, leurs produits SR et RS le sont également.

2° Si R est permutable avec T, une puissance quelconque de R est permutable avec une puissance quelconque de T.

3° Si R est permutable avec T^r, et S permutable avec T^s, alors les produits SR et RS sont permutables avec $T^{((r,s))}$, où $((r, s))$ désigne le plus petit commun multiple de r et s.

4° Si A est une représentation topologique permutable avec T, son inverse A^{-1} est aussi permutable avec T.

Dans la suite, l'ensemble E sur lequel sont définies les représentations considérées ici sera un polyèdre fini et de dimension homogène [16], ou, plus généralement, un ensemble auquel s'applique la formule de Lefschetz-Hopf.

---

(15) J'emploierai le terme « auto-isomorphisme », de préférence à celui de « automorphisme », en l'opposant au terme « autohomomorphisme » (appelé « endomorphisme » par certains auteurs).

(16) *Voir* les conditions imposées au polyèdre P dans A. H., p. 541, § 3, n° 1.

2. Je démontre maintenant le

LEMME. — *Soient A une représentation topologique de E en lui-même, et T une représentation de E en lui-même permutable avec A. Si p_0 est un point fixe régulier* [10] *pour T, alors $A(\mathrm{p}_0)$ est aussi un point fixe (régulier) pour T, et a même indice* [17] *que p_0.*

La démonstration de ce lemme [que, dans un cas particulier, j'avais d'ailleurs donnée aussi d'une manière directe, dans une Note [18] publiée antérieurement, en y démontrant le théorème de BORSUK] repose sur le théorème de l'invariance topologique de l'indice d'un point fixe [19]. Ce théorème peut s'énoncer ainsi [20] : Soit p_0 un point fixe régulier pour la représentation T de l'ensemble E en lui-même, et soit A une représentation topologique de E en lui-même. Alors le point $\mathrm{p}'_0 = A(\mathrm{p}_0)$ est un point fixe pour la représentation $T' = ATA^{-1}$ de E en lui-même, et a même indice que le point fixe p_0.

Par suite de la permutabilité des représentations A et T, cette représentation T' n'est autre que T, et le lemme ci-dessus est une conséquence immédiate de ce théorème d'invariance.

3. Ce lemme permet de démontrer le théorème **A**, où, comme il a été dit plus haut, E est maintenant un polyèdre fini de dimension homogène [21], et où T est une représentation à points fixes réguliers. Observons d'ailleurs que E pourrait être un ensemble d'un type plus général, auquel s'appliquerait la formule de Lefschetz-Hopf concernant le nombre algébrique des points fixes, ainsi que le lemme ci-dessus, relatif à l'invariance topologique de l'indice d'un point fixe.

THÉORÈME **A**. — *Soit T une représentation de E en lui-même, permutable avec des représentations topologiques* [7] *A_i de E en lui-même. Désignons par $\mathfrak{A}$ le groupe engendré par ces représentations A_i, et par $\mathfrak{B}$ le sous-groupe de $\mathfrak{A}$, engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de T; désignons par $\frac{a}{b}$ l'indice de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$* [8]. *Alors le nombre de Lefschetz de T est un multiple de $\frac{a}{b}$* [9].

---

(17) A. H., p. 533; S. T., p. 327.

(18) *Une généralisation d'un théorème de M. Borsuk concernant certaines transformations de l'*Analysis situs (*Bull. de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique*; 1937, pp. 219-225).

(19) A. H., pp. 539-540.

(20) A. H., p. 540. On remarquera que ce théorème est valable aussi pour une variété (éventuellement non-triangulable), bien qu'il soit énoncé dans A. H. pour des polyèdres seulement.

(21) A. H., p. 542, théorème I et théorème I *a*.

Remarque. — Si la représentation T est permutable avec le groupe $\mathfrak{A}$ de représentations A_i, sans être permutable avec chacune de ces représentations séparément, et si l'ordre (que nous désignerons par t) de l'autohomomorphisme $\mathfrak{T}$ que T détermine dans $\mathfrak{A}$ est fini (tel sera notamment toujours le cas lorsque $\mathfrak{A}$ est un groupe d'ordre fini), on constate aisément que la $m^{\text{ième}}$ puissance T^m de T est aussi permutable avec $\mathfrak{A}$, et détermine précisément dans ce groupe la substitution $\mathfrak{T}^m$, $m^{\text{ième}}$ puissance de $\mathfrak{T}$; cela signifie que si $A_q = \mathfrak{T}^m(A_i)$, on a la relation

$$T^m A_i(\mathrm{p}) = A_q T^m(\mathrm{p})$$

pour tout point p de E.

Puisque t est l'ordre de $\mathfrak{T}$, ce qui signifie que, pour tout indice i, on a la relation $A_i = \mathfrak{T}^t(A_i)$, il en résulte que la représentation T^t est permutable séparément avec chacune des représentations de $\mathfrak{A}$, et le théorème **A** sera applicable au nombre de Lefschetz de la représentation T^t, si cette représentation n'a que des points fixes réguliers, et à condition de définir maintenant $\mathfrak{B}$ comme sous-groupe engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de la $t^{\text{ième}}$ puissance de T [22].

4. Toutefois, je démontrerai d'abord le théorème **A** dans un cas plus particulier (théorème **A**′), lorsque le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est vide ($\mathfrak{A}$ doit être alors d'ordre fini, ce qui implique que les représentations A_i sont périodiques). Bien que ce théorème **A**′ résulte évidemment du théorème **A**, dont la démonstration sera donnée plus loin, j'ai cru préférable de le démontrer d'abord, car, d'une part, sa démonstration, plus simple que celle du théorème **A** $\Big($puisque le groupe-quotient $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ se réduit ici au groupe $\mathfrak{A}$ lui-même$\Big)$, met mieux en évidence le principe sur lequel repose la méthode utilisée; d'autre part, le théorème **A**′ est suffisant pour la majorité des applications.

Remarquons aussi que, lorsque le groupe $\mathfrak{A}$ est cyclique et lorsque A (générateur de $\mathfrak{A}$) est permutable avec T, le théorème **A** prend la forme suivante :

---

(22) Lorsque t est un nombre premier, on peut établir (au moyen de la définition des traces qui figurent dans l'expression du nombre de Lefschetz) que le nombre de Lefschetz de T^t est congru (mod t) au nombre de Lefschetz de T; il en résulte que, lorsque $\frac{a}{b}$ est un multiple de t, nous pourrons alors affirmer que le nombre de Lefschetz de T est un multiple de t. En général cependant, t ne divise pas toujours $\frac{a}{b}$, et peut même être premier avec $\frac{a}{b}$, comme le prouve l'exemple suivant, où A est une représentation sans points fixes, périodique d'ordre 3, et où l'on a la relation de permutabilité $TA = A^{-1}T$; on y a $\frac{a}{b} = 3$ et $t = 2$: E est une circonférence S^1, A y est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, et l'image par T d'un point quelconque de coordonnée angulaire u a pour coordonnée angulaire $2u$.

THÉORÈME $\mathbf{A}_c$. — *Soit A une représentation topologique de* E *en lui-même, et soit T une représentation permutable avec A. Si, parmi toutes les puissances de A, seules des puissances A^{kr} d'une même puissance A^r de A peuvent avoir des points fixes confondus avec des points fixes éventuels de T, alors le nombre de Lefschetz de T est un multiple de r.*

On peut encore déduire de ce théorème un théorème plus simple (théorème $\mathbf{A}'_c$), en supposant que A est périodique d'ordre fini a, et en prenant alors $r = a$, ce qui implique qu'aucune puissance de A (à l'exception de la représentation identique) n'a des points fixes en commun avec T. Une démonstration directe de ce théorème, lorsque E est la sphère à n dimensions, est donnée pour $r = a = 2$ (théorème de BORSUK) dans ma note citée plus haut [18].

5. Énoncé et démonstration du

THÉORÈME $\mathbf{A}'$. — *Soit T une représentation de* E *en lui-même, permutable avec les éléments d'un groupe fini $\mathfrak{A}$, d'ordre a, de représentations A_i de* E *en lui-même. Supposons que, à l'exception de la représentation identique, aucune représentation de $\mathfrak{A}$ n'ait des points fixes confondus avec des points fixes de T. Alors le nombre de Lefschetz de T est un multiple de a.*

Démonstration. — Si T était une représentation sans points fixes, son nombre de Lefschetz serait nul, et le théorème $\mathbf{A}'$ serait évidemment vrai pour une pareille représentation T.

Considérons donc un point p_0, fixe pour T. Ce point p_0 appartient à une classe [23] [que je désignerai par la notation $\mathfrak{A}(p_0)$] de a points $A_i(p_0)$, qui, en vertu du lemme ci-dessus, sont tous fixes pour T et ont même indice que p_0. Ces a points sont tous distincts parce que, par hypothèse, T et les représentations A_i de $\mathfrak{A}$ (à l'exception de la représentation identique) n'ont pas de points fixes communs; en effet, si pour deux représentations A_1 et A_2 de $\mathfrak{A}$, on avait

$$A_1(p_0) = A_2(p_0),$$

on aurait aussi

$$A_2^{-1} A_1(p_0) = p_0,$$

et $A_2^{-1}A_1$ serait une représentation de $\mathfrak{A}$ ayant p_0 pour point fixe.

Soit maintenant p_1 également un point fixe pour T, différent des a points de la classe $\mathfrak{A}(p_0)$. Je dis qu'alors les deux classes $\mathfrak{A}(p_0)$ et $\mathfrak{A}(p_1)$ sont disjointes. En effet, si l'on avait

$$A_2(p_1) = A_1(p_0),$$

---

(23) Ces classes ne sont pas à confondre avec les « classes de points fixes » introduites par J. NIELSEN [*voir* plus loin, note (60)]; toutefois, lorsque l'on considère le groupe $\mathfrak{A}$ comme un groupe de transformations de superposition, il existe certaines relations entre elles. Cette question sera examinée dans un travail qui sera publié ultérieurement.

on aurait aussi

$$p_1 = A_2^{-1} A_1(p_0),$$

et p_1 appartiendrait à la classe $\mathfrak{A}(p_0)$.

Puisque les points fixes de T sont, par hypothèse, en nombre fini, nous pouvons ainsi les répartir tous en un certain nombre de classes disjointes, chacune de ces classes contenant exactement a points fixes ayant tous le même indice. La somme algébrique des indices des points fixes qui appartiennent à une même classe est un multiple de a, et la somme algébrique des indices de tous les points fixes de T (ou nombre algébrique des points fixes de T) est, par conséquent, un multiple de a (qui pourrait d'ailleurs être nul). Le nombre de Lefschetz de T, qui lui est égal, au signe près ([24]), est donc également un multiple de a.

6. *Démonstration du théorème* **A**. — *Préliminaires*. Soit R une représentation permutable avec les éléments A_i (en nombre fini ou en infinité dénombrable) d'un groupe $\mathfrak{A}$ de représentations topologiques.

Appelons $\mathfrak{B}$ le sous-groupe de $\mathfrak{A}$, engendré par celles de ses représentations dont certains points fixes sont confondus avec certains des points fixes éventuels de R; c'est donc le plus petit sous-groupe de $\mathfrak{A}$ qui contient toutes ces représentations ([25]). Je désignerai dorénavant par B_i les éléments de ce sous-groupe $\mathfrak{B}$.

Je démontrerai en premier lieu que $\mathfrak{B}$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{A}$, c'est-à-dire que, quel que soit l'élément A de $\mathfrak{A}$, on a

$$A \mathfrak{B} A^{-1} = \mathfrak{B}.$$

Cette démonstration comprendra deux parties :

1° Soit B une représentation appartenant à $\mathfrak{B}$, et ayant en commun avec R au moins un point fixe, soit p_1. Je démontrerai que toute représentation $B' = ABA^{-1}$, où A désigne une représentation quelconque de $\mathfrak{A}$, a aussi pour point fixe un point fixe de R, savoir le point $A(p_1)$.

En effet, puisque p_1 est fixe pour R, $A(p_1)$ est aussi fixe pour R. Mais, puisque $B(p_1) = p_1$, on a

$$ABA^{-1}[A(p_1)] = AB(p_1) = A(p_1),$$

et $A(p_1)$ est fixe pour ABA^{-1}.

2° Soit maintenant B une représentation de $\mathfrak{B}$, définie par une relation de la forme

$$B = B_k \ldots B_2 B_1,$$

([24]) A. H., pp. 531 et 542.

([25]) Remarquons que, à elles seules, ces représentations ne constituent pas, en général, un groupe. *Voir* les exemples de représentations de S^2 en elle-même donnés à la fin du paragraphe III.

où chacune des représentations $B_1, \ldots, B_k$ a au moins un point fixe en commun avec R et est donc du type considéré au 1° ci-dessus.

Alors, quelle que soit la représentation A de $\mathfrak{A}$, on a

$$\begin{aligned} B' = ABA^{-1} &= AB_k \ldots B_1 A^{-1} = AB_k \ldots B_2 A^{-1} AB_1 A^{-1} \\ &= AB_k \ldots B_2 A^{-1} B'_1 = \ldots = B'_k \ldots B'_2 B'_1, \end{aligned}$$

où les représentations $B'_1, \ldots, B'_k$ appartiennent aussi à $\mathfrak{B}$, en vertu du 1°.

Puisque $\mathfrak{B}$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{A}$, le groupe-quotient $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ existe et a, par définition, l'ordre $\frac{a}{b}$. Nous prouverons plus loin que $\frac{a}{b}$ est fini si R est une représentation à points fixes réguliers.

Si la représentation R présente au moins un point fixe, la représentation identique I de E en lui-même appartient certainement au sous-groupe $\mathfrak{B}$; lorsque, au contraire, R est sans points fixes, je dirai, par convention, que I est le seul élément de $\mathfrak{B}$.

Les éléments de $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ ne sont en général pas des représentations, mais bien des classes de représentations, et sont de la forme $A\mathfrak{B}$; l'élément-unité de $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ est la classe de restes $\mathfrak{B}$, qui contient la représentation identique de E en lui-même. Je désignerai par C_i (avec $C_1 = I$) un système de représentants de ces classes; on a donc la décomposition de $\mathfrak{A}$ suivant le sous-groupe $\mathfrak{B}$

$$\mathfrak{A} = C_1\mathfrak{B} + C_2\mathfrak{B} + \ldots + C_j\mathfrak{B},$$

avec $j = \frac{a}{b}$ lorsque l'indice de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ est fini.

7. Nous passons alors à la démonstration proprement dite, et appliquons les considérations qui précèdent à la représentation donnée $T = R$.

Remarquons d'abord que si T est une représentation sans points fixes, son nombre de Lefschetz est nul, et le théorème est évidemment vrai pour une pareille représentation.

Soit donc maintenant dans E un point p_0, fixe pour T; considérons la classe $\mathfrak{A}(\mathrm{p}_0)$ de ses images $A_i(\mathrm{p}_0)$ par toutes les représentations A_i de $\mathfrak{A}$. En raison de la décomposition du groupe $\mathfrak{A}$ indiquée ci-dessus, on peut écrire

$$\mathfrak{A}(\mathrm{p}_0) = C_1\mathfrak{B}(\mathrm{p}_0) + C_2\mathfrak{B}(\mathrm{p}_0) + \ldots + C_j\mathfrak{B}(\mathrm{p}_0)$$
$$\left(\text{avec } j = \frac{a}{b}, \text{ fini ou non}\right)$$

où le symbole $C_i\mathfrak{B}(\mathrm{p}_0)$ désigne l'ensemble des images de p_0 par les représentations C_iB_k (B_k parcourant l'ensemble des éléments de $\mathfrak{B}$).

Je démontrerai maintenant que :

1° Le nombre des points distincts dans chacun des ensembles $C_i\mathfrak{B}(\mathrm{p}_0)$ est indépendant du choix de C_i, et est donc constant pour un p_0 donné.

Comme on le voit aisément, ce nombre est égal à l'indice $\frac{b}{b_0}$ dans $\mathfrak{B}$ du sous-groupe $\mathfrak{B}_0$ engendré par celles des représentations de $\mathfrak{B}$ qui ont précisément p_0 pour point fixe ([26]). En effet, soient $C_1\mathfrak{B}$ et $C_2\mathfrak{B}$ deux éléments distincts de $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$, c'est-à-dire deux classes de restes de la décomposition de $\mathfrak{A}$ suivant $\mathfrak{B}$, et soient B_1 et B_2 deux éléments quelconques de $\mathfrak{B}$. Si l'on a

$$C_2 B_1(\mathrm{p}_0) = C_2 B_2(\mathrm{p}_0),$$

on a aussi

$$B_1(\mathrm{p}_0) = B_2(\mathrm{p}_0) \quad ([27]),$$

et donc

$$C_1 B_1(\mathrm{p}_0) = C_1 B_2(\mathrm{p}_0);$$

2° Les $j = \frac{a}{b}$ ensembles $C_i\mathfrak{B}(\mathrm{p}_0)$ ainsi définis pour un point fixe donné p_0 sont disjoints. En effet, si l'on avait

$$C_1 B_1(\mathrm{p}_0) = C_2 B_2(\mathrm{p}_0) \qquad (\text{avec } C_1\mathfrak{B} \neq C_2\mathfrak{B} \text{ et } B_1 = B_2 \text{ ou } B_1 \neq B_2),$$

on aurait aussi

$$\mathrm{p}_0 = B_1^{-1} C_1^{-1} C_2 B_2(\mathrm{p}_0) \qquad (\text{où } C_1^{-1} C_2 \text{ n'appartient pas à } \mathfrak{B});$$

mais, puisque $\mathfrak{B}$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{A}$, il existe dans $\mathfrak{B}$ un élément B_3 (transposé de B_2), tel que $C_1^{-1} C_2 B_2 = B_3 C_1^{-1} C_2$, et l'on aurait donc

$$\mathrm{p}_0 = B_1^{-1} B_3 C_1^{-1} C_2(\mathrm{p}_0);$$

p_0 étant fixe à la fois pour T (par hypothèse) et pour $B_1^{-1} B_3 C_1^{-1} C_2$, cette dernière représentation serait un élément de $\mathfrak{B}$, ce qui est impossible, puisque $B_1^{-1} B_3$ appartient à $\mathfrak{B}$, tandis que $C_1^{-1} C_2$ ne lui appartient pas.

Il en résulte qu'on peut faire correspondre au point fixe p_0 une classe $\mathfrak{A}(\mathrm{p}_0)$ de points fixes qui ont tous le même indice que p_0 (pour T), en vertu du lemme démontré plus haut (§ I, n° 2); le nombre de ces points fixes correspondant à p_0 est un multiple de $\frac{a}{b}$ (d'une manière plus précise, ce nombre est égal à l'indice $\frac{a}{b_0}$ dans le groupe $\mathfrak{A}$ du sous-groupe $\mathfrak{B}_0$ engendré par celles de ses représentations

(26) Nous avons supposé, dans toute cette première partie, que T n'a que des points fixes *réguliers*; il en résulte que ces points fixes sont en nombre fini, et que, par conséquent $\frac{b}{b_k}$ doit être fini pour chaque point fixe p_k.

(27) Ceci implique $B_2^{-1} B_1(\mathrm{p}_0) = \mathrm{p}_0$; B_1 et B_2 appartiennent donc à une même classe de restes de $\mathfrak{B}$ par rapport à $\mathfrak{B}_0$.

qui ont p_0 pour point fixe; on voit aisément que $\frac{b}{b_0}$ est un nombre entier$\Big)$, et la somme algébrique des indices de tous les points fixes de cette classe est donc un multiple de $\frac{a}{b}$;

3° L'indice $\frac{a}{b}$ de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$ est nécessairement fini, parce que T est une représentation à points fixes réguliers, et n'a donc qu'un nombre fini de points fixes; nous venons de voir en effet que le nombre des points fixes de T est au moins égal à l'ordre du groupe-quotient $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$. Nous avons en même temps établi que si $\frac{a}{b}$ n'est pas un nombre fini, T est nécessairement une représentation sans points fixes, et son nombre de Lefschetz est donc nul;

4° Si p_1 désigne un point fixe pour T, n'appartenant pas à la classe $\mathfrak{A}(p_0)$, alors les classes $\mathfrak{A}(p_0)$ et $\mathfrak{A}(p_1)$ sont disjointes. En effet, si l'on avait

$$C_1 B_1(p_1) = C_2 B_2(p_0) \qquad (\text{avec } C_1 = C_2 \text{ ou } C_1 \neq C_2 \text{ et } B_1 = B_2 \text{ ou } B_1 \neq B_2),$$

on aurait aussi

$$p_1 = B_1^{-1} C_1^{-1} C_2 B_2(p_0),$$

ou encore, puisqu'il existe dans $\mathfrak{B}$ un élément B_3 (transposé de B_1^{-1}) tel que $B_1^{-1} C_1^{-1} C_2 = C_1^{-1} C_2 B_3$,

$$p_1 = C_1^{-1} C_2 B_3 B_2(p_0),$$

où $B_3 B_2$ est un élément de $\mathfrak{B}$, et p_1 appartiendrait donc à la classe $\mathfrak{A}(p_0)$ [28].

Puisque par hypothèse les points fixes de T, qui sont tous réguliers, sont en nombre fini, nous pouvons ainsi les répartir tous en un certain nombre de classes disjointes, contenant respectivement $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{b_0}, \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{b_1}, \ldots, \frac{a}{b}\cdot\frac{b}{b_r}$ points distincts, et la somme algébrique des indices des points fixes dans chacune de ces classes est un multiple de $\frac{a}{b}$ $\Big(\frac{a}{b_i}$ désigne ici l'indice dans $\mathfrak{A}$ du sous-groupe $\mathfrak{B}_i$ engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont pour point fixe un point p_i, fixe pour $T\Big)$. Par conséquent, la somme algébrique des indices des points fixes de T (ou nombre algébrique des points fixes de T) est un multiple de $\frac{a}{b}$. Le nombre de Lefschetz de T, qui lui est égal au signe près, est donc également un multiple de $\frac{a}{b}$.

([28]) Lorsque T est permutable avec le groupe $\mathfrak{A}$ sans être permutable avec chacun de ses éléments séparément [ainsi qu'il a été observé (§ I, n° 3) après l'énoncé du théorème **A**], on peut remarquer que la substitution $\mathfrak{S}$ qui détermine un automorphisme dans $\mathfrak{A}$, induit également un autohomomorphisme dans le sous-groupe $\mathfrak{B}$, ce qui signifie qu'on a la relation

$$T\mathfrak{B} = \mathfrak{B}T.$$

8. De ces théorèmes se déduisent encore des théorèmes analogues, où l'on remplace le sous-groupe $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ par le sous-groupe $\mathfrak{B}^\star$, engendré par celles de ses représentations qui possèdent des points fixes; $\frac{a}{b^\star}$ désigne l'indice de $\mathfrak{B}^\star$ dans $\mathfrak{A}$. La remarque qui suit l'énoncé du théorème **A**, n° 3, s'applique encore dans le cas présent.

On a d'abord le

Théorème $\mathbf{A}^\star$. — *Soit T une représentation de* E *en lui-même, permutable avec des représentations topologiques* (7) *A_i de* E *en lui-même. Désignons par $\mathfrak{A}$ le groupe engendré par ces représentations A_i, et par $\mathfrak{B}^\star$ le sous-groupe de $\mathfrak{A}$, engendré par celles de ces représentations qui présentent des points fixes; désignons par $\frac{a}{b^\star}$ l'indice de $\mathfrak{B}^\star$ dans $\mathfrak{A}$.*

Alors le nombre de Lefschetz de T est un multiple de $\frac{a}{b^\star}$.

Le Théorème $\mathbf{A}^\star$ contient le

Théorème $\mathbf{A}'^\star$. — *Le nombre de Lefschetz de toute représentation T de* E *en lui-même, permutable avec les éléments d'un groupe fini $\mathfrak{A}$, d'ordre a, de représentations A_i sans points fixes de* E *en lui-même, est un multiple de a.*

Lorsque $\mathfrak{A}$ est un groupe cyclique, on a aussi les théorèmes $\mathbf{A}_c^\star$ et en particulier $\mathbf{A}_c'^\star$; ce théorème $\mathbf{A}_c'^\star$ suffira d'ailleurs pour la plupart des applications.

Théorème $\mathbf{A}_c^\star$. — *Soit A une représentation (topologique) périodique de* E *en lui-même; supposons que, parmi toutes les puissances de A, seules les puissances A^{kr} d'une même puissance A^r de A peuvent présenter des points fixes. Alors le nombre de Lefschetz de toute représentation T de* E *en lui-même, permutable avec A, est un multiple de r.*

Théorème $\mathbf{A}_c'^\star$. — *Soit A une représentation périodique, d'ordre a, de* E *en lui-même, dont toutes les puissances (à l'exception de la représentation identique) sont sans points fixes. Alors le nombre de Lefschetz de toute représentation T de* E *en lui-même, permutable avec A, est un multiple de a.*

Les démonstrations données plus haut restent valables lorsqu'on y remplace $\mathfrak{B}$ par $\mathfrak{B}^\star$; il résulte déjà du n° 6 (où l'on fait $R = I$, représentation identique de E en lui-même) que $\mathfrak{B}^\star$ est également un sous-groupe invariant de $\mathfrak{A}$; on pourrait reproduire d'une manière analogue la suite de la démonstration du théorème **A**, ou la démonstration du théorème $\mathbf{A}'$, et obtenir ainsi une démonstration directe des théorèmes $\mathbf{A}^\star$ ou $\mathbf{A}'^\star$. Mais les théorèmes qu'on obtient de cette façon sont des corollaires des théorèmes déjà démontrés plus haut : en effet, il résulte encore du n° 6 (où $\mathfrak{B}^\star$ joue maintenant le rôle de $\mathfrak{A}$) que $\mathfrak{B}$ est un sous-groupe invariant de $\mathfrak{B}^\star$; par conséquent ([29])

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}^\star} = \frac{\dfrac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}}{\dfrac{\mathfrak{B}^\star}{\mathfrak{B}}},$$

$$\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right) : \left(\frac{b^\star}{b}\right),$$

$\left(\text{où } \frac{b^\star}{b} \text{ désigne l'indice de } \mathfrak{B} \text{ dans } \mathfrak{B}^\star\right)$, et $\frac{a}{b^\star}$ est un diviseur de $\frac{a}{b}$, ce qui démontre le théorème.

II. — Cas de représentations dont tous les points fixes ne seraient pas réguliers.

1. Les démonstrations données précédemment (§ I) ne sont pas applicables à des représentations T dont les points fixes ne seraient pas tous réguliers, puisque l'indice de pareils points fixes n'est pas défini en général, et il est donc impossible dans ce cas d'énumérer ces points et de comparer leurs indices. Lorsque la représentation considérée T est quelconque, il conviendra de la remplacer, lorsque la chose est possible, par une représentation T_r à points fixes réguliers, ayant même nombre de Lefschetz que T et vérifiant les conditions imposées à T (permutabilité avec les éléments de $\mathfrak{A}$ et hypothèses concernant la coïncidence éventuelle des points fixes de T et de certaines représentations de $\mathfrak{A}$).

Remarque. — Lorsque la représentation T est permutable avec le groupe $\mathfrak{A}$ des représentations A_i, sans être permutable avec chaque représentation séparément, et lorsque l'auto-isomorphisme $\mathfrak{T}$ ainsi déterminé dans $\mathfrak{A}$ est d'ordre fini t, ainsi qu'il a été supposé déjà dans la remarque qui suit l'énoncé du théorème **A** (§ I, n° 3), c'est la représentation T^t qu'il faudra évidemment remplacer le cas échéant par une représentation $T_r^{(t)}$ ([30]) ayant même nombre de Lefschetz que T^t et vérifiant les conditions imposées à T^t.

2. Je me propose de rechercher ici quelques conditions *suffisantes* à imposer à l'ensemble E et au groupe $\mathfrak{A}$ (ainsi qu'au sous-groupe $\mathfrak{B}$, éventuellement) pour pouvoir affirmer que, quelle que soit la représentation donnée T de E en lui-même, il est alors possible de la remplacer par une représentation approchée T_r à points fixes réguliers. Lorsque ces conditions suffisantes seront

([29]) *Théorème d'isomorphie; voir* par exemple B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra I* (2e éd., Berlin, 1937, p. 149), ou H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Leipzig et Berlin, 1937, p. 33).

([30]) J'écris $T_r^{(t)}$, et non pas T_r^t, car la représentation à points fixes réguliers qui remplacera T^t ne sera, en général, pas la $t^{\text{ième}}$ puissance d'une représentation univoque et continue.

remplies, il ne sera plus nécessaire d'exiger, dans l'énoncé du théorème **A** (et de ses instances), que T soit une représentation à points fixes réguliers, puisque, s'il n'en est pas ainsi, T pourra toujours être remplacée par une représentation T_r à points fixes réguliers, pour laquelle le nombre de Lefschetz et le nombre $\frac{a}{b}$ auront même valeur que pour la représentation donnée T, et à laquelle la démonstration du paragraphe I sera applicable.

Je considérerai à cet effet l'ensemble E^0 des « points » obtenus en identifiant dans E des points « équivalents » relativement à $\mathfrak{A}$ (E^0 est le *domaine de discontinuité* ou *domaine fondamental* du groupe $\mathfrak{A}$ sur l'ensemble E), ce qui signifie qu'un « point » de E^0 est un ensemble de points de E qui se transforment l'un en l'autre par les représentations A_i; la topologie dans E^0 se déduit aisément de la topologie dans E. Je supposerai dans ce paragraphe que $\mathfrak{A}$ est un groupe *fini* d'ordre a (ce qui signifie que toutes les représentations A_i sont périodiques).

Il est possible d'introduire dans E^0 une métrique, à l'aide de la métrique donnée dans E (qui est en général un polyèdre), de la manière suivante : soient x et y deux points quelconques de E^0, et soient respectivement $\{\mathrm{x}_i\}$ et $\{\mathrm{y}_j\}$ dans E les deux suites de points équivalents qui définissent x et y. J'appelle distance $d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ des points x et y de E^0 la borne inférieure des distances $d(\mathrm{x}_i, \mathrm{y}_j)$ des paires de points x_i, y_j de E (i et j prenant toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à a); cette borne est évidemment positive si les points x et y sont distincts; on constate aisément que les trois axiomes des espaces métriques [31] (axiomes d'identité, de symétrie et du triangle) sont vérifiés pour l'espace E^0 ainsi métrisé [32].

Je montrerai également que, si ε est un nombre positif arbitraire, il est toujours possible de déterminer un nombre positif ε', jouissant de la propriété suivante : lorsque x et y sont deux points quelconques de E^0 dont la distance $d(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ est inférieure à ε', alors on peut attribuer les indices j aux points y_j qui

---

(31) A. H., p. 27, nº 3.

(32) Il ne serait pas toujours possible d'introduire une métrique dans E^0 de cette manière si $\mathfrak{A}$ n'était pas d'ordre fini; en effet, prenons pour E une circonférence sur laquelle chaque point est déterminé par une coordonnée u ($-\pi \leqq u < \pi$ ou $0 \leqq u < 2\pi$), et prenons pour B la représentation topologique suivante, où $B(u)$ désigne la coordonnée de l'image du point de coordonnée u : pour $-\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}$, $B(u) = \frac{u}{2}$; pour $\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq 3\frac{\pi}{2}$, $B(u) = \frac{3}{2}\left(u - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{4}$. Dans l'ensemble E^0 obtenu en identifiant les points de E qui se correspondent par B et les puissances de B, il n'est pas possible d'introduire une métrique ainsi que nous l'avons fait plus haut, puisque la borne inférieure des distances de points x_i, y_j, provenant de deux points distincts compris tous deux entre $\frac{-\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, tend vers zéro lorsque l'exposant de la puissance de B croît indéfiniment. Il suffit cependant d'adjoindre à cette représentation B la représentation antipodique A de E en lui-même pour construire un groupe $\mathfrak{A}$ et un groupe $\mathfrak{B}^*$ (engendré par B), avec $\frac{a}{b^*} = 2$, auxquels les raisonnements faits plus haut ne seront pas applicables.

dans E correspondent à y, de manière à satisfaire la condition que voici : à chaque point x_i correspond un point y_i (auquel on a attribué le même indice i) tel que $d(x_i, y_i) < \varepsilon$.

En effet, en vertu de la continuité uniforme [33] de chaque représentation A_i de $\mathfrak{A}$, pour un ε donné arbitrairement il existe un nombre positif δ_i tel que, si la distance de deux points p et q dans E est inférieure à δ_i, alors la distance $d[A_i(p), A_i(q)]$ de leurs images par A_i est inférieure à ε. La borne inférieure ε' de tous les δ_i (en nombre fini a) est positive. Mais, en raison de la définition de la distance dans E^0, si la distance $d(x, y)$ est inférieure à ε', il doit exister respectivement parmi les a points x_i qui correspondent à x et les a points y_j qui correspondent à y au moins une paire de points, que je désigne par x_0, y_0, dont la distance mutuelle $d(x_0, y_0)$ est inférieure à ε', et il en résulte qu'à chaque point $x_j = A_j(x_0)$ correspond un point $y_j = A_j(y_0)$ (de même indice j) vérifiant la relation $d(x_j, y_j) < \varepsilon$.

3. En vertu des relations de permutabilité entre T et les A_i, T représente un ensemble de points équivalents sur un ensemble de points équivalents, et détermine donc une représentation (univoque et continue) T^0 de E^0 en lui-même.

Je supposerai dans la suite de ce paragraphe que le théorème d'approximation de H. Hopf, concernant les représentations à points fixes non réguliers [34], est applicable à la représentation T^0 de E^0 en lui-même. Cette hypothèse signifie donc ici que, quel que soit le nombre positif ε, il est possible de construire une représentation T_r^0 de E^0 en lui-même, n'ayant que des points fixes réguliers, et telle que, pour tout point p^0 de E^0, la distance $d[T^0(p^0), T_r^0(p^0)]$ des images de p^0 respectivement par T^0 et T_r^0 soit inférieure à ε.

Je démontrerai plus loin que, cette condition étant remplie, il est alors également possible de remplacer T par une représentation T_r à points fixes réguliers, ayant même nombre de Lefschetz que T, permutable avec les éléments de $\mathfrak{A}$, et telle que le sous-groupe $\mathfrak{B}_{(r)}$, engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de T_r, soit confondu avec le sous-groupe $\mathfrak{B}$ défini plus haut [et relatif à T (§ I)] ou en soit un sous-groupe.

Observons que le théorème d'approximation de H. Hopf est toujours vrai lorsque E^0 est un polyèdre fini de dimension homogène [35] ou une variété [topologique, c'est-à-dire pas nécessairement triangulable [36]]. Il en résulte que, dans certains cas, il est possible de déduire directement de la connais-

---

[33] A. H., p. 102, théorème V.

[34] A. H., p. 542, Satz II; *voir* aussi mon article, *Une propriété des points fixes des représentations de variétés en elles-mêmes* (*Bull. Sc. math.*, t. 67, 1943, p. 158).

[35] A. H., p. 542, Satz II.

[36] Voir mon article cité ci-dessus [34], *Bull. Sc. math.*, t. 67, 1943, p. 158, théorème.

sance de E et des groupes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ que le théorème d'approximation s'applique à E^0 et T^0, et l'hypothèse faite ci-dessus à ce sujet devient donc alors superflue.

En particulier, lorsque E est une variété, l'ensemble $E^{0\star}$ obtenu par identification des points équivalents de E, à l'exception des points fixes des représentations de $\mathfrak{A}$, s'il en existe (c'est l'ensemble E^0 duquel on a enlevé les points « singuliers » provenant des points fixes des A_i), est une variété topologique, close (c'est-à-dire compacte) lorsque les A_i (à l'exception de I) sont toutes sans points fixes, ouverte (c'est-à-dire non compacte) lorsque des A_i présentent des points fixes. Lorsque le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est vide, T^0 est une représentation dont l'ensemble des points fixes est compact ([37]), et le théorème d'approximation ([36]) est applicable à la représentation T^0 de la variété $E^{0\star}$, augmentée des points « singuliers » provenant des points fixes des A_i, en elle-même. Lorsque $\mathfrak{B}$ n'est pas vide, nous pouvons encore appliquer le théorème à condition que les points fixes des B_i ne soient pas des points d'accumulation de points fixes pour T.

Lorsque E est un polyèdre sans être une variété, il est sans doute possible d'établir que E^0 est aussi un polyèdre, quand les représentations de $\mathfrak{A}$ n'ont pas de points fixes. Dans le cas général, si E est une variété, l'étude de l'ensemble E^0 exigerait la connaissance de l'ensemble des points fixes des représentations appartenant à $\mathfrak{B}$; si E est seulement un polyèdre, il conviendrait de considérer l'ensemble des points fixes de toutes les représentations de $\mathfrak{A}$. Dans l'état actuel de nos connaissances relatives aux points fixes des représentations périodiques pour des nombres de dimensions supérieurs à 2, il ne paraît guère possible d'obtenir des résultats n'exigeant pas d'hypothèses particulières concernant E ou les représentations de $\mathfrak{A}$ ([38]). Au contraire, si E est une variété à deux dimensions, on sait que E^0 est aussi une variété, même si les A_i présentent des points ou des lignes fixes. Je ne m'arrêterai pas davantage à ces considérations, et me bornerai dans ce travail à supposer désormais que E^0 est un ensemble auquel on peut appliquer le théorème d'approximation mentionné plus haut.

4. Considérons maintenant, en vertu du théorème d'approximation, la représentation T^0 de E^0 en lui-même et une représentation T^0_r, n'ayant que des points fixes réguliers et voisine de T^0.

([37]) Dans le sens précisé dans mon article cité ci-dessus ([34]), note ([10]). On voit d'ailleurs que le théorème est encore applicable lorsque $\mathfrak{B}$ n'est pas vide, mais à condition que ceux des points fixes de T, qui sont fixes aussi pour des représentations de $\mathfrak{B}$, ne soient pas des points d'accumulation de suites infinies de points fixes de T; *voir* la note ([24]) du travail cité.

([38]) On peut consulter à ce propos les intéressants articles de P. A. Smith concernant les points fixes de représentations périodiques.

Je désigne, suivant la méthode usuelle ([39]), par $d(R, S)$ la « distance » de deux représentations R et S d'un ensemble A en un espace métrique B, c'est-à-dire la borne supérieure pour tout point p de A de la distance $d[R(p), S(p)]$.

Soit ε un nombre positif donné arbitrairement et soumis à certaines conditions précisées ci-dessous, et soit, comme plus haut, ε' le nombre positif tel que

$$d(x, y) < \varepsilon' \qquad \text{dans } E^0$$

implique

$$d(x_i, y_i) < \varepsilon \qquad \text{dans } E$$

(i variant de 1 à a), quels que soient les points x et y. J'imposerai alors à T_r^0 la condition

$$d(T^0, T_r^0) < \varepsilon',$$

où ε' est un nombre positif qui devra vérifier les conditions imposées ci-dessous.

Il en résulte que T_r^0 détermine (par recouvrement de E^0 par E) au moins une représentation univoque et continue T_r de E en lui-même, vérifiant la condition $d(T, T_r) < \varepsilon$. Cette représentation T_r n'a que des points fixes réguliers, puisqu'un point, fixe pour T_r, est recouvert par un point, fixe pour T_r^0. La réciproque n'est pas vraie, car un point fixe de T_r^0 peut aussi recouvrir un point p pour lequel $T_r(p) = A_i(p)$, où A_i n'est pas la représentation identique.

On voit aisément que T_r est aussi permutable avec le groupe $\mathfrak{A}$, en vertu de sa construction, et est même permutable avec chaque représentation A_i séparément, si ε est assez petit.

En effet, soient A_i et A_j deux éléments distincts du groupe fini $\mathfrak{A}$; on a, par hypothèse,

$$TA_i(p) = A_i T(p), \qquad \text{pour tout point de E};$$

démontrons que la relation

$$T_r A_i(p) = A_j T_r(p), \qquad \text{pour tout point de E}$$

implique que les représentations A_i et A_j coïncident sur l'ensemble des points $T(p)$, images par T de l'ensemble des points de E; dans ce cas, on pourra évidemment remplacer A_j par A_i dans le second membre de la dernière relation, et T_r et A_i seraient aussi permutables.

Supposons donc que $A_i A_j^{-1}$ ne soit pas la représentation identique sur $T(E)$; il y a alors un nombre positif α tel que, pour au moins un point p', on a

$$d[A_i T(p'), A_j T(p')] > \alpha.$$

D'autre part, si

$$TA_i(p) = A_i T(p) \qquad \text{et} \qquad T_r A_i(p) = A_j T_r(p) \qquad \text{pour tout point p de E},$$

([39]) A. H., p. 55.

il résulte du choix de T_r qu'on aura

$$d[A_i T(\mathrm{p}),\ A_j T_r(\mathrm{p})] < \varepsilon \qquad \text{pour tout point p de E,}$$

où ε est choisi aussi petit qu'on veut. Mais, par suite de la continuité uniforme de A_j, on peut faire correspondre à tout nombre positif donné β $\left(\text{que nous prendrons ici égal à } \frac{\alpha}{2}\right)$ un nombre positif γ tel que si la distance $d(\mathrm{p}, \mathrm{q})$ est inférieure à γ, alors $d[A_j(\mathrm{p}), A_j(\mathrm{q})] < \beta$. Il en résulte qu'il suffit que ε soit inférieur à γ pour avoir

$$d[A_j T_r(\mathrm{p}),\ A_j T(\mathrm{p})] < \beta \qquad \text{pour tout point p de E.}$$

Prenons maintenant pour ε la valeur du plus petit des deux nombres $\frac{\alpha}{2}$ et γ. Alors, par la relation du triangle, on a

$$d[A_i T(\mathrm{p}'),\ A_j T(\mathrm{p}')] \leqq d[A_i T(\mathrm{p}'),\ A_j T_r(\mathrm{p}')] + d[A_j T_r(\mathrm{p}'),\ A_j T(\mathrm{p}')]$$

ou

$$\alpha \leqq \varepsilon + \beta < \alpha,$$

ce qui est impossible.

D'autre part enfin, les deux représentations T et T_r ont même type d'homologie, et, par conséquent, même nombre de Lefschetz, dès que ε est suffisamment petit.

5. Il reste à démontrer qu'il est possible de prendre un ε assez petit pour que soient vérifiées les conditions de non-coïncidence des points fixes : si A_i est telle que T et A_i n'ont pas de points fixes communs, il faut construire T_r de telle manière que A_i et T_r n'aient pas non plus des points fixes communs.

On sait que l'ensemble des points fixes d'une représentation R d'un ensemble compact métrique en lui-même est un ensemble fermé. Soit en effet p un point-limite d'une suite de points fixes $\{\mathrm{p}_m\}$; on a

$$d[\mathrm{p},\ R(\mathrm{p})] \leqq d(\mathrm{p},\ \mathrm{p}_m) + d[\mathrm{p}_m,\ R(\mathrm{p}_m)] + d[R(\mathrm{p}_m),\ R(\mathrm{p})],$$

où les premier et troisième termes du second membre sont aussi petits que l'on veut, tandis que le deuxième terme est nul, et l'on a donc $R(\mathrm{p}) = \mathrm{p}$.

Il en résulte que, si A_i et T n'ont pas de points fixes communs [40], l'ensemble des points fixes de A_i est séparé de l'ensemble des points fixes de T par une distance positive r[41], puisque E est un ensemble compact métrique.

Je montrerai alors que l'on peut prendre ε assez petit pour que les points fixes de T_r soient aussi voisins que l'on veut des points fixes de T, et ils ne pourront donc pas coïncider avec des points fixes de A_i. Il reste par conséquent

---

([40]) Je ne considère ici que le cas où A_i présente au moins un point fixe, puisque la proposition énoncée est évidemment vraie lorsque A_i n'a pas de points fixes.

([41]) A. H., p. 102, corollaire du lemme de Lebesgue.

à démontrer qu'on peut choisir ε suffisamment petit afin que, pour tout point p'_0, fixe pour T_r, il existe au moins un point p_0 fixe pour T, avec $d(p_0, p'_0) < r$.

Tout point p de E, dont la distance à l'ensemble des points fixes de T est au moins égale à r, est séparé de son image $T(p)$ par une distance au moins égale à un certain nombre positif η. En effet, puisque l'ensemble des points dont la distance à l'ensemble des points fixes de T est inférieure à r est ouvert, son complément (qui contient au moins un point en vertu de la définition de r) est fermé, et est compact métrique puisque E est un ensemble compact métrique. Sur ce nouvel ensemble compact métrique, la distance $d[p, T(p)]$, qui est une fonction continue, atteint effectivement sa borne inférieure ([42]), et cette borne inférieure η ne peut donc pas être nulle, puisque cet ensemble ne contient aucun point fixe pour T.

Considérons maintenant dans E un point quelconque p dont la distance à n'importe quel point fixe de T est au moins égale à r. On a alors

$$d[p, T(p)] \geqq \eta > 0.$$

Mais

$$d[p, T_r(p)] \geqq |d[p, T(p)] - d[T(p), T_r(p)]|,$$

où le premier terme de la différence qui figure au second membre est au moins égal à η, tandis que le deuxième est inférieur à ε par hypothèse, et il suffit donc de choisir un ε inférieur à η pour que $d[p, T_r(p)]$ soit positif, ce qui implique que p n'est pas fixe pour T_r.

III. Une généralisation du théorème de Borsuk.

1. J'introduis ici une définition nouvelle. Je dis qu'une représentation T d'un ensemble (généralement un polyèdre) C (de dimension homogène n) en lui-même est *L-quasi-sphérique*, lorsque son nombre de Lefschetz $l(T)$ (qui est aussi, au signe près, le nombre algébrique de ses points fixes) est égal, au signe près, à une expression de la forme $1 + k.c(T)$, où $c(T)$ désigne le degré de T, et où k est un entier quelconque (positif ou négatif) *non nul*. Si $k = (-1)^n$ (n désignant la dimension de C), je dis que T est ***L-sphérique***.

Lorsque toutes les représentations d'un polyèdre C en lui-même sont L-quasi-sphériques ou L-sphériques, je dis que ce polyèdre lui-même est respectivement L-quasi-sphérique ou L-sphérique ([43]).

([42]) A. H., p. 100.

([43]) Remarquons que k n'est pas nécessairement déterminé d'une manière univoque par le polyèdre E, ce qui signifie qu'à différentes représentations d'un même polyèdre L-quasi-sphérique en lui-même peuvent correspondre des valeurs différentes de k; de même, il existe des polyèdres bordés dont toutes les représentations (respectant les bords) sont L-quasi-sphériques (même avec $k \neq \pm 1$); il s'agit alors évidemment du degré local de T; *voir* par exemple mon article ***Détermination** du nombre algébrique des points fixes de certaines représentations* (*Bull. de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique,* 1939, pp. 319-328).

La dénomination ainsi adoptée se justifie de la manière suivante : le plus simple des polyèdres L-sphériques, au sens de la définition donnée ci-dessus, est la sphère à n dimensions, pour laquelle k ne peut avoir qu'une seule valeur, $(-1)^n$, puisque $l(T) = 1 + (-1)^n . c(T)$ (44).

Il en est évidemment de même pour toutes les représentations de tous ceux des polyèdres finis simplement fermés (45) à n dimensions qui ont les mêmes nombres de Betti que la sphère à n dimensions; tels sont notamment l'espace projectif à un nombre impair de dimensions, les espaces de Poincaré, les espaces lenticulaires ou cycliques à n dimensions, etc. Tous ces polyèdres sont L-sphériques.

Je définis également ici un type de représentations d'un polyèdre C en lui-même, plus générales que les représentations L-quasi-sphériques. Je dirai en effet qu'une représentation T, de degré $c(T)$, d'un polyèdre C en lui-même, est *L-quasi-sphérique mod m* (m étant un nombre entier), si son nombre de Lefschetz est égal, au signe près, à une expression de la forme $1 + k'.m + k''.c(T)$, où k' et k'' sont des entiers quelconques, dont le second est toujours différent de zéro. Lorsque $k'' = (-1)^n$, je dirai que T est *L-sphérique mod m*. (L'intérêt de ces dernières définitions apparaîtra dans certaines applications de ces notions et des théorèmes démontrés dans cet article.) On définirait, de même que ci-dessus, des polyèdres L-quasi-sphériques *mod m* ou L-sphériques *mod m*.

On peut observer qu'une représentation L-quasi-sphérique ou L-sphérique est L-quasi-sphérique ou L-sphérique relativement au module zéro, ainsi que relativement à n'importe quel module.

Je dirai encore que T est une représentation *L-quasi-sphérique au sens large*, lorsqu'il faut remplacer, dans l'expression de $l(T)$ qui définit la L-quasi-sphéricité, le degré $c(T)$ par une racine $r^{\text{ième}}$ de $c(T)$ (r entier positif). On obtient également des définitions analogues de la L-sphéricité, ainsi que de la L-quasi-sphéricité *mod m* et de la L-sphéricité *mod m, au sens large*, et l'on définit de même les polyèdres L-quasi-sphériques ou L-sphériques au sens large. Un exemple de polyèdre L-sphérique au sens large est fourni par l'espace projectif complexe à n dimensions K^n (qui est une variété à $2n$ dimensions réelles); le nombre de Lefschetz de toute représentation T de K^n en lui-même a la forme $1 + u + u^2 + \ldots + u^n$, où u est un entier quelconque et où le degré $c(T)$ est égal à u^n (46).

J'indiquerai ici certaines propriétés de nature plutôt négative, concernant des représentations L-quasi-sphériques d'un polyèdre C en lui-même : en général (lorsque C n'est pas lui-même quasi-sphérique), le produit de deux

---

(44) A. H., p. 533,

(45) A. H., p. 280.

(46) H. Hopf, *Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* (*Journal für reine und angew. Math.*, 163, 1930, p. 84, § 5, relations (20), (21 a), (21 b), théorème VI).

représentations L-quasi-sphériques n'est pas nécessairement L-quasi-sphérique, et, réciproquement, un produit de deux représentations non-L-quasi-sphériques peut être L-quasi-sphérique; *a fortiori*, il en sera de même pour la L-quasi-sphéricité *mod m*, puisque nous avons vu qu'une représentation L-quasi-sphérique est aussi L-quasi-sphérique *mod m* pour tout *mod m*. Je montrerai même, d'une manière plus précise, que la L-sphéricité d'une représentation T de C en lui-même n'implique pas nécessairement la L-sphéricité de ses puissances T^t, et que, réciproquement, la L-sphéricité de T^t n'implique pas nécessairement la L-sphéricité de sa racine $t^{\text{ième}}$, la représentation T. De ces exemples résulteront les propriétés énoncées ci-dessus, puisque les puissances de T constituent un cas particulier de produits de représentations.

Les exemples de représentations que je construirai ici sont des représentations du tore (à deux dimensions) en lui-même. Désignons respectivement par P et M parallèles et méridiens de ce tore, et par u et v les coordonnées respectives d'un point quelconque dans ce système de référence (P, M). On sait que le tore peut être considéré comme le produit topologique des deux circonférences P et M, c'est-à-dire comme l'ensemble des couples de valeurs (u, v). Le groupe de Betti du tore pour la dimension 1 a pour base, par exemple, un parallèle et un méridien.

1° Exemple de représentation T' L-sphérique du tore en lui-même, le carré T'^2 de cette représentation n'étant pas L-sphérique. Prenons pour T' la représentation (topologique) qui fait correspondre au point (u, v) le point (v, u); cette représentation échange les parallèles et les méridiens. On a

$$T'(\mathrm{P}) \sim \mathrm{M},$$
$$T'(\mathrm{M}) \sim \mathrm{P};$$

la trace de l'autohomomorphisme déterminé par T' dans le groupe de Betti du tore pour la dimension 1 est nulle, et T' est donc L-sphérique. Mais on a aussi

$$T'^2(\mathrm{P}) \sim T'(\mathrm{M}) \sim \mathrm{P};$$
$$T'^2(\mathrm{M}) \sim T'(\mathrm{P}) \sim \mathrm{M};$$

la trace de l'autohomomorphisme déterminé par T'^2 dans le groupe de Betti de la dimension 1 est égale à 2, et T'^2 n'est pas L-sphérique.

2° Exemple de représentation T'' du tore en lui-même, non-L-sphérique, et dont le carré T''^2 est L-sphérique.

Prenons pour T'' la représentation qui représente le point (u, v) sur le point $(-2u + v, -2u)$; elle représente un parallèle sur la somme d'un parallèle et d'un méridien, parcourue deux fois et changée de signe, et représente un méridien sur un parallèle. On a

$$T''(\mathrm{P}) \sim -2\mathrm{P} - 2\mathrm{M},$$
$$T''(\mathrm{M}) \sim \mathrm{P};$$

la trace de l'autohomomorphisme déterminé par T'' dans le groupe de Betti pour la dimension 1 est égale à -2, et T'' n'est pas L-sphérique. Mais on a aussi

$$T''^2(\mathrm{P}) \sim -2T''(\mathrm{P}) - 2T''(\mathrm{M}) \sim 4\mathrm{P} + 4\mathrm{M} - 2\mathrm{P} = 2\mathrm{P} + 4\mathrm{M},$$
$$T''^2(\mathrm{M}) \sim T''(\mathrm{P}) \sim -2\mathrm{P} - 2\mathrm{M};$$

la trace de l'autohomomorphisme déterminé par T''^2 dans le groupe de Betti de la dimension 1 est nulle, et T''^2 est L-sphérique.

2. Considérons à nouveau la représentation T et le groupe $\mathfrak{A}$ définis dans le paragraphe I.

Ici nous n'exigerons même pas que T soit permutable séparément avec chacune des représentations de $\mathfrak{A}$, mais uniquement que l'ordre t de la substitution qu'elle définit dans ce groupe soit fini. [*Voir* la remarque après l'énoncé du théorème **A** (§ I, n° 3).]

Il convient, d'autre part, que T^t soit une représentation à points fixes réguliers; toutefois, ainsi que nous l'avons démontré plus haut (§ II), cette condition est superflue lorsque E est une variété tandis que $\mathfrak{B}$ est vide (théorèmes portant l'indice supérieur $'$); rappelons que, dans ce cas, aucune restriction n'est donc à imposer quant à la nature de E, ou des représentations A_i ou T^t. Les théorèmes portant cet indice $'$ seront donc valables pour des représentations T absolument quelconques lorsque E est une variété; nous supposerons dorénavant que, pour les autres formes du théorème, T^t est à points fixes réguliers ou peut être remplacée par une représentation approchée à points fixes réguliers (par exemple, lorsque le groupe $\mathfrak{A}$ et l'ensemble E sont tels que l'ensemble des points équivalents constitue une variété ou un polyèdre).

Nous supposons maintenant que la représentation T^t est une représentation L-sphérique ou L-quasi-sphérique. (Tel sera notamment toujours le cas lorsque E est un ensemble L-sphérique ou L-quasi-sphérique.) Les hypothèses du théorème **A** étant supposées remplies, il résulte de ce théorème que le nombre de Lefschetz de T^t est un multiple de $\frac{a}{b}$; mais, puisque T^t est L-quasi-sphérique, cette conclusion prend la forme

$$l(T^t) = 1 + k.c(T^t) \equiv 0 \qquad \left(\mathrm{mod}\ \frac{a}{b}\right).$$

Comme d'autre part $c(T^t) = c^t(T)$ (47), il en résulte que le degré $c(T)$ de T est premier avec $\frac{a}{b}$; d'où le

THÉORÈME **B**. — *Soit T une représentation de* E *en lui-même, permutable avec un groupe $\mathfrak{A}$ de représentations topologiques A_i de* E *en lui-même. Supposons que*

(47) S. T., p. 284.

la substitution que T détermine ainsi dans ces indices i soit d'ordre fini t; supposons que T^t est L-quasi-sphérique. Soit $\mathfrak{B}$ le sous-groupe de $\mathfrak{A}$ engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de T^t; désignons par $\frac{a}{b}$ l'indice de $\mathfrak{B}$ dans $\mathfrak{A}$. Alors le degré de T est premier avec $\frac{a}{b}$.

On obtient également les théorèmes $\mathbf{B}'$ (où le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est vide), $\mathbf{B}_c$ (où le groupe $\mathfrak{A}$ est cyclique, tandis que T est permutable avec la représentation périodique qui engendre $\mathfrak{A}$; ici il faudra donc supposer que T est une représentation L-quasi-sphérique), $\mathbf{B}'_c$ (analogue à $\mathbf{B}_c$, et, en outre, sous-groupe $\mathfrak{B}$ vide), et aussi les théorèmes $\mathbf{B}^\star$, $\mathbf{B}'^\star$, $\mathbf{B}^\star_c$ et $\mathbf{B}'^\star_c$, où $\mathfrak{B}$ est remplacé par $\mathfrak{B}^\star$, sous-groupe engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes. Pour ces quatre derniers théorèmes, la définition de t n'intervient plus que par la condition suivante : T^t est une représentation L-quasi-sphérique. Nous avons vu que cette condition est toujours vérifiée lorsque E est un polyèdre L-quasi-sphérique (une sphère à n dimensions, par exemple). Dans ce cas, l'énoncé de ces théorèmes se simplifie considérablement; je donnerai ici, à titre d'exemple, l'énoncé des théorèmes $\mathbf{B}^\star$ et $\mathbf{B}'^\star$. Ce dernier théorème suffit pour la plupart des applications.

THÉORÈME $\mathbf{B}^\star$. — *Soit T une représentation d'un ensemble L-quasi-sphérique* E *en lui-même, permutable avec un groupe $\mathfrak{A}$ de représentations topologiques de* E *en lui-même, et supposons que l'automorphisme que T induit dans le groupe $\mathfrak{A}$ soit d'ordre fini; soit $\frac{a}{b^\star}$ l'indice dans $\mathfrak{A}$ du sous-groupe engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui peuvent présenter des points fixes.*

Alors le degré de T est premier avec $\frac{a}{b^\star}$.

THÉORÈME $\mathbf{B}'^\star$. — *Soit T une représentation d'un ensemble L-quasi-sphérique* E *en lui-même, permutable avec un groupe fini $\mathfrak{A}$, d'ordre a, de représentations de* E *en lui-même, dont aucune (à l'exception de la représentation identique) ne présente de points fixes.*

Alors le degré de T est premier avec a.

Il résulte, en particulier, de tous ces théorèmes que, les conditions de l'énoncé étant supposées remplies, le degré de T ne peut certainement pas être nul, et la représentation T considérée est donc une représentation *essentielle* (48).

Remarquons qu'on peut ajouter au théorème $\mathbf{B}$ la conclusion plus précise :

---

(48) A. H., p. 372 et p. 492.

le degré de T est une solution de la congruence

$$kc^t(T) \equiv -1 \qquad \left(mod \frac{a}{b}\right)$$

(où k est le coefficient qui figure dans la définition de la L-quasi-sphéricité de T). Il en résulte notamment que, lorsque k est en module différent de l'unité, $\frac{a}{b}$ et k sont nécessairement premiers entre eux. Lorsque T^t est L-sphérique, $k = (-1)^n$, et $c(T)$ vérifie la congruence

$$c^t(T) \equiv (-1)^{n+1} \qquad \left(mod \frac{a}{b}\right).$$

Le théorème de Borsuk, cité dans l'introduction de cet article, est un corollaire du théorème $\mathbf{B}'^\star$ (ou même $\mathbf{B}'^\star_c$), où E est la sphère à n dimensions (qui est L-sphérique), et où $\mathfrak{A}$ est le groupe cyclique d'ordre 2 engendré par la représentation antipodique de la sphère en elle-même.

Tous les théorèmes énoncés ci-dessus restent valables si T^t est seulement L-quasi-sphérique ou L-sphérique au sens large (cas de l'espace projectif complexe), ou même L-quasi-sphérique $mod \frac{a}{b}$; d'une manière plus générale encore, on pourra enfin obtenir des conclusions analogues lorsque T^t est L-quasi-sphérique $mod\, m$, le nombre m étant un diviseur de $\frac{a}{b}$, mais il conviendra de remplacer alors $\frac{a}{b}$ par m dans la conclusion de ces théorèmes; cela suffira encore pour affirmer, par exemple, que T est une représentation essentielle, c'est-à-dire de degré différent de zéro.

Comme on le voit par l'exemple suivant, la condition de non-coïncidence des points fixes est essentielle dans l'énoncé de ces théorèmes : Soit T une représentation du polyèdre L-sphérique E (comportant plus d'un point; par exemple, une sphère à n dimensions S^n) en lui-même, qui représente tous les points de E en un même point p_0 (qui est donc fixe pour T), et soit A une représentation périodique de E en lui-même, ayant notamment p_0 pour point fixe (et, au demeurant, absolument quelconque) (par exemple, dans le cas de S^n, la représentation de S^n en elle-même, par symétrie relativement au diamètre passant par p_0, en supposant S^n plongée dans l'espace euclidien à $n+1$ dimensions). Alors on a, pour tout point p de E,

$$AT(p) = A(p_0) = p_0,$$

et

$$TA(p) = T[A(p)] = p_0,$$

et les représentations A et T sont permutables; or, T, qui représente tout l'ensemble E en un seul point, est de degré zéro, et ce degré n'est premier avec aucun nombre; aucun théorème analogue au théorème **B** n'est donc valable pour cette représentation T.

3. On peut encore déduire du théorème **A** un

THÉORÈME **Γ**. — *Soit* E *un polyèdre dont tous les nombres de Betti* (*excepté* p^0) *sont nuls* (par exemple un élément à n dimensions, un espace projectif à n dimensions quand n est pair, etc.).

Soit T une représentation de E *en lui-même, permutable avec un groupe* $\mathfrak{A}$ *de représentations topologiques de* E *en lui-même. Supposons que la substitution que T détermine dans* $\mathfrak{A}$ *soit d'ordre fini t. Désignons par* $\mathfrak{B}$ *le sous-groupe de* $\mathfrak{A}$, *engendré par celles de ses représentations qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de T^t. Alors* $\mathfrak{B}$ *coïncide avec* $\mathfrak{A}$ ([49]).

La démonstration de ce théorème est immédiate, puisque le nombre de Lefschetz de T^t, qui est un multiple de $\frac{a}{b}$, est égal à l'unité.

4. Je ferai suivre ces théorèmes de quelques remarques qui se rattachent au même ordre d'idées.

Il résulte de la démonstration, donnée dans le paragraphe I, des théorèmes **A** et **A'**, que la condition « *T (ou T^t) est permutable (séparément) avec les représentations du groupe* $\mathfrak{A}$ » implique l'existence d'au moins $\frac{a}{b}$ points fixes distincts de T (ou T^t). Cette condition (de permutabilité) nous fournit donc un nombre minimum de points fixes.

Observons que ce nombre minimum de points fixes ne s'apparente que de loin au nombre minimum de points fixes que donne la théorie des « classes de points fixes » de J. NIELSEN ([50]). En effet, si l'on considère E comme un polyèdre de recouvrement, les représentations de $\mathfrak{A}$ jouant le rôle des transformations de superposition (« Decktransformationen »), les $\frac{a}{b}$ points fixes obtenus ici recouvrent tous un même point fixe dans le polyèdre de base. Cet aspect de la question sera d'ailleurs étudié dans un article ultérieur; il en sera de même pour l'étude des représentations conservant les fibres (« faserungstreue Abbildungen ») d'une variété fibrée.

Signalons encore que, si le groupe $\mathfrak{A}$ contient au moins une représentation B ayant un nombre fini (non nul) de points fixes p_i, ces points sont des « points

([49]) On sait que chaque représentation de $\mathfrak{A}$ présente au moins un point fixe, en vertu de la forme du nombre de Lefschetz de toute représentation de E en lui-même (A. H., p. 532).

([50]) J. NIELSEN, *Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen* (*Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.*, 3, 1924, pp. 246-260) et *Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen* (*Acta Mathematica*, 50, 1927, pp. 189-358, ainsi que *Acta Math.*, 53 et 58).

de périodicité » pour T, ce qui signifie que, pour chacun de ces points p_i, il existe un exposant k_i, fini et différent de zéro, tel que $T^{k_i}(\mathrm{p}_i)=\mathrm{p}_i$. Soit en effet p_0 un point fixe de B; supposons que $T^t(\mathrm{p}_0)\neq\mathrm{p}_0$ (autrement, k_0 serait au plus égal à t), Puisque $BT^{xt}=T^{xt}B$ pour tout entier x, on a alors aussi

$$BT^{xt}(\mathrm{p}_0)=T^{xt}B(\mathrm{p}_0)=T^{xt}(\mathrm{p}_0),$$

et les points T^{xt} (avec x entier quelconque) sont fixes également pour B; mais, la représentation B n'ayant par hypothèse qu'un nombre fini de points fixes, il en résulte qu'il y a deux exposants mt et $kt (m<k)$ tels que $T^{mt}(\mathrm{p}_0)=T^{kt}(\mathrm{p}_0)$, ($mt$ étant le plus petit entier non négatif jouissant de cette propriété, ce qui implique $m=0$), et il existe donc un exposant kt pour lequel $T^{kt}(\mathrm{p}_0)=\mathrm{p}_0$; la « période » k_0 de T au point p_0 est au plus égale à kt.

5. Voici enfin quelques observations relatives à l'application pratique des théorèmes énoncés dans cet article.

Une représentation T, permutable avec un groupe $\mathfrak{A}$, étant donnée, il pourra être utile de déterminer les sous-groupes de $\mathfrak{A}$ avec lesquels T est encore permutable ([51]). En effet, il peut même arriver que le sous-groupe $\mathfrak{B}^\star$ de $\mathfrak{A}$, engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes, soit confondu avec $\mathfrak{A}$ lui-même (ce qui rend trivial le théorème), tandis qu'il existe cependant des sous-groupes $\mathfrak{A}'$ (avec lesquels T est encore permutable) de $\mathfrak{A}$, pour lesquels le sous-groupe correspondant $\mathfrak{B}'^\star$ est différent de $\mathfrak{A}'$ ([52]).

Lorsqu'on applique le théorème $\mathbf{A}$ (où $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}_c$, $\mathbf{A}'_c$) et pas $\mathbf{A}^\star$ (ou $\mathbf{A}'^\star$, $\mathbf{A}^\star_c$, $\mathbf{A}'^\star_c$) (ainsi que les formes correspondantes du théorème $\mathbf{B}$), on pourra parfois préciser davantage les résultats en appliquant également ce théorème aux produits TA_i de T par des représentations A_i de $\mathfrak{A}$, n'ayant pas leurs points fixes confondus avec les points fixes de T^t. (Ces produits sont évidemment encore permutables avec A.) Ceci peut conduire à un nouveau sous-groupe $\mathfrak{B}$, et donc à un nouveau quotient $\frac{a}{b}$ ([53]).

Considérons encore une représentation T à laquelle le théorème $\mathbf{A}$ (ou l'un des théorèmes analogues qui se déduisent de celui-ci) est applicable. Sa conclusion concerne le nombre de Lefschetz de T^t, lorsque T n'est pas permutable avec tous les éléments de $\mathfrak{A}$ séparément, et il sera, en général, malaisé d'en tirer directement une conclusion relative au type d'homologie de la représentation T elle-même, dès que t est différent de 1. D'autre part, on a vu que, si T^t est L-quasi-sphérique, la conclusion du théorème $\mathbf{B}$, que l'on peut maintenant appliquer, concerne directement le degré de T elle-même. Puisqu'on a montré

([51]) Si l'on considère T comme un « opérateur » dans le groupe $\mathfrak{A}$, ces sous-groupes seront des sous-groupes « admissibles », au sens de la théorie des groupes.

([52]) *Voir* aussi ([25]), ainsi que l'exemple II, § III, n° 9, note ([57]).

([53]) *Cf.* les exemples I a, et I b, § III, n° 8, et II, § III, n° 9, note ([59]).

plus haut qu'une puissance d'une représentation peut être L-quasi-sphérique ou L-sphérique sans que cette représentation elle-même le soit, et puisque toutes les puissances de T^t sont, elles aussi, permutables séparément avec chaque représentation de $\mathfrak{A}$, on pourra essayer d'établir qu'une puissance T^{xt} de T^t est L-quasi-sphérique $\left(\bmod \frac{a}{b}\right)$, ce qui permettra alors d'appliquer le théorème **B** au lieu du théorème **A**, et d'affirmer que le degré de T est premier avec $\frac{a}{b}$. Cependant, lorsqu'il s'agit des théorèmes **A**, **A**$'$, **A**$_c$ ou **A**$'_c$ (et pas des théorèmes **A***, **A**$'^\star$, **A**$_c^\star$ ou **A**$_c'^\star$), il sera nécessaire de s'assurer que des représentations de $\mathfrak{A}$, qui n'avaient pas de points fixes communs avec T^t, n'ont pas acquis des points fixes communs avec T^{xt}; en d'autres termes, il importe que le sous-groupe $\mathfrak{B}$ (défini à l'aide de T^t) soit maintenant encore le sous-groupe engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes confondus avec des points fixes de T^{xt} (qui remplace ici T^t). En effet, le nombre des points fixes des puissances de T^t est monotone croissant, et l'on ne pourra donc pas, en général, augmenter indéfiniment l'exposant de T sans provoquer de nouvelles coïncidences de points fixes; en procédant de cette manière, on devra généralement remplacer b par $b^\star$ (ordre du sous-groupe $\mathfrak{B}^\star$ de $\mathfrak{A}$ engendré par celles de ses représentations qui ont des points fixes).

6. Je donnerai, pour terminer ce paragraphe, quelques exemples de représentations vérifiant les hypothèses du théorème **B**.

Remarquons d'abord que si T^t est une représentation permutable avec une représentation A, tout produit de puissances de T^t et de A est également permutable avec A. Nous ferons usage de cette remarque pour la construction des derniers exemples de représentations donnés plus loin.

A. Exemple de représentation T de la sphère à n dimensions S^n en elle-même, de degré impair quelconque $2m+1$, permutable avec la représentation antipodique A [5] de S^n en elle-même. (Ces représentations vérifient le théorème de Borsuk, cité dans l'introduction.)

Nous supposons S^n plongée dans un espace euclidien à $n+1$ dimensions R^{n+1}, où elle est le lieu des points dont la distance à un point donné est constante. Nous définirons la représentation demandée par récurrence relativement au nombre de dimensions n.

Considérons d'abord sur la circonférence S^1 une coordonnée angulaire u, variant de 0 à 2π; désignons par u la coordonnée d'un point quelconque p de S^1, et par u' la coordonnée du point $T(\mathrm{p})$; définissons T par la relation $u'=(2m+1)u$ (m entier, positif ou négatif). Cette représentation T laisse fixes les deux pôles p_0 et p_1, de coordonnées respectives $u=0$ et $u=\pi$. Les représentations T et A sont permutables, puisque les coordonnées des points $AT(\mathrm{p})$ et $TA(\mathrm{p})$ sont respectivement égales à $(2m+1)u+\pi$ et $(2m+1)(u+\pi)$. Le degré de T est égal à $2m+1$.

Montrons maintenant comment la connaissance d'une représentation d'une sphère S^{k-1} à $k-1$ dimensions ($k \geqq 2$) en elle-même, de degré $2m+1$, permutable avec la représentation antipodique de S^{k-1} en elle-même, et présentant au moins une paire de points fixes p_0^0 et p_1^0 diamétralement opposés (sur S^{k-1}) permet de construire une représentation T de S^k en elle-même, de degré $2m+1$, permutable avec la représentation antipodique de S^k en elle-même, et présentant au moins une paire de points fixes p_0 et p_1 diamétralement opposés (sur S^k).

Considérons sur S^k un diamètre $p_0 p_1$, un grand cercle C passant par ces deux points, ainsi que l'ensemble des sphères S^{k-1} à $k-1$ dimensions (toutes disjointes, et toutes proprement dites à l'exception des deux pôles p_0 et p_1), sections de S^k par l'ensemble des hyperplans à k dimensions (de R^{n+1}), perpendiculaires au diamètre $p_0 p_1$. Sur chacune de ces S^{k-1} (sauf aux deux pôles), le grand cercle C détermine une paire de points p_0^0, p_1^0 diamétralement opposés sur S^{k-1}. Prenons alors pour T la représentation qui conserve globalement chaque S^{k-1}, et qui, sur chacune de ces S^{k-1}, est précisément la représentation de S^{k-1} en elle-même supposée connue déjà, de degré $2m+1$, permutable avec la représentation antipodique de S^{k-1} en elle-même, et possédant notamment les deux points fixes p_0^0 et p_1^0 sur cette S^{k-1}. On voit aisément que T est une représentation univoque et continue de S^k en elle-même, permutable aussi avec la représentation antipodique de S^k en elle-même et ayant notamment les deux pôles p_0 et p_1 pour points fixes. Le degré de T est encore égal à $2m+1$ [54].

7. B. On peut obtenir aussi un exemple de représentation de S^1 en elle-même, permutable avec un groupe cyclique $\mathfrak{A}$, d'ordre a, de rotations de S^1 de la manière suivante : divisons S^1 en a arcs égaux a_i^1, et prenons pour T la représentation univoque et continue qui représente linéairement chacun de ces arcs sur la somme des $a-1$ autres arcs partiels, changée de signe; chacun des a sommets de cette décomposition est un point fixe pour T; T est de degré $-(a-1)$, et est permutable avec toutes les rotations $\left(\text{d'angle } \frac{2i\pi}{a}\right)$ de $\mathfrak{A}(t=1)$; $\mathfrak{B}$ est vide, ainsi d'ailleurs que $\mathfrak{B}^\star$, $\frac{a}{b} = \frac{a}{b^\star} = a$.

Ces exemples de représentations de S^1 en elle-même permettent de construire sans peine des exemples analogues de représentations du tore à deux dimensions en lui-même, ou même, d'une manière plus générale, des représentations du tore à n dimensions (produit topologique de n circonférences) en lui-même.

Remarquons que toutes les représentations précédentes vérifient déjà le théorème $\mathbf{B}_c'^\star$ (cas le plus simple).

---

[54] On voit également que T, ainsi définie, n'est pas une représentation à points fixes réguliers lorsque n est supérieur à 1, car, pour chaque k, le grand cercle C mentionné plus haut est fixe point par point.

8. C. Je terminerai en fournissant encore quelques exemples de représentations de la sphère à deux dimensions S^2 en elle-même, concernant notamment un groupe $\mathfrak{A}$ non cyclique et une représentation T non permutable séparément avec chaque représentation de $\mathfrak{A}$.

Considérons S^2 comme la surface extérieure d'un cube, dont nous numérotons les faces de a_1^2 à a_6^2, a_1^2 et a_4^2, a_2^2 et a_5^2, a_3^2 et a_6^2 étant respectivement des paires de faces opposées. Appelons A la représentation périodique (d'ordre 6) de S^2 en elle-même, qui représente linéairement a_1^2 sur a_2^2, a_2^2 sur a_3^2, ..., a_6^2 sur a_1^2. A est sans points fixes, ainsi que A^3 (qui est la représentation antipodique de S^2 en elle-même) et A^5; par contre, A^2 et A^4 ([55]) présentent chacune deux points fixes, les deux sommets diamétralement opposés $a^0_{1,3,5}$ ([56]) et $a^0_{2,4,6}$.

I. Groupe $\mathfrak{A}$ cyclique, engendré par A.

a. Prenons pour première représentation T_1 la représentation qui représente chacune des six faces de S^2 linéairement sur la somme des cinq *autres* faces, chaque arête étant fixe point par point (chaque sommet est donc fixe également); T_1 est de degré -5 et est permutable séparément avec les représentations A^i de $\mathfrak{A}$ $(t=1)$; le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est ici le groupe des représentations A^2, A^4, $A^6=I$, qui ont toutes des points fixes confondus avec des points fixes de T_1; (ici le groupe $\mathfrak{B}^\star$ est identique au groupe $\mathfrak{B}$); $\frac{a}{b}=2$.

b. Prenons pour représentation T_2 le produit A^3T_1, où T_1 est définie comme dans *a*), ci-dessus. T_2 est de degré $+5$, présente 6 points fixes isolés (qui sont les milieux de chacune des six faces de S^2), et est encore permutable séparément avec les représentations A^i de $\mathfrak{A}(t=1)$; le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est vide, $\frac{a}{b}=6$.

c. Prenons une représentation T_3 définie comme suit : a_1^2 est représentée linéairement sur les cinq autres faces; a_2^2 est représentée sur l'ensemble des cinq faces $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2$: a_3^2 est représentée sur l'ensemble des cinq faces $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_6^2$; a_4^2, a_5^2 et a_6^2 sont représentées respectivement sur les trois ensembles de cinq faces qui sont diamétralement opposés aux images de a_1^2, a_2^2 et a_3^2. Les deux arêtes $a^1_{2,6}$ et $a^1_{3,5}$ sont fixes point par point. T_3 est de degré -5; la relation de permutabilité de T_3 avec A est $T_3A=A^5T_3$, d'où les quatre autres relations se déduisent; T_3 est permutable avec A^3; T_3^2 est permutable séparément avec chaque élément de $\mathfrak{A}(t=2)$; tous les sommets et toutes

([55]) Les puissances paires de toute représentation d'une sphère à un nombre *pair* de dimensions en elle-même présentent toujours chacune au moins un point fixe, puisque ce sont des représentations dont le degré est positif.

([56]) Je désigne par la notation $a^1_{i_1,i_2}$ l'arête commune aux deux faces $a^2_{i_1}$ et $a^2_{i_2}$, et par $a^0_{i_1,i_2,i_3}$ le sommet commun aux trois faces $a^2_{i_1}$, $a^2_{i_2}$ et $a^2_{i_3}$.

les arêtes sont fixes pour T_3^2; $\mathfrak{B}$ contient [comme dans I, b, ci-dessus] les trois représentations A^2, A^4, $A^6 = I$; $\frac{a}{b} = 2$.

d. Prenons pour représentation T_4 le produit $A^3 T_3$. T_4 est de degré $+5$; comme dans l'exemple précédent, $t = 2$; puisque $T_4^2 = (A^3 T_3)^2 = T_3^2$, les autres conclusions sont analogues à celles de I, c.

II. Groupe $\mathfrak{A}$ non cyclique (et même non-commutatif).

9. Soit $\mathfrak{A}$ le groupe engendré par la représentation A, définie plus haut (§ III, n° 8, C), et par une représentation C, qui est une rotation d'angle π de S^2 autour de l'axe joignant les milieux des faces a_1^2 et a_4^2. Le groupe $\mathfrak{A}$ est d'ordre 24 et n'est pas commutatif (57).

a. Prenons pour première représentation la représentation T_1 considérée ci-dessus (§ III, n° 8, I, a); elle est permutable avec A et C, donc aussi avec tous les éléments de $\mathfrak{A}(t = 1)$; le sous-groupe $\mathfrak{B}$ contient les 12 éléments engendrés par A^2 et C; $\frac{a}{b} = 2$.

b. Considérons la représentation T_2 définie dans I, b; elle est permutable séparément avec tous les éléments de $\mathfrak{A}(t = 1)$; le sous-groupe $\mathfrak{B}$ contient 8 éléments; c'est le sous-groupe invariant engendré par A^3 et C (58); $\frac{a}{b} = 3$ (59).

c. Prenons maintenant la représentation T_3 définie ci-dessus, I, c; T_3^2 est permutable séparément avec chaque élément de $\mathfrak{A}(t = 2)$; le sous-groupe $\mathfrak{B}$ est le même que dans II, a, ci-dessus; $\frac{a}{b} = 2$.

d. Prenons enfin $T_4 = A^3 T_3$; on a encore $t = 2$, $T_4^2 = T_3^2$, et les autres conclusions sont les mêmes que ci-dessus, II, c.

---

(57) Remarquons que le sous-groupe $\mathfrak{B}^*$, engendré par celles des représentations de $\mathfrak{A}$ qui ont des points fixes, est identique à $\mathfrak{A}$ lui-même; en effet, A^2, C, ainsi que CA^3 présentent des points fixes, et appartiennent donc certainement à $\mathfrak{B}^*$; il en résulte que $A = C^{-1}.CA^3.A^{-2}$ est aussi un élément de $\mathfrak{B}^*$, et $\mathfrak{B}^*$ est engendré, comme $\mathfrak{A}$ lui-même, par les éléments A et C. Ce résultat est à rapprocher de celui qui a été obtenu plus haut : le sous-groupe contenant les éléments à points fixes dans le groupe *cyclique* engendré par A seul y est cependant un sous-groupe d'indice 2 (car A n'appartient pas à ce sous-groupe).

(58) On remarquera que A^3 est un élément de $\mathfrak{B}$, bien que A^3 soit une représentation sans points fixes; *voir* (25).

(59) En appliquant le théorème $\mathfrak{B}$ aux deux représentations T_1 et T_2 (dont on sait qu'elles ont le même degré en valeur absolue, puisque l'une se déduit de l'autre par multiplication par une représentation topologique), on obtient une conclusion plus précise qu'en utilisant seulement l'une de ces deux représentations, puisqu'on sait maintenant que leurs degrés sont respectivement premiers avec 2 et avec 3. $c(T)$ est donc aussi premier avec 6.