

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES HAAG

Étude asymptotique des oscillations de relaxation

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 60 (1943), p. 35-64

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1943_3_60__35_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1943, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE ASYMPTOTIQUE

DES

OSCILLATIONS DE RELAXATION

PAR M. J. HAAG.



Introduction.

1. *Oscillations auto-entretenues.* — Soit un point P, de masse m , assujéti à se déplacer sur l'axe Ox sous l'action de la force élastique $-kx$ et de la résistance visqueuse $-\frac{f(x)}{\varepsilon} \frac{dx}{dt}$, ε désignant une constante positive. L'équation différentielle du mouvement est

$$(1) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{f(x)}{\varepsilon} \frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

On peut la ramener au premier ordre par un procédé classique; mais, nous allons procéder d'une manière un peu différente, pour aboutir tout de suite à la *représentation de M. Liénard* ⁽¹⁾. Posons $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, puis

$$(2) \quad \lambda = \frac{1}{m\omega} \int_0^x f(x) dx, \quad y = \lambda + \frac{\varepsilon v}{\omega},$$

en appelant v la vitesse du point P. L'équation (1) s'écrit

$$(3) \quad \frac{dy}{dt} = -\varepsilon \omega x.$$

On a ensuite

$$(4) \quad v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\varepsilon} (y - \lambda).$$

⁽¹⁾ *Revue générale d'Électricité*, t. 23, 1928, p. 902.

En éliminant dt , on obtient l'équation du premier ordre

$$(5) \quad \varepsilon^2 x dx + (y - \lambda) dy = 0.$$

Appelons M le point qui a pour coordonnées cartésiennes x et y . Sa *trajectoire* est une courbe intégrale de l'équation (5). Elle est déterminée par la connaissance du point M_0 correspondant à $t = 0$, lequel est lui-même déterminé par les conditions initiales x_0 et v_0 du point P . Cette trajectoire étant connue, on a la loi du mouvement, d'après (3), par l'intégrale curviligne

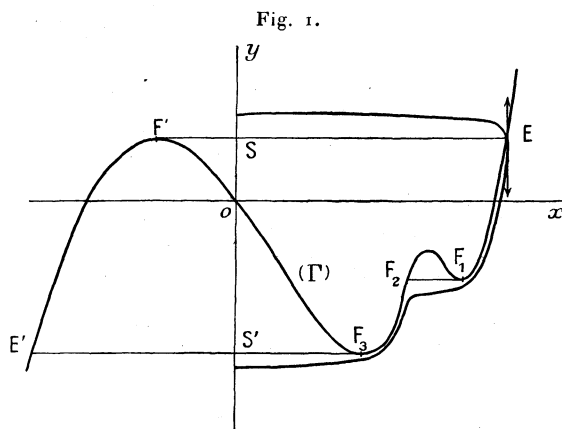
$$(6) \quad \varepsilon \omega t = - \int_{M_0}^M \frac{dy}{x} = \varepsilon^2 \int_{M_0}^M \frac{dx}{y - \lambda}.$$

La détermination des *oscillations auto-entretenues*, c'est-à-dire des mouvements périodiques de P , équivaut à la recherche des *trajectoires fermées*, c'est-à-dire des *cycles* de l'équation (5).

2. *Oscillations de relaxation.* — Lorsque la constante ε est très petite, les oscillations auto-entretenues présentent des caractères très particuliers et portent le nom d'*oscillations de relaxation*. Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

- 1° Faire l'étude asymptotique des trajectoires, quand ε est infiniment petit.
- 2° Calculer la valeur asymptotique du temps.

3. *Courbe fondamentale.* — Nous appellerons ainsi la courbe représentative de la fonction λ . Cette courbe (Γ) passe à l'origine, où nous supposons qu'elle



admet une tangente à pente négative, ce qui revient à dire que, pour les petites valeurs de x , la force visqueuse est en réalité une force motrice. Par contre, pour les grandes valeurs de x , c'est une véritable résistance, et nous admettrons que la courbe (Γ) finit par rester au-dessus de Ox , du côté des x positifs et au-dessous de Ox , du côté des x négatifs.

4. *Allure générale d'une trajectoire.* — Supposons $x_0 > 0$ et $v_0 = 0$. D'après (1), $x'' < 0$; donc, si t augmente, v diminue et devient < 0 ; le point P va dans le sens négatif. Sa vitesse ne peut s'annuler tant qu'il n'a pas atteint le point O. En effet, si v s'annulait pour $x > 0$, ce serait en croissant; donc sa dérivée x'' serait positive, ce qui serait contradictoire avec l'équation (1).

Si t diminue, v augmente et devient > 0 ; P va encore dans le sens négatif et l'on montre comme ci-dessus que sa vitesse ne peut s'annuler tant que $x > 0$.

Interprétons ceci sur la trajectoire. Elle part du point E, situé sur (Γ) , avec une tangente verticale. Qu'elle soit parcourue dans le sens du mouvement ou en sens inverse, elle se rapproche constamment de Oy, de sorte que E est son point le plus à droite et sera appelé le *point terminal*. Les formules (3) et (4) nous montrent ensuite que la trajectoire descend constamment et reste au-dessous de (Γ) , si elle est parcourue dans le sens du mouvement; elle monte et reste au-dessus de (Γ) quand on la parcourt en sens inverse.

Nous appellerons *arc supérieur* et *arc inférieur* les portions de trajectoire respectivement situées au-dessus et au-dessous de la courbe fondamentale et limitées à droite par le point terminal, à gauche par les deux points de rencontre S et S' avec Oy, qui seront appelés le *sommet supérieur* et le *sommet inférieur*.

5. *Trajectoire limite; déviation.* — Si ε tend vers zéro, l'équation (5) devient à la limite

$$(y - \lambda) dy = 0.$$

La trajectoire limite est donc nécessairement constituée par des segments horizontaux et des arcs de (Γ) , qui seront appelés respectivement *arcs de première espèce* et *arcs de seconde espèce*. Nous appellerons *point frontière de première espèce* tout point F limitant à droite un arc de première espèce, et *point frontière de seconde espèce* tout point F limitant à droite un arc de seconde espèce.

Les mêmes dénominations seront employées pour la trajectoire vraie, les abscisses des points frontière étant les mêmes que pour la trajectoire limite.

Soit M un point quelconque de la trajectoire vraie et M' le point de même abscisse pris sur la trajectoire limite. Nous appellerons *déviation* en M la distance $D = MM'$. Cette déviation est nulle au point terminal; elle est partout infiniment petite avec ε .

Nous supposerons enfin que x_0 a été choisi assez grand pour que l'arc supérieur limite soit constitué par un seul segment.

6. *Convergence des trajectoires.* — Considérons deux trajectoires ⁽¹⁾ inférieures C et C'. Appelons y et y' les ordonnées des points de ces deux courbes

(1) Il s'agit ici de deux trajectoires vraies.

qui ont pour abscisse x . Posons

$$\lambda - y = u, \quad \lambda - y' = u', \quad y - y' = \eta.$$

On a

$$\frac{d\eta}{dx} = \varepsilon^2 \frac{x\eta}{uu'}.$$

Si l'on appelle η_0 la valeur de η pour $x = x_0$, on a

$$(7) \quad \eta = \eta_0 e^{-h}, \quad h = \varepsilon^2 \int_x^{x_0} \frac{x}{uu'} dx.$$

Si l'on suppose que x décroisse à partir de x_0 , on voit que η décroît constamment à partir de η_0 . Autrement dit, *la distance verticale entre deux trajectoires inférieures diminue constamment avec x ; ce que l'on peut exprimer brièvement en disant que les trajectoires convergent vers la gauche.*

Cette propriété est évidemment valable pour deux trajectoires supérieures; mais, elle serait renversée si C et C' désignaient une trajectoire supérieure et une trajectoire inférieure.

Une conséquence importante est que si, dans le calcul approché d'une trajectoire, on commet au point M_0 une erreur η_0 , l'erreur qui en résulte pour l'arc situé à gauche de M_0 est toujours inférieure à η_0 en valeur absolue et décroît constamment quand on se rapproche de Oy . Pour cette raison, *les trajectoires seront toujours calculées en partant du point terminal et en se dirigeant vers Oy .*

7. *Hypothèses sur la courbe fondamentale.* — Nous supposons que la fonction $f(x)$ est finie quel que soit x . Nous supposons aussi qu'elle est continue, sauf peut-être pour certaines valeurs de x en nombre fini.

Il s'ensuit que la courbe (Γ) est une courbe continue, admettant partout une tangente non parallèle à Oy , mais pouvant présenter quelques points anguleux.

Nous supposons aussi que tout arc de seconde espèce est constitué par la juxtaposition d'un nombre fini d'arcs partiels, sur chacun desquels la fonction λ admet des dérivées jusqu'à un ordre illimité. La dérivée première λ' ne pourra s'annuler en aucun point autre que le point frontière de gauche.

Soit $F(a, b)$ un point frontière situé à droite de Oy . Dans le voisinage de ce point, nous poserons

$$(8) \quad x = a + \sigma \xi, \quad \lambda = b + \sigma' A \xi^r,$$

où r désigne un exposant entier ou fractionnaire ≥ 1 et A une fonction de ξ , holomorphe et positive au voisinage de $\xi = 0$. Quant à σ et σ' , ils représentent ± 1 et ont respectivement le signe de $x - a$ ou de $\lambda - b$. Le nombre r pourra ne pas être le même à droite et à gauche d'un point frontière de première

espèce; il sera appelé *l'ordre à droite* ou *à gauche* de ce point. Si F est de seconde espèce, on aura $r = 1$ à droite et à gauche.

Nous poserons enfin

$$(9) \quad A = A_0(1 + B\xi), \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \xi^n.$$

Nous appellerons ρ un nombre positif inférieur au rayon de convergence de la série ci-dessus et M le maximum de $|B|$ pour $|\xi| \leq \rho$.

8. *Principe de la méthode de calcul.* — Le calcul de la déviation et du temps se fait aisément par des développements en série convergente ou en série asymptotique, tant qu'on est à une distance finie des points frontière. *La grosse difficulté réside dans la traversée de ces points.* Nous effectuerons cette traversée au moyen de changements de variables convenablement choisis et en calculant toujours la déviation et le temps par des séries asymptotiques.

Le raccordement d'un point frontière avec l'arc antérieur ou postérieur pourra toujours se faire, parce qu'il existera toujours une région où les deux méthodes de calcul sont *simultanément applicables*. Dans chaque cas, les coefficients des séries utilisées se détermineront par des quadratures, introduisant chacune une *constante d'intégration inconnue*. Cette constante sera obtenue par comparaison du développement nouveau avec le développement antérieur, cette comparaison ne portant d'ailleurs que sur ce que nous appellerons le *noyau* du coefficient.

Nous pourrons ainsi calculer de proche en proche tous nos développements depuis le point terminal jusqu'à l'axe Oy.

Ces développements procèdent suivant certaines puissances entières ou fractionnaires de ε et peuvent aussi contenir $\log \varepsilon$ et même $\log(-\log \varepsilon)$ à des puissances entières positives ou négatives. *La nature de chaque développement est uniquement déterminée par les ordres à droite et à gauche du point frontière de première espèce antérieur à l'arc considéré.* Mais, *toutes les singularités sont en quelque sorte absorbées par les arcs de seconde espèce*, du moins en ce qui concerne la déviation.

Dans ce qui va suivre, nous dirons qu'une fonction de ε est *d'ordre m* si elle est de l'ordre de $\varepsilon^m(-\log \varepsilon)^p$, p étant un exposant quelconque, positif ou négatif. Si $m = 0$, nous dirons aussi qu'elle est *d'ordre logarithmique*. Nous dirons enfin qu'elle est *d'ordre exponentiel* si elle est de l'ordre de $e^{\frac{-k}{\varepsilon^p}}$, k et p désignant des nombres positifs quelconques.

9. *Division du présent Mémoire.* — Dans le premier chapitre, nous établirons certains *théorèmes préliminaires* destinés à légitimer les développements calculés ultérieurement.

Les chapitres II, III et IV seront consacrés respectivement au calcul de *l'arc supérieur*, d'un *arc de seconde espèce* et d'un *arc de première espèce*.

Dans le chapitre V, nous ferons le *calcul effectif des premiers termes* de nos développements, en envisageant successivement diverses hypothèses concernant les points frontière.

Le chapitre VI sera consacré au calcul de *l'amplitude et de la période* des oscillations.

Enfin, *plusieurs Notes* ont été renvoyées à la fin du Mémoire, parce qu'elles présentent un caractère général et aussi pour alléger la rédaction des différents chapitres.

Dans un travail ultérieur, nous intégrerons numériquement l'équation différentielle de raccordement, pour $r=2$, par les fonctions de Bessel. Nous appliquerons ensuite les résultats du présent Mémoire à des exemples concrets.

CHAPITRE I.

THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES.

I. — PARTIE CENTRALE D'UN ARC DE PREMIÈRE ESPÈCE.

10. *Calcul de la déviation.* — Considérons un arc de première espèce, dont les points frontière F et F' de droite et de gauche ont pour coordonnées respectives (a, b) et (a', b) . Appelons $L(x)$ la valeur absolue de $\lambda - b$ pour $a' < x < a$. La déviation D vérifie l'équation différentielle

$$(10) \quad D'(x)[D(x) + L(x)] = -\varepsilon^2 x,$$

qu'il s'agisse de l'arc supérieur ou d'un arc inférieur. Supposons d'autre part que l'on connaisse la déviation D_0 pour une valeur x_0 de x comprise entre a et a' et proposons-nous de calculer $D(x)$, pour $x_0 > x > x_1 > a'$. *Considérant ε^2 et D_0 comme deux variables complexes indépendantes*, nous allons montrer que D est une fonction holomorphe de ces deux variables, pour

$$|\varepsilon^2| < R, \quad |D_0| < R', \quad x_1 < x < x_0,$$

à condition de choisir R et R' assez petits.

A cet effet, posons $D = D_0 + X$; la fonction X doit s'annuler pour $x = x_0$ et vérifier l'équation différentielle

$$\frac{dX}{dx} = -\varepsilon^2 \frac{x}{D_0 + X + L} = F(x, X, \varepsilon^2, D_0).$$

Nous allons maintenant appliquer la note (A), en prenant pour fonction $\psi(x)$ la fonction $k_1 L(x)$, k_1 désignant une constante comprise entre zéro et un. La fonction $L(x)$, étant continue et positive dans l'intervalle (x_1, x_0) , admet un minimum $L_m > 0$. Nous prendrons $R' = k_2 L_m$, k_2 désignant une nouvelle

constante positive et telle que $k_1 + k_2 = k < 1$. L'intégrale I a un module borné supérieurement par $\frac{R}{1-k}H$, avec

$$H = \int_{x_1}^{x_0} \frac{x}{L} dx.$$

L'inégalité (1)(4)_A est donc vérifiée si l'on a

$$R < \frac{k_1(1-k)L_m}{H}.$$

La différence I — I' a un module inférieur à $\frac{R h' k_1}{(1-k)^2} H$. L'inégalité (7)_A est donc vérifiée si l'on a

$$R < \frac{h(1-k)^2 L_m}{H}.$$

Enfin, la fonction $F(x, X, \varepsilon^2, D_0)$ est holomorphe par rapport à X, ε^2 et D_0 si toutes les conditions précédentes sont remplies. Dès lors, les hypothèses de la note (A) sont toutes satisfaites et notre théorème est démontré.

On en conclut qu'il est possible de développer D suivant les puissances de ε^2 et D_0 , pourvu que ces quantités soient respectivement inférieures aux rayons de convergence R et R'.

Si $a - x_0$ et $x_1 - a'$ sont finis, il en est de même de L_m et de H, donc de R et R'; la convergence est assurée, puisque ε^2 et D_0 sont infiniment petits.

Supposons maintenant $a - x_0$ infiniment petit d'ordre α par rapport à ε et D_0 infiniment petit d'ordre β ; $x_1 - a'$ étant toujours fini. Soit r l'ordre à gauche de F. On voit que L_m et H sont d'ordres respectifs $r\alpha$ et $(1-r)\alpha$. Donc, R' et R sont d'ordres respectifs $r\alpha$ et $(2r-1)\alpha$. La convergence est assurée si l'on a

$$(11) \quad r\alpha < \beta, \quad \alpha < \frac{2}{2r-1} = r'.$$

On a des conditions analogues en supposant $x_1 - a'$ infiniment petit; r est alors l'ordre à droite de F', c'est-à-dire $r=1$. Donc, L_m est d'ordre α , tandis que H est de l'ordre de $\log \varepsilon$. Donc, R' et R sont d'ordre α . Les conditions (11) subsistent.

Observons enfin que, d'après la remarque terminant la note (A), si l'on ne garde dans le développement de D que les termes ayant un degré $\leq n$ par rapport à ε^2 et $\leq p$ par rapport à D_0 , l'erreur commise sera au plus de l'ordre du plus grand des deux nombres

$$L(x) \left(\frac{\varepsilon^2}{R} \right)^{n+1} \quad \text{et} \quad L(x) \left(\frac{D_0}{R'} \right)^{p+1}.$$

(1) Pour abrégier l'écriture, nous convenons de distinguer les références relatives à l'une des Notes en mettant en indice la lettre correspondant à cette note.

11. *Calcul du temps.* — Le temps de parcours t de l'arc M_0M (1) est donné par l'une ou l'autre des deux formules équivalentes :

$$(12) \quad \varepsilon\omega t = \int_{M_0}^M \frac{dD}{x},$$

$$(13) \quad \varepsilon\omega t = -\varepsilon^2 \int_{M_0}^M \frac{dx}{L+D}.$$

Comme $|D| < k_1 L(x)$, nous pouvons développer sous le signe \int de la seconde intégrale suivant les puissances de ε^2 et D_0 , puis intégrer terme à terme. Nous obtenons ainsi une série entière majorée par

$$\frac{1}{(1-k_1)\left(1-\frac{\varepsilon^2}{R}\right)\left(1-\frac{D_0}{R'}\right)} \int_{x_0}^x \frac{dx}{L(x)}.$$

Si on la limite comme on a limité le développement de D , on commet une erreur de l'ordre du produit de $\int_{x_0}^x \frac{dx}{L}$ par le plus grand des deux nombres $\left(\frac{\varepsilon^2}{R}\right)^{n+1}$ et $\left(\frac{D_0}{R'}\right)^{p+1}$.

II. — PARTIE CENTRALE D'UN ARC DE SECONDE ESPÈCE.

12. *Limites de la déviation.* — Appelons toujours F et F' les points frontière de droite et de gauche, a et a' leurs abscisses respectives. Partons du point F avec la déviation D_0 d'ordre β . La déviation en un point quelconque n'est autre que la fonction $u = \lambda - \gamma$ introduite au numéro 6. Elle satisfait à l'équation différentielle

$$(14) \quad u \frac{du}{dx} = \lambda'(u - H),$$

en appelant λ' la dérivée $\frac{d\lambda}{dx}$ et posant

$$(15) \quad H = \varepsilon^2 \frac{x}{\lambda'}.$$

Nous allons chercher *une limite supérieure et une limite inférieure de u* quand x décroît de a à une valeur fixe $x_1 > a'$.

Appelons M et m le maximum et le minimum de H dans l'intervalle (x_1, a) .

Supposons d'abord $u_0 = H_0$. Si u augmente, la dérivée $\frac{du}{dx}$ devient négative; donc, $H_0 < u < H$. Si u diminue, on voit de même que $H_0 > u > H$. Dans les deux cas, u reste constamment compris entre M et m .

Supposons maintenant $u_0 < H_0$. La dérivée $\frac{du}{dx}$ est d'abord négative; donc la

(1) Nous prenons ce temps en valeur absolue, sans nous préoccuper du sens de parcours.

fonction u augmente tant qu'elle reste $< H$. Si elle atteint H , on est ramené au premier cas. On en conclut que la limite supérieure de u est toujours M ; sa limite inférieure est le plus petit des deux nombres m et u_0 .

Supposons enfin $u_0 > H_0$. La fonction u décroît tant qu'elle reste $> H$. Si elle atteint H , on est encore ramené au premier cas. Dès lors, sa limite inférieure est m et sa limite supérieure est le plus grand des deux nombres M et u_0 .

Dans tous les cas, on peut dire que la fonction u reste constamment comprise entre le plus grand des deux nombres u_0 et M et le plus petit des deux nombres u_0 et m .

La fonction λ' est bornée supérieurement et inférieurement par des nombres > 0 dans tout l'intervalle (x_1, a) . Donc, M et m sont d'ordre 2. On en conclut que l'ordre de u est constamment compris entre β et 2.

13. *Développement de la déviation en série asymptotique.* — Définissons les fonctions u_n par les formules

$$(16) \quad u_n = \frac{\varepsilon^2 x}{\lambda' - u'_{n-1}}, \quad u_0 = 0;$$

où les accents indiquent toujours une dérivée par rapport à x . Si l'on pose $v_n = u_n - u_{n-1}$, on a

$$(17) \quad v_{n+1} = \frac{\varepsilon^2 x v'_n}{(\lambda' - u'_n)(\lambda' - u'_{n-1})}$$

et

$$(18) \quad u_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

Je dis que l'on a, quel que soit n ,

$$(19) \quad v_n = \varepsilon^{2n} V_n,$$

V_n désignant une fraction rationnelle en ε^2 , qui reste finie pour $\varepsilon = 0$, quel que soit x dans l'intervalle (x_1, a) .

Ceci est vrai pour $n = 1$, avec $V_1 = \frac{x}{\lambda'}$. Admettons qu'il en soit de même jusqu'au rang n . La formule (18) nous montre que $u'_n = \varepsilon^2 \varphi_n$, φ_n désignant encore une fraction rationnelle analogue à V_n . Dès lors, la formule (17) nous donne

$$V_{n+1} = \frac{x V'_n}{(\lambda' - \varepsilon^2 \varphi_n)(\lambda' - \varepsilon^2 \varphi_{n-1})},$$

ce qui prouve l'exactitude de la propriété au rang $n + 1$.

14. *Étude de l'erreur.* — Soit $X_n = u - u_n$ l'erreur commise en remplaçant u par u_n . D'après (14) et (16), on a

$$X'_n = \lambda' - u'_n - \frac{\varepsilon^2 x}{u} = \frac{\varepsilon^2 x}{u_{n+1}} - \frac{\varepsilon^2 x}{u} = \varepsilon^2 x \frac{X_{n+1}}{u u_{n+1}},$$

ou, en remplaçant X_{n+1} par $X_n - v_{n+1}$,

$$(20) \quad X'_n - \frac{\varepsilon^2 x}{u u_{n+1}} X_n = - \frac{\varepsilon^2 x v_{n+1}}{u u_{n+1}}.$$

Posons

$$(21) \quad \varphi(x) = \int_x^a \frac{\varepsilon^2 x}{u u_{n+1}} dx.$$

La fonction u est toujours positive et il en est de même de u_{n+1} si ε est assez petit. Dès lors, la fonction $\varphi(x)$ est positive et décroissante.

Ceci étant, appelons X_n^0 la valeur de X_n pour $x = a$; on a, en intégrant l'équation (20),

$$X_n = X_n^0 e^{-\varphi(x)} + e^{-\varphi(x)} \int_0^{\varphi(x)} v_{n+1} e^\varphi d\varphi.$$

Soit N une limite supérieure de $|V_{n+1}|$. On déduit de la formule précédente

$$(22) \quad |X_n| < |X_n^0| e^{-\varphi(x)} + N \varepsilon^{2/n+1}.$$

Cherchons une limite inférieure de $\varphi(x)$. D'après le n° 12, u est borné supérieurement, suivant que β est < 2 ou ≥ 2 , par une quantité de la forme $M\varepsilon^\beta$ ou $M\varepsilon^2$, M désignant une constante positive. On a dès lors, d'après (21),

$$\varphi(x) > \frac{a^2 - x^2}{2MM'\varepsilon^\beta},$$

β devant être remplacé par 2 si $\beta > 2$.

Supposons que $a - x$ soit d'ordre $\alpha = \beta - m$, m désignant un nombre compris entre zéro et β . On en conclut que $\varphi(x)$ est supérieur à une quantité d'ordre $-m$. Dès lors, le premier terme du second membre de (22) est d'ordre exponentiel. Par suite, l'erreur X_n est d'ordre au moins égal à l'ordre de v_{n+1} . On a donc la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Dès qu'on s'est écarté du point frontière F, vers la gauche, d'une quantité infiniment petite d'ordre inférieur à β (ou à 2 si $\beta > 2$), on peut calculer la déviation u par la série asymptotique*

$$(23) \quad u = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots;$$

l'erreur commise en arrêtant cette série au terme de rang n est de l'ordre de v_{n+1} .

15. *Accumulation des trajectoires.* — Considérons deux trajectoires dont les déviations en F sont infiniment petites. D'après ce qui précède, au bout d'un parcours infiniment petit vers la gauche, elles peuvent être calculées toutes deux par la série asymptotique (23). Par conséquent, *leur distance verticale est infiniment petite d'ordre infini.*

Ceci peut être précisé davantage au moyen du n° 6. A partir d'une valeur x_0

infiniment voisine de a , nous savons que les fonctions u et u' sont du second ordre. Elles sont donc bornées supérieurement par des quantités de la forme $M\varepsilon^2$ et $M'\varepsilon^2$. Dès lors, on a, d'après (7),

$$h > \frac{x_0^2 - x^2}{2MM'\varepsilon^2}.$$

Si $x_0 - x$ est d'ordre $2 - m$, h est supérieur à une quantité d'ordre $-m$. Dès lors, la distance verticale η des deux trajectoires est d'ordre exponentiel. En particulier, si $x_0 - x$ est fini, cette distance est de l'ordre de $e^{-\frac{k}{\varepsilon^2}}$, k désignant une fonction de x qui augmente quand x décroît. On peut résumer ceci en disant que toutes les trajectoires qui s'approchent de (Γ) viennent immédiatement s'accumuler dans un tube exponentiellement étroit et dont la largeur diminue constamment jusqu'à la rencontre avec Oy .

16. *Voisinage du point frontière de gauche.* — Supposons maintenant qu'on suive la trajectoire jusqu'à une distance ξ du point frontière F' qui soit infiniment petite d'ordre α . Cherchons dans quelles conditions on peut toujours utiliser la série asymptotique (23).

Soit r l'ordre à droite de F' . Si $r = 1$, rien n'est à changer dans tout ce qui précède et la formule (23) est applicable jusqu'en F' . Supposons maintenant $r > 1$ et introduisons la variable

$$(24) \quad z = \frac{\varepsilon^2}{\xi^{2r-1}}.$$

Je dis que l'on peut écrire

$$(25) \quad v_n = \xi^r z^n V_n(z, \xi),$$

V_n désignant une fonction de z et ξ , rationnelle par rapport à z , holomorphe par rapport à z et ξ au voisinage de $z = \xi = 0$ et non nulle pour $z = \xi = 0$.

La dérivée λ' est de la forme $F\xi^{r-1}$, F désignant une fonction holomorphe et non infiniment petite de ξ au voisinage de $\xi = 0$. Dès lors, on a, d'après (16),

$$v_1 = u_1 = \frac{\varepsilon^2 x}{F\xi^{r-1}} = \xi^r z \frac{x}{F},$$

ce qui est bien de la forme (25).

Admettons maintenant l'exactitude de la formule (25) jusqu'au rang n . En tenant compte de ce que $\frac{dz}{d\xi} = -(2r-1)\frac{z}{\xi}$, on a, pour $i \leq n$,

$$v'_i = r\xi^{r-1} z^i V_i - i(2r-1)\xi^{r-1} z^i V_i + \xi^{r-1} z^i \left[-(2r-1)z \frac{\partial V_i}{\partial z} + \xi \frac{\partial V_i}{\partial \xi} \right]$$

ou

$$v'_i = \xi^{r-1} z^i W_i,$$

avec

$$W_i = V_i [r - i(2r-1)] - (2r-1)z \frac{\partial V_i}{\partial z} + \xi \frac{\partial V_i}{\partial \xi}.$$

On voit que W_i est une fonction de même nature que la fonction V_i . Elle ne s'annule pas pour $z = \xi = 0$, car le coefficient de V_i est $\leq r - (2r - 1) = 1 - r < 0$.

En dérivant (18), on en déduit

$$u'_i = \xi^{r-1} z \varphi_i,$$

φ_i désignant encore une fonction de même nature que les V_i . En portant dans (17), il vient

$$v_{n+1} = \xi^r z^{n+1} \frac{x W_n}{(F - z \varphi_n)(F - z \varphi_{n-1})},$$

ce qui justifie la formule (25) au rang $n + 1$.

Dans ces conditions, pour que la série asymptotique (23) soit toujours utilisable, il faut et il suffit que z soit infiniment petit d'ordre non nul. Si l'on se reporte à la formule (24), on voit qu'il est nécessaire et suffisant que l'ordre α de ξ soit inférieur à $r' = \frac{2}{2r-1}$.

17. Considérons deux trajectoires issues des points M_0 et M'_0 , d'abscisse commune $a' + \xi_0$, ξ_0 étant d'ordre $\alpha < r'$. Supposons que les déviations initiales u_0 et u'_0 soient toutes deux d'ordre $\beta = 2 - \alpha(r-1)$. Je dis que ces deux trajectoires ont un écart vertical exponentiellement petit pour $\xi = k\xi_0$, si k désigne un facteur compris entre zéro et un. En effet, d'après le n° 12, u et u' sont bornés supérieurement, dans l'intervalle $(k\xi_0, \xi_0)$, par des quantités de la forme $M\varepsilon^\beta$ et $M'\varepsilon^\beta$. Dès lors, pour $\xi = k\xi_0$, on a, d'après (7),

$$h > \varepsilon^{2-2\beta} \frac{a' \xi_0 (1-k)}{MM'}.$$

Le second membre est d'ordre $2 - 2\beta + \alpha = \alpha(2r-1) - 2 < 0$. Donc, h est infiniment grand d'ordre non nul, ce qui démontre la propriété.

18. Calcul du temps. — Le temps de parcours de l'arc M_0M est donné par la formule

$$(26) \quad \varepsilon \omega t = - \int_{M_0}^M \frac{d\lambda}{x} + \frac{u}{x} - \frac{u_0}{x_0} + J$$

avec

$$(27) \quad J = \int_{M_0}^M \frac{u}{x^2} dx.$$

Remplaçons u par le développement (23), limité au terme de rang q . Si la distance ξ de M à F' est finie, l'erreur commise est d'ordre $2(q+1)$. Il en est de même jusqu'en F' si $r=1$. Si $r > 1$ et si ξ est d'ordre $\alpha < r'$, l'erreur est d'ordre $2(q+1) - \alpha[(q+1)(2r-1) - r]$. En choisissant α assez petit, on peut rendre cet ordre arbitrairement voisin de $2(q+1)$.

III. — VOISINAGE D'UN POINT FRONTIÈRE.

19. *Changement de variables.* — Soit un point frontière $F(a, b)$. Considérons un point M_0 de la trajectoire, de coordonnées (x_0, y_0) et tel que $|x_0 - a| < \rho$, ρ ayant la signification indiquée au n° 7. Prenons maintenant un autre point M_1 de la trajectoire, dont l'abscisse x_1 soit comprise entre $a - \rho$ et x_0 . Proposons-nous de calculer l'ordonnée y de tout point M de l'arc M_0M_1 .

Faisons le changement de variables

$$(28) \quad \xi = \theta s, \quad y - b = \sigma'' A_0 \theta^r z,$$

en convenant que $\sigma'' = +1$ ou -1 suivant que F appartient à l'arc supérieur ou à l'arc inférieur ⁽¹⁾. Quant à θ , c'est un monome en ε à exposant positif, dont la valeur sera précisée dans chaque cas particulier.

L'équation différentielle de la trajectoire devient, avec les notations du n° 7,

$$(29) \quad \frac{dz}{ds} (z - \sigma' \sigma'' s^r - \sigma' \sigma'' B \theta s^{r+1}) = -\theta' \left(\sigma + \frac{\theta s}{a} \right),$$

en posant

$$(30) \quad \theta' = \frac{\varepsilon^2 a}{A_0^2 \theta^{2r-1}}.$$

De plus, pour $s = s_0 = \frac{\xi_0}{\theta}$, z doit prendre la valeur $z_0 = \frac{y_0 - b}{\sigma'' A_0 \theta^r}$. Enfin, s varie entre s_0 et $s_1 = \frac{\xi_1}{\theta}$. Dans ce qui va suivre, nous considérerons s_0 et s_1 comme des nombres *fixes*, de sorte que ξ_0 et ξ_1 dépendront de θ .

Nous aurons deux cas à distinguer.

20. *Cas I : θ' est infiniment petit.* — Nous choisirons θ de telle manière que z_0 ait une limite finie Z_0 pour $\varepsilon = 0$. Posons alors $z_0 = Z_0 + \zeta$ et faisons le nouveau changement de variable

$$(31) \quad z = Z_0 + \zeta + Y.$$

L'équation (29) devient

$$(32) \quad \frac{dY}{ds} = \frac{\theta' \left(1 + \sigma \frac{\theta s}{a} \right)}{W + V},$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(33) \quad W = \sigma (-Z_0 + \sigma' \sigma'' s^r), \quad -\sigma V = Y + \zeta - \sigma' \sigma'' B \theta s^{r+1}.$$

De plus, Y doit s'annuler pour $s = s_0$.

(1) Sauf dans le cas du n° 32.

Considérons θ , θ' et ζ comme trois variables complexes indépendantes et appliquons la note (A). Nous posons

$$|\theta| < R, \quad |\theta'| < R', \quad |\zeta| < R''.$$

De plus, nous supposons que la fonction W est positive dans tout l'intervalle (s_0, s_1) .

Prenons $\psi(s) = k_1 W$, k_1 désignant une constante comprise entre zéro et un. Supposons en outre que l'on ait

$$(34) \quad R|s| < \rho, \quad RM|s^{r+1}| < k_2 W, \quad R'' < k_3 W, \quad k_1 + k_2 + k_3 = k < 1,$$

ρ et M ayant la signification indiquée au n° 7. On en déduit $|V| < kW$ et l'intégrale I a un module inférieur à $\frac{R' \left(1 + \frac{\rho}{a}\right)}{1-k} J$, en appelant J la valeur absolue de

l'intégrale $\int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{W}$. L'inégalité (4)_A est vérifiée si l'on a

$$(35) \quad R' < \frac{K(1-k)k_1}{1 + \frac{\rho}{a}},$$

en appelant K une borne inférieure du rapport $\frac{W}{J}$.

On a maintenant

$$|I - I'| < \frac{R' \left(1 + \frac{\rho}{a}\right) h' k_1 J}{(1-k)^2}$$

et l'inégalité (7)_A est vérifiée si l'on a

$$(36) \quad R' < \frac{Kh(1-k)^2}{1 + \frac{\rho}{a}}.$$

Comme le second membre de (32) est holomorphe par rapport à θ , θ' , ζ et Y tant que $|V| < kW$, toutes les conditions de la note (A) sont remplies si l'on a à la fois (34), (35) et (36). Dès lors, Y est une fonction holomorphe de θ , θ' et ζ et peut être développé suivant les puissances de ces variables

$$(37) \quad Y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \theta'^n \theta^p \zeta^q Y_{npq}(s).$$

Si on limite le développement par les conditions $n \leq n_1$, $p \leq p_1$, $q \leq q_1$, l'erreur commise est de l'ordre du plus grand des trois nombres

$$W \left(\frac{\theta'}{R'} \right)^{n_1+1}, \quad W \left(\frac{\theta}{R} \right)^{p_1+1}, \quad W \left(\frac{\zeta}{R''} \right)^{q_1+1}.$$

21. CAS II : $\theta' = 1$. — D'après (30), on a donc

$$(38) \quad \theta = \left(\frac{\varepsilon \sqrt{a}}{A_0} \right)^{r'}, \quad r' = \frac{2}{2r-1}.$$

Si ε tend vers zéro, l'équation (29) devient à la limite

$$(39) \quad W \frac{dZ}{ds} = 1,$$

en posant

$$(40) \quad W = -\sigma(Z - \sigma' \sigma'' s').$$

L'équation (39) sera appelée *équation différentielle de raccordement* et nous appellerons *fonction de raccordement* une solution particulière de cette équation, qui sera précisée ultérieurement dans chaque cas et qui sera telle que la fonction W soit positive quand s reste compris entre s_0 et s_1 . Nous poserons

$$(41) \quad \varphi = \int \frac{ds}{W^2},$$

la constante d'intégration restant pour le moment indéterminée.

Soit Z_0 la valeur de la fonction de raccordement pour $s = s_0$ et ζ la différence $z_0 - Z_0$. Faisons le changement de variable

$$(42) \quad z = Z + \zeta + Y e^{\sigma \varphi}.$$

L'équation (29) devient

$$(43) \quad \frac{dY}{ds} = F(s, Y, \theta, \zeta) = \sigma \frac{-VY + W e^{-\sigma \varphi} \left(\theta \frac{s}{a} W + \zeta - \sigma' \sigma'' B \theta s^{r'+1} \right)}{W^2 (W + V)},$$

avec

$$(44) \quad -\sigma V = Y e^{\sigma \varphi} + \zeta - \sigma' \sigma'' B \theta s^{r'+1}.$$

De plus, Y doit s'annuler pour $s = s_0$.

Ceci étant, considérons θ et ζ comme deux variables complexes indépendantes, de modules respectivement inférieurs à R et R' et appliquons la note (A), en prenant

$$\psi(s) = k_1 W e^{-\sigma \varphi}.$$

Supposons que l'on ait, pour toute valeur de s comprise entre s_0 et s_1 ,

$$(45) \quad R|s| < \rho, \quad R M |s^{r'+1}| < k_2 W, \quad R' < k_3 W, \quad k_1 + k_2 + k_3 = k < 1.$$

On en déduit $|V| < kW$ et l'on voit que l'intégrale I a un module inférieur à

$$\frac{k k_1 + R \frac{S}{a} + k - k_1}{1 - k} J,$$

en appelant J la valeur absolue de l'intégrale $\int_{s_0}^s \frac{e^{-\sigma\zeta}}{W} ds$ et S le plus grand des deux nombres $|s_0|$ et $|s_1|$. L'inégalité (4)_A est vérifiée si l'on a

$$(46) \quad R < a \frac{k_1(1-k)(1+K) - k}{S},$$

en appelant K une borne inférieure du rapport $\frac{W e^{-\sigma\zeta}}{J}$.

En formant l'expression de $I - I'$, on voit facilement que son module est inférieur à

$$h' k_1 \frac{2k + k^2 + R \frac{S}{a} J}{(1-k)^2}$$

et l'inégalité (7)_A est vérifiée si l'on a

$$(47) \quad R < a \frac{h(1-k)^2 K - 2k - k^2}{S}.$$

Les inégalités (46) et (47) ne sont possibles que si leurs seconds membres sont positifs. Cela impose certaines conditions aux nombres k , k_1 , k_2 , k_3 et h . On vérifie aisément qu'elles sont toutes remplies si l'on prend par exemple

$$k = \frac{K}{3(1+K)}, \quad k_1 = k \frac{3+K}{3+2K}, \quad k_2 = k_3 = \frac{K^2}{6(1+K)(3+2K)}, \quad h = \frac{3}{4}.$$

Les inégalités (46) et (47) se réduisent alors à

$$(48) \quad R < \frac{aK^2}{9S(1+K)}.$$

Les rayons de convergence R et R' étant choisis de manière à remplir les conditions précédentes, on peut développer Y sous la forme

$$(49) \quad Y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \theta^n \zeta^p Y_{np}(s) \quad (n+p > 0).$$

Si on limite la série par $n \leq n_1$, $p \leq p_1$, l'erreur commise est de l'ordre du plus grand des deux nombres

$$W e^{-\sigma\zeta} \left(\frac{\theta}{R}\right)^{n_1+1}, \quad W e^{-\sigma\zeta} \left(\frac{\zeta}{R'}\right)^{p_1+1}.$$

22. *Calcul des coefficients.* — Dans le cas I, posons

$$(50) \quad Y = \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n Y_n, \quad Y_n = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \theta^p \zeta^q Y_{npq}.$$

Substituons dans l'équation (32), écrite sous la forme

$$U \frac{dY}{ds} = \theta' \left(1 + \sigma \theta \frac{s}{a} \right) - Y \frac{dY}{ds}, \quad U = W + \zeta - \sigma' \sigma'' B \theta s^{r+1}.$$

On a d'abord

$$(51) \quad Y_1 = \int_{s_0}^s \frac{1 + \sigma \theta \frac{s}{a}}{U} ds.$$

Puis,

$$(52) \quad Y_n = - \int_{s_0}^s F_n \frac{ds}{U}, \quad F_n = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i \frac{dY_{n-i}}{ds}.$$

En développant ensuite suivant les puissances de θ , ζ , on obtient les $Y_{n,p}$.

Dans le cas où $r=1$, on peut aussi développer Y suivant les puissances de θ seulement. Chaque coefficient s'obtient par l'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On peut ensuite le développer suivant les puissances de θ' et ζ . Nous emploierons cette méthode particulière au n° 47.

Dans le cas II, nous écrivons l'équation (43) sous la forme

$$(53) \quad W^2 \frac{dY}{ds} = V \left(-\sigma Y - W^2 \frac{dY}{ds} \right) + \sigma W e^{-\sigma \varphi} \left(\theta \frac{s}{a} W + \zeta - \sigma' \sigma'' B \theta s^{r+1} \right).$$

Posant (49), on a

$$V = \sum \sum \theta^n \zeta^p V_{np},$$

avec

$$(54) \quad V_{01} = -\sigma(1 + Y_{01} e^{\sigma \varphi}), \quad V_{n0} = -\sigma Y_{n0} e^{\sigma \varphi} + \sigma \sigma' \sigma'' b_{n-1} s^{n+r}, \quad V_{np} = -\sigma Y_{np} e^{\sigma \varphi}.$$

Substituant dans (53), on obtient, par identification,

$$(55) \quad Y_{01} = e^{-\sigma \varphi_0} - e^{-\sigma \varphi}, \quad V_{01} = -\sigma e^{\sigma(\varphi - \varphi_0)};$$

$$(56) \quad Y_{10} = \sigma \int_{s_0}^s e^{-\sigma \varphi} \frac{s}{W^2} \left(\frac{W}{a} - \sigma' \sigma'' b_0 s^r \right) ds,$$

$$(57) \quad \frac{dY_{n0}}{ds} = -\sigma \sigma' \sigma'' b_{n-1} e^{-\sigma \varphi} \frac{s^{r+n}}{W^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{V_{n-i,0}}{W} \left(\sigma \frac{Y_{i0}}{W^2} + \frac{dY_{i0}}{ds} \right),$$

$$(58) \quad \frac{dY_{np}}{ds} = - \sum \sum \frac{V_{ij}}{W} \left(\sigma \frac{Y_{i'j'}}{W^2} + \frac{dY_{i'j'}}{ds} \right) \quad (i + i' = n; j + j' = p).$$

Comme les sommes $i + j$ et $i' + j'$ sont ≥ 1 , elles sont $\leq n + p - 1$. On voit donc qu'on peut calculer de proche en proche tous les coefficients Y_{np} .

23. *Calcul du temps.* — Le temps de parcours entre M et M_0 est donné par

l'une ou l'autre des deux formules équivalentes

$$(59) \quad \varepsilon\omega t = A_0 \theta^r \int_{s_0}^s \frac{dz}{a + \sigma\theta s} ds,$$

$$(60) \quad \varepsilon\omega t = \frac{A_0}{a} \theta^r \int_{s_0}^s \frac{ds}{W + V}.$$

La fonction sous le signe \int de la seconde intégrale est majorée par

$$\frac{1}{(1-k)W \left(1 - \frac{\theta}{R}\right) \left(1 - \frac{\theta'}{R'}\right) \left(1 - \frac{\zeta}{R''}\right)}.$$

On peut donc développer suivant les puissances θ , θ' , ζ et intégrer terme à terme. Si le développement est limité comme celui de Y, l'erreur commise sur l'intégrale est de l'ordre du produit de $\int_{s_0}^s \frac{ds}{W}$ par le plus grand des trois nombres $\left(\frac{\theta'}{R'}\right)^{n_1+1}$, $\left(\frac{\theta}{R}\right)^{n_1+1}$, $\left(\frac{\zeta}{R''}\right)^{n_1+1}$. Bien entendu, dans le cas II, $\theta' = 1$; on a une série en θ , ζ seulement et le second des trois nombres précédents n'existe pas; de plus, $\int_{s_0}^s \frac{ds}{W} = Z - Z_0$.

CHAPITRE II.

ARC SUPÉRIEUR.

24. *Départ du point terminal.* — Avec les notations du n° 19, nous prenons M_0 en E; de sorte que $z_0 = Z_0 \leftarrow \zeta = 0$. De plus, $r = 1$, $\sigma = \sigma' = -1$, $\sigma'' = 1$. Nous nous mettons dans le cas II (n° 21). L'équation (39) s'écrit

$$(61) \quad \frac{ds}{dZ} = s + Z.$$

La *fonction de raccordement* est définie par l'équation

$$(62) \quad s = e^Z - Z - 1.$$

Elle croit de 0 à $+\infty$ en même temps que s . La fonction $W = Z + s = e^Z - 1$ est positive pour $s > 0$. La formule (41) nous donne

$$(63) \quad e^{\varphi} = 1 - e^{-Z} = W e^{-Z}, \quad J = W e^{\varphi} - s < W e^{\varphi}.$$

On en conclut que l'on peut prendre $K = 1$. D'autre part, le rapport $\frac{W}{s^2}$ est $> \frac{1}{s}$. Comme $S = s_1$, l'examen des inégalités (45) et (48) nous montre que l'on peut

trouver un rayon de convergence R de l'ordre de $\frac{1}{s_1}$. Dès lors, la convergence est assurée si $\theta_{s_1} = \xi_1$ est inférieur à une certaine limite finie. Autrement dit, nous pouvons, par la présente méthode, *atteindre un point M_1 situé à une distance finie du point terminal.*

D'autre part, nous pouvons appliquer la méthode du n° 10 à partir de M_0 si ξ_0 est d'ordre α inférieur à 2 et à β . Nous pouvons prendre M_0 en M_1 par exemple ou en tout autre point situé entre M_1 et E , pourvu qu'il ne soit pas trop près de E . Dès lors, *le raccordement est possible*, puisque les zones d'application des deux méthodes se chevauchent.

25. *Développement des Y_n pour s très grand.* — Comme $\zeta = 0$, la série (49) est une série simple en θ , dont les coefficients Y_n se calculent suivant la méthode du n° 22 (cas II), en ne gardant que les coefficients Y_{n0} . Nous allons montrer qu'on peut calculer chaque Y_n par un certain développement en série, pour les grandes valeurs de s .

Posons

$$u = \frac{1}{s}, \quad v = \frac{\log s}{s}, \quad \frac{Z}{s} = v + w.$$

L'équation (62) s'écrit

$$w = u \log(1 + u + v + w).$$

On en conclut que w est fonction holomorphe de u et v au voisinage de $u = v = 0$. On peut écrire par exemple, en appliquant la formule de Lagrange,

$$(64) \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}} [\log^n(1 + u + v + w)]_{w=0}.$$

On en déduit que $\frac{s}{W} = \frac{1}{1 + v + w}$ et $e^{\varphi} = \frac{1 + v + w}{1 + u + v + w}$ sont aussi holomorphes en u et v . Avec la terminologie de la note (C), on conclut que les fonctions ci-dessus sont, pour s très grand, développables en série (C) d'ordre nul.

Je dis maintenant que $\frac{dY_n}{ds}$ est, pour s très grand, une série (C) d'ordre $n - 1$. Ceci est déjà vrai pour $n = 1$, d'après (56). Admettons qu'il en soit de même jusqu'au rang $n - 1$. D'après la note (C), Y_i est une série (C) d'ordre i pour $i \leq n - 1$. D'après (54), on en conclut que V_i est une série (C) d'ordre $i + 1$. Si l'on se reporte maintenant à (57), on voit immédiatement que la propriété annoncée est exacte au rang n .

26. *Développement asymptotique de la déviation au voisinage du point terminal.* — D'après (28) et (42), on a

$$(65) \quad D = A_0 \theta \left[\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n H_n(s) \right], \quad H_0 = Z, \quad H_n = Y_n e^{-\varphi}.$$

Supposons que ξ soit d'ordre $\alpha < 2$; s est d'ordre $\alpha - 2$, donc infiniment grand. Nous pouvons remplacer chaque coefficient H_n par son développement en série (C). En ordonnant $\frac{H_n}{s^n}$ par groupes homogènes en u et v , le crochet de (65) s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n \sum_{p=-n}^{+\infty} \frac{H_{np}(\log s)}{s^p},$$

où H_{np} représente un polynôme de degré $n + p$ en $\log s$. Cette série double est convergente si l'on respecte l'ordre des sommations. Mais, *nous ne pouvons pas affirmer qu'elle soit absolument convergente*, car, si H_n est fonction holomorphe de u et v au voisinage de $u = v = 0$, il n'en est pas de même du crochet, dont la convergence par rapport à θ n'a été démontrée que pour $s < s_1$. Nous devons dès lors nous contenter de *développements limités*.

Si $n \leq n_1$, l'erreur commise sur D est (n° 21) de l'ordre de $\theta W e^z \left(\frac{\theta}{R}\right)^{n_1+1}$, donc de $\theta s \left(\frac{\theta}{R}\right)^{n_1+1}$. Comme $\frac{1}{R}$ est de l'ordre de s_1 , cette erreur est de l'ordre de $\xi \xi_1^{n_1+1}$, donc d'ordre $\alpha(n_1 + 2)$, si ξ_1 est, comme ξ , d'ordre α .

Limitons maintenant le développement de H_n par la condition $p \leq q - n - 1$. L'erreur commise sur $\theta^n H_n$ est de l'ordre de $\frac{\theta^n}{s^{q-n}}$, donc d'ordre

$$n\alpha + q(2 - \alpha) \geq 2q - q\alpha.$$

L'erreur totale sur D est d'ordre $2(q + 1) - q\alpha$ si $n_1 + 2 > \frac{2(q + 1) - q\alpha}{\alpha}$. Cet ordre est infiniment voisin de $2(q + 1)$ si α est infiniment petit, ce qui est permis (n° 24); mais alors n_1 est infiniment grand.

Nos développements étant limités de la sorte, nous pouvons les ordonner arbitrairement. Remplaçons s par $\frac{\xi}{\theta}$; nous obtenons

$$D = A_0 \sum_{n=0}^{n_1} \sum_{p=-n}^{q-n-1} \theta^{n+1+p} \xi^{-p} H_{np}(\log s)$$

ou, en posant $n + p + 1 = m$,

$$D = A_0 \sum_{m=1}^q \sum_{p=m-1}^{m-1-n_1} \theta^m \xi^{-p} H_{np}(\log s) \quad (n = m - p - 1),$$

soit

$$(66) \quad D = A_0 \sum_{m=1}^q \theta^m \Delta_m(\xi),$$

avec

$$(67) \quad \Delta_m(\xi) = \sum_{p=m-1}^{m-1-n_1} \xi^{-p} H_{np}(\log s) \quad (n = m - p - 1).$$

Le coefficient $\Delta_m(\xi)$ apparaît donc comme un développement limité procédant suivant des puissances de ξ , dont les exposants varient de $1 - m$ à $1 - m + n_1$, et dont les coefficients sont des polynômes en $\log s = \log \xi - \log \theta$. Ce développement est poussé d'autant plus loin que n_1 est plus grand, donc que α est plus petit; si α tendait vers zéro, il deviendrait à la limite une véritable série.

27. *Prolongement de l'arc.* — Pour calculer la déviation D en un point M situé à distance finie du point terminal, nous pouvons maintenant utiliser le développement de D suivant les puissances de ε^2 et de D_0 (n° 10), en remplaçant ε^2 par $\frac{A_0^2}{a} \theta$. Gardons seulement, dans ce développement, les termes dont le degré par rapport à l'ensemble des deux variables θ et D_0 est $\leq q$. Les rayons de convergence R et R' sont d'ordre α ; donc, $\frac{\theta}{R}$ et $\frac{D_0}{R'}$ sont d'ordre $2 - \alpha$. Si M est à distance finie du point terminal, $L(x)$ est fini. Dès lors, l'erreur commise est d'ordre $(q + 1)(2 - \alpha)$; cet ordre est infiniment voisin de $2(q + 1)$ si α est infiniment petit.

Dans ce développement limité, remplaçons D_0 par le développement (66), où l'on a remplacé ξ par ξ_0 . Puis, ordonnons par rapport à θ ; nous obtenons un développement de la forme

$$(68) \quad D = A_0 \sum_{m=1}^q \theta^m D_m(\xi),$$

dont les coefficients ne doivent plus garder trace de la variable intermédiaire ξ_0 . D'autre part, ce développement doit coïncider avec (66) si ξ est d'ordre α . Par conséquent, $\Delta_m(\xi)$ constitue un développement limité de la fonction $D_m(\xi)$. Cette remarque va nous permettre de calculer exactement cette dernière.

Substituons (68) dans l'équation différentielle (10), qui s'écrit

$$(69) \quad \frac{dD}{d\xi} (D + A\xi) = \frac{A_0^2}{a} \theta (a - \xi).$$

En identifiant, on peut calculer de proche en proche tous les coefficients $D_m(\xi)$ par des intégrales indéfinies, dont chacune introduit une constante inconnue. Appliquons la méthode de la note (E) à chacune de ces intégrales. *Le noyau de $D_m(\xi)$ doit être identique à celui de $\Delta_m(\xi)$* , et cela détermine la constante cherchée.

D'après (67), le noyau de $\Delta_m(\xi)$ est $H_{m-1,0}(\log s)$; c'est un polynôme de degré $m - 1$ en $\log s$, qui, avec la terminologie de la note (C), constitue le noyau de la fonction $H_{m-1}(s)$. En définitive, la fonction $D_m(\xi)$ se présente sous la forme suivante; elle comprend :

1° un polynôme en $\frac{1}{\xi}$, sans terme constant et dont les coefficients sont des polynômes en $\log \xi$;

- 2° le noyau $N(H_{m-1})$, polynome de degré $m - 1$ en $\log s = \log \xi - \log \theta$;
 3° une intégrale définie prise de 0 à ξ et qui est un polynome en $\log \xi$, à coefficients holomorphes et s'annulant avec ξ .

Le développement (68) est une *série asymptotique*, puisque l'erreur est de l'ordre du premier terme négligé. Il est *valable jusqu'au sommet*, mais *pas à partir du point terminal*.

28. *Calcul du temps.* — Nous commençons par employer la formule (59), en y remplaçant z par le développement limité précédemment calculé, soit

$$\varepsilon \omega t = A_0 \theta \int_0^s \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n H'_n(s)}{a - \theta s} ds.$$

Nous développons sous le signe \int et intégrons terme à terme; nous obtenons ainsi un développement limité de la forme

$$(70) \quad \varepsilon \omega t = A_0 \sum_{n=1}^{n_1} \theta^n \Theta_n(s),$$

au moyen duquel nous pouvons calculer le temps de parcours entre E et le point M_0 . Nous employons ensuite la formule (12), en y remplaçant D par le développement limité (68). Nous calculons ainsi le temps de parcours entre M_0 et M. En additionnant, nous avons le temps de parcours entre E et M et, bien entendu, la variable intermédiaire s_0 ou ξ_0 doit disparaître. Toutes ces opérations sont légitimes, en vertu des discussions d'erreur faites aux nos 11, 23 et 27.

Les formules (12) et (68) nous montrent que le temps total est donné par un développement limité de la forme

$$(71) \quad \varepsilon \omega t = A_0 \sum_{m=1}^q \theta^m T_m(\xi),$$

avec

$$T_m(\xi) = \int \frac{D'_m(\xi)}{x} d\xi.$$

L'intégrale indéfinie ci-dessus comporte une constante inconnue, que l'on détermine en remarquant que *les formules (70) et (71) sont simultanément applicables*, si ξ est assez petit. La fonction $\Theta_n(s)$ peut être développée en série (C); si l'on y remplace s par $\frac{\xi}{\theta}$ et que l'on ordonne (70) suivant les puissances de θ , le coefficient de θ^m est un développement limité de la fonction $T_m(\xi)$. On a dès

lors, en égalant les noyaux,

$$N(T_m) = N(\Theta_m),$$

ce qui détermine la constante cherchée.

CHAPITRE III.

ARC DE SECONDE ESPÈCE.

29. *Départ du point frontière.* — Au point frontière, la déviation est nulle s'il s'agit du point terminal; sinon elle est d'ordre β compris (n° 45) entre 1 et 2.

S'il ne s'agissait que de calculer la déviation au sommet inférieur, nous pourrions nous dispenser d'effectuer le raccordement avec l'arc ultérieur (n° 15). Mais nous sommes obligés de le faire pour le calcul du temps.

Appliquons la méthode du n° 19, avec $r = 1$, $\sigma = \sigma' = \sigma'' = -1$, $s_0 = 0$. Si l'on part du point terminal, $D_0 = 0$; on applique la méthode du n° 21. Dans le cas contraire, l'ordre β de D_0 est < 2 . Si l'on veut que z_0 soit fini, il faut appliquer la méthode du n° 20. Mais, la fonction W définie par (33) devient négative pour les grandes valeurs de s et le raccordement est impossible. Nous sommes dès lors obligés d'appliquer encore la méthode du n° 21. Mais z_0 est alors d'ordre $\beta - 2 < 0$, donc infiniment grand et en outre fonction de ε . On n'a plus aucun intérêt à introduire la variable ζ . Nous prendrons simplement $Z_0 = z_0$, de sorte que, dans les deux cas, $\zeta = 0$.

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$Z - Z_0 = X, \quad Z_0 - 1 = C.$$

Nous avons, d'après (40), $W = Z - s$. L'équation (39) est linéaire par rapport à s . La *fonction de raccordement* est définie par

$$(72) \quad s = X + C - Ce^{-X}.$$

La fonction $W = 1 + Ce^{-X}$ est positive quand $\beta < 2$, car C est infiniment grand positif, comme Z_0 . Si l'on part du point terminal, $C = -1$, $W = 1 - e^{-X}$ a le signe de X . Mais, X devient nécessairement positif, le cas où X devient négatif correspondant à l'arc supérieur (n° 24). Dans tous les cas, la *fonction W est constamment positive*. Donc X croît constamment avec s .

Dans le cas $\beta < 2$, la formule (72) montre que dès que X a une valeur finie, s est asymptotique à C , donc à Z_0 , donc d'ordre $\beta - 2$, donc infiniment grand. Si X est infiniment grand, s , asymptotique à $X + C$, est d'ordre $\leq \beta - 2$.

On peut prendre

$$(73) \quad e^{\varphi} = e^X + C = We^X, \quad J = \int_0^X e^{\varphi} dX = e^X - 1 + CX.$$

Je dis que, pour toutes les valeurs positives de s , la différence $\Delta = We^{\varphi} - KJ$ est toujours positive si l'on prend K assez petit. La dérivée $\frac{d\Delta}{ds}$ a le signe de $1 - K - Ce^{-X}$. Dans le cas du point terminal, $C = -1$; on peut prendre $K = 1$, car Δ croît en partant de zéro. Dans l'autre cas, le minimum de Δ est atteint pour

$$e^X = \frac{C}{1-K}, \quad X = \log C - \log(1-K), \quad W = 2 - K.$$

Si l'on suppose K infiniment petit, ce minimum est asymptotique à $4C - KC \log Z_0$. En prenant $K = \frac{1}{\log Z_0}$, la propriété est assurée.

D'autre part, pour $0 < s < s_1$, $\frac{W}{s^2}$ a un minimum asymptotique à $\frac{1}{s_1^2}$. On en conclut que R est de l'ordre de $\frac{K^2}{s_1^2}$. Si ξ_1 est d'ordre α , $\frac{1}{s_1}$ est d'ordre $2 - \alpha$, R est d'ordre $4 - 2\alpha$; la condition $\theta < R$ est assurée si $2 > 4 - 2\alpha$, soit $\alpha > 1$.

En définitive, nous pouvons calculer un développement en série de la déviation jusqu'au point M_1 dont la distance au point frontière est d'ordre α compris entre 1 et 2. Comme, à partir de ce point, nous pouvons utiliser la série (23), le raccordement est possible.

30. *Calcul du développement.* — Au lieu de calculer la fonction Y , il est un peu plus avantageux, dans le présent cas, de calculer la fonction U définie par

$$(74) \quad u = A_0 \theta (W + Ue^{-\varphi}) \quad \text{ou} \quad U = Y - B\theta s^2 e^{\varphi} = Ve^{\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \theta^n.$$

En utilisant les formules du n° 22 ou bien en formant l'équation différentielle que vérifie U , on obtient les formules suivantes :

$$(75) \quad \frac{dU_1}{dX} = -W s \left(\frac{1}{a} + 2b_0 W \right) e^X,$$

$$(76) \quad \frac{dU_n}{dX} = -(n+1)b_{n-1}s^n W^2 e^X + \sum_{i=1}^{n-1} U_{n-i} \left[-(i+1)b_{i-1}s^i + \frac{e^{-X}}{W^2} \left(\frac{U_i}{W} - \frac{dU_i}{dX} \right) \right].$$

En intégrant de 0 à X , on peut calculer de proche en proche tous les U_n .

Nous allons établir maintenant une propriété de ces fonctions. Je dis que

$$(77) \quad \frac{dU_n}{dX} = e^X P_n(s) + R_n(X, C),$$

$P_n(s)$ désignant un polynôme de degré n , à coefficients constants et $R_n(X, C)$ une fonction d'ordre fini pour X infiniment grand.

Si cette propriété est exacte, on en déduit d'abord

$$(78) \quad U_n = e^X Q_n(s) + S_n(X, C),$$

avec

$$Q_n = P_n(s) - P'_n(s) + \dots, \quad S_n \text{ d'ordre fini.}$$

On le voit en intégrant par parties le produit $e^X P_n(s)$ et remarquant que

$$\frac{d[f(s)]}{dX} = f'(s)W = f'(s) + f(s)Ce^{-X}.$$

D'après (75), la formule (77) est exacte pour $n = 1$. Si elle l'est jusqu'au rang $n - 1$, la formule (76) montre qu'elle l'est au rang n .

On pourrait tirer de là un développement asymptotique de la déviation et contrôler le résultat par la formule (23). Mais, nous avons seulement besoin de calculer le temps de parcours.

31. *Calcul du temps.* — Nous employons la formule (26) et devons donc simplement calculer l'intégrale J . Au départ, nous devons remplacer u par la formule (74). Nous pouvons ensuite utiliser le développement (23), que nous ordonnons au préalable suivant les puissances de ε^2 :

$$(79) \quad u = \sum_{p=1}^q \varepsilon^{2p} R_p(x).$$

En limitant le développement de U (n° 30) à un rang n_1 suffisamment élevé, l'erreur commise sur J est d'un ordre infiniment voisin de $2(q + 1)$.

Voyons maintenant comment se fera le calcul effectif. Posons

$$(80) \quad J = \sum_{p=1}^q \varepsilon^{2p} J_p(x).$$

D'où

$$(81) \quad J_p(x) = \int_a^x \frac{R_p(x)}{x^2} dx + C_p,$$

C_p désignant une constante égale au noyau de J_p . Pour la calculer, écrivons

$$J = -A_0 \theta^2 \int_0^s \frac{W + \sum_{n=1}^{n_1} \theta^n U_n e^{-X}}{(a - \theta s)^2} ds.$$

Comme au n° 28, on peut développer sous le signe \int et intégrer terme à terme, sans changer l'ordre de l'erreur. D'après le n° 30, le coefficient de θ^n sous le signe \int est de la forme $H_n(s) + e^{-X} K_n(X)$, H_n désignant un polynôme de degré n et K_n une fonction d'ordre fini. En intégrant H_n de 0 à s , on obtient un polynôme S_n de degré $n + 1$ et sans terme constant. Quant au second terme, on peut le remplacer, avec une erreur d'ordre exponentiel, par

$$\Gamma_n = \int_0^{+\infty} e^{-X} K_n(X) W dX,$$

Remplaçons s par $\frac{s}{\theta}$, le produit $\theta^{n+1} S_n$ devient un polynôme homogène, de

degré $n + 1$ en θ, ξ , sans terme indépendant de ξ . On a alors

$$C_p = -\frac{a^p}{A_0^{2p-1}} \Gamma_{p-2}, \quad \text{si } p > 1; \quad C_1 = 0.$$

32. *Raccordement avec le point frontière de gauche.* — Les calculs précédents sont valables jusqu'au point frontière de gauche, si l'ordre à droite de ce point est $r = 1$. Si $r > 1$, ils sont seulement valables jusqu'en un point M_0 dont la distance ξ_0 au point frontière F est d'ordre $\alpha < r'$ (n° 16). La valeur correspondante γ_0 de γ , fournie par (23), est asymptotique à $\lambda_1 - u_1$, donc, d'après (8) et (16), à

$$b + A_0 \xi_0^r - \frac{a \varepsilon^2}{r A_0 \xi_0^{r-1}},$$

le troisième terme ne devant être gardé que s'il est infiniment grand par rapport au terme en ξ_0^{r+1} de λ , c'est-à-dire si l'on a

$$(82) \quad \frac{1}{r} < \alpha < r';$$

ce qui est possible, puisque $rr' = \frac{2r}{2r-1} > 1$.

Pour faire le raccordement, nous adoptons la méthode du n° 21. Avec les notations du n° 19, nous avons $\sigma = 1$, $\sigma' = 1$ et nous prenons $\sigma'' = 1$. Remarquons d'abord que s_0 est d'ordre $\alpha - r' < 0$, donc infiniment grand. En outre

$$z_0 = s_0^r - \frac{1}{r s_0^{r-1}} + \dots$$

Dès lors, la fonction de raccordement sera déterminée par la condition d'être asymptotique à s^r pour les grandes valeurs de s . Plus précisément, la fonction

$W = s^r - Z$ doit être asymptotique à $\frac{1}{r s^{r-1}}$. Or, elle vérifie l'équation

$$(83) \quad W \frac{dW}{ds} = r W s^{r-1} - 1.$$

Si l'on pose

$$W = \frac{\omega + 1}{r s^{r-1}}, \quad r^2 s^{2r-1} = \frac{1}{\nu},$$

cette équation devient

$$\nu^2 \frac{d\omega}{d\nu} + \frac{\omega}{(2r-1)(1+\omega)} + \frac{r-1}{2r-1} \nu(1+\omega) = 0,$$

et ω doit s'annuler pour $\nu = 0$. On sait ⁽¹⁾ que la fonction ω existe et qu'elle est unique. De son développement asymptotique ⁽²⁾, on déduit

$$(84) \quad W = \frac{1}{r s^{r-1}} \left[1 - \frac{r-1}{r^2 s^{2r-1}} + \frac{(r-1)(4r-3)}{r^4 s^{4r-2}} - \frac{(r-1)(3r-2)(9r-7)}{r^6 s^{6r-3}} + \dots \right].$$

⁽¹⁾ Cf. ÉMILE PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 264. Voir aussi : J. HAAG, *Sur les propriétés de certaines équations différentielles* (*Bull. Sc. Math.*, 2^e série, t. LX, mai 1936).

⁽²⁾ Cf. ÉMILE PICARD, *loc. cit.*, p. 266.

Montrons que W est une fonction positive et décroissante de s . Construisons la courbe C d'équation

$$W = \frac{1}{rs^{r-1}},$$

et indiquons le signe de $\frac{dW}{ds}$ dans les deux régions séparées par cette courbe. Pour s infiniment grand, le point $M(s, W)$ est compris entre C et Os , comme il résulte de la formule (84). Donc, $\frac{dW}{ds} < 0$. Si s diminue, W augmente. Mais le point M ne peut traverser C , car il devrait le faire tangentiellement à une horizontale, ce qui est impossible. Ceci démontre la propriété ci-dessus énoncée.

Signalons encore que, pour $s=0$, la fonction W prend une valeur finie W_0 . En effet, si elle tendait vers $+\infty$, sa dérivée tendrait vers zéro, d'après (83); en intégrant cette dérivée jusqu'à $s=0$, on obtiendrait une valeur finie, contrairement à l'hypothèse.

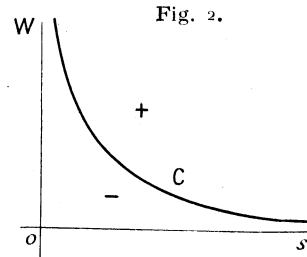
W_0 étant nécessairement positive, on en conclut que la fonction de raccordement prend une valeur finie $Z_0 < 0$ pour $s=0$.

Nous précisons la fonction φ définie par (41), en convenant qu'elle s'annule avec s . Pour s infiniment grand, elle est de l'ordre de s^{2r-1} . Il s'ensuit que l'intégrale $J = \int_s^\infty \frac{e^{-\varphi}}{W} ds$ a un sens. D'autre part, la différence $We^{-\varphi} - J$ a une dérivée $e^{-\varphi} \frac{dW}{ds} < 0$. Son minimum est donc atteint pour $s=\infty$ et vaut zéro. Il s'ensuit qu'au n° 21 on peut prendre $K=1$, quel que soit s_0 .

Le rapport $\frac{W}{s^{r-1}}$ est minimum pour $s=s_0$, et ce minimum vaut asymptotiquement $\frac{1}{rs_0^{2r}}$. On en conclut que R est d'ordre $2r(r-\alpha)$. Quant à R' , il est d'ordre $(r-1)(r-\alpha)$. La condition $\theta < R$ est remplie, car l'inégalité $r' > 2r(r-\alpha)$ revient à $r\alpha > 1$. Quant à la condition $|\zeta| < R'$, elle l'est aussi, car nous allons montrer qu'on peut prendre $\zeta=0$.

33. Appelons (T) la trajectoire exacte et (T') la trajectoire approchée calculée avec l'hypothèse précédente, c'est-à-dire issue du point M'_0 d'abscisse $a + \xi_0$ et d'ordonnée $y'_0 = b + A_0 \theta^r Z_0$; tandis que (T) passe par M_0 d'abscisse $a + \xi_0$ et d'ordonnée y_0 . Je dis que l'écart entre (T) et (T') est exponentiellement petit à partir du point M_1 d'abscisse $x_1 = a + k\xi_0$, k désignant un facteur quelconque compris entre zéro et un. D'après le n° 17, il nous suffit de prouver que les déviations u_0 et u'_0 en M_0 et M'_0 sont d'ordre $\beta = 2 - \alpha(r-1)$. Or, u_0 est asymptotique à $\frac{a\xi_0^2}{rA_0\xi_0^{r-1}}$, qui est bien d'ordre β . D'autre part,

$$u'_0 = A_0 \xi_0^r (1 + B_0 \xi_0) - A_0 \theta^r Z_0 = A_0 \theta^r (W_0 + B_0 \theta s_0^{r-1}).$$



Le terme W_0 est d'ordre $(r-1)(r'-\alpha)$. Le terme $B_0\theta s_0^{r'+1}$ est d'ordre $r'-(r+1)(r'-\alpha) > (r-1)(r'-\alpha)$, en vertu de $r\alpha > 1$. Dès lors, u'_0 est d'ordre $rr' + (r-1)(r'-\alpha) = \beta$.

En définitive, on commet une erreur exponentiellement petite sur la déviation en prenant pour point de raccordement un point M_1 dont la distance ξ_1 au point frontière est d'ordre α compris entre $\frac{1}{r}$ et r' , à condition de prendre comme point de départ de la trajectoire (T') calculée par la présente méthode un point M_0 pour lequel $\xi_0 = \frac{\xi_1}{k}$, avec $k < 1$.

34. *Calcul du développement.* — On pourrait utiliser les formules du n° 22. Il est un peu plus simple de développer la fonction X définie par

$$(85) \quad u = A_0\theta^r(W - Xe^\varphi),$$

u désignant la fonction $\lambda - y$ du n° 12. On a, entre X et Y , la relation

$$(86) \quad X = Y - B_0s^{r'+1}e^{-\varphi} = -Ve^{-\varphi}.$$

En utilisant les formules du n° 22 ou bien en formant l'équation différentielle que vérifie X et identifiant, on trouve, en appelant X_n le coefficient de θ^n dans le développement de X :

$$(87) \quad X_n = \int_{\varphi_0}^{\varphi} F_n e^{-\varphi} d\varphi,$$

avec

$$(88) \quad F_1 = \frac{s}{a} W [1 - (r+1)ab_0 W s^{r-1}],$$

$$(89) \quad F_n = -(r+n)b_{n-1}s^{n+r-1}W^2 + \sum_{i=1}^{n-1} X_{n-i}e^\varphi \left[(r+i)b_{i-1}W s^{i+r-1} + \frac{X_i e^\varphi + F_i}{W} \right].$$

La fonction φ est toujours définie par (41) et nous la précisons par la condition de s'annuler avec s . Quand s est très grand, on a la formule asymptotique

$$(90) \quad \frac{1}{W^2} = s^{2r-2} \left[r^2 + \frac{2(r-1)}{s^{2r-1}} - \frac{(r-1)(5r-3)}{r^2 s^{2(2r-1)}} + \dots \right],$$

qui nous montre que φ est infiniment grand de l'ordre de s^{2r-1} .

Introduisons les fonctions G_n et U_n définies comme F_n et X_n par les formules (87), (88), (89), mais en remplaçant la borne inférieure φ_0 par $+\infty$. Je dis que l'on a, pour s très grand,

$$(91) \quad G_n = s^{n+1-r} H_n(s), \quad U_n e^\varphi = s^{n+1-r} K_n(s),$$

H_n et K_n désignant des séries asymptotiques en $\frac{1}{s^{2r-1}}$. La première de ces formules est exacte pour $n=1$, d'après (83) et (84). On en déduit que la seconde l'est aussi, d'après la note (D). Admettons-les jusqu'au rang $n-1$. Les for-

mules (89) et (84), puis la note (D), nous montrent que la propriété est exacte au rang n .

Posons maintenant

$$F_n - G_n = f_n, \quad (X_n - U_n)e^{\varphi} = x_n.$$

Convenant provisoirement de désigner par $Q(m)$ toute quantité de la forme $M s_0^m$, où M désigne une constante positive quelconque, nous allons montrer que $|f_n|$ et $|x_n|$ ont une borne supérieure de la forme $e^{\varphi - \varphi_0} Q(2rn + 1 - r)$. D'abord, si la propriété est exacte pour f_n , elle l'est pour x_n . En effet,

$$x_n = e^{\varphi} \int_{\varphi_0}^{\varphi} f_n e^{-\varphi} d\varphi - e^{\varphi} \int_{\infty}^{\varphi_0} G_n e^{-\varphi} d\varphi.$$

Le module du premier terme est inférieur à

$$e^{\varphi - \varphi_0} Q(2rn + 1 - r) (e^{-\varphi} - e^{-\varphi_0}) e^{\varphi} < e^{\varphi - \varphi_0} Q(2rn + 1 - r).$$

Le second terme est asymptotique à $-e^{\varphi - \varphi_0} s_0^{n+1-r} K_n(s_0)$. Comme $|K_n(s_0)|$ a une borne supérieure finie, le module de ce second terme est borné supérieurement par $e^{\varphi - \varphi_0} Q(n + 1 - r) < e^{\varphi - \varphi_0} Q(2rn + 1 - r)$. La propriété est vraie pour x_n .

Elle est évidente pour f_1 , qui est nul, car $F_1 = G_1$. Admettons son exactitude jusqu'au rang $n - 1$. De la formule (89), on déduit

$$(92) \quad f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{X_{n-i} e^{\varphi}}{W} (x_i + f_i) + \sum_{i=1}^{n-1} x_{n-i} \left[\frac{U^i e^{\varphi} + G_i}{W} + (r+i) b_{i-1} s^{i+r-1} W \right].$$

D'après la démonstration du n° 21, nous savons que la fonction V est majorée par $\frac{kW}{\theta}$. On en déduit, d'après (86), que $\frac{Xe^{\varphi}}{W}$ est majoré par $\frac{k}{\theta}$. Donc,

$$\frac{|X_n| e^{\varphi}}{W} < \frac{k}{R^n} = Q(2nr),$$

et le terme général de la première somme de (92) a un module inférieur à

$$Q[2r(n-i)] e^{\varphi - \varphi_0} Q(2ri + 1 - r) = e^{\varphi - \varphi_0} Q(2rn + 1 - r).$$

Il en est donc de même de ladite somme.

D'après (91), le terme général de la seconde somme de (92) s'écrit

$$s^i x_{n-i} \left[\frac{H_i + K_i}{s^{r-1} W} + (r+i) b_{i-1} s^{r-1} W \right].$$

Comme le module du crochet ci-dessus a une borne supérieure finie, on en déduit que le module de ce terme général est inférieur à

$$e^{\varphi - \varphi_0} Q[2r(n-i) + 1 - r] Q(i) < e^{\varphi - \varphi_0} Q(2rn + 1 - r).$$

Il en est de même de toute la somme et par conséquent de f_n . La propriété annoncée est donc justifiée.

Dès lors, si l'on calcule la déviation u par la formule

$$(93) \quad u = A_0 \theta^r \left(W + \sum_{n=1}^{\infty} \theta^n U_n e^{\varphi} \right),$$

l'erreur commise sur chaque terme de la parenthèse a un module inférieur à $\theta^n Q(2rn + 1 - r)e^{\varphi - \varphi_0}$. Les deux premiers facteurs sont d'ordre fini. Quant au troisième, il est d'ordre exponentiel dès que $\varphi_0 - \varphi$ est infiniment grand d'ordre non nul, c'est-à-dire dès que $\frac{s_0 - s}{s_0} = \frac{\xi_0 - \xi}{\xi_0}$ a une valeur finie. Cette condition est remplie à partir du point M_1 (n° 33). Dès lors, *l'erreur commise sur la somme d'un nombre fini de termes de la formule (93) est exponentiellement petite à partir du point de raccordement.*

Si l'on arrête la série au terme en θ^m , l'erreur commise a un module inférieur à $\frac{kW}{1 - \bar{R}} \left(\frac{\theta}{\bar{R}} \right)^{m+1}$. En particulier, au point frontière, elle est d'ordre

infiniment voisin de $(m + 1)r'$ si, comme on peut le supposer, α est infiniment voisin de r' .

En faisant $s = 0$ dans la formule (93), on obtient la *déviati on au point frontière par une série asymptotique*. Cette déviation est de l'ordre de θ^r , donc d'ordre $rr' = \frac{2r}{2r-1}$. On voit que *cet ordre est toujours* > 1 .

35. *Calcul du temps.* — La formule (81) peut être appliquée jusqu'en M_1 (n° 33). Pour calculer l'intégrale J entre M_1 et F , utilisons la variable s et la formule (85) :

$$(94) \quad J = -A_0 \theta^{r+1} \int_0^s \frac{W - \sum_{n=1}^{n_1} \theta^n U_n e^{\varphi}}{(a + \theta s)^2} ds.$$

En prenant n_1 assez grand, nous ne changeons pas l'ordre de l'erreur. Nous pouvons ensuite développer sous le signe \int et intégrer terme à terme. Comme ξ_1 doit disparaître dans l'addition de la présente intégrale avec celle du n° 31, nous pouvons *réduire chaque coefficient à son noyau*, en appliquant les résultats des Notes (D) et (B). Nous faisons de même pour l'intégrale figurant dans (81), en lui appliquant ceux de la Note (E).

Bien entendu, nous remplaçons, dans (80), ε^2 par $\frac{A_0^2}{a} \theta^{2r-1}$. On doit constater, après l'addition, que les coefficients des différentes puissances de θ sont bien constants et ne contiennent plus $\log \xi$.

