PHILLIPPS

Notes sur divers points de la thermodynamique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 2 (1873), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1873_2_2__1_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

NOTES

SUR

DIVERS POINTS DE LA THERMODYNAMIQUE,

PAR M. PHILLIPS,

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Note sur les changements d'état d'un corps quelconque, suivant une ligne adiabatique.

Je me suis proposé, dans cette Note, d'examiner comment la température d'un corps varie avec son volume et sa pression, lorsqu'il change d'état suivant une ligne adiabatique.

Soient

t la température du corps;
p sa pression;
v son volume spécifique;
U sa chaleur interne;
Q la chaleur qu'il reçoit du dehors;
c sa chaleur spécifique à pression constante;

c_1 sa chaleur spécifique à volume constant;
a une constante, égale à 273;
A l'équivalent calorifique du travail.

On a les équations générales

$$(1) \qquad dt = \left(\frac{dt}{dp}\right) dp + \left(\frac{dt}{dv}\right) dv,$$

$$(2) \qquad dU = X\,dp + Y\,dv,$$

$$(3) \qquad dQ = X\,dp + (Y + Ap)\,dv,$$

$$(4) \qquad X = c_1 \left(\frac{dt}{dp}\right),$$

$$(5) \qquad Y + Ap = c\left(\frac{dt}{dv}\right).$$

Supposons que le corps change d'état suivant une ligne adiabatique, alors

$$(6) \qquad X\,dp + (Y + Ap)\,dv = 0.$$

Cette relation, au moyen des équations (4) et (5), revient à

$$(7) \qquad c_1 \left(\frac{dt}{dp}\right) \frac{dp}{dt} + c\left(\frac{dt}{dv}\right) \frac{dv}{dt} = 0.$$

En même temps, l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$(8) \qquad c_1 \left(\frac{dt}{dp}\right) \frac{dp}{dt} + c_1 \left(\frac{dt}{dv}\right) \frac{dv}{dt} = c_1.$$

Des relations (7) et (8) on déduit

$$(9) \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{c_1}{c - c_1} \frac{1}{\left(\frac{dt}{dv}\right)}.$$

Cette formule montre que, dans le changement d'état suivant une ligne adiabatique, la température et le volume varient en sens inverse toutes les fois que la fraction $\frac{c_1}{c - c_1}$ est positive et que, de plus, sous pression constante, le volume et la température varient dans le même sens, ce qui est le cas très-ordinaire.

La formule (9) peut être mise sous une autre forme. On sait qu'on a, d'une manière générale,

$$(c - c_1)\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dv}\right) = A(a+t). \tag{10}$$

Substituant dans l'équation (9) la valeur de $(c - c_1)\left(\frac{dt}{dv}\right)$ tirée de l'équation (10), on obtient

$$\frac{dv}{dt} = -c_1 \frac{\left(\frac{dt}{dp}\right)}{A(a+t)}. \tag{11}$$

Cette expression fait voir que, dans le changement d'état suivant une ligne adiabatique, la température et le volume varient en sens inverse toutes les fois que la chaleur spécifique à volume constant est positive, et que, de plus, sous volume constant, la pression et la température varient dans le même sens.

Proposons-nous maintenant de voir comment la température varie avec la pression quand le corps change d'état suivant une ligne adiabatique.

On a toujours l'équation (7). En même temps, la relation (1) peut se mettre sous la forme

$$c\left(\frac{dt}{dp}\right)\frac{dp}{dt} + c\left(\frac{dt}{dv}\right)\frac{dv}{dt} = c. \tag{12}$$

Des équations (7) et (12) on tire

$$\frac{dp}{dt} = \frac{c}{c - c_1}\,\frac{1}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}. \tag{13}$$

On conclut de là que, dans le changement d'état suivant une ligne adiabatique, la température et la pression varient dans le même sens, toutes les fois que la fraction $\frac{c}{c - c_1}$ est positive et que, de plus, à volume constant, la pression et la température varient dans le même sens.

On peut encore mettre la formule (13) sous une autre forme. Substituons dans cette formule la valeur de $(c - c_1)\left(\frac{dt}{dp}\right)$, déduite de (10), et nous aurons

$$\frac{dp}{dt} = c\,\frac{\left(\frac{dt}{dv}\right)}{A(a+t)}. \tag{14}$$

On voit par là que, dans le changement d'état suivant une ligne adiabatique, la température et la pression varient dans le même sens toutes les fois que la chaleur spécifique à pression constante est positive et que, de plus, sous pression constante, le volume et la température varient dans le même sens.

Enfin, soit de la combinaison des équations (9) et (13), soit de celle des équations (11) et (14), on conclut

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{c}{c_1}\,\frac{\left(\frac{dt}{dv}\right)}{\left(\frac{dt}{dp}\right)}. \tag{15}$$

Cette dernière formule montre que la pression et le volume varient, en sens inverse l'un de l'autre, toutes les fois que le rapport $\frac{c}{c_1}$ est positif et que, de plus, la température varie dans le même sens que le volume, sous pression constante et dans le même sens que la pression, sous volume constant.

Note sur les diverses formules qui donnent la vitesse d'écoulement d'un gaz permanent par un petit orifice percé dans un réservoir.

Soient

V_1 la vitesse dans la section contractée;
p_0 et v_0 la pression et le volume spécifique dans le réservoir;
p_1 et v_1 la pression et le volume spécifique dans la section contractée; nous admettons que p_1 peut être pris égal à la pression extérieure;
T_0 la température absolue dans le réservoir;
c la chaleur spécifique du gaz à pression constante;

c_1 sa chaleur spécifique à volume constant;

$\gamma = \frac{c}{c_1}$;

A l'équivalent calorifique du travail.

La formule ordinaire, pour calculer la vitesse V_1, est

$$\frac{V_1^2}{2g} = p_0 v_0 \log \frac{p_0}{p_1}. \tag{1}$$

Elle suppose que, pendant que le gaz s'écoule à travers l'orifice, sa température reste constante, ce qui exige que, pendant son écoulement, le gaz reçoive de la chaleur des corps extérieurs.

Une autre formule applicable quand, ainsi que c'est le cas très-ordinaire dans la pratique, le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ est très-peu supérieur à l'unité est

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{1}{\varpi}(p_0 - p_1), \tag{2}$$

où ϖ représente le poids spécifique du gaz, qu'on peut alors regarder comme sensiblement constant.

Cette formule suppose que, pendant que le gaz s'écoule à travers l'orifice, il cède de la chaleur aux corps extérieurs.

On démontre aisément que, toutes les fois que le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ est peu supérieur à l'unité, ce qui est le cas très-général de la pratique, les formules (1) et (2) donnent sensiblement la même valeur de la vitesse V_1.

Enfin on peut calculer la vitesse, en supposant que, pendant son écoulement à travers l'orifice, le gaz ne reçoive pas de chaleur du dehors et n'en émette pas au dehors. C'est là, évidemment, l'hypothèse la plus voisine de la réalité, en raison de la grande vitesse d'écoulement. Partant de là, M. Weisbach, en se fondant sur les principes de la Thermodynamique, a obtenu la formule suivante :

$$\frac{V_1^2}{2g} = \frac{cT_0}{A}\left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]. \tag{3}$$

Je me propose de comparer cette formule avec les précédentes, pour le cas très-général de la pratique où le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ est peu supérieur à l'unité, et il résulte de ce qui précède qu'il suffit alors de comparer entre elles les formules (3) et (2).

Désignant par ρ le rapport des seconds membres, on a

$$\rho = \frac{c}{A} \varpi T_0 \frac{1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{p_0 - p_1}.$$

Remplaçons ϖ par $\frac{1}{v_0}$, puis $\frac{1}{v_0}$ par sa valeur tirée de l'équation connue $p_0 v_0 = RT_0$, où R est une constante spéciale au gaz. Nous aurons

$$\rho = \frac{c}{AR} \frac{1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - \frac{p_1}{p_0}}.$$

Enfin, à cause de $c - c_1 = AR$, on a

$$(4) \qquad \rho = \frac{1 - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1 - \frac{p_1}{p_0}\right)}.$$

Supposons d'abord, à la limite, $p_1 = p_0$; alors ρ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. En cherchant sa vraie valeur, on trouve, dans ce cas, $\rho = 1$.

Soit maintenant $\frac{p_1}{p_0} = 1 - \delta$, δ étant une petite fraction, et posons

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} = k.$$

En supposant $\gamma = 1,41$, on a

$$k = 0,291;$$

il vient

$$(5) \qquad \rho = \frac{1 - (1 - \delta)^k}{k\delta}.$$

En développant le numérateur du second membre de l'équation (5) par la formule du binôme, on trouve

$$(6)\quad \rho = 1 + \frac{1-k}{1.2}\delta + \frac{(1-k)(2-k)}{1.2.3}\delta^2 + \frac{(1-k)(2-k)(3-k)}{1.2.3.4}\delta^3 + \ldots.$$

Comme $k < 1$, cette dernière relation montre que ρ est toujours plus grand que l'unité, et qu'il en diffère d'autant moins que δ est plus petit, ou que le rapport $\frac{p_0}{p_1}$ est plus voisin de l'unité.

La formule (5) donne les résultats suivants :

Pour $\delta = 0{,}00$..... $\rho = 1$,
» $\delta = 0{,}05$..... $\rho = 1{,}0186$,
» $\delta = 0{,}10$..... $\rho = 1{,}03773$,
» $\delta = 0{,}50$..... $\rho = 1{,}2554$.

Note sur une nouvelle forme des équations générales de la Thermodynamique et sur le coefficient économique des cycles fermés réversibles.

Soient, pour un corps quelconque,
p la pression;
v le volume spécifique;
T la température absolue;
A l'équivalent calorifique du travail;
c la chaleur spécifique à pression constante;
c_1 la chaleur spécifique à volume constant;
U la chaleur interne;
Q la chaleur reçue du dehors;
$Z = \int \frac{dQ}{T}$ une fonction des deux variables indépendantes, laquelle est toujours déterminée pour un corps quelconque.

On sait que $Z =$ const. représente une ligne adiabatique quelconque. Convenons de nommer Z la fonction adiabatique (1).

(1) La fonction Z a reçu de M. Clausius le nom d'*entropie*.

p, v et T sont soumis à une relation dépendant de la nature du corps; U et Z sont des fonctions déterminées de p, v et T. Il suit de là que l'on peut regarder p, v et U comme des fonctions déterminées de T et Z. C'est ce que nous allons faire, et voir ce que deviennent les équations générales de la Thermodynamique, T et Z étant choisis comme variables indépendantes.

On a alors

$$dp = \left(\frac{dp}{dT}\right) dT + \left(\frac{dp}{dZ}\right) dZ, \tag{1}$$

$$dv = \left(\frac{dv}{dT}\right) dT + \left(\frac{dv}{dZ}\right) dZ, \tag{2}$$

$$dU = \left(\frac{dU}{dT}\right) dT + \left(\frac{dU}{dZ}\right) dZ. \tag{3}$$

On sait d'ailleurs que

$$dQ = T\,dZ. \tag{4}$$

D'un autre côté,

$$dU = dQ - Ap\,dv,$$

ou, à cause des équations (2) et (4),

$$dU = -Ap\left(\frac{dv}{dT}\right) dT + \left[T - Ap\left(\frac{dv}{dZ}\right)\right] dZ. \tag{5}$$

Exprimons que le second membre de l'équation (5) est une différentielle exacte, et il vient

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)\left(\frac{dv}{dZ}\right) - \left(\frac{dp}{dZ}\right)\left(\frac{dv}{dT}\right) = \frac{1}{A}, \tag{6}$$

relation générale entre les dérivées partielles de la pression et du volume spécifique, quand le corps change d'état suivant une ligne isotherme ou une ligne adiabatique.

On peut tirer de l'équation (6) d'autres formules. On a, à cause de l'équation (4),

$$c\,dT = T\,dZ,$$

où il faut mettre pour dZ sa valeur déduite de l'équation (1) en y faisant $dp = 0$. Il suit de là

$$c = -T\frac{\left(\frac{dp}{dT}\right)}{\left(\frac{dp}{dZ}\right)}. \tag{7}$$

On a, de même,

$$c_1\,dT = T\,dZ,$$

où il faut mettre pour dZ sa valeur déduite de l'équation (2) en y faisant $dv = 0$, d'où résulte

$$c_1 = -T\frac{\left(\frac{dv}{dT}\right)}{\left(\frac{dv}{dZ}\right)}. \tag{8}$$

Tirons des équations (7) et (8) les valeurs de $\left(\frac{dp}{dZ}\right)$ et de $\left(\frac{dv}{dZ}\right)$ et portons-les dans l'équation (6). Nous aurons

$$\left(\frac{dp}{dT}\right)\left(\frac{dv}{dT}\right) = -\frac{1}{AT}\frac{cc_1}{c-c_1}, \tag{9}$$

relation générale entre les dérivées de la pression et du volume, par rapport à la température, pour un corps quelconque changeant d'état suivant une ligne adiabatique.

Maintenant, tirons des équations (7) et (8) les valeurs de $\left(\frac{dp}{dT}\right)$ et de $\left(\frac{dv}{dT}\right)$ et portons-les dans l'équation (6). Nous aurons

$$\left(\frac{dp}{dZ}\right)\left(\frac{dv}{dZ}\right) = -\frac{T}{A(c-c_1)}, \tag{10}$$

relation générale entre les dérivées de la pression et du volume, par rapport à la fonction adiabatique, pour tout corps changeant d'état suivant une ligne isotherme.

Supposons, comme cas particulier, que le corps soit formé par un mélange d'une vapeur saturée et de son liquide. Alors $\left(\frac{dp}{dZ}\right) = 0$, et la formule générale (6) se réduit à

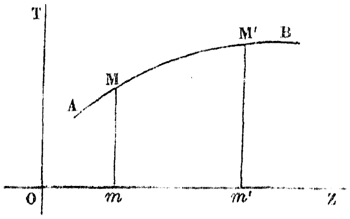
$$\left(\frac{dp}{dT}\right)\left(\frac{dv}{dZ}\right) = \frac{1}{A}. \tag{11}$$

Dans ce cas, p étant une simple fonction supposée connue de T, cette équation s'intègre immédiatement, et donne la relation générale entre v, T et Z.

Voyons maintenant ce que devient le mode ordinaire de représentation graphique de l'état physique d'un corps, lorsqu'on prend T et Z comme variables indépendantes.

Soient (*fig.* 1) OT et OZ deux axes rectangulaires.

Fig. 1.



Supposons qu'à l'instant considéré le corps soit à l'état M; cela signifie qu'à cet instant l'ordonnée $Mm = T$ et l'abscisse $Om = Z$.

Dans ce système, les lignes isothermes sont des droites parallèles à l'axe OZ et les lignes adiabatiques des droites parallèles à l'axe OT.

Soit AB le lieu des états successifs du corps, le sens étant de A vers B. Supposons que, à un certain moment, il soit à l'état M et que, plus tard, il soit parvenu à l'état M', dont les coordonnées sont $M'm'$ et Om'.

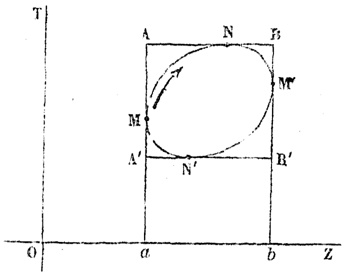
Comme on a, à chaque instant, $dQ = T\,dZ$, on voit que l'aire $m\mathrm{MM}'m'm = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{M}'} T\,dZ$ représente la quantité de chaleur reçue du dehors par le corps en passant du premier état au second. Cette aire ou cette quantité de chaleur doit être prise positivement si Z va en croissant de l'état M à l'état M' et négativement dans le cas contraire.

On peut tirer de là une démonstration très-simple de ce théorème que, pour tout cycle fermé réversible, le coefficient économique est plus petit que celui du cycle de Carnot correspondant aux mêmes limites extrêmes de températures.

Soit (*fig.* 2) MNM'N'M ce cycle, et supposons son sens indiqué par la flèche. Circonscrivons à ce cycle deux lignes isothermes AB (T_1) et A'B' (T_0), et aussi deux lignes adiabatiques BB'b (Z_1) et AA'a (Z_0). Soient M, N, M' et N' les quatre points de contact.

Pendant le parcours MNM′, le corps reçoit du dehors une certaine

Fig. 2.



quantité de chaleur Q_1, et l'on a

$$Q_1 = \text{aire } a\text{MNM}'ba.$$

Pendant le parcours M′N′M, le corps émet au dehors une quantité de chaleur Q_0 et

$$Q_0 = \text{aire } a\text{MN}'\text{M}'ba.$$

La quantité de chaleur disparue ou convertie en travail pendant le parcours du cycle total est

$$Q_1 - Q_0 = \text{aire MNM}'\text{N}'\text{M};$$

d'où ce résultat que, dans ce mode de représentation graphique, l'aire du cycle est égale à la quantité de chaleur convertie en travail.

Soit maintenant ε le coefficient économique. On a

$$\varepsilon = \frac{Q_1 - Q_0}{Q_1} = \frac{\text{MNM}'\text{N}'\text{M}}{a\text{MNM}'ba}.$$

Ajoutons aux deux termes de cette fraction

$$\text{MANM} + \text{NBM}'\text{N}.$$

Comme $\varepsilon < 1$, il en résulte

$$\varepsilon < \frac{\text{N}'\text{MABM}'\text{N}'}{a\text{AB}ba}.$$

Ajoutons au numérateur seul de cette dernière fraction

$$\text{MA}'\text{N}'\text{M} + \text{N}'\text{M}'\text{B}'\text{N}'.$$

On aura, *à fortiori*,

$$\varepsilon < \frac{A'ABB'A'}{aABba},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\varepsilon < \frac{T_1 - T_0}{T_1}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Soit T_e le travail extérieur. On a

$$dT_e = p\,dv, \tag{12}$$

formule identique à l'équation (4), lorsqu'on suppose, dans cette dernière, la quantité de chaleur Q remplacée par T_e; la température absolue T remplacée par la pression p et, enfin, la fonction adiabatique Z remplacée par le volume v.

Concevons donc un cycle fermé quelconque. Soit ρ le rapport du travail extérieur résultant effectué pendant le cycle au travail extérieur, moteur effectué par le corps pendant ce même cycle. Soient p_0 la pression *minima* et p_1 la pression *maxima* du corps pendant le parcours du cycle. En employant le mode de démonstration qui vient d'être appliqué, on verra que

$$\rho < \frac{p_1 - p_0}{p_1}.$$

Ainsi, entre deux pressions limites données p_0 et p_1, le cycle pour lequel ρ est maximum se compose de deux droites (p_0 et p_1), représentant des lignes de pression constante, et de deux droites perpendiculaires (v_0 et v_1), représentant des lignes de volume constant.