ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. PICART

Note de Géométrie

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 1 (1864), p. 285-295
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1864_1_1__285_0>

NOTE DE GÉOMÉTRIE,

PAR M. A. PICART,

PROFESSEUR AU LYCÉE CHARLEMAGNE.

PREMIÈRE PARTIE.

SUR LE LIEU DES POINTS DONT LA SOMME DES DISTANCES A DEUX DROITES FIXES EST CONSTANTE.

§ I. — *Normale à la surface.*

1. Soient X et Y les deux droites fixes. Désignons par a la somme constante des distances d'un point de la surface à ces deux droites. On reconnaît aisément que la somme des distances à ces droites d'un point extérieur à la surface est plus grande que a. Le point de contact d'un plan tangent est donc le point de ce plan dont la somme des distances aux deux droites est minimum.

Dès lors se présente la question suivante :

Quel est sur un plan le point dont la somme des distances à deux droites fixes est minimum ?

(Nous supposerons que le plan P rencontre la plus courte distance des deux droites X, Y en dehors de l'intervalle des pieds de cette plus courte distance, sans quoi le point cherché serait évidemment le point d'intersection.)

Que l'on prenne la droite X′ symétrique de X par rapport au plan P. La somme des distances d'un point quelconque du plan aux deux droites X et Y est la même que la somme des distances de ce même point aux deux droites X′ et Y. Or le point du plan dont la somme des distances aux deux droites X′ et Y est minimum est évidemment le point où la plus courte distance de ces deux droites rencontre le plan (*). De là on déduit facilement que les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux droites X et Y sont dans un plan perpendiculaire au plan P et sont également inclinées sur ce plan.

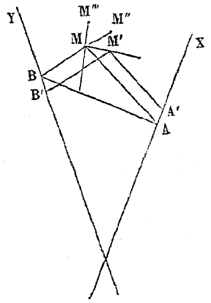
(*) J'indique ici la solution générale du problème sans m'arrêter aux cas particuliers dont la discussion, bien qu'intéressante, m'éloignerait de mon sujet.

Donc :

THÉORÈME I. — *La normale à la surface, en un point, est la bissectrice de l'angle que forment les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux droites.*

On peut, du reste, reconnaître, *à posteriori*, que si M (*fig.* 1) est un point de la

Fig. 1.



surface, le point M' infiniment voisin de M, situé dans le plan des deux perpendiculaires MA, MB, sur la droite qui fait avec MA et MB, de part et d'autre, des angles égaux, appartient aussi à la surface. Car, λ désignant l'angle M'MA, on a

$$M'A' = MA - MM' \cos\lambda,$$
$$M'B' = MB + MM' \cos\lambda;$$

par suite,

$$M'A' + M'B' = MA + MB.$$

De même, le point M'' infiniment voisin de M, situé sur la perpendiculaire au plan MAB, appartient aussi à la surface, puisque ses distances aux deux droites fixes sont égales respectivement aux distances du point M à ces deux droites.

La normale en M devant être perpendiculaire aux deux droites MM', MM'', est donc bien bissectrice de l'angle AMB.

2. Si, sur la normale en M, à la surface, on prend un point M''' infiniment voisin de M, la différence des distances de ce point M''' aux deux droites X et Y est égale à la différence des distances du point M à ces deux droites. D'ailleurs la différence des distances du point M'' aux deux droites est évidemment égale à la différence des distances du point M. Donc :

THÉORÈME II. — *La normale, en un point* M, *à la surface lieu des points dont la différence des distances* MA, MB *à deux droites fixes est constante, est la bissectrice de l'angle formé par l'une de ces perpendiculaires et le prolongement de l'autre.*

Des théorèmes I et II on déduit :

THÉORÈME III. — *La surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante, et la surface lieu des points dont la différence des distances à ces deux mêmes droites est aussi constante, se coupent orthogonalement.*

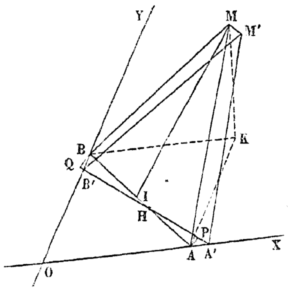
3. Aux deux droites X et Y on peut substituer deux lignes quelconques; et même, si l'on remarque que le lieu des points dont la somme ou la différence des distances à deux plans fixes est constante, est un double système de plans parallèles aux plans bissecteurs des angles dièdres que forment entre eux ces deux plans fixes, on voit que les mêmes théorèmes I, II, III peuvent être étendus au cas où, au lieu de deux lignes, on considère deux surfaces quelconques.

§ II. — *Lignes de courbure de la surface.*

Nous ne considérerons ici que le cas où les deux droites sont rectangulaires et situées dans le même plan.

4. La normale en M est, d'après ce qui précède, bissectrice de l'angle des perpendiculaires abaissées sur les deux droites fixes OX, OY (*fig.* 2); elle rencontre

Fig. 2.



AB en un point I tel que $\frac{AI}{BI} = \frac{AM}{BM}$. Prenons le point M' de la surface, infiniment voisin de M, situé dans le plan normal AMB : il se projette sur les deux droites en A' et B'. Si l'on désigne par λ l'angle que forme MM' avec MA, par φ et ψ les angles que forme le plan MAB avec les plans perpendiculaires aux droites OX, OY, menés par le point M, on a

$$AA' = MM' \sin\lambda \sin\varphi,$$
$$BB' = MM' \sin\lambda \sin\psi.$$

Soit H le point où la droite A'B' rencontre AB : si du point H comme centre on décrit deux arcs de cercle AP, BQ, on aura

$$AP = AA' \sin A = MM' \sin\lambda \sin\varphi \sin A,$$
$$BQ = AA' \sin B = MM' \sin\lambda \sin\psi \sin B.$$

Par suite,

$$\frac{HA}{HB} = \frac{\sin\varphi \sin A}{\sin\psi \sin B}.$$

Soit K la projection de M sur le plan XOY, l'angle trièdre (MK, MA, MB) donne

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin \mathrm{BMK}}{\sin \mathrm{AMK}} = \frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{BM}} : \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AM}},$$

d'où

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} \cdot \frac{\cos \mathrm{A}}{\cos \mathrm{B}}.$$

Par suite,

$$\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}} \cdot \frac{\sin \mathrm{A} \cos \mathrm{A}}{\sin \mathrm{B} \cos \mathrm{B}},$$

ou, les angles A et B étant complémentaires,

$$\frac{\mathrm{HA}}{\mathrm{HB}} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{BM}}.$$

Le point d'intersection des deux droites infiniment voisines AB, A'B' n'est donc autre que le point I. Dès lors la normale à la surface en M', qui coupe A'B' en un point infiniment voisin de I, forme avec le plan normal IMM' un angle infiniment petit du second ordre. MM' est donc l'élément d'une ligne de courbure de la surface. De là le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *En chaque point de la surface, l'une des lignes de courbure est dirigée dans le plan normal que déterminent les perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux droites.*

Des théorèmes II et IV on déduit :

THÉORÈME V. — *Les lignes de courbure d'un système de la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites rectangulaires et situées dans un même plan est constante, sont les intersections de cette surface avec toutes les surfaces lieux des points dont la différence des distances aux deux mêmes droites est une quantité constante quelconque.*

5. Si l'on désigne par u et v les distances d'un point aux deux droites OX, OY, les deux familles de surfaces définies par les équations

$$u + v = a, \qquad u - v = b,$$

appartiennent, en vertu du théorème V, à un système triple orthogonal. Quelle est la troisième famille de ce système ?

On sait que dans le paraboloïde équilatère il existe deux génératrices, une dans chaque système, qui coupent orthogonalement toutes les génératrices de l'autre système. Ces deux génératrices sont celles qui passent par l'extrémité de l'axe : nous les appellerons *génératrices principales*. Elles définissent une famille de paraboloïdes équilatères.

Considérons l'un des paraboloïdes ayant pour génératrices principales les deux droites OX et OY, et soit M un point commun à ce paraboloïde et à la surface $(u+v=a)$. Le plan des génératrices MA, MB est le plan tangent en M à ce paraboloïde. MM′ est donc un élément de la courbe d'intersection des deux surfaces. De là résulte :

THÉORÈME VI. — *Les lignes de courbure du second système de la surface* $(u+v=a)$ *sont les intersections de cette surface avec la famille des paraboloïdes ayant pour génératrices principales les deux droites fixes.*

De plus, ces paraboloïdes coupent orthogonalement la surface $(u+v=a)$: ils constituent donc avec les surfaces $(u+v=a,\ u-v=b)$ un système triple orthogonal.

Ce système a été obtenu analytiquement par M. A. Serret (*Journal de Liouville*, t. XII). Mais il n'était peut-être pas sans intérêt d'y parvenir par une voie purement synthétique.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LES LIGNES DE COURBURE DES SURFACES DOUBLEMENT RÉGLÉES.

1. Comme sur une surface doublement réglée les lignes de courbure, en chaque point, forment des angles égaux avec les génératrices rectilignes qui passent par ce point, on reconnaît facilement que les lignes de courbure des deux systèmes jouissent de cette propriété : que *la somme ou la différence des portions de génératrices comprises entre un point de chacune de ces lignes et deux trajectoires orthogonales quelconques des deux systèmes de génératrices, est constante pour une même ligne de courbure.*

Sur le paraboloïde hyperbolique à plans directeurs perpendiculaires, il existe deux génératrices, une dans chaque système, qui coupent orthogonalement toutes les génératrices de l'autre système : ce sont celles qui passent par l'extrémité de l'axe, nous les avons déjà nommées *génératrices principales*.

La propriété générale des lignes de courbure des surfaces doublement réglées peut donc, pour le paraboloïde équilatère, s'énoncer sous la forme suivante :

THÉORÈME I. — *La somme ou la différence des distances des différents points d'une même ligne de courbure aux deux génératrices principales est constante.*

Ce théorème a été rencontré, incidemment, par M. A. Serret, dans un travail remarquable sur les systèmes triples de surfaces orthogonales (*Journal de Liouville*, t. XII).

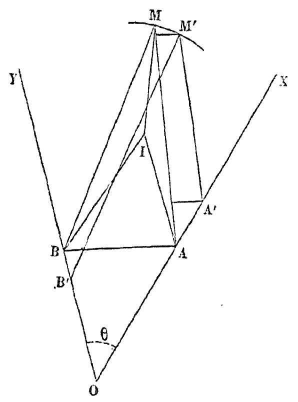
2. Mais ce n'est là qu'un cas particulier d'une propriété générale des paraboloïdes quelconques.

Voici en quoi elle consiste :

THÉORÈME II. — *Sur un paraboloïde hyperbolique quelconque, la somme ou la différence des portions de génératrices comprises entre un point de chacune des lignes de courbure et les génératrices principales (qui passent par l'extrémité de l'axe), est constante pour une même ligne de courbure.*

Soient, en effet, OX, OY les génératrices principales, faisant entre elles (*fig.* 3)

Fig. 3.



un angle θ : les plans directeurs sont parallèles respectivement à ces deux droites et perpendiculaires à leur plan. Prenons un point M d'une ligne de courbure et menons les génératrices MA, MB, qui passent par ce point, jusqu'à leur rencontre avec les génératrices principales (nous supposerons que ces deux portions de génératrices soient situées du même côté de la ligne de courbure). Désignons par λ l'angle que forment ces deux génératrices avec la ligne de courbure, par α et β les angles qu'elles forment avec les génératrices principales. Abaissons du point M une perpendiculaire MI sur le plan XOY : les plans AMI, BMI sont parallèles aux plans directeurs; représentons par φ et ψ les angles qu'ils forment avec le plan tangent AMB à la surface; prenons sur la ligne de courbure un point M′ infiniment voisin de M et menons par ce point les génératrices M′A′, M′B′.

On voit sans peine que

$$\mathrm{M'A'} = \mathrm{MA} - \mathrm{MM'}\cos\lambda - \frac{\mathrm{MM'}\sin\lambda\sin\varphi}{\sin\theta}\cos\alpha,$$

$$\mathrm{M'B'} = \mathrm{MB} + \mathrm{MM'}\cos\lambda - \frac{\mathrm{MM'}\sin\lambda\sin\psi}{\sin\theta}\cos\beta;$$

mais

$$\cos\alpha = \cos\theta \sin \text{IMA}, \tag{1}$$
$$\cos\beta = \cos\theta \sin \text{IMB}, \tag{2}$$
$$\sin\varphi \sin \text{IMA} = \sin\psi \sin \text{IMB}, \tag{3}$$

donc

$$\text{M}'\text{A}' + \text{M}'\text{B}' = \text{MA} + \text{MB}.$$

Si la ligne de courbure était comprise dans l'angle AMB, ce serait la différence MA — MB qui serait constante.

Remarque. — Des formules (1), (2), (3) on peut déduire la proposition suivante : *Deux génératrices de système différent forment avec les génératrices principales des angles dont les cosinus sont inversement proportionnels aux sinus des angles que forme leur plan avec les plans directeurs.*

3. Proposons-nous maintenant de voir comment se transforme, pour l'hyperboloïde, la relation exprimée par le théorème II.

4. Nous établirons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *Si* (X, Y'), (Y, X') (*fig.* 4) *sont deux couples de génératrices parallèles qui se rencontrent en* O *et* O', *les segments qu'une génératrice quelconque intercepte sur* X, X' *ou* Y, Y', *à partir des points* O *et* O', *ont un produit constant.*

En effet, menons un plan par OO' et la bissectrice OU de l'angle XOY : ce plan coupe la surface suivant une courbe du second ordre dont OO' est un diamètre. Projetons obliquement sur ce plan, par des parallèles à la bissectrice extérieure OV de l'angle XOY, les génératrices de la surface : elles ont pour projections des tangentes à la courbe. On sait que dans une courbe du second ordre, une tangente quelconque intercepte sur deux tangentes parallèles, à partir de leur point de contact, des segments dont le produit est constant; or, les segments qu'une génératrice intercepte sur X, X' à partir de O et O' sont égaux respectivement à ceux que sa projection intercepte sur les tangentes à la courbe en O et O', divisés par le cosinus de la moitié de l'angle que forment entre elles les deux droites OX, OY; donc le produit de ces segments est lui-même constant.

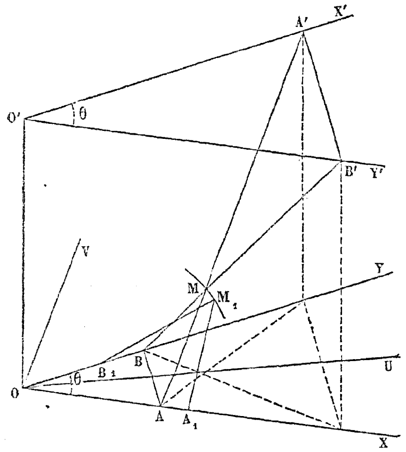
5. Cela posé, soient OX, OY (*fig.* 4) les génératrices principales qui passent par l'extrémité du grand axe de la surface, O'X', O'Y' les génératrices qui leur sont respectivement parallèles. Prenons un point M sur la surface et menons les génératrices AA', BB', qui passent par ce point, jusqu'à leur rencontre avec X, X' et Y, Y'. Considérons le point M_1, infiniment voisin de M sur la bissectrice de l'angle AMB' : ce point appartient à l'une des lignes de courbure qui se coupent en M. Menons par le point M_1 et par les droites O'X', O'Y' deux plans qui coupent OX et OY en A_1 et B_1 : les droites M_1A_1, M_1B_1 sont les génératrices relatives au point M_1.

Posons

$$\text{OA} = x, \quad \text{OB} = y, \quad \text{AA}_1 = dx, \quad \text{BB}_1 = -dy, \quad \text{MA} = u, \quad \text{MB} = v.$$

Désignons par θ l'angle des deux génératrices OX, OY, par λ l'angle que forme MM_1 avec MA, par φ et ε les angles que forme le plan MO′A′ avec les plans MAB et A′O′B′, et enfin par μ l'angle que forme O′Y′ avec le plan MO′A′.

Fig. 4.



La distance du point M_1 au plan MO′A′ est égale à $MM_1 \sin\lambda \sin\varphi$; par suite, la distance du point A_1 à ce même plan est

$$\frac{MM_1 \sin\lambda \sin\varphi \,.\, AA'}{MA'};$$

d'où

$$dx = \frac{MM_1 \sin\lambda \sin\varphi \,.\, AA'}{MA' \sin\mu};$$

mais

$$\sin\varphi = \frac{\sin O'A'B' \,.\, \sin\varepsilon}{\sin MA'B'}, \quad \sin\mu = \sin\theta \sin\varepsilon;$$

donc

$$dx = \frac{MM_1 \sin\lambda \,.\, \sin O'A'B' \,.\, AA'}{MA' \sin MA'B' \sin\theta}. \tag{4}$$

On trouverait de même

$$dy = -\frac{MM_1 \sin\lambda \sin O'B'A' \,.\, BB'}{MB' \sin MB'A' \sin\theta}, \tag{5}$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} + \frac{BB'}{AA'} \cdot \frac{O'A'}{O'B'} = 0. \tag{6}$$

D'après le lemme précédent, les produits OA . O′A′, OB . O′B′ sont égaux à une constante k^2; par suite,

$$O'A' = \frac{k^2}{x}, \quad O'B' = \frac{k^2}{y}.$$

Désignons par $2a$ le grand axe OO′ de la surface; on voit facilement, en abaissant des points A′ et B′ des perpendiculaires sur le plan XOY, que

$$AA' = \frac{\sqrt{x^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)x^2 + k^4}}{x},$$

$$BB' = \frac{\sqrt{y^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)y^2 + k^4}}{y}.$$

Dès lors, l'équation (6) devient

$$(7) \qquad \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)x^2 + k^4}} + \frac{dy}{\sqrt{y^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)y^2 + k^4}} = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des lignes de courbure d'un système.

On trouverait de même, pour l'autre système,

$$(8) \qquad \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)x^2 + k^4}} - \frac{dy}{\sqrt{y^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)y^2 + k^4}} = 0.$$

On connaît l'intégrale générale de ces équations : elle est de la forme

$$(9) \qquad \frac{x\sqrt{y^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)y^2 + k^4} \pm y\sqrt{x^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)x^2 + k^4}}{k^4 - x^2y^2} = C,$$

C désignant une constante arbitraire.

6. Dans le cas particulier où le polynôme du quatrième degré qui est sous le radical est un carré parfait, les équations (7) et (8) se réduisent à

$$(10) \qquad \frac{dx}{x^2 + k^2} \pm \frac{dy}{y^2 + k^2} = 0,$$

équation dont l'intégrale est

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{k} \pm \operatorname{arc\,tang}\frac{y}{k} = \text{const.},$$

ou

$$(11) \qquad \frac{x \pm y}{k^2 \mp xy} = \text{const.}$$

Cette dernière équation, qui rentre dans la forme générale

$$Axy + Bx + Cy + D = 0,$$

représente un double système de courbes planes tracées sur l'hyperboloïde (M. Chasles, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LIII; 2 décembre 1861).

Quel est le genre d'hyperboloïde auquel appartient ce double système de lignes de courbure planes? Posons la condition qui exprime que le polynôme

$$x^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)x^2 + k^4$$

est un carré, savoir

$$(2a^2 - k^2\cos\theta)^2 - k^4 = 0. \tag{12}$$

Si l'on désigne, comme à l'ordinaire, par a^2, b^2, $-c^2$ les carrés des demi-axes de la surface, on a

$$\cos\theta = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}, \quad k^2 = \frac{b^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = b^2 + c^2, \quad k^2\cos\theta = b^2 - c^2.$$

L'équation (12) devient donc

$$a^4 - a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 = 0,$$

ou

$$a^2(a^2 + c^2) = b^2(a^2 + c^2),$$

ou enfin

$$a = b. \tag{13}$$

La surface est de révolution, comme on devait s'y attendre.

L'équation (11) représente le double système des méridiens et des parallèles de cette surface. Le signe $+$ convient aux parallèles et le signe $-$ aux méridiens.

7. L'équation (9) des lignes de courbure, entre les coordonnées x et y, quoique sous une forme analytique remarquable, ne se prête pas à une interprétation géométrique simple. Pour la transformer, évaluons u et v en fonction de x et y.

Les triangles semblables MAB, MA'B' donnent

$$\frac{u}{\text{AA}'} = \frac{\text{AB}}{\text{AB} + \text{A}'\text{B}'}.$$

Or

$$\text{AA}' = \frac{\sqrt{x^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)x^2 + k^4}}{x},$$

$$\text{AB} = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta},$$

$$\text{A}'\text{B}' = \frac{k^2}{xy}\sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta};$$

donc

$$u = \frac{y\sqrt{x^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)x^2 + k^4}}{k^2 + xy}. \tag{14}$$

De même,

$$v = \frac{x\sqrt{y^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)y^2 + k^4}}{k^2 + xy}; \tag{15}$$

d'où

$$v \pm u = \frac{x\sqrt{y^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)y^2 + k^4} \pm y\sqrt{x^4 + 2(2a^2 - k^2\cos\theta)x^2 + k^4}}{k^2 + xy}.$$

L'équation (9) peut donc se mettre sous la forme

$$v \pm u = \mathrm{C}(k^2 - xy),$$

ou, en posant $\mathrm{C} = \frac{m}{k^2}$,

$$(16) \qquad v \pm u = m - \frac{m}{k^2}xy.$$

Ainsi :

THÉORÈME III. — *Sur l'hyperboloïde la somme ou la différence des portions de génératrices, comprises entre un point d'une ligne de courbure et deux génératrices principales, n'est plus constante, comme pour le paraboloïde; à cette somme ou différence se joint un terme proportionnel au produit des segments que ces génératrices interceptent sur les génératrices principales, à partir de leur point d'intersection.*

8. Du reste, cette équation (16) comprend comme cas particulier la propriété du paraboloïde; car cette dernière surface peut être considérée comme un hyperboloïde dont l'ellipse de gorge est transformée en parabole. Dans ce cas la quantité k^2, qui est égale à $\frac{b^2}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$, devient infinie; par suite, le terme $\frac{m}{k^2}xy$ disparaît, et l'équation (16) devient

$$v \pm u = m.$$

Remarque. — Des équations (14) et (15) on déduirait facilement une équation qui ne renfermerait que le produit xy. En portant dans cette équation la valeur de xy tirée de l'équation (16), on aurait une relation entre les seules coordonnées u et v. Mais comme cette relation se présente sous une forme compliquée, nous nous dispenserons de la développer, en nous bornant à l'équation (16) qui exprime une propriété géométrique très-nette des lignes de courbure de l'hyperboloïde.

FIN DU TOME PREMIER.