ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GUÉRARD DES LAURIERS

Sur les systèmes différentiels du second ordre qui admettent un groupe continu fini de transformations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 57 (1940), p. 201-315

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1940_3_57__201_0>

SUR LES

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DU SECOND ORDRE

QUI ADMETTENT

UN GROUPE CONTINU FINI DE TRANSFORMATIONS

PAR M. GUÉRARD DES LAURIERS.

Introduction.

La détermination des systèmes différentiels du second ordre, dont les courbes solutions admettent un groupe continu fini de transformations, a fait l'objet des recherches de Lie dans le cas d'une seule équation $y'' = f(xyy')$. Le groupe admis par une telle équation peut comporter : un, deux, trois ou huit paramètres. On se propose ici d'examiner comment ce résultat s'étend à un système de plusieurs équations : on suppose les dérivées secondes x''_i fonctions holomorphes des dérivées premières x'_i au voisinage de $x'_i = 0$. La détermination des espaces, dont les géodésiques admettent un groupe, est un cas particulier de la question proposée.

La méthode suivie par Lie constitue une application de la théorie des groupes : tous les groupes sur deux variables ayant été déterminés, on examine, relativement à chacun d'eux, s'il existe une équation qui l'admette. La considération des êtres géométriques associés à l'équation sert, d'une part à éliminer à priori certains cas inutiles, d'autre part à exprimer sous une forme indépendante du choix des variables certains des résultats; et notamment, le cas dans lequel, l'équation étant réductible à $y'' = 0$, ses solutions sont les transformées des droites du plan dont l'ensemble admet le groupe projectif général. Nous nous plaçons ici à un point de vue plus analytique et utilisons, pour l'un et l'autre objet, des symboles covariants attachés au système donné.

D'autre part la détermination complète du groupe devient rapidement, lorsque n augmente, un problème trop compliqué pour que la méthode de Lie permette d'obtenir le moindre résultat. Il est nécessaire de tenir compte, si possible au stade de ses équations de définition, des conditions limitatives imposées au groupe du fait qu'il est admis par un système. En retour, les conditions de structure permettront souvent d'obtenir beaucoup plus rapidement un résultat implicitement contenu dans les équations de définition. On ne peut donc, en rigueur de termes, parler ici de méthode; sinon d'une méthode de balancement qui envisage, tantôt les conditions propres au groupe comme tel et qui seraient le fait d'un groupe quelconque, et tantôt celles qui résultent des équations de définition à partir du système différentiel proposé. Il est d'ailleurs impossible de préciser à priori le rythme de ce balancement; et ce qui se trouve ici réussir au moins partiellement, c'est plutôt l'absence de méthode jointe à la systématisation d'un point de vue : mettre en relation des éléments covariants ou invariants attachés au système avec des éléments de même nature caractérisant le groupe. En ce qui concerne ces derniers, ce sont les racines caractéristiques de la partie linéaire des transformations du premier ordre et le nombre de ces mêmes transformations qui s'introduisent le plus naturellement. La mise en œuvre des constantes de structure elles-mêmes n'est malheureusement pas conforme à la nature de la question : à une même structure peuvent en effet correspondre certains groupes admis par un système différentiel et d'autres qui ne le sont pas.

Indiquons rapidement la marche de ce travail :

Le Chapitre I précise le mode de représentation du système différentiel proposé : il n'est pas toujours indifférent de faire choix d'un paramètre distinct des variables (système S) ou de prendre l'une d'entre elles comme paramètre (système L). Le cas dans lequel ces deux modes de représentation coïncident est celui des systèmes G qui conviennent aux géodésiques.

Le Chapitre I excepté, le présent travail sera limité aux systèmes G. Nous indiquerons ultérieurement comment les résultats obtenus s'étendent aux systèmes S et L; il suffit, en ce qui concerne la covariance (Chap. II), de conventions judicieuses, mais la généralisation des chapitres suivants exige des calculs considérables.

Le Chapitre II définit des éléments covariants attachés au système différentiel; indique les conditions nécessaires et suffisantes pour que celui-ci soit réductible à $x_i'' = 0$; définit, à l'intérieur de certains systèmes covariants, des systèmes covariants plus restreints qui peuvent être nuls sans que les premiers le soient.

Le Chapitre III donne les équations de définition du groupe; détermine les systèmes qui admettent un groupe dans lequel figure au moins une transformation du second ordre; étudie, l'existence de transformations du second ordre étant exclue, la limitation du nombre des transformations du premier ordre; précise enfin la distribution de leur ensemble (désigné par γ) : on ne peut en effet choisir arbitrairement celles qui doivent être envisagées comme indépendantes.

Le Chapitre IV étudie le comportement réciproque des transformations d'ordre 0 et 1. Si l'on désigne en effet par Y une transformation d'ordre 1 et par X_i les transformations d'ordre 0, on a

$$Y = \sum_i \theta_i X_i, \tag{1}$$

les θ_i étant d'ordre 1. Si l'on réduit les transformations à leurs termes de l'ordre le moins élevé, l'égalité (1) vaut, en y réduisant les θ_i à leur partie linéaire. En particulier, à une égalité

$$Y = \theta X \tag{2}$$

correspond, pour les termes de l'ordre le moins élevé, une égalité

$$\overline{Y} = \overline{\theta}\,\overline{X}. \tag{2'}$$

Les égalités (2′) résultent immédiatement de la distribution des transformations de γ supposées connues. Mais il est fort utile de savoir dans quels cas une égalité (2′) permet de conclure à une égalité (2). En d'autres termes, les deux transformations X et Y forment un couple, c'est-à-dire sont proportionnelles : en résulte-t-il que X et Y forment elles-mêmes un couple ? En d'autres termes encore, le fait que les deux transformations X, Y forment un couple au second ordre près [ce qu'exprime l'égalité (2′)] entraîne-t-il que ces mêmes transformations forment un vrai couple conformément à l'égalité (2). La disparition des transformations du second ordre inclinerait à le penser, mais la réponse n'est affirmative que sous la condition $X(\theta) \neq 0$.

On considère alors l'ensemble de tous les couples existant dans le groupe et on les réduit simultanément à une forme canonique. On trouve en général un sous-groupe du groupe linéaire.

Enfin on peut examiner l'influence de l'existence des couples sur la détermination du groupe : le problème se trouve ramené aux seules variables qui n'interviennent pas dans les couples. Mais nous laisserons de côté ce point qui a d'ailleurs un intérêt surtout théorique.

Le Chapitre V considère les seuls termes du premier ordre des transformations de γ en regard des éléments covariants attachés au système. Une relation très simple entre les racines caractéristiques de la partie linéaire de toute transformation et les symboles R^i_{jkl} (qui jouent un rôle analogue à celui des symboles de Riemann) permet ensuite de déterminer complètement les termes du premier ordre de γ dans les trois cas : G. M. [groupe maximum : $(n-1)(n-2)+3$ paramètres]; G. S. [groupe sous-maximum : $(n-1)(n-2)+2$ paramètres] (n quelconque); $n=3$.

Le Chapitre VI comporte la détermination du groupe et corrélativement du système qui l'admet dans les trois mêmes cas. On peut soit passer par l'intermédiaire des formules de structure, soit utiliser la théorie des couples.

Des calculs auxiliaires considérables n'ont pu être insérés dans le texte ; on s'est borné à développer les cas les plus simples, susceptibles d'illustrer, sans trop de longueur, les considérations générales placées au début de chaque chapitre.

La numérotation des équations est indépendante pour chaque chapitre; et, sauf mention contraire, un renvoi doit se prendre dans le chapitre où il se trouve.

La numérotation des résultats et celle des définitions concernent l'ensemble du travail.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DE DÉFINITION DU SYSTÈME DIFFÉRENTIEL. CHOIX DU PARAMÈTRE.

Les courbes solution d'un système différentiel qui admet un groupe demeurent invariantes dans leur ensemble par une substitution quelconque du groupe. Si ces courbes sont représentées paramétriquement, le paramètre attaché au système sera en général modifié au cours de la transformation, c'est-à-dire que les points des différentes courbes solution qui correspondent à une même valeur du paramètre ne sont pas en général transformés les uns dans les autres par le groupe.

La question de savoir si un système différentiel admet un groupe requiert donc la détermination des systèmes qui sont équivalents au système proposé, à un changement du paramètre près.

Soit donc

$$(\mathrm{S})\quad x''=f^i+f^i_r x'_r+\ldots+f^i_{r_1\ldots r_p}x'_{r_1}\ldots x'_{r_p}+\ldots\equiv \mathrm{S}_i \qquad (i=1,2,\ldots;\ n\geqq 2)$$

un système différentiel du second ordre.

Les f sont supposées fonctions holomorphes de leurs arguments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans le domaine où on les envisage.

Les x sont fonctions d'un paramètre t

$$x'_i=\frac{dx_i}{dt},\qquad x''_i=\frac{d^2x_i}{dt^2}.$$

Le développement (S) suppose que les S_i sont des fonctions holomorphes des $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)$ dans le domaine $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0=0$; nous nous plaçons dans cette hypothèse.

Nous nous proposons d'examiner la relation entre le paramètre t du système (S) et le paramètre θ d'un système Σ équivalent au système (S)

$$\text{(S)} \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = S_i\left(x \,\middle|\, \frac{dx}{dt}\right),$$

$$(\Sigma) \qquad \frac{d^2 x_i}{d\theta^2} = \Sigma_i\left(x \,\middle|\, \frac{dx}{d\theta}\right).$$

Formons

$$(1) \qquad \frac{d^2 x_i}{dx_n^2} = \frac{1}{\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^3}\left(\frac{dx_n}{dt}\frac{d^2 x_i}{dt^2} - \frac{dx_i}{dt}\frac{d^2 x_n}{dt^2}\right) = \frac{S_i \frac{dx_n}{dt} - S_n \frac{dx_i}{dt}}{\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^3} = \frac{\Sigma_i \frac{dx_n}{d\theta} - \Sigma_n \frac{dx_i}{d\theta}}{\left(\frac{dx_n}{d\theta}\right)^3},$$

d'où

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \frac{S_i \frac{dx_n}{d\theta} - S_n \frac{dx_i}{d\theta}}{\Sigma_i \frac{dx_n}{d\theta} - \Sigma_n \frac{dx_i}{d\theta}} \\ &= \frac{\left[\left(f^i_{r_1\ldots r_p}\frac{dx_{r_1}}{d\theta}\cdots\frac{dx_{r_p}}{d\theta}\right)\frac{dx_n}{d\theta} - \left(f^n_{r_1\ldots r_p}\frac{dx_{r_1}}{d\theta}\cdots\frac{dx_{r_p}}{d\theta}\right)\frac{dx_i}{d\theta}\right]\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^p}{\left[\left(\varphi^i_{r_1\ldots r_p}\frac{dx_{r_1}}{d\theta}\cdots\frac{dx_{r_p}}{d\theta}\right)\frac{dx_n}{d\theta} - \left(\varphi^n_{r_1\ldots r_p}\frac{dx_{r_1}}{d\theta}\cdots\frac{dx_{r_p}}{d\theta}\right)\frac{dx_i}{d\theta}\right]} \\ &[p = 0, 1, \ldots, \infty;\ r_k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, (n-1)]. \end{aligned} \right.$$

On supprime, comme il est d'usage, les signes de sommation inutiles.

On peut, de la relation (2) (ou de celles qui s'en déduisent en modifiant la valeur de i si $n \geqq 3$), tirer sans intégration la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$, à condition que $\frac{d\theta}{dt}$ n'en disparaisse pas. Or, pour que $\frac{d\theta}{dt}$ disparaisse, il faut

$$\left[f^i_{r_1\ldots r_p}\frac{dx_{r_1}}{d\theta}\cdots\frac{dx_{r_p}}{d\theta}\right]\frac{dx_n}{d\theta} - \left[f^n_{r_1\ldots r_p}\frac{dx_{r_1}}{d\theta}\cdots\frac{dx_{r_p}}{d\theta}\right]\frac{dx_i}{d\theta} = 0 \qquad (p = 0, 1, 3, \ldots).$$

Les $\frac{dx_i}{d\theta}$ ne pouvant être liés par aucune relation indépendante des $\frac{d^2x_i}{d\theta^2}$, on en conclut

$$(3)\quad f^i = 0, \qquad f^i_{r_1\ldots r_p} = \varepsilon^i_{r_1}\rho_{r_2\ldots r_p} + \varepsilon^i_{r_2}\rho_{r_1 r_3\ldots r_p} + \ldots + \varepsilon^i_{r_p}\rho_{r_1\ldots r_{p-1}} \quad (p \neq 2).$$

Alors $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ disparaît des relations (2) qui se réduisent à

$$(4)\qquad f^i_{jk} - \varphi^i_{jk} = \varepsilon^i_j\omega_k + \varepsilon^i_k\omega_j.$$

P$_1$. *Deux paramètres t et* θ, *qui correspondent à deux représentations différentes d'un même système* (S), *sont liés par une relation du type*

$$(5)\qquad \frac{d\theta}{dt} = \mathrm{H}\left(x \,\middle|\, \frac{dx}{d\theta}\right)$$

(*qui peut s'obtenir sans intégration*), *à moins que le système* (S) *ne se réduise à*

$$(\mathrm{G})\qquad x''_i = f^i_{rs}x'_r x'_s + x'_i \mathrm{R}.$$

R *étant une forme indépendante de i*

$$\mathrm{R} = \rho + \rho_r x'_r + \rho_{rs}x'_r x'_s + \ldots,$$

En particulier, si l'on n'a pas $f^i_j = \varepsilon^i_j\rho$ la fonction H est une fonction holomorphe de ses arguments pour des valeurs de ceux-ci qui rendent non nulle l'une des expressions

$$\left[\left(f^i_r\frac{dx_r}{d\theta}\right)\frac{dx_n}{d\theta} - \left(f^n_r\frac{dx_r}{d\theta}\right)\frac{dx_i}{d\theta}\right].$$

D$_1$. *Les systèmes* (G) *comportent comme cas particulier les équations des géodésiques d'un espace riemannien, d'où leur désignation. Les systèmes* (S) *sont ceux dans lesquels les variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *jouent un rôle symétrique en regard du paramètre t qui ne figure d'ailleurs pas explicitement dans les équations. Enfin nous désignerons sous le nom de système* (L) *un système du second ordre de la forme*

$$(\mathrm{L})\qquad \frac{d^2x_i}{dx_n^2} = f^i + f^i_r\frac{dx_r}{dx_n} + \ldots + f^i_{r_1\ldots r_p}\frac{dx_{r_1}}{dx_n}\cdots\frac{dx_{r_p}}{dx_n} + \ldots \equiv \mathrm{L}_i;$$

les f sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$; les indices i; $r_1, \ldots, r_p$ prennent les valeurs $1, 2, \ldots, (n-1)$.

C'est en effet sous cette forme que *Lie* les a considérés pour déterminer les groupes qu'ils peuvent admettre.

Retenons donc que si un système (S) n'est pas réductible à un système (G), on peut obtenir tout système équivalent à (S) en posant

$$\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{H}\left(x \,\middle|\, \frac{dx}{d\theta}\right), \tag{5}$$

d'où l'on déduit successivement

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\theta}{dt}\left[\sum_s \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_s}\frac{dx_s}{d\theta} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \frac{dx_s}{d\theta}}\frac{d^2 x_s}{d\theta^2}\right]$$

et, en substituant dans (S),

$$\begin{aligned} (6)\qquad & \frac{d^2 x_i}{d\theta^2} + \frac{dx_i}{d\theta}\left[\frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial x_r}\frac{dx_r}{d\theta} + \frac{\partial \log \mathrm{H}}{\partial \frac{dx_r}{d\theta}}\frac{d^2 x_r}{d\theta^2}\right] \\ & = \frac{1}{\mathrm{H}^2} f^i + \frac{1}{\mathrm{H}} f^i_r \frac{dx_r}{d\theta} + \ldots + \mathrm{H}^{p-2} f^i_{r_1 \ldots r_p} \frac{dx_{r_1}}{d\theta}\frac{dx_{r_2}}{d\theta}\cdots\frac{dx_{r_p}}{d\theta} + \ldots. \end{aligned}$$

Les équations (6), résolues en $\frac{d^2 x_k}{d\theta^2}$, et dans lesquelles on aura remplacé H par sa valeur, donneront un système Σ équivalent à (S), mais écrit avec le paramètre θ.

En ce qui concerne les systèmes G, il est aisé de trouver directement des conditions analogues. Soient

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f^i_{rs}\frac{dx_r}{dt}\frac{dx_s}{dt} + \frac{dx_i}{dt}\mathrm{R}, \tag{S}$$

$$\frac{d^2 x_i}{d\theta^2} = \varphi^i_{rs}\frac{dx_r}{d\theta}\frac{dx_s}{d\theta} + \frac{dx_i}{d\theta}\rho \tag{Σ}$$

deux formes équivalentes du même système. On obtient immédiatement, en calculant $\frac{d^2 x_i}{d\theta^2}$ à partir de la première forme,

$$\frac{\frac{d^2\theta}{dt^2}}{\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} + \rho - \frac{\mathrm{R}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{(f^i_{rs} - \varphi^i_{rs})\frac{dx_r}{d\theta}\frac{dx_s}{d\theta}}{\frac{dx_i}{d\theta}}.$$

Et comme il ne peut exister aucune relation entre les $\frac{dx_i}{d\theta}$

$$(4)\qquad f^i_{jk} - \varphi^i_{ik} = \varepsilon^i_j \omega_k + \varepsilon^i_k \omega_j, \qquad R = \Sigma a_{r_1 \ldots r_p} \frac{dx_{r_1}}{dt} \cdots \frac{dx_{r_p}}{dt},$$

$$(7)\qquad \frac{d}{dt} \log \frac{d\theta}{dt} + \rho \frac{d\theta}{dt} = R + 2\omega_s \frac{dx_s}{dt}, \qquad \rho = \Sigma \alpha_{n_1 \ldots r_p} \frac{dx_{r_1}}{d\theta} \cdots \frac{dx_{r_p}}{d\theta}.$$

P$_2$. *Les conditions nécessaires et suffisantes, pour que les deux formes envisagées pour le système* (G), *l'une* (S) *relative au paramètre* t, *l'autre* (Σ) *relative au paramètre* θ *soient équivalentes, sont*

$$f^i_{jk} - \varphi^i_{jk} = \varepsilon^i_j \omega_k + \varepsilon^i_k \omega_j.$$

Ces conditions montrent à nouveau que la réductibilité d'un système (S) à un système (G) constitue une propriété indépendante du choix du paramètre.

Les quantités ρ et ω_s sont des fonctions arbitraires des x : on peut, en les modifiant, obtenir tous les systèmes (Σ) équivalents au système (S). Pour un choix déterminé des ρ, ω_s, l'équation (7) permet de passer effectivement de la forme (S) à la forme (Σ) : ω_s, a, α sont en effet, le long d'une courbe solution, des fonctions de t, et (7) constitue une équation différentielle. Elle établit, sur chaque courbe solution, la loi de correspondance entre les deux paramètres, mais cette loi varie en général d'une courbe à l'autre et c'est pourquoi *il est impossible de l'obtenir sans intégration*. On peut d'ailleurs lever l'indétermination de ρ, ω_s par les conditions

$$(8)\qquad \begin{cases} \rho = 0, & \sum_i \varphi^i_{ik} = \sum_i f^i_{ik} + (n+1)\omega_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \\ \theta = \int dt\, e^{\int f(t)\,dt} & \text{avec } f(t) = R + 2\omega_s \frac{dx_s}{dt}. \end{cases}$$

Il correspond une fonction $f(t)$ à chaque choix des ω. Dans le cas particulier où Σ représente les géodésiques d'un espace à n dimensions, il existe un choix des ω tel que θ soit, pour chaque géodésique, une fonction linéaire de l'arc.

Enfin si deux paramètres t et θ répondent l'un et l'autre aux deux conditions (8), on a $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$. Le paramètre d'un système assujetti aux conditions (8) est déterminé à une substitution linéaire près, ce qui souligne le caractère intrinsèque de celles-ci.

P$_3$. *Notons qu'étant donné un système* (G) *on peut faire apparaître ou disparaître de ses équations telle forme* R *donnée arbitrairement :* il suffit d'un choix convenable du paramètre.

Les systèmes (G) se présentent donc dans l'étude de l'équivalence des systèmes (S) entre eux. Nous allons les rencontrer à nouveau à propos de l'équivalence des systèmes (S) et des systèmes (L). Les solutions d'un système (S) dépendent de $(2n-1)$ constantes arbitraires; celles d'un système (L), de $(2n-2)$ seulement. Un système (S) n'est donc pas en général équivalent à un système (L), mais il est aisé de préciser à quelles conditions il doit satisfaire pour jouir de cette propriété. Les valeurs des $\frac{d^2x_i}{dx_n^2}$ calculées par les formules (1) à partir du système (S) proposé doivent dépendre exclusivement des rapports $\frac{dx_i}{dx_n}$. Les expressions

$$\text{(S)} \qquad S_i\frac{dx_n}{dt}-S_n\frac{dx_i}{dt}$$

doivent donc être des fonctions homogènes et du troisième degré en $\frac{dx}{dt}$.

Réciproquement d'ailleurs, si ces conditions sont satisfaites, le système (S) est bien équivalent à un système (L). Il en résulte que, étant donné un système (L), on peut toujours, d'une infinité de manières, trouver un système (S) qui lui soit équivalent, au moins si l'on n'impose aucune restriction à la nature des coefficients de celui-ci. Il suffit, dans les équations

$$\text{(8)} \qquad \frac{S_i\dfrac{dx_n}{dt}-S_n\dfrac{dx_i}{dt}}{\left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)^3}=L_i\left(x\,\middle|\,\frac{dx_i}{dx_n}\right),$$

de prendre pour $\frac{d^2x_n}{dt^2}$ un développement arbitraire en $\frac{dx_i}{dt}$ et de calculer les autres dérivées secondes. Mais si l'on suppose, comme nous l'avons fait, que les S_i sont des fonctions holomorphes des $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)$ dans le domaine de $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)_0 = 0$, il n'est plus vrai qu'il existe un système (S) équivalent à un système (L) choisi arbitrairement. Dans les conditions de régularité précisées :

$\mathfrak{P}_4$. *Un système* (S) *et un système* (L) *sont équivalents si et seulement si ils sont équivalents à un système* (G). Il est aisé de le voir sur les équations (8) :

a. soit en partant des premiers membres [*système* (S)].

Comme ce sont des fonctions homogènes du troisième degré holomorphes dans le voisinage des valeurs o, ils se réduisent à des polynomes du troisième degré. Deux groupes homogènes, d'un même degré différent de deux en $\left(\frac{dx_i}{dt}\right)$, et appartenant l'un à S_i l'autre à S_n satisfont à

$$T_i \frac{dx_n}{dt} - T_n \frac{dx_i}{dt} = 0,$$

d'où l'on déduit immédiatement le résultat.

b. soit en partant des seconds membres [*système* (L)].

Les L_i deviennent, si l'on y remplace dx_i par $\frac{dx_i}{dt}$ des fonctions homogènes de degré o en $\frac{dx_i}{dt}$. Comme ils doivent être holomorphes après multiplication par $\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^3$, ils ne peuvent contenir que des termes du troisième degré au plus en $\frac{dx_i}{dx_n}$. Par suite

$$L_i = \sum_{p=0}^{3} f^i_{r_1 \ldots r_p} \frac{dx_{r_1}}{dx_n} \frac{dx_{r_2}}{dx_n} \cdots \frac{dx_{r_p}}{dx_n} \qquad [i;\ r_1, r_2, \ldots, r_p : 1, 2, \ldots, (n-1)].$$

Les équations (8) s'écrivent

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{dx_n}{dt}\dfrac{d^2x_i}{dt^2} - \dfrac{dx_i}{dt}\dfrac{d^2x_n}{dt^2} = f^i\left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)^3 + \left(f^i_r \dfrac{dx_r}{dt}\right)\left(\dfrac{dx_n}{dt}\right)^2 \\ \qquad + \left(f^i_{rs}\dfrac{dx_r}{dt}\dfrac{dx_s}{dt}\right)\dfrac{dx_n}{dt} + f^i_{uvw}\dfrac{dx_u}{dt}\dfrac{dx_v}{dt}\dfrac{dx_w}{dt} \\ \qquad (r, s, u, v, w \neq n). \end{cases}$$

Mais tous les termes du premier membre contenant en facteur soit $\frac{dx_i}{dt}$ soit $\frac{dx_n}{dt}$, il en est nécessairement de même de tous ceux du second. Et comme, dans le dernier groupe, u, v, w sont différents de n, l'un au moins de ces indices doit être égal à i; et la solution la plus générale des équations (9), linéaires en $\frac{d^2x_k}{dt^2}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, conduit au système (G)

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=f^i\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2+\left(f^i_r\frac{dx_r}{dt}\right)\frac{dx_n}{dt}+f^i_{rs}\frac{dx_r}{dt}\,\frac{dx_s}{dt}+\frac{dx_i}{dt}\mathrm{R},$$

$$\frac{d^2x_n}{dt^2}=-3f^i_{irs}\frac{dx_r}{dt}\,\frac{dx_s}{dt}+\frac{dx_n}{dt}\mathrm{R}.$$

On voit de plus que, si l'on écrit les systèmes équivalents (S) [ou (G)] et (L) sous la forme

$$\frac{d^2x_i}{dt^2}=f^i_{rs}\frac{dx_r}{dt}\,\frac{dx_s}{dt}+\frac{dx_i}{dt}\left[\sum_{p=0}^{\infty}\rho_{r_1\ldots r_p}\frac{dx_{r_1}}{dt}\cdots\frac{dx_r}{dt}\right],$$

$$\frac{d^2x_i}{dx_n^2}=\mathrm{F}^i+\mathrm{F}^i_n\frac{dx_r}{dx_n}+\mathrm{F}^i_{rs}\frac{dx_r}{dx_n}\,\frac{dx_s}{dx_n}+\frac{dx_i}{dx_n}\left(\mathrm{F}^i_{irs}\frac{dx_r}{dx_n}\,\frac{dx_s}{dx_n}\right),$$

on a, entre les coefficients des deux systèmes, les relations

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{F}^k=f^k_{nn}, & \mathrm{F}^k_{ij}=f^k_{ij}-\varepsilon^k_i f^n_{nj}-\varepsilon^k_j f^n_{ni} \\ \mathrm{F}^k_i=2f^k_{ni}-\varepsilon^k_i f^n_{nn}, & 3\mathrm{F}^k_{kij}=-f^n_{ij} \end{array}\right\}\qquad (i, j, k\neq n).$$

Les relations (10) montrent que F^k_{kij} est indépendant de k, comme il résultera d'ailleurs de considérations ultérieures concernant la covariance. On vérifie de plus, conformément à une précédente remarque, que la forme R n'intervient pas dans les relations (10).

Si un système (S) ne vérifie pas les conditions (S) (p. 208), il est équivalent non pas à un seul système (L), mais à ∞^1 systèmes (L). [Il pourrait d'ailleurs être considéré comme un système (L) particulier de l'espace à $(n+1)$ dimensions.] On pressent par là l'importance de la distinction des trois types de systèmes : (S), (L), (G), en ce qui concerne les groupes de transformations qu'ils peuvent admettre.

Désignons par L_λ les systèmes (L) (∞^1) auxquels équivaut un système (S). Désignons par Γ le groupe éventuellement admis par le système (S) et par γ_λ le groupe éventuellement admis par le système L_λ. Le groupe γ_λ ne fait pas nécessairement partie de Γ; il faudrait pour cela qu'une transformation quelconque de γ_λ changeât toute solution de (S) en une autre solution; on est bien assuré qu'il en est ainsi pour les solutions qui appartiennent à L_λ, mais non pas pour celles de $L_{\lambda'}$, quel que soit λ'. Considérons inversement le groupe Γ et un γ_λ déterminé. Désignons par γ l'ensemble des transformations de Γ qui lui sont communes avec γ_λ. Du fait qu'elle appartient à Γ, une transformation de γ est indépendante de λ; en sorte que l'ensemble γ demeure le même, quel que soit le γ_λ qui a servi à le déterminer. L'ensemble γ forme d'ailleurs un groupe puisque le produit de deux quelconques de ses transformations appartient encore simultanément à Γ et à γ_λ.

Mais l'existence de Γ n'entraîne pas celle de γ_λ ni inversement. D'autre part, γ peut s'identifier à chacun des γ_λ eux-mêmes semblables entre eux, Γ étant plus ample que γ. On peut montrer effectivement que le groupe maximum admis par les systèmes (S) est plus ample que le groupe projectif général qui est maximum pour les systèmes (L).

Terminons par un exemple ces généralités relatives au choix du paramètre. Considérons le système

$$(s) \qquad \frac{d^2x_i}{dt^2} = x_i \qquad (x_i = A_i e^t + B_i e^{-t}).$$

Entres trois quelconques des x, il existe une relation linéaire et homogène; on achèvera de déterminer les courbes solution par leurs projections sur l'un des plans de coordonnées que nous appellerons xOy. On trouve un système de coniques qui dépendent de trois paramètres

$$(C) \qquad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 4(AC - B^2) = 0.$$

Passons du système s à un système l

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{d^2x_i}{dx_n^2}\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 + \frac{dx_i}{dx_n}\frac{d^2x_n}{dt^2}.$$

La valeur de

$$\left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 = \Phi\left(x_1, \ldots, x_n; \frac{dx_1}{dx_n}, \ldots, \frac{dx_{n-1}}{dx_n}\right)$$

doit être compatible avec $\frac{d^2 x_n}{dt^2} = x_n$. On obtient

$$\frac{d^2 x_i}{dx_n^2} = \frac{1}{\Phi}\left(x_i - x_n \frac{dx_i}{dx_n}\right)$$

avec

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_n} + \sum \frac{\partial\Phi}{\partial x_r}\frac{dx_r}{dx_n} + \sum \frac{\partial\Phi}{\partial \frac{dx_r}{dx_n}} \frac{x_r - x_n \frac{dx_r}{dx_n}}{\Phi} = 2x_n.$$

On peut prendre par exemple

$$\frac{d^2 x_i}{dx_n^2} = \frac{x_i}{x_n^2 + \lambda} - \frac{x_n}{x_n^2+\lambda}\frac{dx_i}{dx_n}.$$

S'il existe au moins deux valeurs de i, on retrouve les relations linéaires $\alpha x_i + \beta x_k + \gamma x_n = 0$, et le système l comprend en outre l'unique équation

$$(l_\lambda) \qquad y'' = \frac{y - xy'}{x^2+\lambda},$$

$$(C_0) \qquad \alpha x^2 - xy + \beta = 0 \qquad (\lambda = 0),$$

$$(C_\lambda) \qquad \left(\frac{y - \alpha x}{\beta}\right)^2 - x^2 = \lambda \qquad (\lambda \neq 0).$$

Toutes les coniques (C_λ) qui correspondent à une même valeur de λ sont tangentes aux deux droites : $x = \pm\sqrt{-\lambda}$. Une famille (C_λ) déterminée ne coïncide donc pas avec la famille C. Il y a seulement équivalence entre C et l'ensemble des (C_λ), c'est-à-dire entre s et l'ensemble des (l_λ).

La recherche des groupes correspondant aux systèmes l est simplifiée par la considération des multiplicités solutions que les changements de variables respectifs

$$\frac{x_i}{x_n} = u_i \quad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)]; \qquad \frac{1}{x_n} = v \qquad \text{ou} \qquad \sqrt{1 + \frac{\lambda}{x_n^2}} = v$$

ramènent à des multiplicités linéaires qui admettent, dans l'espace u, v, le groupe projectif général. En effectuant le changement de variables inverse, on est conduit aux groupes

$$
(\gamma_0)\left\{\begin{array}{lll}
x_i x_k \sum_{s=1}^{n} x_s \dfrac{\partial f}{\partial x_s}, & x_n \dfrac{\partial f}{\partial x_i} & (i, k = 1, 2, \ldots, n); \\
x_k \left[-\dfrac{1}{x_n} \sum_{s=1}^{n} x_s \dfrac{\partial f}{\partial x_s} + 2 \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right], & x_j \dfrac{\partial f}{\partial x_k} & [j, k = 1, 2, \ldots, (n-1)]; \\
\dfrac{1}{x_n} \left[-\dfrac{1}{x_n} \sum_{s=1}^{n} x_s \dfrac{\partial f}{\partial x_s} + 2 \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right], & \dfrac{1}{x_n} \dfrac{\partial f}{\partial x_k} & [k = 1, 1, \ldots, (n-1)].
\end{array}\right.
$$

$$
(\gamma_\lambda)\left\{\begin{array}{l}
x_i \left[x_n \sum_{s=1}^{n} x_s \dfrac{\partial f}{\partial x_s} + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right], \qquad \sqrt{x_n^2 + \lambda}\, \dfrac{\partial f}{\partial x_i}; \\
x_i \sqrt{x_n^2 + \lambda} \sum_{s=1}^{n} x_s \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \\
x_j \dfrac{\partial f}{\partial x_k} \quad [j, k = 1, 2, \ldots, (n-1)]; \qquad x_n \dfrac{\partial f}{\partial x_l} \quad [l = 1, 2, \ldots, (n-1)].
\end{array}\right.
$$

Tous les groupes (γ_λ) sont semblables entre eux et semblables au groupe projectif général.

La recherche du groupe admis par le système s conduit aux résultats suivants

$$
(\mathrm{F})\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{T}_{ik} = x_i \dfrac{\partial f}{\partial x_k}, \qquad \mathrm{U}_{ik} = x_i x_k \sum_{s=1}^{n} x_s \dfrac{\partial f}{\partial x_s} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \\
\left[n^2 + \dfrac{n(n+1)}{2} \right] \text{paramètres}, \qquad (\mathrm{T}_{ik}, \mathrm{T}_{hl}) = \varepsilon_k^h \mathrm{T}_{il} - \varepsilon_l^i \mathrm{T}_{hk}, \\
(\mathrm{U}_{ik}, \mathrm{U}_{lh}) = 0, \qquad (\mathrm{T}_{ik}, \mathrm{U}_{hl}) = \varepsilon_k^h \mathrm{U}_{il} + \varepsilon_k^l \mathrm{U}_{ih}.
\end{array}\right.
$$

Le groupe γ, effectivement indépendant de λ, est

$$
(\gamma) \qquad x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} \qquad [i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, (n-1)].
$$

Nous remarquerons sur cet exemple que la similitude des groupes γ_λ n'entraîne pas que ces groupes fassent partie de (Γ); et qu'on ne peut pas même déduire du nombre des paramètres de (Γ) une limite supérieure du nombre des paramètres de γ_λ. Il faudrait ici que l'on eût

$$n(n+2) \leqq \frac{n(n+1)}{2} + n^2 \qquad (n \geqq 3).$$

Il importe donc, à chaque étape de la résolution du problème, de distinguer deux cas : celui des systèmes (S) et celui des systèmes (L). On est utilement guidé par la considération des systèmes (G) qui constituent comme un noyau commun aux deux cas. Pour ne point trop alourdir le présent travail, nous nous bornerons à développer ce qui concerne explicitement les systèmes (G). Avant d'aborder cette étude, nous rappellerons et étendrons quelques considérations de covariance.

CHAPITRE II.

ÉLÉMENTS COVARIANTS ATTACHÉS AU SYSTÈME DIFFÉRENTIEL.

Le fait d'admettre un groupe constitue pour un système différentiel une propriété invariante par toute substitution effectuée sur les variables. Les relations qui traduisent cette propriété, étant donc invariantes dans leur ensemble par une telle substitution, ne doivent faire intervenir que des éléments covariants attachés au système. Nous nous proposons de construire plusieurs ensembles covariants attachés au système différentiel donné : simple extension des procédés habituels du calcul différentiel absolu. Nous chercherons surtout à déterminer l'ensemble des conditions auxquelles se trouvent soumis certains systèmes covariants du fait que quelques-uns de leurs éléments sont assujettis à prendre des valeurs numériques fixes. Ceci revient, en fait, à mettre en évidence une covariance plus restreinte à l'intérieur de systèmes covariants déjà obtenus.

Le changement de variables

$$x_i = h_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

fait passer du système

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = f^i_{rs} \frac{dx_r}{dt} \frac{dx_s}{dt} + \frac{dx_i}{dt}\left(r + r_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} + \ldots\right) \qquad (r = f^i_i,\ r_\alpha = f^i_{i\alpha}, \ldots)$$

au système

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \varphi^i_{rs} \frac{dy_r}{dt}\frac{dy_s}{dt} + \frac{dy_i}{dt}\left(\rho + \rho_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} + \ldots\right) \qquad (\rho = \varphi^i_i,\ \rho_\alpha = \varphi^i_{i\alpha},\ \ldots).$$

Et l'on a

$$\begin{aligned}
\varphi^i_{\alpha_1\ldots\alpha_p} &= \frac{\partial y_i}{\partial x_\sigma} f^\sigma_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial y_{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x_{\alpha_p}}{\partial y_{\alpha_p}} \qquad (p \neq 2),\\
\varphi^i_{jk} &= \frac{\partial y_i}{\partial x_\sigma}\left[f^\sigma_{\alpha\beta}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j}\frac{\partial x_\beta}{\partial y_k} - \frac{\partial^2 x_\sigma}{\partial y_j \partial y_k}\right],\\
\varphi^i_{jk} &= \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_\sigma} f^\sigma_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right]\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j}\frac{\partial x_\beta}{\partial y_k}.
\end{aligned}$$

On voit donc que tous les f sont covariants à l'exception des f^i_{jk}.

D$_2$. Il est possible de *définir, à partir des f^i_{jk}, des symboles covariants jouant par rapport au système différentiel le même rôle que les symboles de seconde espèce de Riemann à l'égard d'un espace riemannien*

$$(1) \qquad R^i_{jkl} = \frac{\partial f^i_{jl}}{\partial x_k} - \frac{\partial f^i_{jk}}{\partial x_l} + \sum_{s=1}^{n} (f^i_{ls} f^s_{jk} - f^i_{ks} f^s_{jl}).$$

Il est facile de vérifier la covariance. D'autre part, R^i_{jkl} a les mêmes propriétés de symétrie que le tenseur riemannien, auquel d'ailleurs il se réduit pour ceux des systèmes G qui représentent les géodésiques d'un espace de Riemann (1).

On peut également, au moyen des symboles f^i_{jk} étendre au système différentiel la théorie de la dérivation covariante attachée d'ordinaire à une forme quadratique.

Le système que l'on obtient par dérivation d'un tenseur n'est pas en

(1) On sait que, dans la géométrie relativiste d'Eddington, la présence d'un champ électromagnétique est liée à la non-intégrabilité des longueurs comme la présence d'un champ de gravitation à la non-intégrabilité des directions. Les symboles R ici définis peuvent être associés à un espace pour lequel il n'y a pas intégrabilité des longueurs; les systèmes G constituent alors les équations des lignes d'univers d'un tel espace. Du point de vue des espaces à connexion projective développé par M. É. Cartan, on peut, à tout système G, associer d'une manière intrinsèque un espace à connexion projective *normale*, dont les géodésiques sont les courbes intégrales de G; tandis qu'il y a une infinité d'espaces à connexion affine admettant ces courbes pour géodésiques.

général un tenseur. Mais on vérifie aisément que, si ξ^i et η_i sont des tenseurs,

$$\xi^i/_k = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k} - f^i_{ks}\,\xi^s,$$

$$\eta_{i/k} = \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} + f^s_{ik}\,\eta_s$$

sont encore des tenseurs.

En général, $X^{a_1 a_2 \ldots a_m}_{b_1 b_2 \ldots b_n}$ étant un tenseur,

$$(2)\qquad X^{a_1 a_2 \ldots a_m}_{b_1 b_2 \ldots b_n}/_h = \frac{\partial X^{a_1 \ldots a_m}_{b_1 \ldots b_n}}{\partial x_h} - \sum_{iu} f^{a_i}_{hu}\, X^{a_1 \ldots \overset{a_i}{u} \ldots a_m}_{b_1 \ldots b_n} + \sum_{iu} f^u_{b_i h}\, X^{a_1 \ldots a_m}_{b_1 \ldots \underset{b_i}{u} \ldots b_n}$$

est encore un tenseur.

Nous appellerons dérivation covariante par rapport au système différentiel donné et nous désignerons par / l'opération exprimée par la formule (2). Nous désignerons, comme il est d'usage, par une virgule la dérivation ordinaire.

A la permutabilité de l'ordre des dérivations correspond dans le cas de la dérivation covariante

$$(3)\qquad X^{a_1 a_2 \ldots a_m}_{b_1 b_2 \ldots b_n}/_{hk} - X^{a_1 a_2 \ldots a_m}_{b_1 b_2 \ldots b_n}/_{kh} = \sum_{iu} R^{a_i}_{uhk}\, X^{a_1 \ldots \overset{a_i}{u} \ldots a_m}_{b_1 \ldots b_n} - \sum_{iu} R^u_{b_i hk}\, X^{a_1 \ldots a_m}_{b_1 \ldots \underset{b_i}{u} \ldots b_n}.$$

Le tenseur R^i_{jkl} est lui-même susceptible de dérivation covariante et les symboles R satisfont, comme il est facile de le vérifier, aux trois types de relations

$$(4)\qquad R^i_{jkl} + R^i_{jlk} = 0,$$

$$(5)\qquad R^i_{jkl} + R^i_{klj} + R^i_{ljk} = 0,$$

$$(6)\qquad R^i_{j\alpha\beta/\gamma} + R^i_{j\beta\gamma/\alpha} + R^i_{j\gamma\alpha/\beta} = 0.$$

La relation (6) se réduit à l'identité lorsque deux quelconques des trois indices $\alpha\beta\gamma$ sont égaux.

Pour que les symboles R^i_{jkl} soient des symboles de Riemann, il est nécessaire qu'il existe un covariant double symétrique a_{ik} dont les dérivées covariantes soient nulles. En écrivant

$$a_{ik/h} = 0,$$

on retrouve immédiatement

$$f^i_{jk} = -\left\{ \begin{matrix} j & k \\ & i \end{matrix} \right\}.$$

La condition est par conséquent suffisante.

Indiquons deux propriétés presque intuitives des systèmes covariants f et R.

P$_5$. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation*

$$(7) \qquad f^i_{a_1\ldots a_p} = 0 \qquad (p \neq 2;\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p \neq i;\ a_1,\ \ldots,\ a_p,\ i \text{ fixes})$$

soit invariante par tout changement de variables est que le système f soit de la forme

$$(\mathrm{C}) \qquad f^i_{a_1\ldots a_p} = \varepsilon^i_{a_1}\lambda_{a_2\ldots a_p} + \ldots + \varepsilon^i_{a_p}\lambda_{a_1\ldots a_{p-1}}, \qquad \varepsilon^i_j = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j, \\ 1, & \text{si } i = j. \end{cases}$$

$\lambda_{b_1\ldots b_{p-1}}$ *est un système covariant assujetti à la seule condition de symétrie par rapport à deux quelconques de ses indices.* On sait d'ailleurs que le système ε^i_j est lui-même un tenseur.

Nous noterons tout d'abord qu'une propriété tensorielle demeure inchangée si l'on remplace la substitution à laquelle elle est attachée par une substitution linéaire et si l'on suppose que le système covariant considéré est un système de constantes. On pourrait établir la propriété indiquée en utilisant une série de changements de variables convenablement choisis. Il est plus rapide de remarquer qu'à l'équation (7) doit correspondre un système covariant nul extrait du système $f^i_{a_1\ldots a_p}$. La dérivée covariante de ce système est elle-même nulle, et, comme on peut supposer que les f sont des constantes, on obtient

$$(7') \qquad -f^i_{rh} f^r_{a_1\ldots a_p} + \sum_{q,r} f^r_{a_q h} f^i_{a_1\ldots \underset{a_q}{\underset{|}{r}} \ldots a_p} = 0 \qquad (a_1,\ \ldots,\ a_p \neq i).$$

Supposons que parmi les indices $a_1 \ldots a_p$, α soient égaux à a, β égaux à b, $\ldots$, γ égaux à c.

La relation (7′) s'écrit

$$-f^i_{rh} f^r_{\underbrace{a\ldots a}_{\alpha}\underbrace{b\ldots b}_{\beta}\underbrace{c\ldots c}_{\gamma}} + \alpha f^r_{ah} f^i_{r\underbrace{a\ldots a}_{\alpha-1}\underbrace{b\ldots b}_{\beta}\underbrace{c\ldots c}_{\gamma}} + \ldots + \gamma f^r_{ch} f_{\underbrace{a\ldots a}_{\alpha}\underbrace{b\ldots b}_{\beta}\underbrace{c\ldots c}_{\gamma-1}} = 0.$$

Les quantités f^i_{jk} pouvant recevoir des valeurs arbitraires, le coefficient de chacune d'entre elles doit être nul; on en déduit, entre les f, des relations algébriques qui permettent de poser les formules (C). On vérifie ensuite la covariance du système λ.

P$_6$. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation*

$$(8) \qquad R^i_{jkl} = 0 \qquad (j,\ k,\ l \neq i;\ k \neq l;\ n \geqq 3;\ i, j, k, l \text{ fixes})$$

soit invariante par tout changement de variables est que le système R *soit de la forme*

$$(9) \qquad R^i_{jkl} = \varepsilon^i_j(\lambda_{kl} - \lambda_{lk}) + \varepsilon^i_k\lambda_{jl} - \varepsilon^i_l\lambda_{jk} \qquad (i, j, k, l = 1, 2, \ldots, n),$$

λ_{jh} *étant un système covariant, symétrique ou non.*

La dérivée covariante du système (réduit à des quantités constantes) qui correspond à l'équation (8) doit être nulle

$$-f^i_{hr}R^r_{jkl} + f^r_{hj}R^i_{rkl} + f^r_{hk}R^i_{jrl} + f^r_{hl}R^i_{jkr} = 0 \qquad (i \neq j,\ k,\ l).$$

En prenant par exemple $h = j$, puis $r \neq j,\ k,\ l$, le premier terme donne

$$R^r_{jkl} = 0 \qquad (r \neq j,\ k,\ l),$$

puis les deux suivants

$$R^i_{rkl} = 0, \qquad R^i_{jrl} = 0 \qquad (r \neq i).$$

En appliquant la dérivation covariante aux nouvelles équations obtenues, on voit que les seuls R^i_{jkl} non nuls ont un indice inférieur au moins égal à l'indice supérieur

$$(10) \qquad R^k_{jkl} = R^i_{jil} \qquad (i,\ k \neq jl),$$

$$(11) \qquad R^j_{jjl} = R^i_{ijl} + R^i_{jil} \qquad (k = j).$$

Les relations (10) permettent de définir pour $n \geqq 3$ les symboles

$$\lambda_{jl} = R^i_{jil} = R^k_{jkl} = \ldots.$$

Compte tenu de (11), on peut alors écrire

$$(9) \qquad R^i_{jkl} = \varepsilon^i_j(\lambda_{kl} - \lambda_{lk}) + \varepsilon^i_k\lambda_{jl} - \varepsilon^i_l\lambda_{jk}. \qquad (c)$$

Ces formules, établies pour $n \geqq 3$, valent encore pour $n = 2$, car on peut toujours poser dans ce cas

$$(12) \qquad \begin{cases} R^1_{112} = 2\lambda_{12} - \lambda_{21}, & R^1_{212} = \lambda_{22}, \\ R^2_{221} = 2\lambda_{21} - \lambda_{12}, & R^2_{121} = \lambda_{11}. \end{cases}$$

Les relations (9) n'imposent plus aucune condition aux R.

Supposons vérifiées les relations (9) ou (12). Désignons par Λ_{jk} et λ_{jk} respectivement le système défini algébriquement au moyen des R qui correspondent à un choix (y) et à un choix (x) des variables. En remplaçant les R par leur valeur dans la relation

$$R^i_{jkl} = r^\alpha_{\beta\gamma\delta} \frac{\partial y_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial x_\beta}{\partial y_j} \frac{\partial x_\gamma}{\partial y_k} \frac{\partial x_\delta}{\partial y_l},$$

on voit que le système λ_{jk} est covariant.

Il est en outre soumis, pour $n = 3$, à certaines conditions différentielles que l'on obtient en substituant, dans (6), les valeurs (9)

$$(13) \qquad \lambda_{ij/k} = \lambda_{ik/j} \qquad (n \geqq 3).$$

La restriction $n \geqq 3$ est essentielle : car pour $n = 2$, la relation (6) *se réduit par* (12) *à une identité.*

P$_7$. *Il résulte des relations* (9), *et de la covariance des systèmes R^i_{jkl}, λ_{jk}, que le système*

$$(a) \qquad R^i_{jkl} \qquad (jk \neq i),$$

$$(b) \qquad [R^i_{kil} - R^i_{kjl}] \qquad (i, j \neq k, l),$$

$$(c) \qquad [R^i_{iil} - 2R^k_{ikl} - R^k_{lki}] \qquad (i, k, l \neq)$$

est un système covariant.

Supposons en effet que les expressions (a), (b), (c) prises dans le système y soient exprimées en fonction des grandeurs du système x :

(V) $(a)_y$ ou $(b)_y$ ou $(c)_y =$ combinaison linéaire des R^i_{jkl} du système x.

Le premier membre est identiquement nul si et seulement si les $(R)_y$ ont la forme (9); mais cette forme étant covariante pour les R, il en résulte que les seconds membres sont identiquement nuls si et seulement si les $(R)_x$ ont la forme (9). Or, comme on le verra dans un instant, lorsque les R ont la forme (9) on peut choisir arbitrairement les λ_{jk}. Il est donc nécessaire que, lorsque les R ont la forme (9), les seconds membres de (V) qui doivent alors être nuls ne contiennent pas les λ. En d'autres termes, ils ne peuvent contenir que des combinaisons des R qui soient indépendantes des λ. Or les seules combinaisons de cette nature sont précisément (a), (b), (c).

P$_8$. *On peut établir qu'étant données des quantités* R^i_{jkl} *satisfaisant aux relations* (4), (5), (6), *il leur correspond effectivement un système* f^i_{jk}.

P$_9$. *Lorsque* $n \geqq 3$ *la condition nécessaire et suffisante pour que le système* f^i_{jk} *soit réductible par un changement de variables à la forme* $f^i_{jk} = \varepsilon^i_j \rho_k + \varepsilon^i_k \rho_j$ *est que les* R^i_{jkl} *aient la forme* (9).

La condition est nécessaire comme le montre le calcul des R à partir des formules (1) où l'on remplace les f^i_{jk} par leur valeur.

Mais on peut procéder de manière à montrer simultanément que les conditions indiquées sont nécessaires et suffisantes. Il suffit de revenir aux formules qui donnent les $(F^i_{jk})_y$ en fonction des $(f^i_{jk})_x$,

$$F^i_{jk} = \left(\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_r\, \partial x_s} + \frac{\partial y_i}{\partial x_u} f^u_{rs}\right) \frac{\partial x_r}{\partial y_j} \frac{\partial x_s}{\partial y_k}.$$

On veut avoir dans le système y

$$F^i_{jk} = \varepsilon^i_j R_k + \varepsilon^i_k R_j.$$

En multipliant ces relations par $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_l} \dfrac{\partial y_k}{\partial x_h}$, et sommant par rapport aux indices j, k, il vient

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial x_l\, \partial x_h} + \frac{\partial y_i}{\partial x_r} f^r_{lh} = \frac{\partial y_i}{\partial x_h}\left(R_s \frac{\partial y_s}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial y_i}{\partial x_l}\left(R_s \frac{\partial y_s}{\partial x_h}\right).$$

Les R_i sont fonctions des y; d'autre part, ces relations doivent demeurer vérifiées, un changement de variables quelconque étant effectué sur les $\boldsymbol{x}$, lequel d'ailleurs laisse inchangé chacun des y. Il en résulte que, dans une dérivation par rapport à x, les y doivent être considérés non comme covariants mais comme invariants. Et la relation précédente s'écrit

$$y_{/lh} = y_{/h}\left(R_s \frac{\partial y_s}{\partial x_l}\right) + y_{/l}\left(R_s \frac{\partial y_s}{\partial x_h}\right).$$

Les quantités $R_s \frac{\partial y_s}{\partial x_l}$ sont donc elles-mêmes des covariants et l'on peut poser

$$R_s \frac{\partial y_s}{\partial x_l} = \rho_l.$$

Réciproquement, si l'on peut trouver des solutions y de l'équation

$$y_{/lh} = \rho_l y_{/h} + \rho_k y_{/l}$$

satisfaisant d'autre part à la condition $\frac{D(y)}{D(x)} \neq 0$, la réductibilité sera assurée. Mais, en ce qui concerne cette dernière condition, il suffira de choisir convenablement les valeurs des dérivées premières.

Les équations en y s'écrivent encore

$$y_{l/h} = \rho_l y_h + \rho_h y_l.$$

Compte tenu des valeurs des R^i_{jkl}, les conditions d'intégrabilité, obtenues par (3), donnent

$$y_l(\theta_{kh} - \theta_{hk}) - y_h \theta_{lk} + y_k \theta_{lh} = 0$$

avec

$$\theta_{lk} = \lambda_{lk} - \rho_{l/k} + \rho_k \rho_l.$$

Les conditions d'intégrabilité seront identiquement satisfaites si les θ_{lk} sont nuls, c'est-à-dire si l'on peut déterminer les fonctions ρ par les conditions

$$\rho_{l/h} = \rho_l \rho_k - \lambda_{lk}.$$

Les conditions d'intégrabilité de ces nouvelles équations se réduisent, compte tenu des équations elles-mêmes et des valeurs des R^i_{jkl}, à

$$\lambda_{lk/h} = \lambda_{lh/k}.$$

Or on a vu que ces conditions résultent précisément des relations (6) lorsque $n \geqq 3$.

Et l'on voit de plus que l'on peut choisir arbitrairement les valeurs initiales des ρ_i, *par suite celle des* R_i *et enfin celle des* $\Lambda_{jk} = -(R_{j,k} + R_j R_k)$.

P$_{10}$. *Le même calcul établit que, lorsque* $n = 2$, *la condition nécessaire et suffisante, pour que le système* f^i_{jk} *soit réductible par chan-*

gement de variables à la forme $f^i_{jk} = \varepsilon^i_j \rho_k + \varepsilon^i_k \rho_j$, *est*

$$\lambda_{ii/k} = \lambda_{ik/i},$$

le système covariant λ_{ik} *étant défini par les équations* (12).

Remarques. — I. Il résulte de là, et on le vérifie aisément, que des conditions du type (9) et (13), vérifiées pour les R^i_{jkl} et les λ_{jk}, demeurent satisfaites quand on substitue aux f^i_{jk} les valeurs $f^i_{jh} + \varepsilon^i_j \rho_h + \varepsilon^i_k \rho_j$.

II. La précédente réduction vaut séparément pour chaque valeur de l'indice supérieur i; ceci permet d'effectuer une réduction au moins partielle dans les cas où les changements de variables dont on dispose sont assujettis à certaines conditions.

D$_3$ III. *Nous dirons en général qu'un système* $f^i_{a_1 \ldots a_p}$ *est* C *s'il satisfait aux relations*

$$(C) \qquad f^i_{a_1 \ldots a_p} = \varepsilon^i_{a_1} \lambda_{a_2 \ldots a_p} + \ldots + \varepsilon^i_{a_p} \lambda_{a_1 \ldots a_{p-1}},$$

$\lambda_{b_1 \ldots b_{p-1}}$ *étant un système covariant symétrique d'ordre* $(p-1)$.

Nous dirons encore que les R^i_{jkl} *qui ont la forme* (9) *sont* C, *ils ont effectivement cette forme lorsque les* f^i_{jk} *sont* C.

CHAPITRE III.

LES ÉQUATIONS DE DÉFINITION DU GROUPE ET LA LIMITATION DU NOMBRE DES PARAMÈTRES.

SECTION I. — FORMATION DES ÉQUATIONS.

Nous nous proposons d'exprimer que le système

$$(G_0) \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = f^i_{rs} \frac{dx_r}{dt} \frac{dx_s}{dt} + \frac{dx_i}{dt} R = F^i$$

admet un groupe que nous supposerons défini par l'ensemble de ses transformations infinitésimales. Soit

$$Xf = \sum_{r=1}^{n} \xi^n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_r}$$

l'une quelconque d'entre elles. Nous supposons qu'on obtient, en la prolongeant, les transformations subies par $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$ (1).

Associons à X la quantité infiniment petite u; les accroissements qui résultent pour x, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2 x}{dt^2}$ de l'application de X sont, en négligeant les termes en u d'ordre supérieur au premier,

$$\delta x_i = u\xi^i,$$

$$\delta \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt}\delta x_i = u \frac{\partial \xi^i}{\partial x_r}\frac{dx_r}{dt},$$

$$\delta \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\delta\left(\frac{dx_i}{dt}\right)\right] = u\left[\frac{\partial \xi^i}{\partial x_r}\frac{d^2 x_r}{dt^2} + \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x_r \partial x_s}\frac{dx_r}{dt}\frac{dx_s}{dt}\right].$$

Les transformées par X des équations (G_0) sont par conséquent, en désignant pour plus de clarté par θ le paramètre du nouveau système et en développant les seconds membres de (G_0),

$$(G_u) \quad \frac{d^2 x_i}{d\theta^2} = F^i\left(x \,\Big|\, \frac{dx}{d\theta}\right) + u\left[\frac{\partial F^i}{\partial x_r}\xi^r + \frac{\partial F^i}{\partial \frac{dx_r}{d\theta}}\frac{\partial \xi^r}{\partial x_s}\frac{dx_s}{d\theta} - \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_r}F^r + \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x_r \partial x_s}\frac{dx_r}{d\theta}\frac{dx_s}{d\theta}\right)\right] + u^2.$$

Pour que le système (G) admette la transformation X, il est nécessaire et suffisant que les deux systèmes (G_0) et (G_u) soient équivalents.

Or on a vu [$\mathbf{P}_2$, p. 209] que deux systèmes (G) sont équivalents si et seulement si

$$f^i_{jk} - \varphi^i_{jk} = \varepsilon^i_j \omega_k + \varepsilon^i_k \omega_j,$$

d'où, compte tenu de (G_u),

$$\xi^i_{,jk} + f^r_{jk}\xi^i_{,r} - f^i_{rk}\xi^r_{,j} - f^i_{jr}\xi^r_{,k} - f^i_{jk,r}\xi^r = \varepsilon^i_j \omega_k + \varepsilon^i_k \omega_j.$$

(1) Dans le cas contraire, les systèmes du second ordre ne se distingueraient pas de ceux du premier.

Il est facile de mettre le premier membre sous forme covariante

$$
\begin{aligned}
&\xi^i/_j = \xi^i_{,j} - f^i_{sj}\xi^s,\\
&\xi^i/_{jk} = (\xi^i/_j)_{,k} + f^r_{jk}\xi^i/_r - f^i_{rk}\xi^r/_j,\\
&\xi^i/_{jk} = \xi^i_{,jk} + f^r_{jk}\xi^i_{,r} - f^i_{rk}\xi^r_{,j} - f^i_{rj}\xi^r_{,k} - [f^i_{sj,k} + f^i_{rk}f^r_{sj} - f^i_{sr}f^r_{jk}]\xi^s.
\end{aligned}
$$

Les équations cherchées prennent la forme

$$
\text{(G)} \qquad \xi^i/_{jk} + \mathrm{R}^i_{jks}\xi^s = \varepsilon^i_j\omega_k + \varepsilon^i_k\omega_j.
$$

Ces mêmes équations peuvent s'obtenir par la méthode classique de Lie en mettant le système (G) sous la forme équivalente

$$
\frac{d^2x_i}{dx_n^2} = \mathrm{F}^i + \mathrm{F}^i_r\frac{dx_r}{dx_n} + \mathrm{F}^i_{rs}\frac{dx_r}{dx_n}\frac{dx_s}{dx_n} + \frac{dx_i}{dx_n}\left(\mathrm{F}^i_{irs}\frac{dx_r}{dx_n}\frac{dx_s}{dx_n}\right),
$$

les F ayant les valeurs (I.10) (p. 212).

SECTION II. — L'ORDRE DIFFÉRENTIEL DU PROBLÈME.

Le groupe admis par le système différentiel étant supposé fini, on peut calculer les dérivées d'un certain ordre des ξ en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Nous dirons que *le problème est d'ordre p si les dérivées d'ordre p sont calculables sans que les dérivées d'ordre* ($p-1$) *le soient*. On voit immédiatement sur les équations (G) [ou (L) ou (S)] qui contiennent les dérivées secondes des ξ que *le problème est au plus d'ordre trois*. Nous allons montrer qu'il est seulement du second ordre. En d'autres termes, pour une transformation quelconque du groupe, les développements des ξ, supposés analytiques, commencent ou bien par des termes constants ou bien par des termes du premier ordre. Il résulte évidemment de la covariance que la propriété vaut simultanément pour tous les ξ.

Les équations de définition du groupe sont

$$
\text{(G)} \qquad \xi^i/_{jk} + \mathrm{R}^i_{jks}\xi_s = \varepsilon^i_j\omega_k + \varepsilon^i_k\omega_j.
$$

Une même dérivée troisième pouvant être obtenue de deux façons différentes, il en résulte des conditions de compatibilité

$$
\xi^i/_{jkl} - \xi^i/_{jlk} = [\xi^i/_j]_{/kl} - [\xi^i/_j]_{/lk} = \mathrm{R}^i_{skl}\xi^s/_j - \mathrm{R}^s_{jkl}\xi^i/_s.
$$

Et, en calculant le premier membre à partir des équations G elles-mêmes, on obtient

$$(1)\quad (G') \qquad \rho^i_{jkl} = \varepsilon^i_j(\omega_{k/l} - \omega_{l/k}) + \varepsilon^i_k\omega_{j/l} - \varepsilon^i_l\omega_{j/k}$$

avec

$$(2) \qquad \rho^i_{jkl} \equiv R^i_{jkl/s}\xi^s + R^i_{skl}\xi^s/_j + R^i_{jsl}\xi^s/_k + R^i_{jks}\xi^s/_l - R^s_{jkl}\xi^i/_s.$$

Cette expression demeure la même si l'on y remplace chacune des dérivées covariantes par la dérivée ordinaire correspondante; à la condition évidemment de faire la substitution simultanément sur tous les termes.

Appliquons, aux équations (1), la dérivation covariante par rapport à l'indice h, et remplaçons les dérivées secondes par leurs valeurs tirées des équations (G). En désignant par $\mathcal{L}$ un ensemble linéaire de termes en ξ^i et en $\xi^i_{,j}$, il vient

$$\begin{aligned} 2R^i_{jkl}\omega_h + R^i_{hkl}\omega_j + R^i_{jhl}\omega_k + R^i_{jkh}\omega_l \\ = \varepsilon^i_h R^s_{jkl}\omega_s + \varepsilon^i_j(\omega_{k/lh} - \omega_{l/kh}) + \varepsilon^i_k\omega_{j/lh} - \varepsilon^i_l\omega_{j/kh} + \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Supposons tout d'abord $n \geqq 3$. On peut alors prendre $k = h = j$; $i, j, l \neq$. D'où

$$4R^i_{jjl}\omega_j = \mathcal{L}.$$

Si les R^i_{jjl} sont différents de zéro ($i, j, l \neq$) on peut donc calculer tous les ω_j en fonction des ξ^i et des $\xi^i/_j$. Et, en substituant dans les équations (G), on aura

$$\xi^i_{,jk} = \text{fonction linéaire de } \xi^i,\ \xi^i_{,j},$$

le problème est du second ordre.

Pour que le problème soit d'ordre supérieur au second, il faut donc que l'une au moins des équations

$$R^i_{jjl} = 0 \qquad (ijl \neq)$$

demeure vérifiée quel que soit le système de variables adopté. Il en résulte que tous les R^i_{jkl} sont C [$\mathbf{P}_6$, p. 220]. Et l'on peut alors, puisque $n \geqq 3$ ($\mathbf{P}_9$, p. 222) choisir les variables de telle sorte que

$$f^i_{jk} = \varepsilon^i_j\rho_k + \varepsilon^i_k\rho_j.$$

Le système proposé G est donc réductible à la forme

$$x''_i = x'_i \left[\sum_{p=0}^{\infty} \rho_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} x'_{\alpha_1} \ldots x'_{\alpha_p} \right].$$

Si $n = 2$, on peut toujours [**P**$_9$, p. 222] déterminer un système covariant λ_{jk} tel que les équations (II. 12) soient satisfaites. Les équations (1) prennent, dans ces conditions, la forme

$$\varepsilon^i_j [\Lambda_{kl} - \Lambda_{lk}] + \varepsilon^i_k \Lambda_{jl} - \varepsilon^i_l \Lambda_{jk} = 0$$

avec

$$\Lambda_{jk} = \lambda_{jk/s} \xi^s + \lambda_{sk} \xi^s /_j + \lambda_{js} \xi^s /_k - \omega_{j/k}.$$

Prenant dans ces équations $i = k$, $j = l$, $i \neq j$; puis $i = j = k \neq l$, on en conclut

$$\Lambda_{jk} = 0, \qquad \text{soit} \qquad \lambda_{jk/s} \xi^s + \lambda_{sk} \xi^s /_j + \lambda_{js} \xi^s /_k = \omega_{j/k}.$$

En appliquant la dérivation covariante par rapport à l'indice h et utilisant les équations (G)

$$\lambda_{jk/s} \xi^s /_h + \lambda_{sk/h} \xi^s /_j + \lambda_{js/h} \xi^s /_k + [2 \lambda_{jk} \omega_h + \lambda_{hk} \omega_j + \lambda_{jh} \omega_k] = \omega_{j/kh} + \text{termes en } \xi.$$

Permutons k et h et retranchons les résultats obtenus. Les termes en ω donnent

$$\omega_{j/kh} - \omega_{j/hk} - (\lambda_{hk} - \lambda_{kh}) \omega_j - \lambda_{jk} \omega_h + \lambda_{jh} \omega_k.$$

Mais cette expression est identiquement nulle si l'on tient compte de la forme C des symboles $R^i_{jkl} (n = 2)$. On obtient donc

$$(3) \qquad (\lambda_{jk/s} - \lambda_{js/k}) \xi^s /_h + \lambda_{sk/h} - \lambda_{sh/k}) \xi^s /_j + (\lambda_{js/h} - \lambda_{jh/s}) \xi^s /_k = \text{termes en } \xi.$$

Appliquant la dérivation covariante par rapport à l'indice l et tenant compte des équations G

$$3 (\lambda_{jk/h} - \lambda_{jh/k}) \omega_l + (\lambda_{jk/l} - \lambda_{jl/k}) \omega_h + (\lambda_{jl/h} - \lambda_{jh/l}) \omega_k + (\lambda_{lk/h} - \lambda_{lh/k}) \omega_j = \mathcal{L}.$$

Prenant enfin $l = h = j$, $k \neq j$; on voit que l'on peut calculer ω_j à moins que

$$\lambda_{jk/j} - \lambda_{jj/k} = 0.$$

Mais, dans cette dernière hypothèse, on peut [**P**$_{10}$, p. 223] faire un choix des variables tel que

$$f^i_{jk} = \varepsilon^i_j \rho_h + \varepsilon^i_h \rho_j.$$

Le résultat est donc le même que pour $n \geqq 3$.

P₁₁. *Étant donné un système* (G) (*pour lequel on a nécessairement* $n \geqq 2$) :

ou bien le problème est du second ordre;
ou bien le système est réductible, par un choix convenable des variables et du paramètre à $x''_i = 0$.

Les multiplicités solutions

$$x_i = A_i x_n + B_i \qquad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)]$$

admettent alors le groupe projectif général et le problème n'est évidemment pas du second ordre.

Le système constitué par les équations G est alors un système complet; on peut calculer les dérivées troisièmes des ξ^i et aux valeurs initiales de ξ^i, $\xi^i_{,k}$, ω_k correspondent autant de paramètres arbitraires.

Si un système du type

$$x''_i = x'_i(\rho_s x'_s) \tag{4}$$

représente les géodésiques d'un ds^2, l'espace correspondant est à courbure constante. Un tel espace existe si et seulement si il existe un système covariant symétrique double a_{jk} tel que $a_{jk/l} = 0$. Des relations

$$a_{jk/lh} - a_{jk/hl} = 0,$$

on tire alors, en remplaçant les R^i_{jkl} par leur valeur,

$$R^i_{jkl} = \varepsilon^i_j(\lambda_{kl} - \lambda_{lk}) + \varepsilon^i_k \lambda_{jl} - \varepsilon^i_l \lambda_{jk} \qquad [\lambda_{jk} = -(\rho_{j,k} + \rho_j \rho_k)],$$
$$2(\lambda_{lh} - \lambda_{hl}) a_{jk} + \lambda_{jh} a_{kl} + \lambda_{kh} a_{jl} - \lambda_{jl} a_{kh} - \lambda_{kl} a_{jh} = 0.$$

En prenant, d'une part $j = l$, $k = h$; d'autre part $h = j = l \neq h$, on obtient trois équations homogènes renfermant les quatre inconnues : λ_{ll}, λ_{lh}, λ_{hl}, λ_{hh}. On en tire aisément :

ou bien : $a_{kh} = \lambda_k \lambda_h$. La condition $a_{kh/l} = 0$ donne alors

$$\lambda_{k/h} = 0, \qquad \lambda_k = \frac{\partial f}{\partial x_k}, \qquad ds^2 = (df)^2,$$

ou bien : $\lambda_{kh} = \Lambda a_{kh}$. Les conditions $\lambda_{kh/l} = \lambda_{kl/h}$ donnent alors, les a_{kh} n'étant pas de la forme $\lambda_k \lambda_h$: $\Lambda_j = 0$, Λ est donc une constante. Les symboles R_{ijkl} de première espèce ont d'autre part pour expression

$$R_{ijkl} = a_{js} R^s_{ikl} = a_{js}(\varepsilon^s_k \Lambda a_{il} - \varepsilon^s_l \Lambda a_{ik}) = \Lambda [a_{jk} a_{il} - a_{jl} a_{ik}].$$

L'espace a donc la courbure Λ.

On peut enfin ramener tout espace à courbure constante à une forme canonique. Le système (G) correspondant étant réduit à la forme 4, si l'on remplace λ_{jk} par sa valeur Λa_{jk} on obtient

$$\Lambda a_{jk} = -(\rho_{j,k} + \rho_j \rho_k).$$

On peut donc poser $\rho_j = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}$

$$a_{jk} = \frac{1}{\Lambda}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k}\right),$$

f étant une fonction de point, non linéaire puisque a_{jh} n'est pas de la forme $\lambda_j \lambda_k$.

Remarques. — I. On parviendrait au même résultat si l'on recherchait les systèmes G pour lesquels le sous-groupe γ, formé par les transformations du premier ordre dans le domaine d'un point quelconque, coïncide avec le groupe linéaire général. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que toute relation entre les ξ^i, ξ^i_j disparaisse. Les équations (1) prises pour $jkl \neq i (n \geqq 3)$, ou les relations (3)$(n \geqq 2)$, montrent respectivement que les R^i_{jkl} doivent être C, ou bien qu'il faut $\lambda_{ii/j} = \lambda_{ij/i}$.

Le nombre maximum des paramètres de γ est donc inférieur à n^2. Nous le déterminerons à la section suivante.

II. Le problème est encore du second ordre pour les systèmes (L). Pour les systèmes (S) il existe plusieurs cas d'exception dans lesquels le problème peut d'ailleurs être complètement résolu.

SECTION III. — LA LIMITATION DU NOMBRE DES PARAMÈTRES.

Le problème étant supposé du second ordre, les équations de définition du groupe ou leurs conséquences différentielles permettent de calculer les dérivées secondes des ξ. L'ensemble γ des transformations du premier ordre dans le domaine d'un point forment un sous-groupe du groupe total. Ce sous-groupe γ est déterminé si l'on en connaît le nombre de paramètres et la structure. Or, le fait, pour le groupe, d'être admis par un système différentiel lui impose certaines conditions. Mais, tandis que la limitation du nombre des paramètres résulte immédiatement du nombre des conditions indépendantes qui lient les dérivées premières des ξ, la structure du groupe n'est pas directement déterminée par des éléments covariants attachés au système. La forme des fonctions ξ demeure un intermédiaire nécessaire. Nous donnerons ici la limite supérieure du nombre des paramètres de γ, en même temps qu'un choix possible de celles de ses transformations qui sont indépendantes, réservant pour les chapitres suivants la détermination complète du groupe dans le cas où cette limite est effectivement atteinte. Nous désignerons pour cette raison ce groupe sous le nom de groupe maximum ou G. M. Il est clair que cette détermination ne constitue qu'une première étape : la suite des nombres de paramètres possibles pour un groupe admis par un système est une suite discontinue; la première discontinuité sépare le groupe maximum du groupe projectif général. La suivante est égale à l'unité. Nous le montrerons en déterminant effectivement les groupes et les systèmes pour lesquels le groupe γ a un paramètre de moins que le groupe maximum et que nous appellerons pour cette raison groupe sous-maximum G. S. Enfin nous montrerons au dernier chapitre que, pour $n = 3$, le nombre des paramètres de γ peut prendre toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à la valeur maximum.

P$_{12}$. *Lorsque* $n \geqq 3$, *le maximum du nombre des paramètres de* γ *est* $(n-1)(n-2)+3$.

Il suffit pour le montrer d'établir que les équations [G′, p. 227], considérées comme des équations algébriques en ξ^i, $\xi^i_{,k}$, sont au nombre de $(3n-5)$ indépendantes au moins. On suppose évidemment que les ω_{jk} ont été éliminés et que les R ne satisfont pas à la condition C. Il résulte de cette dernière hypothèse qu'on peut supposer non nuls tous les éléments du système covariant : ($\mathbf{P}_7$, p. 221)

$$(\mathcal{R}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{R}^i_{jkl} \quad (j,\ k,\ l \neq i), & \mathrm{R}^i_{jil} - \mathrm{R}^k_{jkl} \quad (j,\ l \neq i,\ k), \\ \mathrm{R}^i_{iil} - \mathrm{R}^j_{jil} - \mathrm{R}^k_{ikl}, & \mathrm{R}^i_{iil} - 2\mathrm{R}^k_{ikl} - \mathrm{R}^k_{lik} \qquad (i,\ j,\ k,\ l \neq). \end{array} \right.$$

On considérera d'ailleurs comme impossible toute relation entre les R qui ne serait pas covariante.

1. — $n \geqq 5$.

a. Les équations

$$\rho^i_{jjk} = 0, \quad \rho^k_{jjl} = 0, \quad \rho^j_{kkl} = 0 \quad (j,\ k,\ l,\ 1 \neq;\ j,\ k,\ l \text{ fixes};\ i \text{ variable};\ i \neq j,\ k,\ 1)$$

permettent de calculer tous les $\xi^i_{,1}$ $(i = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$ en fonction des autres dérivées. Chacune des équations contient en effet une seule des dérivées $\xi^i_{,1}$ affectée de l'un des coefficients R^1_{jjk}, R^1_{jjl}, ${}^{1}_{kkl}$, lesquels ont été supposés non nuls.

b. Les équations

$$\rho^1_{22k} = 0, \qquad \rho^1_{kk2} = 0 \qquad [k = 3,\ \ldots,\ (n-1),\ n]$$

ne contiennent aucune des dérivées $\xi^i_{,1}(i = 2,\ \ldots,\ n)$ sont indépendantes par rapport aux $(2n-4)$ dérivées

$$\xi^k_{,k}, \quad \xi^2_{,k} \quad [k = 3,\ \ldots,\ (n-1)]; \qquad \xi^2_{,2}, \quad \xi^2_{,n},$$

comme on le constate aisément en se reportant à l'expression des ρ^1_{jkl}.

c. Il existe donc bien $(3n-5)$ relations indépendantes entre les $\xi^i_{,k}$.

On voit de plus que l'on peut considérer comme étant calculables

$$(\mathcal{T}) \quad \xi^2_{,i} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n); \qquad \xi^j_{,1} \quad (j = 3,\ \ldots,\ n); \qquad \xi^k_{,k} \quad [k = 3,\ \ldots,\ (n-1)].$$

Cette remarque nous sera évidemment fort utile dans la détermination effective de γ.

La détermination précédente vaut encore pour $n = 4$. Nous en donnerons cependant une autre, commune aux deux valeurs $n = 3,\ 4$. Elle permet le choix d'un ensemble un peu différent de l'ensemble $(\mathcal{T})$.

2. — $n=3,\ 4$.

a. Les équations

$$\rho^3_{224}=0, \qquad \rho^3_{221}=0, \qquad \rho^3_{112}=0$$

permettent de calculer les $\xi^i_{,1}$ en fonction des autres dérivées

	$\xi^2_{,1}$	$\xi^3_{,1}$	$\xi^4_{,1}$		
$\rho^3_{224}\ldots$		$-R^1_{224}$		$n=4$	$\delta=-R^1_{224}R^3_{224}R^3_{212}$
$\rho^3_{221}\ldots$		$R^3_{223}-R^1_{221}$	R^3_{224}	$n=3$	$\delta=R^3_{212}(R^3_{223}-R^1_{221})$
$\rho^3_{112}\ldots$	R^3_{112}	$R^3_{312}+R^3_{132}-R^1_{112}$	$R^3_{412}+R^3_{142}$		

Les facteurs δ sont donc toujours des éléments du système C supposé non nul.

b. Il existe $4(n=4)$ ou $2(n=3)$ équations qui ne contiennent pas les $\xi^i_{,1}$ et qui sont indépendantes par rapport à $\xi^2_{,2}\xi^2_{,3}\xi^2_{,4}\xi^4_{,3}$.

	$\xi^2_{,2}$	$\xi^2_{,3}$	$\xi^2_{,4}$	$\xi^4_{,2}$		
$\rho^1_{223}\ldots$	$2R^1_{223}$			R^1_{224}	$n=4$ $n=3$	$\delta=2R^1_{223}(R^1_{224})^3$ $\delta=-2(R^1_{223})^2$
$\rho^1_{332}\ldots$	R^1_{332}	R^1_{232}		$R^1_{432}+R^1_{342}$		
$\rho^1_{224}\ldots$	$2R^1_{224}$					
$\rho^1_{442}\ldots$	R^1_{442}		R^1_{242}			

c. *On voit donc qu'on peut considérer comme calculables*

$(\mathcal{J}')$ $\quad \xi^2_{,k}\ (k=1, 2, \ldots, n)$; $\quad \xi^i_{,1}\ (i=3, \ldots, n)$; $\quad \xi^4_{,3}$ $\ $ (*si* $n=4$) (*au lieu de* $\xi^3_{,3}$).

P$_{13}$. *Lorsque* $n=2$, γ *comporte au maximum une transformation; et les racines caractéristiques* [1] *en sont nulles*. Le nombre des transformations du premier ordre qui sont indépendantes dépend en effet du nombre des équations (3)(p. 228) qui sont indépendantes, soit

$$(\lambda_{jk/s}-\lambda_{js/k})\xi^s/_h+(\lambda_{js/h}-\lambda_{jh/s})\xi^s/_k+(\lambda_{sk/h}-\lambda_{sh/k})\xi^s/_j=\text{termes en } \xi.$$

Il faut $k\neq h$, et en prenant $j=h$ ou $j=k$ on trouve la même équation

$$(1) \qquad (\lambda_{jj/k}-\lambda_{jk/j})\xi^k_{,k}+2(\lambda_{jj/k}-\lambda_{jk/j})\xi^j_{,j}+(\lambda_{kj/k}-\lambda_{kk/j})\xi^k_{,j}=\text{termes en } \xi.$$

---

[1] C'est-à-dire les racines de $\Delta(\rho)=|(\xi^i_{,k})_0-\varepsilon^i_k\rho|=0$.

En posant

$$\lambda_{11/2} - \lambda_{12/1} = a, \qquad \lambda_{22/1} - \lambda_{21/2} = b.$$

le tableau des $\xi^i_{,k}$ relativement aux deux équations est

$\xi^1_{,1}$	$\xi^1_{,2}$	$\xi^2_{,1}$	$\xi^2_{,2}$
b	$-a$		$2b$
$2a$		$-b$	a

D'autre part, la condition nécessaire et suffisante pour que le système se réduise à un système (C) (admettant par conséquent le groupe complet) est ($\mathbf{P}_{10}$, p. 223) : $a=0$ $b=0$. De plus, a et b forment un système covariant. Il existe donc deux équations indépendantes en $\xi^i_{,k}$ et le groupe (γ) des transformations du premier ordre comprend au plus deux paramètres. Mais un groupe (γ) à deux paramètres est réductible à l'une des deux formes :

$$x_1 p_1, \quad x_2 p_2; \qquad \rho_1 x_1 p_1 + \rho_2 x_2 p_2, \quad x_2 p_1.$$

La substitution de ces deux transformations dans les équations (1) donne dans les deux cas $(a)_0 = 0$, $(b)_0 = 0$. Le système covariant a, b, nul dans le domaine d'un point quelconque, serait donc identiquement nul. Par suite le groupe (γ) comporte une seule transformation. Si les deux racines caractéristiques ne sont pas nulles simultanément, cette transformation peut se mettre sous l'une des deux formes

$$\rho_1 x_1 p_1 + \rho_2 x_2 p_2; \qquad x_1 p_1 + (x_1 + x_2) p_2,$$

ce qui entraîne encore $a=0$, $b=0$.

Groupes γ à $[(n-1)(n-2)+2]$ paramètres.

$\mathbf{P}_{14}$. *Lorsque γ a le nombre maximum de paramètres, on peut donc prendre pour tableau des $\xi^i_{,k}$ calculables*

$$\begin{array}{c}\left\|\begin{array}{ccccc}
\xi^1_{,1} & & & & \\
\xi^1_{,2} & & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \xi^n_{,2} \\
\cdot & & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot \\
\cdot & & & & \cdot \\
\xi^1_{,n} & & \cdot\;\cdot\;\cdot & & \xi^n_{,n}
\end{array}\right\|
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ (n-1) \\ n \end{array}
\\
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdot & (n-1) & n \end{array}
\end{array}$$

Les termes calculables correspondent aux points situés sur les traits.

si γ a un paramètre de moins, il doit exister un terme calculable de plus; nous voulons montrer qu'on peut prendre $\xi^n_{,n}$ comme nouveau terme calculable. Posons pour abréger

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}_1 = \text{ensemble de } \xi^2_{,1},\ \xi^3_{,1},\ \ldots,\ \xi^n_{,1}\,;\\ &\mathcal{J}_2 = \quad\text{»}\quad \xi^2_{,2},\ \zeta^2_{,3},\ \ldots,\ \xi^2_{,n}\,;\ \xi^3_{,3},\ \ldots,\ \xi^{n-1}_{,n-1}\,;\\ &u = \text{nouveau terme calculable.} \end{aligned}$$

On peut évidemment, quel que soit le nombre des paramètres de γ, et par conséquent le nombre des termes calculables, conserver pour ceux-ci le même ensemble. Le mot *même* peut avoir deux sens :

α. les combinaisons calculables relatives aux nouvelles variables (y) sont les transformées par covariance des combinaisons calculables relatives aux anciennes (x) ;

β. les combinaisons calculables sont formellement les mêmes pour (x) et pour (y). L'ensemble $\mathcal{J}_1$ est remplacé par $\eta^2_{,1},\ \ldots,\ \eta^n_{,1}$ et de même pour l'ensemble $\mathcal{J}_2$.

Bornons-nous au changement de variables

$$\text{(V)} \qquad y_1 = x_1\,; \qquad y_i = g_i(x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 2, \ldots, n)$$

par lequel aucun terme de $\mathcal{J}_1$ ne se change en une combinaison contenant des termes appartenant à $\mathcal{J}_2$, ni inversement.

Si u était l'un des $\xi^1_{,i}$, (V) montre qu'une combinaison $\sum_{i=2}^{n} \alpha_i \xi^1_{,i}$ à coefficients arbitraires serait calculable. Il en serait par suite de même de chacun des $\xi^1_{,i}$, et, comme cela ne modifie pas l'ensemble $\mathcal{J}_2$, le groupe (γ) aurait un nombre de paramètres supérieurs à celui qui a été assigné.

On peut donc raisonner sur le seul ensemble $\mathcal{J}_2$ et sur le tableau

$$\begin{array}{c c} \left\|\begin{array}{cccc} \ddots & \cdot\ \cdot & \xi^{n-1}_{,2} & \xi^n_{,2} \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & \cdot\ \cdot & \xi^{n-1}_{,n} & \xi^n_{,n} \end{array}\right\| & \begin{array}{c} 2 \\ \vdots \\ (n-1) \\ n \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 2 & \cdot\ \cdot & (n-1) & n \end{array} & \end{array}$$

Considérons la forme linéaire

$$\mathrm{F} = \sum_{rs} (\xi^r_{,s})_0 x_s p_r \qquad [(\xi^r_{,s})_0 \neq 0];$$

r, s prenant les valeurs qui correspondent aux seuls termes calculables appartenant à $\mathcal{J}_2$ et à u. Abstraction faite de u, F a une racine caractéristique nulle et une seule.

Si l'on prend u dans la dernière colonne, F n'a aucune racine nulle.

Si l'on prend u en dehors de la dernière colonne, F conserve une racine nulle.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit impossible de prendre u dans la dernière colonne est donc que la forme $\mathcal{F}$ constituée avec les termes caculables de γ d'indices $2, \ldots, n$, et qui contient F comme cas particulier, ait un invariant nul. Or cette condition n'est pas remplie, car les équations $\rho^1_{jkl} = 0\,(jkl \neq 1)$ donnent comme calculables les combinaisons $\left(\xi^j_{,j} - \frac{1}{3}\xi^1_{,1}\right)$, et par suite les $\xi^j_{,j}(j=2, \ldots, n)$. On peut donc prendre u dans la dernière colonne : soit $\xi^n_{,k}$. On a alors pour $\mathcal{J}_2$

$$\xi^2_{,k}, \quad \xi^2_{,n}, \quad \xi^n_{,k}, \quad \xi^k_{,k} \quad \text{et d'autres} \quad \xi^r_{,s} \qquad (r, s \neq n, k).$$

Une substitution sur x_k et x_n seuls montre alors qu'on peut remplacer cet ensemble par $\xi^2_{,k}$, $\xi^2_{,n}$, $\xi^k_{,k}$, $\xi^n_{,k}$.

Nous verrons qu'aux groupes $\bar{\gamma}$ ci-dessus déterminés correspond effectivement des groupes admis par des systèmes du second ordre. Nous désignerons en général par

G. C. Groupe complet; groupe projectif général
(γ *comporte* n^2 *transformations*);

G. M. Groupe maximum, G. C. étant exclus
$\{\gamma$ *comporte* $[(n-1)(n-2)+3]$ *transformations*$\}$;

G. S. Groupe sous-maximum
$\{\gamma$ *comporte* $[(n-1)(n-2)+2]$ *transformations*$\}$.

Signalons en passant que le G. C. ne comporte, relativement aux systèmes (L), que $(n-1)(n-2)$ paramètres. La même limite vaut pour les système (S), sauf les cas d'exception liés à ceux qui concernent l'ordre différentiel du problème (p. 230, R. II).

CHAPITRE IV.

ÉTUDE DU GROUPE γ DES TRANSFORMATIONS DU PREMIER ORDRE.

Le groupe (T) admis par un système différentiel ne comprenant pas de transformation du second ordre, les équations de définition ne peuvent laisser arbitraires :

α. qu'un certain nombre des $(\xi^i)_0$ soit ν_0;

β. qu'un certain nombre des $(\xi^r_{,s})_0$ soit ν_1

Système G. . . . . $\nu_1 \leqq (n-1)(n-2)+3$
Système L. . . . . $\nu_1 \leqq (n-1)(n-2)$

A l'ensemble β correspond le groupe γ des transformations du premier ordre appartenant à Γ; à l'ensemble α le groupe γ_0 des transformations d'ordre zéro.

Nous désignerons en général par $\overline{\gamma}$ une transformation γ réduite aux termes du premier ordre; par $\overline{\gamma_0}$ une transformation d'ordre zéro réduite à sa partie d'ordre zéro. Nous désignons enfin par des points, dans une transformation déterminée, des termes qui sont d'un ordre supérieur à celui de tous ceux qui sont écrits dans la même transformation.

Les deux ensembles α et β ne sont pas indépendants l'un de l'autre, et il est important de noter que :

Si γ comporte une transformation du premier ordre : $\overline{\gamma}+\ldots$, γ_0 comporte toutes les transformations

$$\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial x_k}+\ldots \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Il suffit pour le montrer de donner aux différentes variables x_i des accroissements arbitraires respectifs $(x_i)_0$. L'un quelconque des ξ, ξ^α par exemple, devient

$$\xi^\alpha[x_i+(x_i)_0] = \xi^\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} (x_i)_0 \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x_i} \tag{1}$$
$$+ \text{ termes d'ordre supérieur en } (x_i)_0.$$

Or les transformations de γ_0 demeurent évidemment d'ordre zéro. Le nombre ν_1 demeurant le même, à toute transformation γ_1 de γ doit correspondre, dans le domaine du point arbitraire $(x_i)_0$, une transformation du premier ordre. En d'autres termes, il est possible d'associer à γ_1 un ensemble de transformations d'ordre zéro telles qu'une combinaison convenablement choisie de toutes ces transformations demeure du premier ordre. Or si dans le développement (1), on suppose que les ξ appartiennent à une transformation de γ, les $\xi^\alpha_{,i}$ sont d'ordre zéro. Chacun des $(x_i)_0$ demeurant arbitraire, il doit correspondre à chacun d'entre eux une transformation d'ordre zéro indépendante. Le terme en $(\xi^\alpha)_0$, sera précisément $(\xi^\alpha_{,i})_0$; il suffit de raisonner de la même façon sur chacun des ξ pour établir la proposition.

Toute transformation Y de γ peut alors se construire au moyen des transformations X de γ_0

$$Y = \sum_{\nu=1}^{p} \theta_\nu X_\nu \qquad (p \leqq \nu_0),$$

θ_ν étant une expression qui commence par des termes du premier ordre.

D$_4$. Nous dirons, lorsqu'une telle égalité a lieu, que l'ensemble des X et de Y forme un *système d'ordre p. En particulier, lorsque p* = 1 *nous dirons que l'ensemble* (X, Y) *forme un couple.*

On sait le rôle fondamental joué par les fonctions θ dans la similitude des groupes. On retrouve ici une circonstance semblable. Les équations (G') [ou (L')] ne comprennent en effet que des termes du type

$$R^i_{jks}\xi^s_{,l}, \quad R^s_{jkl}\xi^i_{,s}, \quad R^i_{jkl,s}\xi^s.$$

Si l'on écrit ces équations pour une transformation Y et si l'on se borne à la considération des termes d'ordre zéro, on peut négliger dans les ξ tout terme d'ordre au moins égal à deux. C'est-à-dire que l'on peut substituer $\bar{\gamma}$ à γ. Les conditions obtenues concernent les *valeurs initiales des* R. *Mais l'*ensemble $\bar{\gamma}$ *demeurant le même dans le domaine d'un point quelconque, on peut lever cette dernière restriction.* Il restera à traduire en termes covariants la relation ainsi imposée aux R. Le cas le plus simple est celui dans lequel l'existence du groupe (Γ) exige que tous les R soient C. Le système admet alors le groupe projectif général; cette remarque permet d'éliminer un bon nombre de cas parasites.

On peut également, sans avoir recours à la covariance, lever la restriction qui concerne les valeurs initiales, si l'on est assuré que la tranformation du premier ordre considérée γ, demeure la même *dans le domaine d'un point quelconque.*

Il existe des transformations du premier ordre lorsque les équations de définition du groupe et leurs conséquences différentielles laissent indéterminés quelques-uns des $\xi^i_{,k}$. Supposons qu'au paramètre arbitraire λ corresponde une transformation du premier ordre T_λ. Les $\xi^i_{,k}$ que comporte T_λ dépendent d'une seule arbitraire et sont par conséquent liés par

(R) $\qquad (n^2 - 1)$ relations indépendantes

que l'on peut toujours supposer résolues

$$(r') \qquad \xi^i_{,j} = A^i_j \xi^\alpha_{,\beta} + B^i_{js}\xi^s, \qquad\qquad (r'') \qquad \xi^i/_j = A^i_j \xi^\alpha/_\beta + c^i_{js}\xi^s$$

$$(i, j = 1, 2, \ldots, n, \text{ sauf la combinaison } i = \alpha, j = \beta).$$

S'il existe un couple au second ordre près, le degré d'arbitraire compatible avec la résolution qui conduit aux relations $r'r''$ permet toujours de supposer que ce couple est $x_\beta p_\alpha + \ldots$. Les relations $r'r''$ donnent alors

$$(A_0) \qquad (A^i_j)_0 = 0.$$

Soit $\mathfrak{T}$ le tableau des coefficients des $\xi^i_{,j}$ dans les relations R. On peut en extraire $(n^2 - 1)$ déterminants à $(n^2 - 1)$ rangées. Soit d^u_v le déterminant obtenu en supprimant dans $\mathfrak{T}$ les coefficients de $\xi^u_{,v}$.

Les conditions A_0 se traduisent par

$$(d^i_j)_0 = 0, \qquad \text{quels que soient } i, j, \text{ sauf } d^\alpha_\beta.$$

En d'autres termes :

Δ_0. Il existe une substitution V_0 telle que tous les déterminants d, un seul excepté, aient une valeur initiale nulle.

Plus généralement, le nombre des termes du premier ordre qui figurent dans une transformation du premier ordre est égal au nombre des déterminants d à valeur initiale non nulle. Nous désignons par :

Δ. Conditions pour qu'il existe une substitution V telle que tous les déterminants d soient nuls, un seul excepté.

Si Δ est satisfaite, Δ_0 l'est aussi. Mais si Δ n'est pas satisfaite, les conditions r'' qui sont covariantes ne peuvent l'être, et il n'y a pas de couple. Il se peut évidemment que Δ_0 soit néanmoins satisfaite, car les réductions correspondantes ne portent que sur les termes de l'ordre le moins élevé; mais ces cas, que l'on peut obtenir à priori en raisonnant sur les termes de l'ordre le moins élevé, ne peuvent correspondre à aucun groupe défini comme appartenant à un système différentiel. On peut donc toujours supposer, pour les groupes qui intéressent ici, qu'aux conditions Δ_0 correspondent des conditions Δ.

Les conditions Δ valent évidemment dans le domaine d'un point quelconque; puisqu'elles ne font intervenir que les coefficients du système; il résulte de là qu'un *couple au second ordre près peut toujours être pris sous la même forme quel que soit le point considéré.* Les résultats qui dépendent de l'existence du couple et qui sont attachés au système vaudront donc, eux aussi, en général.

Mais, si l'on considérait *plusieurs* couples simultanément, on ne serait plus assuré de l'existence d'une *même* substitution V permettant de les ramener simultanément à une forme réduite. L'étude de $\bar{\gamma}$ conduira à une substitution V_0 permettant de ramener γ (et en particulier les couples qu'il contient) à une forme réduite, et c'est ainsi que nous procéderons pour l'application au cas $n = 3$. Mais nous ne pourrons plus alors déduire immédiatement d'une condition imposée aux valeurs initiales des R la même condition liant les R eux-mêmes.

La présente section ne considérant qu'un seul couple, on peut y supposer que ce couple conserve la même forme dans le domaine d'un point quelconque.

Nous ne reproduirons pas ici les calculs de type élémentaire qui permettent d'obtenir la forme imposée aux R par l'existence de certaines transformations du premier ordre; nous mentionnerons simplement (p. 291) les résultats utiles. On notera que ces conditions, qui sont nécessaires, sont, au moins en général, loin d'être suffisantes. Pour obtenir des conditions nécessaires et suffisantes, il eût fallu considérer les équations (G′) elles-mêmes, et par conséquent tenir compte des termes qui ont été remplacés par des points. Les paragraphes suivants fixent quelques cas généraux dans lesquels les conditions nécessaires qui résultent de l'examen des termes du premier ordre sont également suffisantes.

SECTION I. — LES TRANSFORMATIONS FORMANT COUPLE.

P$_{15}$. *Si un système* (G) *admet les deux transformations*

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i + \ldots \qquad (a_i,\ b_i,\ \textit{const.}),$$

$$Y = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i p_i\right)\left(\sum_{s=1}^{n} b_s x_s\right) + \ldots \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \neq 0\right),$$

on a nécessairement

$$\mathcal{Y} = \theta\, \mathcal{X}, \qquad \theta = \sum_{s=1}^{n} b_s x_s + \ldots; \qquad \text{avec } \mathcal{X} = X\ \mathcal{Y} = Y, \text{ ou bien } \mathcal{X} = (XY).$$

Ce qu'on peut exprimer brièvement en disant qu'*un couple au second ordre près est un vrai couple*.

La condition $\Sigma a_i b_i \neq 0$ permet de ramener les deux transformations envisagées à la forme

$$X = p_1,$$

$$Y = x_1 p_1 + \sum_{s=1}^{n} \xi^s p_s \qquad (\xi^i = \text{fonction du second ordre au moins}).$$

Les équations de définition du groupe, réduites aux termes d'ordre zéro donnent alors

$$(\xi^i_{,jk})_0 + \varepsilon^i_1 f^1_{jk} - (\varepsilon^1_j f^i_{,k} + \varepsilon^1_k f^i_{,j}) = \varepsilon^i_j \zeta_k + \varepsilon^i_k \zeta_j \tag{2}$$

et l'on en déduit les premiers termes du développement des ξ.

Un calcul simple montre alors que le crochet de Y avec

$$V = [Y(YZ)] - Z + (f^1_{11} + 2\zeta_1).Y,$$

étant du second ordre, doit disparaître

$$\{Y[Y(YZ)]\} = (YZ) \quad \text{avec} \quad Z = (XY) - X.$$

On en déduit successivement

$$(f^1_{11} + 2\zeta_1)_0 = 0, \qquad (f^i_{11})_0 = 0, \qquad [Y(YZ)] + (YZ) = 0.$$

Cette dernière condition permet d'étudier les ξ comme fonctions de x_1 et montre que ce sont des polynomes du second degré. La transformation

$$\{[p_1(p_1 Y)]Y\} - [p_1(p_1 Y)]$$

étant du second ordre doit disparaître : les ξ sont du premier degré en x_1, et il faut $[p_1(p_1 Y)] = 0$. L'application des mêmes principes permet enfin de démontrer l'existence d'un vrai couple

$$\mathfrak{X}, \quad \mathfrak{Y} = x_1\mathfrak{X}; \qquad (\mathfrak{X}\mathfrak{Y}) = \mathfrak{X} \quad \text{avec} \quad \mathfrak{X} = X \quad \text{ou} \quad \mathfrak{X} = (XY).$$

On établit, en suivant une marche semblable que

$\mathbf{P}_{16}$. *Si un système* (G) *admet les deux transformations :*

$$X = a_i p_i + \ldots \qquad (a_i,\ b_i,\ \textit{const.}),$$
$$Y = [\Sigma b_s x_s][\Sigma a_i p_i] + \ldots \qquad (\Sigma a_s b_s = 0),$$

cet ensemble est réductible à l'une des quatre formes

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} X = p_1, \qquad Y = x_0\left[p_1 + \varepsilon\, x_2 p_2 + \sum_{s=3}^{n} \eta^s(x_2, \ldots, x_n) p_s\right] \\ [(\varepsilon = 0 \text{ ou } 1;\ (X\,Y) = 0]; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} X = p_1 + x_2 p_2, \quad Y = x_2\left[p_1 + \frac{1}{2} x_2 p_2 + \sum_{s=3}^{n} \eta^s(e^{-x_1}x_2, x_3, \ldots, x_n) p_s\right] \\ [(X\,Y) = Y]; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} X = p_1 + x_2 p_2, \quad Y = x_2\left[p_1 + x_1 p_3 + \sum_{s=4}^{n} \eta^s(e^{-x_1}x_2, x_4, \ldots, x_n) p_s\right] \\ [(X\,Y) = Y + T_{23};\ (X\,T_{23}) = 0]; \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} X = p_1 + x_2 p_2, \quad Y = x_2\left[p_1 + x_1 p_3 + x_1^2 p_4 + \sum_{s=3}^{n} \eta^s(e^{-x_1}x_2, x_5, \ldots, x_n) p_s\right] \\ [(X\,Y) = Y + T_{23};\ (X\,T_{23}) = T_{24};\ (X\,T_{24}) = 0]. \end{cases}$$

En résumé, si un système (G) [*ou un système* (L)] *admet un couple au second ordre près :* X, $Y = \varphi X + \ldots$ (φ *étant du premier ordre*), *ce couple entraîne l'existence d'un vrai couple si* $(X\varphi)_0 \neq 0$.

Lorsque $(X\varphi)_0 = 0$ *on n'est plus assuré de l'existence d'un vrai couple. Cette circonstance se présente cependant certainement lorsqu'il existe déjà un vrai couple* Z, ψZ *avec* $Z(\psi) \neq 0$ *et de plus : ou bien* $Z(\varphi) \neq 0$, *ou bien* $X(\psi) \neq 0$.

La question se pose alors très naturellement de chercher à ramener les couples à la forme la plus simple. Les propositions précédentes la résolvent quand il s'agit d'un couple pris isolément. La réduction simultanée de plusieurs couples fera l'objet de la section suivante dans laquelle nous nous bornerons toutefois aux seuls vrais couples ($\mathbf{P}_{16}$).

SECTION II. — LA FORME CANONIQUE DES COUPLES.

Il résulte des considérations précédentes qu'à un groupe linéaire, envisagé comme groupe $\bar{\gamma}$ possible, correspondent un certain nombre de couples de Γ : X, $Y = \varphi X$. X désigne dans toute cette section une transformation d'ordre zéro; on l'appellera transformation de base du couple. φ est la fonction multiplicatrice; elle est, comme Y, du premier ordre. On se propose de déterminer les formules de structure qui lient entre elles les transformations X_i, X_k, Y_i, Y_k qui interviennent dans les couples.

Le résultat est le suivant :

$\mathbf{P}_{17}$. *Si un groupe* Γ *est admis par un système* G *ou par un système* L, *on peut* [*sauf un cas d'exception explicité ci-dessous*] *choisir les transformations de base* $X_i, \ldots, X_l$ *des différents couples* $Y_i = \varphi_i X_i$, *de telle façon que*

$$(X_i X_k) = 0, \qquad X_i(\varphi_k) = \text{const.}$$

La méthode employée est toujours la même. Outre la covariance, on utilisera le recours alternatif à des conditions imposées aux transformations tantôt par leurs équations de définition, et tantôt du fait même qu'elles forment un groupe. Le succès n'est d'ailleurs pas seul à justifier cette méthode : la proposition énoncée ne valant que pour des groupes admis par des systèmes différentiels, il est normal de tenir compte de cette hypothèse et de celle de l'existence d'un groupe d'une manière simultanée.

A. — Conditions d'existence et normalisation des couples.

Le couple : X, $Y = \varphi X$ satisfait toujours à la condition

$$(X, Y) = aX + bY \quad \text{ou équivalemment} \quad X\varphi = a + b\varphi \qquad (a, b, \text{constantes}).$$

On montre en effet aisément, soit en raisonnant sur le groupe, soit en utilisant les équations de définition, que la transformation $[(X\ Y) - aX - bY]$, qui appartient évidemment au groupe, doit disparaître. (a et b sont des constantes qui s'introduisent dans le développement en série des ξ.)

Il résulte d'ailleurs de l'origine de a et b que si a est nul b l'est aussi.

Mais il peut se faire que la transformation X intervienne dans plusieurs couples $Y_i = \varphi_i X$.

Les fonctions φ_i satisfont aux relations $X\varphi_i = a_i + b_i\varphi_i$. Et l'on obtient

$$(Y_i\ Y_k) = (a_k\varphi_i - a_i\varphi_k)X + (b_k - b_i)\varphi_i\varphi_k X.$$

La transformation $(b_k - b_i)\varphi_i\varphi_k X$ appartient donc au groupe; et, comme elle est du second ordre, on doit avoir

$$b_k = b_i = b \qquad \text{et, par suite,} \qquad X\varphi_i = a_i + b\varphi_i.$$

Si les a sont nuls, b l'est aussi.

S'il existe un a non nul, a_1 par exemple, on peut remplacer X par

$$\mathfrak{X} = X + \frac{b}{a_1}Y_1 = \left(1 + \frac{b}{a_1}\varphi_1\right)X.$$

On a alors

$$(\mathfrak{X}\ Y_1) = (X\ Y_1) = (X\ \varphi_1 X) = a_1\mathfrak{X} \qquad \text{avec} \qquad \mathfrak{X} = \left(1 + \frac{b}{a_1}\varphi_1\right)X.$$

Relativement à la transformation de base $\mathfrak{X}$, b est nul pour Y, et par suite pour tous les Y. La proposition $\mathbf{P}_{17}$ est alors établie.

$\mathbf{D}_5$. *Nous dirons qu'une transformation de base* X *est mise sous forme normale ou normalisée quand elle satisfait à* $(X\,\varphi X) = aX$. *Il n'y a qu'une seule forme normale si a est non nul, une infinité si a est nul.*

B. — Réduction des systèmes de deux couples.

On vient d'examiner le cas dans lequel deux ou plusieurs couples ont, à un facteur près, la même transformation de base. On considère maintenant le cas de deux couples dont les transformations de base sont différentes. Il convient de distinguer à nouveau deux cas selon que les fonctions multiplicatrices sont ou non fonctions d'une même variable.

1. — *Couples dont les fonctions multiplicatrices sont fonctions d'une même variable.*

Les transformations de base sont alors nécessairement distinctes. Dans le cas contraire il existerait une transformation du second ordre. En prenant pour variable x_1 la fonction multiplicatrice de l'un des deux couples, on se ramène, compte tenu de la normalisation, à

$$X_1 = a\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{n} \xi^s p_s, \qquad X_2 = \frac{b}{\varphi'}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{s=2}^{n} \eta^s p_s \qquad (a,\ b,\ \text{constantes});$$

$$Y_1 = x_1 X_1, \qquad Y_2 = \varphi X_2 \qquad (\varphi = x_1 + \beta x_1^2 + \ldots).$$

On forme aisément deux transformations appartenant au groupe et qui, étant du second ordre, doivent disparaître, savoir

$$(7)\quad (X_1\,Y_2) + (X_2\,Y_1) - a(1 + 2\beta\varphi)X_2 - b(1 - 2\beta x_1)X_1$$

$$(8)\quad = (\varphi - x_1)(X_1\,X_2) + a[\varphi' - (1 + 2\beta\varphi)]X_2 + b\left[\frac{1}{\varphi'} - 1 + 2\beta x_1\right]X_1 = 0,$$

$$(9)\quad (Y_1\,Y_2) - a\varphi X_2 + b x_1 X_1$$

$$= x_1\varphi(X_1\,X_2) + a(x_1,\ \varphi' - \varphi)X_2 + b\left(x_1 - \frac{\varphi}{\varphi'}\right)X_1 = 0.$$

Si $a = 0$, $b = 0$, (8) donne $(X\,X_2) = 0$. On a d'autre part

$$X_k(x_1) = 0, \qquad X_k(\varphi) = 0 \qquad (k = 1,\ 2).$$

$\mathbf{P}_{17}$ est établie.

Si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ (ou $ab \neq 0$), la comparaison de (8) et (9) conduit, puisqu'on ne peut avoir aucune relation $X_1 = \psi(x_1).X_2$, à l'une au moins des deux équations

$$(10) \quad x_1^2\varphi' + \varphi[\varphi - 2x_1(1+\beta\varphi)] = 0, \qquad \frac{\varphi^2}{\varphi'} + x_1^2 - 2x_1\varphi + 2\beta x_1^2\varphi = 0.$$

Mais la seule fonction régulière du type $\varphi = x_1(1+\ldots)$, solution de l'une des équations (10), est la même pour ces deux équations, savoir

$$\varphi = \frac{x_1}{1-\beta x_1}.$$

Pour poursuivre la discussion on supposera par exemple $a \neq 0$. (Si l'on avait $a = 0$, $b \neq 0$, il suffirait de prendre φ pour variable x_1.) Une substitution sur les x d'indice différent de 1 permet alors d'annuler les ξ d'indices correspondants et le groupe comporte les quatre transformations

$$X_1 = p_1, \qquad X_2 = b(1-\beta x_1)^2 p_1 + Z \qquad \text{avec} \qquad Z = \sum_{s=2}^{n} \eta^s p_s.$$

$$Y_1 = x_1 p_1, \qquad Y_2 = b x_1(1-\beta x_1)p_1 + \frac{x_1}{1-\beta x_1} Z,$$

$$(Y_1 T) - T = x_1^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} \qquad \text{avec} \qquad T = (Y_1 X_2) + X_1, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2} = 0.$$

Et alors $[(Y_1 Y_2) - Y_2 + bY_1]$ permet d'achever la détermination de

$$Z = (1-\beta x_1)B \qquad \left(\frac{\partial B}{\partial x_1} = 0\right).$$

Il en résulte que le groupe contient les quatre transformations

$$p_1, \quad x_1 p_1; \qquad B, \quad x_1 B - b\beta x_1^2 p_1 \qquad (p_1 B) = 0.$$

S'il existe d'autres couples construits avec une fonction de x_1, il leur correspondra semblablement des ensembles de transformations

$$C, \quad x_1 C - c\gamma x_1^2 p_1 \qquad (p_1 C) = 0.$$

Si tous les produits $c\gamma$ sont nuls, tous les couples analogues X_2, Y_2 se réduisent au type B, x_1 B.

Il n'y a alors qu'une seule fonction multiplicatrice, x_1, et les transformations de base p_1, B, C... sont permutables entre elles.

Si $b\beta \neq 0$, on prendra pour nouvelles transformations de base

$$\left.\begin{aligned} X'_1 &= X_1 - \beta Y_1 = (1-\beta x_1)p_1 \\ X'_2 &= (X_2 + \beta Y_2) = b(1-\beta x_1)p_1 + B \end{aligned}\right\} \quad \begin{array}{c}\text{ou}\\ \text{équivalement}\end{array} \quad \left\{\begin{aligned} X'_1 &= (x_1+k)p_1; \\ X'_2 &= (x_1+k)p_1 + p_2, \end{aligned}\right.$$

qui sont permutables.

Tout autre couple est alors réductible à la forme C, x_1C et satisfait à la condition $(BC) + C \equiv 0$. Cette condition permet de ramener l'ensemble des couples à la forme

$$(\mathcal{E})\left\{\begin{array}{lllll} X_1 = p_1, & X_2 = p_2, & X_i = e^{-x_2}Z_i, & (p_1 Z_i) = 0, & (p_2 Z_i) = 0, \\ Y_1 = e^{-(x_1+x_2)}p_1, & Y_2 = e^{(x_1+x_2)}p_2; & Y_i = e^{x_1}\,Z_i, & Z_1(e^{x_1+x_2}) = 0, & (X_i X_k) = 0. \end{array}\right.$$

Les conditions $(X_i X_k) = 0$ résultent de ce que ces transformations sont bases de couples normalisés.

Il existe effectivement des systèmes qui admettent de pareils ensembles de couples.

2° *Couples dont les transformations de base sont distinctes et dont les fonctions multiplicatrices sont indépendantes :*

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha p_1 + \xi^2 p_2 + \sum_{s=3}^{n} \xi^s p_s, & X_2 &= \eta^1 p_1 + \beta p_2 + \sum_{s=3}^{n} \eta^s p_s, \\ Y_1 &= x_1 X_1, & Y_2 &= x_2 X_2. \end{aligned}$$

La réduction à la forme normale étant supposée effectuée, α et β sont constants.

La méthode consiste à extraire du tableau des crochets des quatre transformations X_1, X_2, Y_1, Y_2 entre elles une combinaison qui, étant du second ordre, doit disparaître : les équations de définition de ξ^2 et η^1 permettent d'évaluer cet ordre sans former explicitement les transformations. Nous résumons dans le tableau suivant les résultats d'une discussion assez longue.

$X_1, \quad Y_1 = \varphi_1 X_1; \qquad X_1(\varphi_1) = \alpha \quad (X_1 Y_1) = \alpha X_1. \qquad\qquad X_2, \quad Y_2 = \varphi_2 X_2; \qquad X_2(\varphi_2) = \beta \quad (X_2 Y_2) = \beta X_2.$

Hypothèses.	Conditions qui en résultent nécessairement pour la structure.	Choix qu'il convient de faire des transformations pour vérifier la proposition $\mathbf{P}_{17}$.
1. $X_1(\varphi_2) = 0 \quad X_2(\varphi_1) = 0$	$(X_1 X_2) = 0$	
2. $X_1(\varphi_2) = 0 \quad X_2(\varphi_1) \neq 0$ $X_2[X_2(\varphi_1)] = 0$	$(X_1 X_2) = 0$	
3. $X_1(\varphi_2) = 0 \quad X_2(\varphi_1) \neq 0$ $X_2[X_2(\varphi_1)] \neq 0$	$[X_1(X_1 X_2)] = 0 \qquad [X_2(X_1 X_2)] = 0$	$X'_1 = \dfrac{X_2[X_2(\varphi_1)]}{2 X_2(\varphi_1)} X_1 \,[= (X_1 X_2)]$ $\varphi'_1 = 2\varphi_1 \dfrac{X_2(\varphi_1)}{X_2[X_2(\varphi_1)]} \qquad X'_1(\varphi'_1) = \alpha$
4. $X_1(\varphi_2) \neq 0 \quad X_2(\varphi_1) \neq 0$ $(\alpha\beta \neq 0)$	$(X_1 X_2) = 0$	
5. $X_1(\varphi_2) \neq 0 \quad X_2(\varphi_1) \neq 0$ $\alpha = 0$ (β **nul ou non**)	$[X_1(\varphi_2)][X_2(\varphi_1)] = B_0(1 + \lambda\varphi_1)(1 + \mu\varphi_2)$ $[X_1(X_2 X_1)] = 2 B_0 \lambda\mu X_1 \quad [X_2(X_1 X_2)] = 2 B_0 \lambda\mu X_2$	$X'_1 = (1 + \lambda\varphi_1) X_1 \qquad X'_2 = (X'_1 Y_2) = B_0 \dfrac{(1 + \lambda\varphi_1)^2}{X_2(\varphi_1)} X_2$ $\varphi'_1 = \dfrac{\varphi_1}{1 + \lambda\varphi_1} \qquad \varphi'_2 = \dfrac{\varphi_2[X_2(\varphi_1)]}{B_0(1 + \lambda\varphi_1)^2}$ $X'_1(\varphi'_1) = X_1(\varphi_1) = 0 \quad X'_2(\varphi'_2) = X_2(\varphi_2) = \beta \quad (X'_1 X'_2) = 0$

C. — Réduction simultanée des couples d'un groupe qui ne comporte pas de système $\mathcal{E}$.

1. *Détermination intrinsèque des couples.*

Considérons l'ensemble de tous les couples relatifs à une même transformation de base X; $\varphi_1 X, \ldots, \varphi_k X$; les couples peuvent, comme on l'a vu, être normalisés simultanément et deux cas peuvent se présenter.

D$_6$. *Ou bien* $X(\varphi_\alpha) = 0$ *quel que soit* α. *Nous dirons alors que* X *est intrinsèquement indéterminé ou bien en abrégé, que* X *est* **i. i.**

Ou bien il existe des valeurs de α *pour lesquelles* $X(\varphi_\alpha) \not\equiv 0$ (et comme pour les couples normalisés ces valeurs sont des constantes, on peut supposer qu'il n'en existe qu'une). *Nous dirons alors que* X *est intrinsèquement déterminé, ou en abrégé que* X *est i. d.*

On aperçoit immédiatement la portée de ces dénominations. Si $X(\varphi_\alpha) = 0$ quel que soit α, on peut prendre pour transformation de base l'une quelconque des $\varphi_\alpha X$ à la place de X sans que l'ensemble cesse d'être normalisé. Si, au contraire, l'un des $X(\varphi_\alpha)$ est non nul et si l'on prend $\varphi_\alpha X$ pour transformation de base, la normalisation est détruite et on devra l'effectuer à nouveau relativement au choix $\varphi_\alpha X$. En d'autres termes, lorsque la normalisation demeure invariante par le choix de la transformation de base, nous dirons celle-ci i. i., et nous la dirons i. d. dans le cas contraire.

Enfin nous disons qu'il y a détermination ou indétermination intrinsèque de X, parce que nous envisageons ici les fonctions multiplicatrices φ_α qui sont relatives à X elle-même. Le choix définitif de l'une des $\varphi_\alpha X$ comme transformation de base dépendra évidemment des autres couples existant dans le groupe; et ce second principe de détermination est, lui, extrinsèque à X.

La distinction entre les deux catégories i. i. et i. d. est encore précisée par la proposition suivante.

P$_{18}$. *Pour que* X *soit i. i., il est nécessaire que* $X(\psi) = 0$, ψ *étant une fonction multiplicatrice d'un couple quelconque.*

Lorsqu'il existe ψX, c'est-à-dire lorsque la fonction multiplicatrice ψ est relative à X elle-même, la proposition se réduit à la définition. Nous supposons donc que ψ est relative à une transformation distincte de X et que la fonction multiplicatrice relative à X n'est pas elle-même fonction de ψ. On peut donc prendre X_1, $x_1 X_1$; X_2, $x_2 X_2$. Et en supposant que, par exemple, X_2 soit i. i., on est conduit à poser (comme p. 247)

$$X_1 = \alpha p_1 + \zeta p_2 + \sum_{s=3}^{n} \xi^s p_s, \qquad X_2 = \eta p_1 + \sum_{s=3}^{n} \eta^s p_s \qquad (\eta \neq 0).$$

η n'est autre que $X_2(\varphi_1)$ et doit être supposé non nul : dans le cas contraire la proposition serait établie.

Il suffit de reprendre les calculs dont le tableau de la page 248 résume les résultats pour montrer qu'il existe alors dans le groupe une transformation ΨX_2 avec $X_2(\Psi) \neq 0$. Par suite X_2 serait i. d., contrairement à l'hypothèse.

2. *Les transformations de base* X *peuvent être choisies de telle façon qu'elles soient toutes permutables entre elles.*

a. Soient deux transformation X_1, X_2, *i. d. et mises sous forme normale.* — Le cas des systèmes $\mathcal{E}$ étant exclu, les fonctions multiplicatrices associées à X_1 et X_2 sont ou bien identiques ou bien indépendantes. Dans le premier cas, on pourra remplacer X_2 par $X'_2 = X_2 + kX_1$ de telle façon que X_2 soit i. i. Nous supposons donc indépendantes les fonctions multiplicatrices que nous pouvons par conséquent prendre pour x_1 et x_2. Alors (*cf.* p. 248) on a nécessairement

$$(14) \qquad (X_1 X_2) = \lambda X_1 \quad \text{ou bien} \quad (X_1 X_2) = \mu X_2,$$

$\lambda\, \mu$ ne sont pas nécessairement constants, et en toute hypothèse

$$(15) \qquad [X_1(X_1 X_2)] = 0, \qquad [X_2(X_1 X_2)] = 0,$$

c'est-à-dire que, si X_1 et X_2 ne sont pas permutables, il suffit de substituer à l'une d'entre elles le crochet $(X_1 X_2)$ pour réaliser cette condition : il y a d'ailleurs conservation de la forme normale.

Puisqu'on peut toujours réduire un ensemble de deux transformations i. d., il suffit donc d'établir que si l'on suppose réduit l'ensemble $X_1, \ldots, X_p$, on peut réduire l'ensemble $X_1, \ldots, X_p$, X. Les crochets de X avec l'un des $X_1, \ldots, X_p$ ne peuvent être que l'un des deux types (14). Nous distinguerons ces deux cas par des indices de nature différente

$$(X_j X) = a_j X_j, \qquad (X_\alpha X) = a_\alpha X.$$

Les X_j, X_α représentent, dans leur ensemble $X_1, \ldots, X_p$, et sont toutes, par hypothèse, permutables entre elles.

L'identité de Jacobi conduit respectivement aux conditions

$$(16) \quad \overline{X_j X_k X}, \quad X_j(a_k) = 0, \quad X_k(a_j) = 0 \quad (j \neq k); \quad X_\alpha(a_k) = 0, \quad X_k(\alpha_\alpha) = 0.$$

Les conditions du type (15) donnent semblablement

$$[X_j(X_j X)] = 0, \qquad X_j(a_j) = 0, \qquad [X(X_j X)] = (X\, a_j X_j) = 0.$$

Pour toute valeur de j pour laquelle a_j n'est pas nul, remplaçons X_j par $X'_j = a_j X_j$. La fonction multiplicatrice $\varphi'_j = \frac{\varphi_j}{a_j}$ relative à X'_j répond à la condition

$$X'_j(\varphi'_j) = a_j X_j\left(\frac{\varphi_j}{a_j}\right) = X_j(\varphi_j).$$

Les X'_j restent normalisées. D'autre part, d'après (16),

$$(X'_j X'_k) = (a_j X_j a_k X_k) = a_j a_k (X_j X_k) = 0,$$
$$(X'_j X_\alpha) = (a_j X_j X_\alpha) = a_j (X_j X_\alpha) = 0.$$

On peut donc supposer nuls tous les a_j

$$(X_j X) = 0, \quad \ldots, \quad (X_l X) = 0; \qquad (X_\alpha X) = a_\alpha X, \quad \ldots, \quad (X_\lambda X) = a_\lambda X;$$
$$(17) \quad \overline{X_\alpha X_k X} \text{ donne } X_k(a_\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad [X(X_\alpha X)] = 0 \text{ donne } X(a_\alpha) = 0.$$

On réduira les a d'indice grec à être nuls en procédant de proche en proche. Si $a_\alpha \neq 0$ on prend $X' = a_\alpha X$. On montre, comme ci-dessus, qu'en vertu de (17) la transformation X′ demeure permutable avec chacun des X_j et normalisée. On aura en outre

$$(X' X_\alpha) = 0, \qquad (X' X_\beta) = (a_\alpha X\, X_\beta) = [a_\alpha a_\beta - X_\beta(a_\alpha)] X = a'_\beta X.$$

On est donc dans les mêmes conditions avec X' ou avec X, mais le premier des a_α est annulé. Un nombre suffisant d'opérations permettra de les annuler tous.

b. Soit maintenant Z, ψZ *un couple i. i.*; X_i, $\psi_i X_i$ *désignant un quelconque des couples i. d.* — Les crochets des Z entre elles sont nuls, puisque la condition $Z(\psi) = 0$ entraîne

$$(\psi_i Z_i \, \psi_k Z_k) = \psi_i \psi_k (Z_i Z_k).$$

Il reste à montrer qu'on peut annuler les $(X_i Z)$. $Z(\varphi_i)$ étant nul, puisque Z est i. i., il résulte du tableau page 248

$$(18) \quad (X_j Z) = \lambda_j Z, \qquad [X_j(X_j Z)] = 0, \qquad [Z(X_j Z)] = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Comme on peut prendre nul l'un des λ, par exemple λ_1 relatif au système des deux couples X_1 et Z, il suffit de montrer que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont nuls on peut annuler λ_{k+1} supposé d'abord non nul. Prenons $Z' = (X_{k+1} Z) = \lambda_{k+1} Z$.

$$(X_i Z') = [X_{k+1}(X_i Z)] + [Z(X_{k+1} X_i)] = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$
$$(X_{k+1} Z') = [X_{k+1}(X_{k+1} Z)] = 0, \qquad \text{d'après (18)}.$$

D'autre part, la nouvelle fonction multiplicatrice $\psi' = \dfrac{\psi}{\lambda_{k+1}}$ donne

$$Z'(\psi') = -\frac{\psi}{\lambda_{k+1}} Z(\lambda_{k+1}) = 0.$$

On est donc bien dans les mêmes conditions avec Z' qu'avec Z, mais on a annulé λ_{k+1}.

3. *Réduction à une forme canonique des* X *i. d. et indépendantes (c'est-à-dire linéairement distinctes) et des couples qui leur correspondent.*

a. Le groupe comporte toutes les $x_i p_i$. ($i = 1, 2, \ldots, m$. — Les conditions $(X_i X_k) = 0$ permettent de poser

$$X_i = p_i \qquad (i = 1, 2, \ldots m).$$

A chacune de ces transformations correspond une fonction multiplicatrice φ_i telle que l'on ait

$$X_i(\varphi_i) = 1, \quad X_j[X_k(\varphi_i)] = 0 \quad (^1), \qquad [X_k(\varphi_i)][X_i(\varphi_k)] = \text{const.},$$

d'où

$$X_i = p_i, \qquad Y_i = \varphi_i X_i = \left(x_i + \sum_{s=1}^{m} a_s^i x_s + b_i\right) p_i$$

$$(a_i^i = 0;\ a_k^i b_i \text{ indépendantes de } x_1, \ldots, x_m;\ a_k^i a_i^k = \text{const.})$$

$$(Y_i Y_k) + [Y_i(Y_i Y_k)] + 2(a_k^i a_i^k) Y_i = 2 a_i^k \varphi_i X_k.$$

Par conséquent, toutes les transformations $U_i^k = a_i^k \varphi_i X_k$ appartiennent au groupe.

Envisageons alors

$$X_1 = p_1, \qquad Y_1 = (x_1 + a_s^1 x_s + b_1) p_1$$

et séparons les autres transformations en deux groupes que nous distinguerons par des indices grecs ou latins.

α. Les $X_\alpha Y_\alpha$ désigneront les couples tels que $a_\alpha^1 a_1^\alpha = 0$.

Si $a_\alpha^1 = 0$ et $a_1^\alpha = 0$, φ_1 est indépendante de X_α et Y_α indépendante de x_1.

Si $a_\alpha^1 \neq 0$ et $a_1^\alpha = 0$, il existe $a_\alpha^1 \varphi_\alpha X$, et l'on peut substituer à $\varphi_1 X_1$ la transformation $(\varphi_1 - a_\alpha^1 \varphi_\alpha) X_1$ dans laquelle la fonction multiplicatrice a la même forme que φ_1, mais ne contient plus x_α; φ_α ne contient d'ailleurs pas x_1. Remarques analogues si $a_\alpha^1 = 0$ $a_1^\alpha \neq 0$.

Si donc il n'existe que des indices grecs, on pourra remplacer Y_1 par $Y_1' = (x_1 + b_1) p_1$, et la substitution $y_1 = z_1 + b_1$ ramène le couple X_1, Y_1 à p_1, $x_1 p_1$.

β. Les $X_k Y_k$ désigneront les couples tels que $a_k^1 a_1^k \neq 0$.

Comme il existe $(X_1 Y_k) = a_1^k p_k$, la substitution $x_k = a_1^k y_k$ permet de conserver formellement la même transformation de base $\dfrac{\partial f}{\partial y_k}$ tout en sup-

---

(1) Un calcul simple établit que $X_j[X_k(\varphi_i)] = 0$ chaque fois que $X_i X_j X_k$ sont permutables.

posant $a_1^k = X_k(\varphi_1) = 1$. La condition $a_1^k a_k^1 =$ const. exige $a_k^1 =$ const., en sorte que le groupe comprend $\varphi_1 X_k$, $\varphi_k X_1$. S'il existe deux indices latins au moins, on forme

$$(\varphi_k X_1\ \varphi_1 X_l) = \varphi_k X_l - a_l^k \varphi_1 X_1, \qquad (\varphi_l X_1\ \varphi_1 X_k) = \varphi_l X_k - a_k^l \varphi_1 X_1,$$

Si $a_l^k = 0$ il reste $\varphi_k X_l$; si $a_l^k \neq 0$, il existe $a_l^k \varphi_l X_k$, et par suite

$$a_l^k \varphi_l X_k - (a_l^k)_0 [\varphi_l X_k - a_k^l \varphi_1 X_1] - (a_l^k a_k^l)_0 \varphi_1 X_1.$$

Cette transformation étant du second ordre, on en conclut $a_l^k =$ const. et il existe encore $\varphi_k X_l$.

En résumé, les a_l^k sont des constantes et le groupe contient tous les $\varphi_k X_l$, l'indice 1 jouant ici le rôle d'un indice latin.

Désignons par $\overline{\varphi_i}$ l'ensemble des termes d'indices latin contenus dans φ_i, et supposons pour fixer les idées que les indices latins soient $1, 2, \ldots, p$. Si parmi les formes $\overline{\varphi_1}\,\overline{\varphi_2}, \ldots, \overline{\varphi_p}$, q seulement étaient indépendantes $(q < p)$, on pourrait prendre ces q formes indépendantes pour variables $x_1\, x_2, \ldots, x_q$. Chacune des fonctions φ_i étant multiplicatrice pour tous les p_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ cette circonstance est invariante par ce changement de variables.

Les transformations d'indice latin s'écrivent donc

$$p_k, \quad T_{ik} = \left(x_i + \sum_{\sigma=p+1}^{m} a_{k\sigma}^i x_\sigma + b_{ik} \right) p_k \quad (k = 1, 2, \ldots, p;\ i = 1, 2, \ldots, q;\ q < p).$$

Par suite, toutes les transformations de base $p_{q+1}, \ldots, p_p$ seraient i. i. et non pas i. d., contrairement à l'hypothèse.

Les formes $\overline{\varphi_i}$ étant indépendantes, le groupe contient toutes les transformations $T_{ik}(i, k = 1, 2, \ldots, p)$. Les indices ik prennent au moins deux valeurs, puisqu'on a supposé l'existence d'indices latins distincts de 1,

$$(T_{ii} T_{ik}) = (x_i + a_{i\sigma}^i x_\sigma + b_{ii}) p_k.$$

Cette transformation peut jouer le rôle de T_{ik}, et si l'on effectue la substitution

$$y_i = x_i + a_{i\sigma}^i x_\sigma + b_{ii}, \tag{19}$$

il vient, en désignant par un accent les nouvelles valeurs

$$T'_{ik} = x_i p_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots, p), \qquad X'_\alpha = p_\alpha + \sum_{s=1}^{p} a^s_{s\alpha} p_s;$$

$$U'^k_\alpha = a^k_{k\alpha} \varphi'_\alpha p_k \qquad\qquad \varphi'_\alpha = x_\alpha + \sum_{s=1}^{p} a^s_{s\alpha} x_s + \sum_{\sigma=p+1}^{m} a'^\alpha_\sigma x_\sigma.$$

En formant les combinaisons

$$(X'_\alpha T'_{kk}), \qquad X'_\alpha - \sum_{k=1}^{p} (X'_\alpha T'_{kk}) = \overline{X_\alpha}, \qquad \varphi'_\alpha X'_\alpha - \sum_{k=1}^{p} U'^p_\alpha \qquad (T'_{kk}\ \varphi'_\alpha \overline{X_\alpha}),$$

on voit qu'après la substitution (19) le groupe comporte les couples

$$p_k, \quad x_i p_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, p);$$

$$X_\alpha = p_\alpha, \qquad \left(x_\alpha \sum_{\sigma=p+1}^{m} a'^\alpha_\sigma x_\sigma\right) p_\alpha = \overline{\varphi_\alpha} \overline{X_\alpha} \qquad (\alpha = p+1, \ldots, m).$$

On peut donc opérer sur les indices grecs (c'est-à-dire ceux dont la valeur est supérieure à p), comme on a opéré initialement sur l'ensemble des indices.

L'ensemble des indices $1, 2, \ldots, m$ se sépare donc en un certain nombre de systèmes

$$i_1 j_1 \ldots k_1, \quad i_2 j_2 \ldots k_2, \quad \ldots, \quad i_p j_p \ldots k_p.$$

Le groupe comporte toutes les transformations $x_{i_q} y_{j_q}$ dont les deux indices appartiennent à un même système.

Pour déterminer les transformations qui correspondent à deux indices de systèmes différents, nous reprendrons l'analyse à un autre point de vue. Retenons à cet effet l'existence de toutes les $x_i p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

b. On peut faire un choix des X *i. d. tel que toute fonction multiplicatrice qui leur est associée réponde à* $X_k(\varphi_j) = \text{const.}$ — Etant donnée une transformation φp_i, on voit immédiatement, en formant ses crochets avec $x_i p_i$, qu'elle se décompose en $a^i_k x_k p_i$, $b_i p_i$; a^i_k, b_i étant indépendants de $x_1, \ldots, x_m$. L'existence simultanée des transformations p_i, $a_k^i p_i$, $x_k a_k^i p_i$ conduit aux conditions

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^j_{\alpha\beta} = \varepsilon^j_\alpha \rho^j_\beta + \varepsilon^j_\beta \rho^j_\alpha, \qquad f^\alpha_{j\beta} = \varepsilon^\alpha_j \rho_\beta + \varepsilon^\alpha_\beta \rho_j, \qquad \dfrac{a^i_{k,\alpha}}{a^i_k} = \rho^i_\alpha - \rho^k_\alpha \\ \qquad\qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, m;\ \alpha, \beta \text{ quelconques}). \end{array} \right.$$

Il peut y avoir parmi $1, 2, \ldots, m$ des indices h relativement auxquels $a_i^h = 0$, $a_h^i = 0$ quel que soit i.

L'indice h compose alors à lui seul un système partiel auquel correspondent les seules transformations p_h, $x_h p_h$. On a

$$X_h(x_h) = 1, \qquad X_j(x_h) = 0.$$

Nous laisserons ces indices de côté et considérerons le tableau des a_k^i dont la diagonale est 1

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & a_1^2 & \ldots & a_1^m \\ a_2^1 & 1 & \ldots & \ldots \\ \ldots & . & \ldots & \ldots \\ a_m^1 & \ldots & \ldots & 1 \end{array} \right|.$$

Nous dirons avoir ordonné une suite des quantités

$$a_i^s \quad (i \text{ fixe};\ s \text{ prenant plusieurs valeurs successives}),$$
$$a_s^k \quad (k \text{ fixe};\ s \text{ prenant plusieurs valeurs successives}).$$

lorsque toutes les quantités a_i^s (ou a_s^k) nulles ont un indice s supérieur à l'indice s de toute quantité a_i^s (ou a_s^k) non nulle. En d'autres termes, pour le fragment de rangée (ligne ou colonne) considérée dans le tableau des a_k^i, tout a_i^s nul est, après l'ordination, à droite de tout a_i^s non nul; tout a_s^k nul est, après l'ordination, au-dessous de tout a_s^k non nul. Considérons la première ligne et la première colonne, et ordonnons celle de ces deux rangées qui comporte le plus d'éléments non nuls.

Si, par exemple, on a à ordonner la première ligne, on effectuera une permutation des colonnes $2, 3, \ldots, m$, et bien entendu la permutation corrélative dans les lignes $2, 3, \ldots, m$, la première ligne demeurant, dans son ensemble, inchangée. On aura alors

$$a_1^2,\ a_1^3,\ \ldots,\ a_1^{p_1} \neq 0; \qquad a_1^{p_1+1} = 0, \quad a_1^{p_1+2} = 0, \quad \ldots, \quad a_1^m = 0$$

ou bien

$$a_2^1,\ a_3^1,\ \ldots,\ a_{p_1}^1 \neq 0; \qquad a_{p_1+1}^1 = 0, \quad a_{p_1+2}^1 = 0, \quad \ldots, \quad a_m^1 = 0.$$

Et $p_1 \geqq 2$, car, dans le cas contraire, l'indice 1 serait du type h. L'ordination de la première ligne étant ainsi effectuée, il peut se faire que le fragment

$$a^1_{p_1+1}, \quad a^1_{p_1+2}, \quad \ldots, \quad a^1_m \qquad (\text{ou } a_1^{p_1+1}, a_1^{p_1+2}, \ldots, a_1^m)$$

de la première colonne (ligne) comporte des a non nuls. On ordonnera ce fragment, ce qui exige une permutation des lignes (colonnes) p_1+1, p_1+2, ..., m et la permutation corrélative dans les colonnes (lignes) p_1+1, p_1+2, ..., qui commencent toutes par zéro. On aura alors

$$a^1_{p_1+1}, a^1_{p_1+2}, \ldots, a^1_{q_1} \neq 0; \qquad a^1_{q_1+1} = 0, \quad a^1_{q_1+2} = 0, \quad \ldots, \quad a^1_m = 0$$

ou bien

$$a_1^{p_1+1}, a_1^{p_1+2}, \ldots, a_1^{q_1} \neq 0; \qquad a_1^{q_1+1} = 0, \quad a_1^{q_1+2} = 0, \quad \ldots, \quad a_1^m = 0.$$

La substitution

$$\left.\begin{aligned} y_k &= a_1^k x_k \quad (k=2, \ldots, p_1) \\ y_l &= \frac{x_l}{a_l^1} \quad (l = p_1+1, \ldots, q_1) \end{aligned}\right\} \text{ ou bien } \left\{\begin{aligned} y_k &= \frac{x_k}{a_k^1} \quad (k=2, \ldots, p_1) \\ y_l &= a_1^l x_l \quad (l = p_1+1, \ldots, q_1) \end{aligned}\right.$$

ramène alors les a_k^i qui y figurent à être des constantes; les conditions (20) donnent par conséquent, dans l'hypothèse des lignes comme dans celle des colonnes,

$$(\mathbf{A}_1) \qquad \rho_l^1 = \rho_l^\lambda \qquad (\lambda = 2, \ldots, q_1;\ q_1 \geqq 2).$$

Il en résulte que tous les a_k^i dont les deux indices sont au plus égaux à q_1 — en d'autres termes ceux qui sont inscrits dans le carré formé par les q_1 premières rangées (lignes et colonnes) et que nous désignerons par T_1 — sont des constantes. De plus, extérieurement à T_1, la première ligne et la première colonne de (T) ne comprennent que des éléments nuls. On opère alors sur les deux secondes rangées, comme on a opéré sur les deux premières. C'est-à-dire qu'on effectue successivement l'ordination des fragments des deux secondes rangées extérieures à T_1. On aura par exemple

$$a_2^{q_1+2}, a_2^{q_1+2}, \ldots, a_2^{p_2} \neq 0; \qquad a_2^{p_2+1} = 0, \quad \ldots, \quad a_2^m = 0$$

ou bien

$$a^2_{q_1+1}, a^2_{q_1+2}, \ldots, a^2_{p_2} \neq 0; \qquad a^2_{p_2+1} = 0, \quad \ldots, \quad a^2_m = 0.$$

On effectue la substitution, d'ailleurs compatible avec celle qui a été déjà effectuée

$$y_k = a_2^k x_k \quad (k = q_1 + 1, \ldots, p_2); \qquad y_l = \frac{x_l}{a_l^2} \quad (l = p_2 + 1, \ldots, q_2),$$

et l'on en conclut comme précédemment, par application de (20),

$$(\mathbf{B}_2) \qquad \rho_l^2 = \rho_l^\lambda \qquad (\lambda = q_1 + 1, \ldots, q_2).$$

Si, extérieurement à T_1, les deux secondes rangées étaient nulles on considérerait les deux troisièmes rangées, ce qui conduirait à

$$(\mathbf{B}_3) \qquad \rho_l^3 = \rho_l^\lambda \qquad (\lambda = q_1 + 1, \ldots, q_3).$$

On voit donc que s'il existe, extérieurement à (T_1), des a_k^i non nuls appartenant à l'une des q_1 premières rangées — disons la $p^{\text{ième}}$ — on aura des relations

$$(\mathbf{B}_p) \qquad \rho_l^p = \rho_l^\lambda \qquad (\lambda = q_1 + 1, \ldots, q_p;\ p \leqq q_1)$$

qui se soudent aux relations (A_1) et donnent par conséquent

$$(\mathbf{A}_2) \qquad \rho_l^1 = \rho_l^\lambda \qquad (\lambda = 1, \ldots, q_p).$$

La conclusion qui valait pour T_1 vaut donc pour le tableau T_2 formé par les q_p premières rangées; et, extérieurement à T_2, les p premières rangées (lignes et colonnes) sont identiquement nulles. On ordonnera alors les deux rangées d'ordre $p+1$, ce qui conduira à un tableau T_3, et ainsi de suite.

S'il est toujours possible de former un tableau empiétant sur le précédent, le dernier tableau coïncidera avec (T) et, les égalités A valant pour tous les indices, tous les a_k^i seront des constantes.

Si un tableau (T_P) déterminé ne peut être dépassé, c'est qu'extérieurement à lui les rangées qui le composent sont identiquement nulles

$$(\mathbf{T}) \quad \left|\begin{array}{cc|cc} 1 & a_1^{\mathrm{P}} & 0 & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{(\mathbf{T}_\mathrm{P})} & & \\ a_\mathrm{P}^1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & a_{\mathrm{P}+1}^m \\ \cdot & & \multicolumn{2}{c}{(\mathbf{T}')} \\ 0 & 0 & a_m^{\mathrm{P}+1} & 1 \end{array}\right|, \qquad (\mathbf{T}') \quad \left|\begin{array}{cccc} 1 & a_{\mathrm{P}+1}^{\mathrm{P}+2} & \ldots & a_{\mathrm{P}+1}^m \\ a_{\mathrm{P}+2}^{\mathrm{P}+1} & 1 & \ldots & a_{\mathrm{P}+2}^m \\ \ldots & \cdot & \ldots & \ldots \\ a_m^{\mathrm{P}+1} & \cdot & \ldots & 1 \end{array}\right|.$$

Les indices qui figurent dans le tableau (T′) sont alors tous distincts des indices qui figurent dans le tableau T_P. Les a^i_k $(i, k \leqq P)$ ayant été ramenés à des constantes, il n'y a plus à s'occuper en ce qui concerne (T′) des variables $x_1, \dots, x_P$. En reprenant sur (T′) et relativement à $x_{P+1}, \dots, x_m$ le raisonnement fait sur (T), on établira que tous les a^i_k non nuls qui y figurent peuvent être ramenés à être des constantes.

c. *Forme canonique des* X, Y i. d. — On peut alors reprendre l'analyse des pages 253-256 à ceci près qu'on considérera les a^i_k comme constants.

Les indices 1, 2, ..., m étant, comme on l'a vu, séparés en systèmes,

$$i_1,\ j_1,\ \dots,\ k_1;\quad i_2,\ j_2,\ \dots,\ k_2;\quad \dots;\quad i_p,\ j_p,\ \dots,\ k_p,$$

il existe $x_{i_q}p_{j_q}$. Toute autre transformation φp_k se décompose en transformations : bp_k ou $x_{i_u}p_{j_v}$ $(u \neq v)$. Or l'existence de transformations dont les deux indices appartiennent soit au système u soit au système v exige respectivement

$$f^{k_u}_{\alpha\beta} = \varepsilon^{k_u}_{\alpha}\rho^{u}_{\beta} + \varepsilon^{k_u}_{\beta}\rho^{u}_{k\alpha}, \qquad f^{k_v}_{\alpha\beta} = \varepsilon^{k_v}_{\alpha}\rho^{v}_{\beta} + \varepsilon^{k_v}_{\beta}\rho^{v}_{\alpha},$$

$$f^{\alpha}_{k_u\beta} = \varepsilon^{\alpha}_{k_u}\rho^{u}_{\beta} + \varepsilon^{\alpha}_{\beta}\rho^{u}_{k_u}, \qquad f^{\alpha}_{k_v\beta} = \varepsilon^{\alpha}_{k_v}\rho^{v}_{\beta} + \varepsilon^{\alpha}_{\beta}\rho^{v}_{k_v}.$$

S'il existe une seule transformation $x_{i_u}p_{j_v}$, on doit avoir

$$f^{i_u}_{\alpha\beta} = \varepsilon^{i_u}_{\alpha}\sigma_\beta + \varepsilon^{i_u}_{\beta}\sigma_\alpha, \qquad f^{\alpha}_{j_v\beta} = \varepsilon^{\alpha}_{j_v}\sigma_\beta + \varepsilon^{\alpha}_{\beta}\sigma_{j_v},$$

d'où l'on tire, en prenant $\alpha = k_u = i_u$ puis $\alpha = k_v = j_v$,

$$\rho^{u}_{\beta} = \sigma_\beta = \rho^{u}_{\beta}.$$

Mais alors les deux systèmes u et v ne forment qu'un seul système et le groupe comprend $x_{i_u}p_{j_v}$, quels que soient i_u et j_v appartenant respectivement au système u et au système v.

Les X i. d., indépendantes et les transformations qui leur correspondent sont donc réductibles à un certain nombre de systèmes distincts

$$p_{i_q},\ p_{j_q},\ \dots,\ p_{k_q};\quad x_{i_q}p_{j_q};\quad b_{i_q}p_{i_q}\qquad (q = 1, 2, \dots, p).$$

Les b ne dépendent d'aucun des x qui figurent dans les $x_{i_q}p_{j_q}$; i_q et j_q peuvent prendre l'un et l'autre toutes les valeurs qui appartiennent au système q. *Mais il n'existe aucune tranformation dont les indices appartiennent à deux systèmes différents.*

4. *Réduction à une forme canonique des* Z i. d. *et indépendantes, et des couples qui leur correspondent.*

La réduction relative aux X i. d. étant supposée effectuée, les conditions $(X_iZ_k)=0$, $(Z_iZ_k)=0$ permettent de ramener ces transformations Z indépendantes à

$$p_\alpha \qquad (\alpha=m+1, \ldots, m+\mu).$$

Toute fonction multiplicatrice ψ répond alors à la condition $\psi_\alpha=0$. D'autre part, on établit comme ci-dessus que toute transformation ψp_α se décompose en transformations du type

$$a_i^\alpha x_i p_\alpha, \quad \beta p_\alpha \qquad (\alpha, \beta \text{ ne dépendant que de } x_{m+\mu+1}, \ldots, x_n).$$

En désignant par k un indice de même système que i, il vient

$$(x_k p_i \; a_i^\alpha x_i p_\alpha)=a_i^\alpha x_k p_\alpha, \qquad \text{d'où} \qquad a_i^\alpha=a_k^\alpha=\ldots=a^\alpha.$$

L'ensemble des couples relatifs à la transformation Z se sépare donc en autant de groupes qu'il existe de systèmes distincts d'indices relativement aux X i. d.

$$p_\alpha, \quad a_q^\alpha x_{i_q} p_\alpha; \qquad a_q^\alpha p_\alpha, \quad b_\alpha p_\alpha \qquad (q=1, 2, \ldots, p)$$

et l'on a

$$f_{ab}^{i_q}=\varepsilon_a^{i_q}\rho_b^q+\varepsilon_b^{i_q}\rho^q, \qquad f_{\alpha b}^a=\varepsilon_\alpha^a\rho_b^\alpha+\varepsilon_b^a\rho_\alpha^\alpha \qquad (a, b \text{ quelconques}),$$

$$f_{i_q b}^a=\varepsilon_{i_q}^a\rho_b^q+\varepsilon_b^a\rho_{i_q}^a, \qquad a_{q,r}^\alpha=(\rho_r^\alpha-\rho_r^q)a_q^\alpha \qquad (r=m+p+1, \ldots, n).$$

On ne pourra donc prendre égal à une constante que l'un des a_q^α supposés non nuls. *Mais le groupe ne peut comporter simultanément :* $x_{i_u}p_\alpha$ et $x_{j_v}p_\alpha$. Ceci entraînerait en effet $\rho_r^u=\rho_r^v$ et les deux systèmes u et v ne seraient plus distincts.

5. *Réduction des autres couples.*

S'il existe dans le groupe des transformations qui soient bases de couple et autres que celles qui ont été explicitées, elles n'en sont pas indépendantes et sont par conséquent de la forme

$$X = \sum_{s=1}^{m} \xi^s p_s + \sum_{\rho=m+1}^{m+p} \xi^\sigma p_\sigma, \qquad (p_i X) = 0, \qquad (p_\alpha X) = 0,$$

$$Y = \varphi X, \qquad \varphi = \sum_{s=1}^{m} a_s x_s + \psi, \qquad \frac{\partial a_s}{\partial x_\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} = 0.$$

Si X est i. i., $X(x_s)$ doit être nul et

$$\xi^s = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, m); \qquad (x_j p_j \ \varphi X) = a_j x_j X.$$

Le couple proposé se décompose donc en

$$(21) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{X} = \displaystyle\sum_{\sigma=m+1}^{m+\mu} \xi^\sigma p_\sigma, \qquad a_j x_j \overline{X}, \qquad b\overline{X} \\ (\xi^\sigma,\ a_j,\ b \text{ ne dépendent que de } x_{m+\mu+1}, \ldots, x_n). \end{array} \right.$$

Si X est i. d., on montre aisément, par crochet avec $x_j p_j$, $z_j p_j$ que le groupe contient $a_j x_j X$, $\varphi \xi^j p_j$, $\xi^j p_j$, et que

$$a_k \xi^j = \text{const.} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

A des transformations près qui ont déjà été obtenues, on peut donc ramener le couple à la forme (21), c'est-à-dire à un couple i. i.

D. — Réduction simultanée des systèmes $\mathcal{E}$ à leur forme canonique.

Nous nous bornerons ici à de sommaires indications sur la ligne générale d'une enquête qui s'inspire toujours des mêmes principes. Elle comprend trois étapes.

1. *Forme imposée par l'existence d'un système $\mathcal{E}$ aux autres couples existant dans le groupe.*

Parmi les couples dont se compose $\mathcal{E}$, on distingue ceux qui font intervenir les transformations dites principales

$$p_1, \quad e^{-(x_1+x_2)} p_1; \qquad p_2, \quad e^{(x_1+x_2)} p_2.$$

On les normalise. Le second par exemple aura la forme

$$X_2 = e^{(x_1+x_2)}p_2, \quad Y_2 = [e^{(x_1+x_2)} - 1]p_2 = [1 - e^{-(x_1+x_2)}]X_2 = \varphi_2 X_2, \quad X_2(\varphi_2) = 1.$$

On considère un couple n'appartenant pas à $\mathcal{E}$, mais supposé normalisé : X, $Y = \varphi X$.

Les résultats de la page 248 s'appliquent alors aux deux couples normalisés XY et X_2Y_2, et la condition $X_2(\varphi_2) = 1$ permet de ne retenir que quatre cas, savoir (*cf. ibid.*) : 3 qui donne lieu à deux cas possibles, 5, et enfin $(XX_2) = 0$. Les conditions indiquées page 248 montrent alors aisément qu'il faut

$$X[e^{-(x_1+x_2)}] = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \neq 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left[e^{x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right] \neq 0$$

ou bien

$$(XX_2) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad (p_2 X) = [X(e^{(x_1+x_2)})]p_2.$$

Une alternative semblable se présente dans la comparaison des deux couples X, Y et X_1, Y_1.

On montre à partir de là que les transformations principales d'un système exceptionnel $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire d'un ensemble de deux couples intrinsèquement déterminés qui ne sont pas simultanément normalisables et permutables) étant ramenées à la forme

$$(22) \qquad p_1, \quad e^{-(x_1+x_2)}p_1; \qquad p_2, \quad e^{(x_1+x_2)}p_2;$$

les autres transformations du groupe qui donnent naissance à des couples sont nécessairement de la forme

$$(23) \quad \lambda Z, \quad e^{-x_2}Z, \quad e^{x_1}Z \quad \text{avec} \quad Z = \gamma(p_1 - p_2) + \sum_{s=3}^{n} \zeta^s p_s = \gamma(p_1 - p_2) + \overline{Z},$$

$$(24) \qquad X, \quad \varphi X \qquad \text{avec} \quad X = \alpha(p_1 - p_2) + \sum_{s=3}^{n} \xi^s p_s = \alpha(p_1 - p_2) + \overline{X}$$

(λ, φ; α, γ; ξ^i, ζ^i étant indépendants de x_1 et x_2).

Les conditions de crochet imposées aux transformations $e^{-x_2}Z$ et X qui sont bases de couples montrent qu'une substitution laissant invariante la forme de $\mathcal{E}$ permet d'annuler α et γ.

2. *Réduction simultanée de tous les systèmes $\mathcal{E}$.*

Un premier système $\mathcal{E}$, ayant été ramené à la forme (22), les transformations principales du second ne peuvent être que du type (24); les couples (23) sont en effet i. i. Les équations de définition montrent alors que les transformations principales de $\mathcal{E}_2$, soit X_1 et X_2 ne peuvent répondre à une condition $\overline{X_2} = \theta \overline{X_1}$. Ceci permet de mettre $\mathcal{E}_2$ sous la forme

$$p_3, \quad e^{-(x_3+x_4)} p_3; \qquad p_4, \quad e^{(x_3+x_4)} p_4.$$

La réduction se poursuit ensuite de proche en proche.

3. *Forme des autres couples.*

Il reste à réduire les couples du type (23) et ceux du type (24) qui ne sont pas des systèmes $\mathcal{E}$.

En ce qui concerne les premiers, les conditions de la page 248 montrent que les Z des couples (23), associés au système $\mathcal{E}$ de variables principales x_1 et x_2, ne peuvent contenir aucune des variables principales des autres systèmes $\mathcal{E}$.

En sorte qu'on peut étendre les conditions (23), (24) à l'ensemble des systèmes $\mathcal{E}$. Ceux-ci mis à part, les couples qui existent dans le groupe sont de la forme

$$X; \quad U = e^{-x_{2i}} Z \qquad \text{avec} \qquad X = \alpha_2(p_1 - p_2) + \alpha_4(p_3 - p_4) + \ldots + \sum_{s=2K+1}^{n} \xi_s p_s;$$

$$\varphi X; \quad V = e^{x_{2i-1}} Z; \quad W = \lambda Z \qquad \text{avec} \qquad Z = \gamma_2(p_1 - p_2) + \gamma_4(p_3 - p_4) + \ldots + \sum_{s=2K+1}^{n} \zeta^s p_s;$$

aucune des variables $x_1, \ldots, x_{2K}$ ne figure dans aucune des fonctions α, γ; ξ, ζ; φ, λ.

On montre alors successivement que les crochets $(X_i X_k)$, $(U_i U_k)$, $(X_i U_k)$ sont nuls. Une analyse assez minutieuse établit que les systèmes différentiels qui doivent être résolus, pour annuler dans X, et dans Z les formes du type $\alpha_2(p_1 - p_2) + \ldots$, sont des systèmes complets : le recours aux équations de définition est, une fois de plus, requis. Les Z étant ainsi réduites, $(U_iU_k) = 0$ donne $(Z_iZ_k) = 0$.

P_{17}. Résumé des résultats de ce chapitre.

1° *L'ensemble des systèmes exceptionnels $\mathcal{E}_i$ peut être entièrement séparé.*

$$\left.\begin{matrix} p_{2i-1}, & p_{2i} \\ e^{-(x_{2i-1}+x_{2i})}p_{2i-1}, & e^{(x_{2i-1}+x_{2i})}p_{2i} \end{matrix}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, K).$$

2° *A chacun de ces systèmes peuvent être associées des transformations formant couple*

$$e^{x_{2i-1}}Z, \qquad e^{-x_{2i}}Z, \qquad \lambda Z, \qquad Z = \sum_{s=2K+1}^{m} \zeta^s p_s.$$

3° *Il peut en outre exister dans le groupe d'autres couples :* $X, \varphi X$ [*cf.* 5°].

4° *On peut choisir les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{2K}$ qui interviennent dans les systèmes $\mathcal{E}_i$ de telle façon que les ξ, ζ, φ, λ ne contiennent aucune de ces variables et que les* X, Z *ne contiennent aucun des p_i* $(i = 1, 2, \ldots, 2K)$. *Enfin*

$$(X_iX_k) = 0, \qquad (Z_iZ_k) = 0, \qquad (X_iZ_k) = 0.$$

5° *Les couples* $X, \varphi X$ *non associés à des systèmes $\mathcal{E}_i$ se réduisent à*

Couples i. d.

$$p_{j_q}, \quad x_{i_q}p_{j_q} \qquad (q = 1, 2, \ldots, p).$$

Les indices i_q sont tous supérieurs à 2K *et leur nombre total est supposé égal à m. Pour chacune des valeurs de q, i_q et j_q doivent prendre toutes les valeurs du système correspondant.*

Couples i. i.

$$X = \sum_{\sigma=2K+m+1}^{2K+m+\mu} \xi^\sigma p_\sigma \qquad (X_\lambda X_\mu) = 0;$$

$$\beta X, \quad a_q x_{i_q} X, \quad b p_{j_q}.$$

Les ξ^σ, b, β, a_q ne contiennent que les x dont l'indice est supérieur à $2K + m + \mu$. *Et il en est de même des ζ. Enfin* $(XZ) = 0$.

CHAPITRE V.

CONSÉQUENCES QUI RÉSULTENT SOIT POUR LE GROUPE, SOIT POUR LE SYSTÈME DE L'EXISTENCE DE CERTAINES TRANSFORMATIONS DU PREMIER ORDRE.

Après avoir déterminé au Chapitre III le nombre maximum des paramètres de γ, puis au Chapitre IV le comportement réciproque des transformations d'ordre zéro et des transformations d'ordre un, il nous resterait à déterminer effectivement le groupe (γ) et les systèmes qui lui correspondent. On peut, dans ce but, chercher à étendre aux systèmes d'ordre supérieur les résultats qui ont été établis pour les couples. Mais ceux qui concernent les systèmes triples, et que nous ne mentionnerons pas ici, n'ont déjà plus la simplicité de ceux qui concernent les couples. En sorte qu'il y a lieu, pour déterminer γ, de faire en outre appel à d'autres principes que ceux qui ont été développés jusqu'à présent. La remarque suivante sera d'une fréquente application : l'existence de la transformation $\sum_{s=1}^{n} x_s p_s + \ldots$ entraîne celle du groupe projectif général, parce qu'elle impose à tous les R une même forme C. (**D**$_3$, p. 224). Il y a donc une certaine limitation à priori dans le choix des transformations qui constituent (γ). Le présent chapitre a pour but de la préciser.

SECTION I. — RÉDUCTION D'UNE TRANSFORMATION DU PREMIER ORDRE A SA FORME CANONIQUE.

D$_7$. Étant donnée une transformation linéaire $\Sigma a_s^r x_s p_r$, rappelons qu'on appelle équation caractéristique de cette transformation l'équation

$$\Delta(\rho) \equiv | a_j^i - \varepsilon_j^i \rho | = 0.$$

Pour abréger, *nous désignerons par la lettre* ρ, *affectée ou non d'un indice, une racine quelconque de cette équation.* On sait que les ρ sont des invariants relativement à toute substitution linéaire effectuée sur la transformation.

Nous ne reproduirons pas le détail d'une analyse à peu près classique, également utilisée pour ramener une substitution linéaire à sa forme canonique. On établit d'abord qu'on peut supposer $a_j^i = 0$ $(i < j)$. On montre ensuite que les variables se séparent en groupes n'ayant entre eux aucun élément commun, chaque groupe étant associé à l'une des valeurs distinctes prises par les ρ, et comprenant autant de variables qu'il y a d'unités dans l'ordre de multiplicité de la racine ρ envisagée. La réduction dépend alors de la réduction séparée de transformations du type

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{i-1} a_s^i x_s + \rho x_i\right] p_i.$$

Mais la transformation $\rho \Sigma x_i p_i$ étant invariante par toute substitution linéaire, la réduction est ramenée à celle de transformations dont tous les ρ sont nuls.

Soit donc

$$\mathrm{T} \equiv \sum_{rs}^{1, 2, \ldots, n} a_s^r x_s p_r$$

une transformation dont tous les ρ sont supposés nuls. Le déterminant $|a_k^i|$ est nul. Supposons qu'il existe un mineur à $(n-p)$ rangées non nul, tous les mineurs à $(n-p+k)$ rangées étant nuls. Il existe alors exactement p formes linéaires indépendantes $y_i = \alpha_s^i x_s$ telles que $\mathrm{T}(y_i) = 0$. En prenant ces formes pour $x_1, x_2, \ldots, x_p$, on annule les p premières lignes du déterminant des a_k^i. Tout les ρ étant nuls, le déterminant

$$\mathrm{A}_1 = |a_k^i| \qquad (i, k = p+1, \ldots, n)$$

est lui-même nul. On supposera qu'il existe un mineur à $(n-p-p_1)$ rangées non nul et l'on prendra pour $x_{p+1}, \ldots, x_{p+p_1}$, p_1 formes linéaires qui doivent être indépendantes par rapport à $x_1, \ldots, x_p$ (ce qui exige $p_1 \leqq p$). Alors les p_1 premières lignes du déterminant A_1 sont nulles, et l'on continuera de la sorte jusqu'à avoir atteint la valeur n.

Les indices se classent donc en systèmes partiels

$$1, 2, \ldots, p; \quad p+1, \ldots, p+p_1; \quad \ldots; \quad (p+p_1+\ldots+p_q)+1, \ldots, n$$
$$[p \geqq p_1 \geqq \ldots \geqq p_q;\ \xi^i = 0\ (i=1, 2, \ldots, p)].$$

Les ξ d'un système déterminé sont des formes indépendantes par rapport aux x du système immédiatement précédent, mais qui peuvent contenir en outre des x appartenant à tous les systèmes précédents. On peut alors poser (lire par ligne)

$$\begin{array}{llll} \xi^{p+1} = x_1, & \xi^{p+2} = x_2, & \ldots, & \xi^{p+p_1-1} = x_{p_1-1}, \quad \xi^{p+p_1} = x_{p_1}; \\ \xi^{p+p_1+1} = x_{p+1} + \ldots, & \xi^{p+p_1+2} = x_{p+2} + \ldots, & \ldots, & \xi^{p+p_1+p_2} = x_{p+p_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Les ... représentent, après chaque lettre x, des formes linéaires des x appartenant aux systèmes qui précèdent. Enfin comme on ne change pas la forme réduite obtenue, en ajoutant à un x déterminé une forme linéaire des x de tous les systèmes qui précèdent le système auquel il appartient, on peut, en commençant par les x d'indice le plus élevé, supprimer dans le tableau précédent tous les points. Si l'on groupe alors les termes écrits dans une même colonne, on voit que chacun des x de la première ligne donne lieu à une chaîne

1re col. : $x_1 p_{p+1} + x_{p+1} p_{p+1+p_1} + \ldots$ dern. col. si $p_1 = p_2$: $x_1 p_{p+p_1} + x_{p+p_2} p_{p+p_1+p_2} + \ldots$.

2e col. : $x_2 p_{p+2} + x_{p+2} p_{p+p_1+2} + \ldots$ » si $p_1 > p_2$: $x_{p_1} p_{p+p_1}$.

P$_{19}$. *Étant donnée une transformation* $\mathrm{T} = \sum_{rs}^{1,2,\ldots,n} a_s^r x_s p_r$, *on peut la réduire à une forme canonique, de telle sorte que :*

A un ρ non nul correspond

$$(\Gamma_\rho) \qquad \rho[x_1 p_1 + (x_1 + x_2) p_2 + \ldots + (x_{q-1} + x_q) p_q]$$

(q peut être égal à 1, mais à la même valeur de ρ peuvent correspondre plusieurs ensembles tels que le crochet précédent).

Au ρ nul, s'il existe, correspondent un certain nombre de chaînes sans indice commun du type [1]

$$(\Gamma_0) \quad (x_1 p_2 + x_2 p_3 + \ldots + x_{k-1} p_k) + (x_{k+q} p_{k+q+1} + \ldots + x_{k+h+1} p_{k+h}) + \ldots$$

---

[1] Il est clair que le nombre et la longueur des chaînes sont les mêmes quelle que soit la manière dont on effectue la réduction.

SECTION II. — LA FORME CANONIQUE DES ÉQUATIONS G′.

$$\rho^i_{jkl} = \varepsilon^i_j(\omega_{k/l} - \omega_{l/k}) + \varepsilon^i_k \omega_{j/l} - \varepsilon^i_l \omega_{j/k} \quad \text{(p. 227)}$$

On ne considère ici que les termes d'ordre zéro qui résultent de la dérivation d'une transformation d'ordre un.

A. — On peut toujours, relativement à une transformation déterminée, substituer aux R^i_{jkl} des symboles ρ^i_{jkl} qui leur sont équivalents à une forme C près, de telle façon que les $\omega_{k/j}$ soient nuls.

Lorsque les R^i_{jkl} sont C, [**D** 3, p. 224], la substitution dans les équations (G′) donne

$$\omega_{j/l} = \lambda_{sl}\xi^s_{,j} + \lambda_{js}\xi^s_{,l}. \tag{1}$$

Inversement, étant donnée une transformation (T) du premier ordre, si l'on peut déterminer des quantités λ_{jk} satisfaisant aux équations (1), les équations (G′) prennent la forme

$$\rho^i_{skl}\xi^s_{,j} + \rho^i_{jsl}\xi^s_{,k} + \rho^i_{jks}\xi^s_{,l} - \rho^s_{jkl}\xi^i_{,s} = 0$$

avec

$$\rho^i_{jkl} = R^i_{jkl} - \varepsilon^i_j(\lambda_{kl} - \lambda_{lk}) - \varepsilon^i_k\lambda_{jl} + \varepsilon^i_l\lambda_{jk}.$$

Pour montrer que les équations (1) considérées comme équations en λ_{jk} admettent au moins un système de solutions, nous supposerons la transformation proposée (T) mise sous forme canonique. Les indices se séparent alors en groupes de telle façon que les ξ qui appartiennent à un groupe ne dépendent que des variables de ce groupe. Il en résulte que les équations (1) contiennent :

1. *Si j et l appartiennent au même groupe*, des λ_{jk} dont les deux indices appartiennent à ce même groupe.

Groupe d'une racine non nulle. Il suffit, pour résoudre par rapport aux λ de ce groupe, de commencer la résolution par les λ ayant les indices les plus élevés.

Groupe de la racine nulle. Nous désignons respectivement par leur dernier indice les différents systèmes en lesquels il se scinde

$$(\Gamma_0)\quad \underbrace{x_1p_2+x_2p_3+\ldots+x_{\alpha-1}p_\alpha}_{\text{Systèmes : }\alpha.}+\underbrace{x_{\alpha+1}p_{\alpha+2}+\ldots+x_{\beta-1}p_\beta}_{\beta.}+\ldots+\underbrace{x_{\delta-1}p_\delta}_{\delta.}+\underbrace{0.p_{\delta+1}}_{(\delta+1).}+\underbrace{0.p_{\delta+2}}_{(\delta+2).}+\ldots$$

Les indices auxquels correspondent des ξ identiquement nuls sont considérés comme constituant chacun un système.

On constate sans peine que la résolubilité des équations (1) est assurée si et seulement si l'on a $\omega_{\alpha\beta}=0$ chaque fois que ni x_α ni x_β ne figurent dans la transformation (T). Mais cette condition résulte alors des équations (G'_2) elles-mêmes. On a successivement

$$(\alpha-1)\omega_{\alpha\alpha}=\rho^1_{\alpha1\alpha}+\rho^2_{\alpha2\alpha}+\ldots+\rho^{\alpha-1}_{\alpha\alpha-1}\equiv 0 \qquad \left(\begin{array}{c}\text{comme on le constate}\\ \text{en formant les expressions } \rho\end{array}\right).$$

$$(\alpha-1)\omega_{\beta\alpha}=\sum_{s=1}^{\alpha-1}\rho^s_{\beta s\alpha}\equiv 0,\qquad (\alpha+1)\omega_{\alpha\beta}-\omega_{\beta\alpha}=\sum_{s=1}^{\alpha}\rho^s_{\alpha s\beta}\equiv 0.$$

Il suffit de faire jouer ensuite à $\gamma, \ldots, \delta, (\delta+1), (\delta+2)$ le rôle qui est joué par β dans ces deux dernières équations. Ceci suppose qu'il existe un groupe α non réduit à zéro [comme les groupes $(\delta+1)$, etc.]. Dans ce dernier cas, il existe certainement des groupes à racine non nulle, soit

$$\rho[x_1p_1+(x_1+x_2)p_2+\ldots+(x_{i-1}+x_i)p_i];$$

α et β désignant alors deux indices quelconques qui correspondent à la racine nulle, on obtient

$$i\omega_{\alpha\beta}=\sum_{s=1}^{i}\rho^s_{\alpha s\beta}\equiv 0.$$

2. *Si j et l appartiennent à deux groupes distincts,* des λ_{jk} ayant un indice appartenant à chacun de ces deux groupes.

a. Aucun de ces deux groupes ne relève de la racine nulle

$$\rho[x_1p_1+(x_1+x_2)\;\;p_2\;\;+\ldots+(x_{a-1}+x_a)p_a]\qquad (a\geqq 1);$$
$$\sigma[x_qp_q+(x_q+x_{q+1})p_{q+1}+\ldots+(x_{b-1}+x_b)p_b]\qquad (a<q\leqq b).$$

α. Conditions imposées aux ω.

Supposons que j soit du groupe a et l du groupe b

$$\rho(\lambda_{jl}+\varepsilon_a\lambda_{j+1\,l})+\sigma(\lambda_{jl}+\varepsilon_b\lambda_{jl+1})=\omega_{jl}$$
$$(\varepsilon_a=\varepsilon_b=1,\ \text{sauf } \varepsilon_a=0 \text{ si } j=a;\ \varepsilon_b=0 \text{ si } l=b),$$

si $\rho+\sigma\neq 0$, la résolution ne présente pas de difficulté : il suffit de commencer par les indices les plus élevés. Lorsque $\rho+\sigma=0$, il vient

$$(2) \qquad \varepsilon_a\lambda_{j+1\,l}-\varepsilon_b\lambda_{j\,l+1}=\frac{1}{\rho}\omega_{jl}=\omega'_{jl}.$$

La somme des valeurs des indices qui affectent les deux quantités λ qui figurent dans une équation est la même pour ces deux quantités et égale à

$$j+l+1=A+1 \qquad (q+1\leqq A\leqq a+b).$$

Le système (2) se sépare donc en systèmes partiels tels que, pour chacun d'eux, le nombre A ait une valeur déterminée; et, comme aucun des λ_{rs} ne figure à la fois dans deux systèmes partiels, il suffit d'examiner la résolubilité de chacun des systèmes partiels. Pour $A=a+b$ il existe une seule équation qui exige $\omega_{ab}=0$. De même, pour $A=q+1$, il existe une seule équation qui ne conduit d'ailleurs à aucune condition de compatibilité. Lorsque

$$(q+2)\leqq A\leqq(a+b-1),$$

il existe pour chaque valeur de A plusieurs équations. Si l'on prend par exemple des valeurs décroissantes pour j et croissantes pour l, le terme négatif d'une équation est le même que le terme positif de la suivante. On n'aura aucune condition de compatibilité, à moins que le premier terme de la première équation et le dernier de la dernière ne se trouvent disparaître. Pour qu'il en soit ainsi, il faut que j puisse prendre la valeur a et l la valeur b. Alors la somme des ω_{jl} tels que $j+l=A$ doit être nulle.

$$j=a,\quad l=A-a\geqq q,\quad A\geqq a+q;\qquad l=b,\quad j=A-b\geqq 1,\quad A\geqq b+1.$$

Comme $A\leqq a+b-1$, on en conclut $b\geqq q+1$, $a\geqq 2$; c'est-à-dire que chacun des groupes a et b doit renfermer au moins deux termes.

On peut toujours supposer que le système b renferme au moins autant de termes que le système a. Alors

$$a+q \leqq b+1, \qquad b+1 \leqq \mathrm{A} \leqq a+b-1.$$

En tenant compte de $\omega_{ab}=0$ $\omega_{ba}=0$, on obtient le groupe de conditions symétriques

$$(3) \qquad \sum_{(ij)} \omega_{ij}=0 \quad [(i+j)=\mathrm{A}]; \qquad [(a+q) \leqq] b+1 \leqq a+b,$$

i, j appartenant l'un au groupe a, l'autre au groupe b.

β. *Les conditions imposées aux ω_{ij} sont conséquences des équations* (G').

Soit à établir, en supposant i du système b et j du système a,

$$(4) \qquad \omega_{bj}+\omega_{b-i\,j+1}+\ldots+\omega_{ka}=0 \qquad (j \geqq 1,\ k=b+j-a \geqq q).$$

Désignons par α et i deux indices distincts du groupe a, par β un indice du groupe b

$$\rho^{i}_{\beta i\alpha} \equiv \rho \mathrm{R}^{i}_{\beta\, i\, \alpha+1}+\sigma \mathrm{R}^{i}_{\beta+1\, i\, \alpha}+\rho \mathrm{R}^{i}_{\beta\, i+1\, \alpha}-\rho \mathrm{R}^{i-1}_{\beta\, i\, \alpha}=\omega_{\beta\alpha},$$

en convenant que, si la valeur d'un indice excède la limite tolérée par le groupe auquel il appartient, l'on doit annuler la quantité correspondante.

En donnant à i les λ valeurs du système a (on sait que $\lambda \geqq 2$), sauf la valeur α, on obtient

$$(5) \qquad (\lambda-1)\,\omega_{\beta\alpha}=\sum_{i}\left[\rho \mathrm{R}^{i}_{\beta\, i\, \alpha+1}+\sigma \mathrm{R}^{i}_{\beta+1\, i\, \alpha}\right];$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs de i qui appartiennent au système a, α compris. Si l'on considère, dans l'égalité (4), deux termes consécutifs exprimés au moyen de (5), le terme en ρ de la première parenthèse et le terme en σ de la seconde se détruisent. Il ne reste donc que le terme en σ de la première parenthèse, soit $\sum_i \mathrm{R}^{i}_{b+1\, ij}$ et le terme en ρ de la dernière, soit $\sum_i \mathrm{R}^{i}_{k i a+1}$. Or ces deux termes sont nuls en vertu de la convention faite sur les indices.

Si $\lambda = 1$, les conditions imposées aux ω se réduisent à $\omega_{ab} = 0$, $\omega_{ba} = 0$. Si le système b renferme plus d'un terme, on montrera par la précédente méthode que $\omega_{ab} = 0$; comme $\rho^a_{aab} = 0$, ω_{ba} est nul également. Si les deux systèmes a et b renferment un seul terme, ρ^a_{aab} et ρ^b_{bba} sont nuls; il en est de même de ω_{ab} ω_{ba}.

b. L'un des deux groupes relève de la racine nulle

$$\rho[x_1p_1 + (x_1 + x_2)p_2 + \ldots + (x_{a-i} + x_a)p_a];$$
$$x_q p_{q+1} + \ldots + x_{b-1}p_b \quad \text{ou bien} \quad 0.p_b \qquad [a < q \leqq (b-1)],$$
$$\rho(\lambda_{\alpha\beta} + \lambda_{\alpha+1\beta}) + \lambda_{\alpha\beta+1} = \omega_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \text{ groupe } a;\ \beta, \text{ groupe } b).$$

Si la valeur d'un indice excède la limite tolérée par son groupe la quantité correspondante est nulle. On peut alors résoudre de proche en proche à commencer par les indices les plus élevés.

B. — Les équations G′ réduites, pour une transformation mise sous forme canonique.

Nous supposons que la transformation pour laquelle sont écrites les équations (G′) est mise sous forme canonique et a pour racines caractéristiques : $\rho_\alpha, \rho_\beta, \ldots, \rho_\lambda, \ldots$. Nous désignons par a un indice du groupe auquel est associé ρ_α, b correspondant à ρ_β, etc.

L'équation $[\rho^a_{bcd}] = 0$ donne

$$(6) \qquad (\rho_\beta + \rho_\gamma + \rho_\delta - \rho_\alpha)\rho^a_{bcd} + \varepsilon.\rho_\beta.\rho^a_{b+1\,cd} + \varepsilon.\rho_\gamma.\rho^a_{b\,c+1\,d} + \varepsilon.\rho_\delta.\rho^a_{b\,c\,d+1} - \varepsilon'.\rho_\alpha.\rho^{a-1}_{bcd} = 0.$$

(7)
1. $\varepsilon = 0$, si b (ou c ou d) est seul de son groupe ou dernier de son groupe;
2. $\varepsilon = 1$, si b (ou c ou d) n'est pas le dernier de son groupe;
3. $\varepsilon' = 0$, si a est seul de son groupe ou premier de son groupe;
4. $\varepsilon' = 1$, si a n'est pas le premier de son groupe;
5. On peut encore faire $\varepsilon = 1$, $\varepsilon' = 1$ et convenir que, si un indice excède les limites tolérées par le groupe auquel il appartient, on annule le terme qu'il affecte.

On se servira de l'équation (6) pour remplacer, dans cette même équation, les ρ^u_{rvw} qui y figurent affectés de $\varepsilon\varepsilon'$, en fonction de symboles ayant au moins un indice plus élevé. On obtient ainsi, en prenant pour a la première valeur du groupe α,

$$(\rho_\beta+\rho_\gamma+\rho_\delta-\rho_\alpha)^p\rho^a_{bcd}=(-1)^p\sum_{rst}\rho^r_\beta\rho^s_\gamma\rho^t_\delta\cdot\rho^a_{b+r\,c+s\,d+t}\frac{p!}{r!\,s!\,t!}\quad(\text{avec } r+s+t=p)$$

avec la convention (7^5) sur les indices.

Il suffit de prendre $p=3q-(b+c+d)$ en désignant par q la valeur maximum des indices des groupes $\alpha\beta\gamma\delta$ pour annuler le second membre.

Si l'on donne ensuite à a la seconde des valeurs de son groupe, $\rho^{a-1}_{bcd}=0$ comme on vient de l'établir.

On voit donc que

$$(8)\qquad \rho^a_{bcd}=0\qquad \textit{chaque fois que}\qquad \rho_\beta+\rho_\gamma+\rho_\delta-\rho_\alpha\neq 0.$$

Si $\rho_\beta+\rho_\lambda+\rho_\delta-\rho_\alpha=0$, *l'équation* (6) *montre seulement que*

$$(9)\qquad \rho^a_{bcd}=0,\qquad \textit{sauf peut-être lorsque } a \textit{ est dernier de son groupe,}$$
$$\textit{à moins que } \rho_\alpha=0,\ \rho_\beta+\rho_\gamma+\rho_\delta=0.$$

Ce qui précède suppose les ρ_α non nuls, mais demeure valable pour les ρ nuls moyennant les conventions suivantes :

Remplacer, dans les facteurs $(\rho_\beta+\rho_\lambda+\rho_\delta-\rho_\alpha)$, les racines nulles par 0.

Remplacer, dans les termes en $\varepsilon\varepsilon'$, les racines nulles par 1.

Adopter la convention (7^5) en se référant à la forme (Γ_0) (p. 267) pour la forme canonique du groupe qui correspond à la racine zéro.

$\mathbf{P}_{20}$. On voit donc que *les racines caractériques de toute transformation* (T) *doivent satisfaire à l'une des conditions*

$$\rho_\beta+\rho_\gamma+\rho_\delta-\rho_\alpha=0,\qquad 2\rho_\alpha+\rho_\beta-\rho_\gamma=0,\qquad \rho_\alpha+\rho_\beta=0,\qquad \rho_\alpha=0$$
$$(\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma\rho_\delta\neq),$$

dans le cas contraire, les valeurs initiales des R seraient *toutes* C en un point arbitraire, et par conséquent en tout point. On a déjà signalé que la permanence de conditions *partielles* imposées aux R^i_{jkl} est liée à la permanence de la forme canonique de γ quand on passe d'un point à un autre [*cf.* p. 239].

Pour $n=3$, *les racines caractéristiques, supposées non nulles, de toute transformation, doivent satisfaire à l'une des deux relations*

$$2\rho_\alpha+\rho_\beta-\rho_\gamma=0, \qquad \rho_\alpha+\rho_\beta=0.$$

D$_8$. Il est aisé, lorsque $n=3$, de former le tableau complet des équations (G'), dans lequel *l'élimination des* $\omega_{j/k}$ *introduit naturellement le système covariant* déjà défini page 221.

$$(\mathcal{R}) \quad R^j_{kkl}=a^j_l, \qquad R^j_{ljl}-R^k_{lkl}=b_{jk}=-b_{kj}, \qquad R^j_{jjl}-R^k_{jkl}-R^k_{kjl}=c^j_l \qquad (jkl\neq).$$

Nous désignerons par (G'') *les équations ainsi obtenues.*

SECTION III. — L'APPLICATION DE L'OPÉRATION CROCHET A UNE TRANSFORMATION DONNÉE.

A. — La transformation est à racines caractéristiques nulles.

Étant données deux transformations appartenant à un groupe, leur crochet appartient également à ce groupe. On peut se proposer de déterminer à quelles transformations distinctes on aboutit en répétant cette opération. Soient donc

$$A=\sum_{rs} a^r_s x_s p_r, \qquad X=\sum_{rs} \xi^r_s x_s p_r \qquad (a,\ \xi,\ \text{constantes}),$$

deux transformations linéaires et homogènes. Formons $A_p=(A_{p-1}, X)$ avec $A_0=A$. Lorsque les ρ de X, supposée mise sous forme canonique, sont tous distincts et ne satisfont à aucune relation $\rho_\alpha-\rho_\beta=\rho_\gamma-\rho_\delta$, on voit immédiatement que le groupe contient séparément : $a^i_j x_j p_i$ pour tout couple de valeurs distinctes de ij, et $\Sigma a^i_i x_i p_i$. Nous nous proposons d'examiner comment il convient de modifier ce résultat lorsque les ρ de X ne répondent plus aux conditions précédentes.

P$_{21}$. 1. *Lorsque toutes les racines caractéristiques de la transformation* X *sont nulles, l'itération de l'opération* $(A, X)X, \ldots$ *conduit à un résultat identiquement nul. Le nombre des opérations nécessaire pour atteindre ce résultat est égal à* $(2k+1)$ *en désignant par* k *le nombre* *maximum des termes qui appartiennent à une même chaîne dans la forme canonique de* X.

$$X = \underbrace{x_1 p_2 + x_2 p_3 + \ldots + x_{a-1} p_a}_{\text{Groupe } a.} + \underbrace{x_{a+1} p_{a+2} + \ldots + x_{b-1} p_b}_{\text{Groupe } b.} + \ldots + \underbrace{x_{c+1} p_{c+2} + \ldots + x_{d-1} p_d}_{\text{Groupe } d.}$$

[k = plus grande des différences $(a-1)$, $(b-a-1)$, $\ldots$, $(d-c-1)$].

$$A = \sum_{rs}^{n} a_s^r x_s p_r, \qquad A = A_0, \qquad (A, X) = A_1, \qquad (A_i, X) = A_{i+1}.$$

Nous désignons en général par :

π_0 un quelconque des opérateurs p_i que ne figurent pas dans X. Ainsi $p_1, p_{a+1}, p_{b+1}, \ldots$;

π_1 un quelconque des opérateurs p_i qui est le premier de son groupe. Ainsi $p_2, p_{a+2}, \ldots$;

π_h un quelconque des opérateurs p_i qui occupe dans son groupe le rang h;

ξ_0 une quelconque des variables x_i qui ne figure pas dans X. Ainsi $x_a, \ldots, x_d, \ldots, x_{d+\lambda}$;

ξ_1 une quelconque des variables x_i qui occupe dans son groupe la dernière place. Ainsi $x_{a-1}, x_{b-1}, \ldots, x_{d-1}$;

ξ_h une quelconque des variables x_i qui occupe le rang h dans son groupe supposé numéroté à partir de la fin.

Par définition même de k, il n'existe pas d'expression π ou ξ dont l'indice soit supérieur à k. L'ensemble des π_h est identique à l'ensemble des p_i et l'ensemble des ξ_h à celui des x_i.

L'égalité $(A_i\, X) = A_{i+1}$ donne

$$\text{(10)} \qquad \text{Coefficient de } \pi_\alpha \text{ dans } A_{i+1} = \text{coefficient de } \pi_\alpha \text{ dans } A_i - [X\,(\text{coefficient de } \pi_\alpha \text{ dans } A_i)].$$

(H) Supposons que dans la transformation A_i, les coefficients des π_α dépendent seulement de

$$\xi_{i-\alpha}, \quad \xi_{i-\alpha+1}, \quad \ldots, \quad \xi_k \qquad [\alpha = 0, 1, \ldots, (i-1)].$$

Comme on a évidemment $X(\xi_k) = \xi_{k+1}$, il résulte immédiatement de (10) que la condition (H) est encore vérifiée pour A_{i+1}. Or, dans A_1, les coefficients des π_0 ne dépendent que des x qui figurent dans X, c'est-à-dire de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ (non de ξ_0). La condition (H) vaut donc pour A_1 et par suite pour tous les A. Dans A_{k+1}, les coefficients des π_0 ne peuvent donc dépendre que des $\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \ldots$, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent dépendre d'aucun ξ, et par conséquent d'aucun x. Ils sont donc identiquement nuls. En général, les π_i disparaissent de $A_{k+1+i+s} (s \geqq 0)$. La transformation A_{2k+1} ne contenant plus aucun des π, et par conséquent aucun des p_i, est identiquement nulle. On a d'ailleurs

$$k \leqq n-1, \qquad 2k+1 \leqq 2n-1.$$

B. — Décomposition des transformations A_i lorsque X a des racines caractéristiques nulles.

La transformation X étant supposée mise sous forme canonique, nous en groupons les termes de la manière suivante :

ensemble des termes qui sont de la forme $\sum_{i=1}^{n} \rho_i x_i p_i$ et que nous désignons par Y;
ensemble des autres termes que nous désignons par Z.

Z comprend un certain nombre de chaînes du type déjà envisagé et qui proviennent les unes du ρ nul, les autres de ρ non nuls :

$$Z = (x_\alpha p_{\alpha+1} + \ldots + x_{a-1} p_a) + (x_\beta p_{\beta+1} + \ldots + x_{b-1} p_b) + \ldots$$
$$(a < \beta,\ b < \gamma,\ \ldots).$$

Mais, en toute hypothèse, les ρ qui correspondent à des indices faisant partie d'une même chaîne sont tous égaux et l'on a

$$Y = \Sigma \rho_i x_i p_i \quad \text{avec} \quad \rho_\alpha = \rho_{\alpha+1} = \ldots = \rho_a, \quad \rho_\beta = \rho_{\beta+1} = \ldots = \rho_b.$$

L'ensemble des termes de Y qui ont un indice commun avec l'un quelconque des termes d'une même chaîne de Z constituent donc un ensemble $\Sigma x_s p_s$, lequel est permutable avec toute transformation linéaire et homogène portant sur les mêmes indices. Il en résulte

$$(11) \qquad (Y\,Z) = 0 \quad \text{et, par suite,} \quad [(BY)Z] = [(BZ)Y],$$

B étant une transformation quelconque. Si donc on prend les crochets successifs de A avec Y et Z, le résultat est indépendant de l'ordre dans lequel on effectue les opérations, ce qui permet de poser

$$(11\ bis) \qquad \{[(\underbrace{AZ)Z]\ldots Z}_{j}\ \underbrace{YY\ldots Y}_{k}\} = (AZ^j Y^k).$$

Enfin on voit aisément que les indices des chaînes qui constituent Z sont disposés de telle façon que les ρ de Z soient tous nuls.

La transformation à analyser est

$$A_p = \{[A, (Y+Z)], (Y+Z), \ldots, (Y+Z)\}.$$

Les ρ de Z étant nuls, les crochets (AZ^p) sont nuls pour $p \geqq 2k+1$ (k étant le nombre ci-dessus défini). La permutabilité des opérations Y et Z permet alors d'écrire, pour $p \geqq 2k$,

$$(12) \qquad \begin{cases} A_p = (\alpha_0 Y^p) + C_p^1(\alpha_1 Y^{p-1}) + \ldots + (\alpha_{2k} Y^{p-2k}) \qquad (p \geqq 2k). \\ \text{avec } \alpha_q = (AZ^q) \end{cases}$$

C. — Transformations qui résultent de A par itération de l'opération X.

D$_9$. *Nous appellerons multiplicateur du terme $x_i p_j$, relativement à la transformation* $Y = \sum_r \rho_r x_r p_r$, *la quantité* $(\rho_j - \rho_i)$. *On a en effet*

$$(x_i p_j\ Y) = (\rho_j - \rho_i) x_i p_j.$$

De Y *dérivent n^2 multiplicateurs dont n sont identiquements nuls.*

Étant donnée une transformation $A = \Sigma a_s^r x_s p_r$, *on voit que chacun des ensembles de termes de* A, *dont les multiplicateurs ont la même valeur numérique, fait séparément partie du groupe; la remarque vaut encore pour le multiplicateur zéro.*

Considérons maintenant l'itération de l'opération $X = Y + Z$. Si l'on désigne par $a, b, \ldots, l$ les multiplicateurs non nuls dérivés de Y, la transformation A_p se présente, d'après (12), sous la forme

$$\begin{aligned} A_p = {} & [a^p(\quad) + b^p(\quad) + \ldots + l^p(\quad)] \\ & + C_p^1[a^{p-1}(\quad) + \ldots + l^{p-1}(\quad)] + \ldots + C_p^{2k}[a^{p-2k}(\quad) + \ldots + l^{p-2k}(\quad)], \end{aligned}$$

les parenthèses du $(q+1)^{\text{ième}}$ crochet représentant des ensembles de termes extraits de la transformation $\alpha_q = (AZ^q)$, soit $\mathfrak{T}$. Les $\mathfrak{T}$ étant indépendants de p, on donnera à p $\mu(2k+1)$ valeurs consécutives (μ étant le nombre des quantités $a, b, \ldots, l$). Le déterminant des $\mathfrak{T}$ est, à un facteur numérique près, égal à

$$(a.b\ldots l)^{\pi(\pi+1)}[(a-b)(a-c)\ldots(k-l)]^{(\pi+1)^2},$$

π étant la plus petite des valeurs prises par p.

Il en résulte que chacun des ensembles $\mathfrak{T}$ fait séparément partie du groupe.

P$_{22}$. *Les transformations qui dérivent d'une transformation* A *par itération de l'opération* X *s'obtiennent donc de la façon suivante :*

1. *On met* X *sous forme canonique et on la décompose en deux transformations*

$$Y = \Sigma \rho_i x_i p_i, \quad Z = \textit{autres termes de } X \ (\textit{transformation dont les } \rho \textit{ sont nuls}).$$

2. *On forme les multiplicateurs de* Y, *c'est-à-dire les* n^2 *quantités* $(\rho_i - \rho_j)$.

3. *On forme les crochets :* $\alpha_0 = A$, $\alpha_1 = (AZ)$, $\ldots$, *jusqu'à obtenir un résultat identiquement nul, ce qui arrive après* $(2n-1)$ *opérations au plus.*

4. *Appartiennent au groupe tous les ensembles de termes extraits d'une même transformation* α_i *et dont le multiplicateur a la même valeur.*

Lorsque les ρ demeurent arbitraires, toutes les quantités $(\rho_i - \rho_j)$ sont inégales.

5. *Le nombre de conditions distinctes qu'on peut imposer aux* ρ, *en écrivant que certains multiplicateurs deviennent égaux, est au maximum* $(n-2)$. Si, en effet, il existait $(n-1)$ relations indépendantes du type $\rho_i - \rho_j = \rho_k - \rho_l$, liant par conséquent les $(n-1)$ quantités $(\rho_1 - \rho_k)$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$, toutes ces quantités seraient nulles. Or, dans le cas qui nous occupe, les ρ ne peuvent être égaux que s'ils sont tous égaux à zéro.

D. — Les racines caractéristiques et la structure.

En appliquant le processus d'itération qui a servi à établir **P**$_{22}$, on peut montrer directement que dans les formules de structure du groupe qui font intervenir une transformation donnée X, soit

$$(T_iX) = \alpha_i X + \lambda_i^s T_s,$$

on peut choisir les T_i de telle façon que les constantes de structure λ qui leur sont associées soient précisément égales à certains des multiplicateurs de X. Nous n'insisterons pas sur ce résultat connu.

P$_{23}$. *Si* $(XY) = X$, *l'un au moins des* ρ *de* Y *est non nul; tous les* ρ *de* X *sont nuls.*

Si, en effet, tous les ρ de Y étaient nuls, l'itération $[(XY)Y]\,Y, \ldots$ conduirait à un résultat identiquement nul, tandis qu'elle doit toujours donner X.

D'autre part si l'un des ρ de X était non nul, on pourrait ramener X à la forme

$$X = x_1 p_1 + (x_1 + x_2) p_2 + \ldots + (x_{q-1} + x_q) p_q + \sum_{s=q+1}^{n} \xi^s p_s,$$

les ξ^s ne contenant que $x_{q+1}, \ldots, x_n$. Une combinaison des conditions dérivées de l'identité $(XY) = X$ conduit à l'impossibilité $q = 0$.

P$_{24}$. *Il en résulte qu'on ne peut avoir à la fois*

$$(XY) = X, \qquad (ZY) = Y.$$

P$_{25}$. *Si* $(XY) = Z$, *la somme des* ρ *de* Z *est nulle.* (Vérification immédiate.)

P$_{26}$. *Si la transformation* Y *est du type* $\Sigma \rho_i x_i p_i$, *on ne peut avoir la structure*

$$(X_1 Y) = \varepsilon X_1, \qquad (X_2 Y) = X_1 + \varepsilon X_2 \qquad (\varepsilon = 0 \text{ ou } 1).$$

En itérant en effet l'opération Y et en désignant par Z_i l'ensemble des termes de X_2 qui correspondent au multiplicateur α_i de Y

$$\sum_i \alpha_i^k Z_i = \varepsilon\left(k X_1 + \sum Z_i\right), \qquad \text{quel que soit l'entier } k.$$

Ceci est impossible si $\varepsilon = 1$. Si $\varepsilon = 0$, il faut $\alpha_i = 0$, mais alors $(X_2 Y) = 0$.

SECTION IV. — DÉTERMINATION DES TERMES DU PREMIER ORDRE DES GROUPES MAXIMUM ET SOUS-MAXIMUM.

Nous nous contenterons de donner deux cas de détermination qui laissent entrevoir la méthode employée. L'examen de tous les cas entraîne des calculs trop longs pour qu'il soit possible de les reproduire ici; on en trouvera les résultats page 291.

A. — Le groupe maximum $(n-1)(n-2)+3$ paramètres.

On obtient ce groupe en laissant arbitraires les $\xi^j_{,i}$ non calculables et en adjoignant à chacun d'entre eux une forme linéaire construite avec les $\xi^j_{,i}$ calculables.

$x_1 p_1$						
$x_2 p_1$	$x_2 p_3$	$x_2 p_4$	$\dots$	$x_2 p_{n-2}$	$x_2 p_{n-1}$	$x_2 p_n$
$x_3 p_1$		$x_3 p_4$	$\dots$	$x_3 p_{n-2}$	$x_3 p_{n-1}$	$x_3 p_n$
$x_4 p_1$	$x_n p_3$		$\dots$	$x_n p_{n-2}$	$x_n p_{n-1}$	$x_4 p_n$
....	....	....		......	......	...
$x_{n-2} p_1$	$x_{n-2} p_3$	$x_{n-2} p_4$	$\dots$		$x_{n-2} p_{n-1}$	$x_{n-2} p_n$
$x_{n-1} p_1$	$x_{n-1} p_3$	$x_{n-1} p_4$	$\dots$	$x_{n-1} p_{n-2}$		$x_{n-1} p_n$
$x_n p_1$	$x_n p_3$	$x_n p_4$	$\dots$	$x_n p_{n-2}$	$x_n p_{n-1}$	$x_n p_n$

Les traits pleins joignent les emplacements des termes calculables.
On a encadré en pointillé les transformations qui seront remplacées par les T_{ii} $[i=3, \dots, (n-1)]$.

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{T}_{ab} = x_a p_b + \displaystyle\sum_{s=2}^{n-1} \rho_s x_s p_s + \mathrm{U} \\ {[a, b=3, \dots, n\,(a \neq b);\ a=2,\ b=3, \dots, n;\ b=1,\ a=1, \dots, n;\ a=b=n],} \end{array} \right.$$

$$(2)\qquad \mathrm{U} = x_1 \sum_{s=3}^{n} \alpha^s p_s + \sum_{s \neq 2} (\lambda^s x_s) p_2, \qquad \mathrm{T} = \mathrm{U} + \sum_{s=2}^{n-1} \rho_s x_s p_s.$$

A chacune des T_{ab} est associée une T dont les coefficients sont particuliers à cette T_{ab}. U, T ne désignent que des types de transformations. On notera les conditions de crochet

$$(U, U) = l x_1 p_2 (= V), \qquad (U, V) = 0;$$

(3) $(T, U) = U$, à moins que $a = 2$ ou $b = 1$. Cependant $(T_{11}, U) = U$.

1. *Substitution des* T_{ii} *aux* T_{in} *pour* $i = 3, \ldots, (n-1)$.

Cette substitution se trouve effectuée lorsque $n = 3, 4$, si on choisit l'ensemble $\mathcal{J}'$ (p. 233). Il y a lieu de l'effectuer, en général, parce que les transformations T_{ii} permettent une application facile de la théorie des multiplicateurs.

$$T_{ni} = x_n p_i + \sum_{s=2}^{n-1} \rho_s x_s p_s + U, \qquad T_{in} = x_i p_n + \sum_{\sigma=2}^{n-1} \sigma_s x_s p_s + U,$$

$$(T_{ni} T_{in}) - \rho_i T_{in} - \sigma_i T_{ni} = x_n p_n - (1 + 2\rho_i \sigma_i) x_i p_i + \sum_{\substack{s=3 \\ s \neq i}}^{n-1} \tau_s x_s p_s + U = T_{nn}.$$

Si $\rho_i \sigma_i \neq -1$, les crochets $(T_{in} T_{nn})$ et $(T_{ni} T_{nn})$ permettent d'annuler ρ, σ et par suite τ :

$$T_{nn} = x_n p_n - x_i p_i + U. \tag{4}$$

Comme on peut supposer ici $n \geqq 5$, il existe, au moins, deux valeurs pour i,

$$[(T_{kn} T_{nn}), (T_{nk} T_{nn})] = x_n p_n - x_k p_k + U.$$

Cette transformation étant distincte de toutes celles qui correspondent aux termes calculables, on doit supposer

$$\rho_i \sigma_i = -1 \qquad [i = 3, \ldots, (n-1)]. \tag{5}$$

Nous commençons la réduction par les deux transformations

$$T_{n\,n-1} = (x_n + \rho_{n-1} x_{n-1}) p_{n-1} + \sum_{s=2}^{n-2} \rho_s x_s p_s + U,$$

$$T_{n-1\,n} = x_{n-1} p_n + \sigma_{n-1} x_{n-1} p_{n-1} + \sum_{s=2}^{n-2} \sigma_s x_s p_s + U.$$

La substitution $y_n = x_n + \rho_{n-1} x_{n-1}$ permet, compte tenu de l'existence de T_{nn}, T_{kn-1}, T_{nj} [j, $k = 2, \ldots, (n-2)$] et de la condition (5), de prendre

$$T_{n\,n-1} = x_n p_{n-1} + U, \qquad T_{n-1\,n} = x_{n-1} p_{n-1} + \sum_{s=3}^{n-2} \sigma_s x_s p_s + U \; (= T_{n-1\,n-1}),$$

$$T_{ab} = x_a p_b + \sum_{s=2}^{n-2} \theta_s x_s p_s + \lambda x_{n-1} p_n + U:$$

On remplacera la désignation $T_{n-1\,n}$ par la désignation plus cohérente $T_{n-1\,n-1}$; a et b prennent les valeurs du début, sauf $a = (n-1)$ $b = n$. Nous laissons de côté l'ensemble

$$(\mathcal{E}) \qquad T_{2k} \quad (k = 1, 3, \ldots, n); \qquad T_{i1} \quad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Comme l'on n'effectue jamais de substitution de la forme

$$y_1 = x_1 + \lambda_1 x_i \quad \text{ou} \quad y_i = x_i + \mu_i x_2 \qquad (i \neq 1, 2),$$

l'ensemble $\mathcal{E}$ demeure entièrement caractérisé du fait qu'il existe $(n-1)$ *transformations indépendantes de chacun des deux types :* $x_2 p_k$ ($k \neq 2$); $x_i p_1$ ($i \neq 1$).

On montre alors que, *$\mathcal{E}$ étant excepté, les arbitraires λ qui interviennent dans les* T_{ab} *doivent être nuls.* Il suffit de séparer en trois groupes l'ensemble $T_{ab} - \mathcal{E}$, pour lequel on a d'ailleurs $(T_{ab}, U) = U$

$$(a) \qquad \left\{ \begin{array}{c} a = b = 1, \qquad \ldots, \qquad a = b = n \\ {[a = 3, \ldots, (n-2), n;\; b = 3, \ldots, (n-1);\; a \neq b)].} \end{array} \right.$$

$$(T_{ab}, T_{n\,n-1}) = \lambda (x_{n-1} p_{n-1} - x_n p_n) + U = \mathcal{T}.$$

Si $\lambda \neq 0$, les multiplicateurs, relativement à $\mathcal{T}$, de $x_a p_b$ ($0, -1$, ou 1) et de $x_{n-1} p_n$ (-2) sont toujours différents. T_{ab} donnerait donc naissance à deux transformations distinctes

$$(b) \qquad \left\{ \begin{array}{c} a = 3, \ldots, (n-2); \qquad b = n, \\ (T_{an}, T_{n\,n-1}) = x_a p_{n-1} + \lambda (x_{n-1} p_{n-1} - x_n p_n) + U. \end{array} \right.$$

Or $T_{a\,n-1}$, qui fait partie du groupe (a), ne renferme pas de terme en λ. Il suffit alors de remplacer, dans le raisonnement (a), $\mathcal{T}$ par $\mathcal{T}' = (T_{an}, T_{n\,n-1}) - T_{an-1}$.

$$(c) \qquad a = (n-1); \qquad b = 2, \ldots, (n-2).$$

Comme en (b), relativement à

$$\mathcal{T}'' = (T_{n-1\,b},\, T_{n\,n-1}) - T_{nb}.$$

En sorte que, sauf la substitution de $T_{n-1\,n-1}$ à $T_{n-1\,n}$ et la suppression corrélative du terme $x_{n-1}p_{n-1}$ dans les sommes $\sum_s \sigma_s x_s p_s$, le groupe conserve la même forme. On recommencera la même opération sur le couple de variables $x_{n-2}x_n$: substitution de $T_{n-2\,n-2}$ à $T_{n-2\,n}$; introduction de termes $\lambda x_{n-2}p_n$ dont on démontre qu'ils sont nuls; suppression de $x_{n-2}p_{n-2}$ dans la forme $\Sigma\sigma_s x_s p_s$.

L'ensemble $\mathcal{E}$ étant excepté, on peut donc prendre pour les transformations du groupe

$$T_i = x_i p_i + r_i x_2 p_2 + U \qquad (i = 1, 3, \ldots, n);$$
$$T_{jk} = x_j p_k + a_{jk} x_2 p_2 + U \qquad [j = 3, \ldots, n;\ k = 3, \ldots, (n-1);\ j \neq k].$$

2. *Forme canonique du groupe.*

Considérons la transformation

$$T = \sum \rho_i T_i = \rho_1 x_1 p_1 + \left(\sum_{s\neq 2} \rho_s r_s\right) x_2 p_2 + \rho_3 x_3 p_3 + \ldots + \rho_n x_n p_n + U.$$

Les racines caractéristiques ρ de T sont (de par la disposition des termes de U)

$$\rho_1, \quad \rho_2 = \sum_{s\neq 2} \rho_s r_s, \quad \rho_3, \quad \ldots, \quad \rho_n.$$

Il n'existe entre ρ_2 et les autres ρ aucune identité de la forme

$$\rho_2 = \sum_{s\neq 2} a_s \rho_s \qquad \text{avec} \qquad \sum a_s = 1. \tag{6}$$

Une telle identité entraîne en effet $\Sigma r_s = 1$, et la transformation

$$\sum T_i = \sum_{s=1} x_s p_s + U$$

a alors tous ses ρ égaux à 1 : par suite tous les R sont C.

D'autre part les multiplicateurs de T, dans lesquels ρ_2 n'intervient pas, peuvent être choisis tous distincts et non nuls. Les multiplicateurs, dans lesquels ρ_2 intervient, peuvent donner lieu aux égalités

$$\begin{array}{lcl} \rho_2-\rho_i=0 & \text{ou} & \rho_2=\rho_i; \\ \rho_2-\rho_k=\rho_i-\rho_j & \text{ou} & \rho_2=\rho_k+\rho_i-\rho_j; \\ \rho_2-\rho_k=\rho_k-\rho_j & \text{ou} & \rho_2=2\rho_k-\rho_j; \\ \rho_2-\rho_i=\rho_j-\rho_2 & \text{ou} & \rho_2=\dfrac{\rho_i}{2}+\dfrac{\rho_j}{2}, \end{array}$$

or toutes ces égalités sont du type (6) : elles sont par conséquent exclues.

Il en résulte que les ρ de T sont tous distincts et non nuls. Une substitution

$$y_i=x_i+\lambda_i x_1, \qquad y_2=x_2+\mu_s x_s$$

permet donc d'annuler tous les termes de U. Cette substitution ne modifie d'ailleurs pas l'ensemble $\mathcal{E}$ puisqu'il existe $x_1p_1+\ldots$. La transformation T est alors mise sous forme canonique; et, comme tous ses multiplicateurs sont différents, le multiplicateur de T_i est nul, tandis que ceux des termes des U sont tous non nuls. Enfin le multiplicateur de x_ip_k est différent de tous les autres. D'où

$$T_i=x_ip_i+r_ix_2p_2, \qquad T_{ik}=x_ip_k, \qquad T_{i1}=x_ip_1, \qquad T_{2k}=x_2p_k.$$

On détermine les valeurs de r_i en utilisant les équations (G') et $\mathbf{P}_{20}$. Si $n\geqq 4$, il existe pour chaque valeur de $i=3,\ldots,(n-1)$ deux transformations au moins : $T_{\alpha 1}$, $T_{\beta 1}$; $T_{\alpha i}$, $T_{\beta i}$ (α, $\beta\neq 1$, i). On en conclut facilement que seuls peuvent être non C les R qui ont pour indice inférieur 2, n. Mais x_2p_n entraîne $R^1_{nn2}=0$.

Il faut donc $R^1_{nn2}\neq 0$, et toute transformation $\Sigma\rho_ix_ip_i$ doit satisfaire à

$$2\rho_2+\rho_n=\rho_1 \qquad \text{ou} \qquad 2\sum_{s\neq 2}\rho_sr_s=\rho_1-\rho_n,$$

$$r_1=\frac{1}{2}, \qquad r_n=-\frac{1}{2}, \qquad r_i=0 \qquad (i\neq 1,\ 2,\ n).$$

On constate que la conclusion vaut encore pour $n=3$

$$(\mathbf{G.M.})\qquad \begin{cases} x_ip_k & [i=2,\ldots,n;\ k=1,3,\ldots,(n-1); \\ x_2p_n, \quad 2x_1p_1+x_2p_2, \quad x_1p_1+x_np_n. \end{cases}$$

B. — Le groupe sous-maximum $(n-1)(n-2)+2$ paramètres.

La marche générale est la même que dans le cas précédent, mais requiert des calculs plus laborieux. On a vu (p. 235) qu'on pouvait partir de

$$T_{ab} = x_a p_b + \sum_{s=2}^{n} \rho_s x_s p_s + U \qquad \text{avec} \qquad U = x_1\left(\sum_{s=3}^{n} \alpha^s p_s\right) + \left(\sum_{s\neq 2} \lambda_s x_s\right) p_2$$

$$[ab = 3, \ldots, n\ (a \neq b);\ a = 2,\ b = 3, \ldots, n;\ a = 1, \ldots, n\ (b = 1)].$$

$$T = \sum_s \rho_s x_s p_s + U, \qquad (TT) = U, \qquad (TU) = U, \qquad (T_{ab}U) = U.$$

On montre que les seules valeurs des arbitraires $\alpha\lambda$ qui soient compatibles avec la non existence du groupe complet sont les valeurs nulles, La démonstration repose sur l'égalité de toutes les racines de $T_{n-1\,n}$, soit à la racine σ_n, soit à la racine σ_{n-1} de cette même transformation. On doit, de plus, distinguer les deux cas $n \geqq 5$, $n = 4$, ce dernier donnant lieu à un groupe γ qui lui est propre. On obtient cinq formes possible reproduites page 291.

SECTION V. — DÉTERMINATION DES TERMES DU PREMIER ORDRE DU GROUPE γ POUR $n = 3$.

A. — Rappel de quelques résultats utilisés dans cette section.

(**A**). Si $(XY) = X$ [*cf.* $\mathbf{P}_{23}$], ou bien

$$X = x_1 p_2 + x_2 p_3, \qquad Y = \sum_{k=1}^{3} (k+\rho) x_k p_k$$

ou bien

$$X = x_1 p_2, \qquad Y = a x_1 p_1 + (a+1) x_2 p_2 + \alpha x_3 p_2 + (\beta x_1 + \gamma x_3) p_3.$$

(**B**). Si $(XY) = 0$, les ρ de X étant supposés nuls, ou bien

$$X = x_1 p_2 + x_2 p_3, \qquad Y = \rho \sum_{k=1}^{3} x_k p_k + \sigma x_1 p_3$$

ou bien

$$X = x_1 p_2, \qquad Y = a(x_1 p_1 + x_2 p_2) + \alpha x_3 p_2 + (\beta x_1 + \gamma x_3) p_3.$$

(**C**). Il résulte de $\mathbf{P}_{20}$ (p. 273) que les ρ de toute transformation répondent à l'un des cas suivants :

Racines inégales : ρ_α, ρ_β, $(\rho_\alpha + \rho_\beta)$, $0 \neq$.					Deux racines au moins sont égales : $(\rho_1 = \rho_2)$.				
ρ_α	ρ_α	ρ_α	ρ_α	ρ_α	1	1	2	0	0
ρ_β	$-\rho_\alpha$	$-\rho_\alpha$	$-2\rho_\alpha$	$2\rho_\alpha$	1	1	2	0	0
$2\rho_\alpha + \rho_\beta$	ρ_β	0	0	0	3	-1	0	3	0

(**D**). Pour toutes les transformations ayant deux ρ égaux (on prend $\rho_1 = \rho_2$) les multiplicateurs sont les mêmes

$$\begin{array}{lll} \rho_1 - \rho_1 = 0, & \rho_1 - \rho_2 = 0, & \rho_1 - \rho_3 = -2; \\ \rho_2 - \rho_1 = 0, & \rho_2 - \rho_2 = 0, & \rho_2 - \rho_3 = -2; \\ \rho_3 - \rho_1 = 2, & \rho_3 - \rho_2 = 2, & \rho_3 - \rho_3 = 0. \end{array}$$

(**E**). Les équations (G″) (p. 274) étant écrites pour un groupe γ envisagé comme possible, il doit être possible que certains éléments du système $\mathcal{R}$ [$\mathbf{D}_8$, p. 274] soient non nuls : nous les indiquerons en les faisant précéder d'un ?

B. — Groupe γ à quatre paramètres.

1. *Structure abélienne* $(X_i X_j) = 0$.

Nous pouvons distinguer *a priori* les trois cas suivants :

a. Une transformation au moins, X_1 *par exemple, a trois* ρ *distincts.*

$$X_1 = \Sigma \rho_i x_i p_i.$$

Les $(X_1 X_i)$ étant nuls, il vient ($\mathbf{P}_{22}$, p. 278)

$$X_i = \Sigma \lambda_s x_s p_s.$$

Il existerait, séparément, $x_i p_i$.

b. Une transformation au moins a deux ρ *distincts.*

$$X_1 = a(x_1 p_1 + x_2 p_2) + b x_1 p_2 + c x_3 p_3 \qquad (a \neq c).$$

Les autres X sont de la forme (B)

$$\sum_{rs}^{1.2} a_s^r x_r p_r + \gamma x_3 p_3 \qquad \text{avec} \qquad b a_2^1 = 0.$$

Si $b \neq 0$, X est du type de X_1 et il ne peut y avoir quatre transformations indépendantes. Si $b = 0$, $(X_1 + \lambda X)$ devant avoir une racine double quel que soit λ, il en est de même de X et la conclusion est la même.

c. Toute transformation a ses trois ρ *nuls.* Il y aurait alors, au maximum, trois transformations.

2. *Structure non abélienne.*

Y étant la transformation la plus générale du groupe, il existe alors X telle que $(XY) = X$.

a. Toute transformation X *satisfaisant à* $(XY) = X$ *est réductible à une chaîne à un seul terme.*

X ne peut alors avoir en effet que l'une ou l'autre forme réduite (A) : $x_1 p_2 + x_2 p_3$, $x_1 p_2$.

Supposons $X = x_1 p_2 + x_2 p_3$, et par suite $Y = \sum_k (\rho + k) x_k p_k$. L'existence de $a_s^r x_s p_r$ entraîne celle de ($\mathbf{P}_{22}$)

$$Z_1 = a_2^1 x_2 p_1 + a_3^2 x_3 p_2, \qquad Z_2 = a_1^2 x_1 p_2 + a_2^3 x_2 p_3,$$
$$Z_3 = a_3^1 x_3 p_1, \qquad Z_4 = a_1^3 x_1 p_3, \qquad Z_5 = a_i^i x_i p_i.$$

Comme Z_5 ne doit pas scinder X, ses ρ sont en progression arithmétique. Il faut alors $Z_5 = \lambda Y$; car, dans le cas contraire, $Z_5 - pY$ donnerait $\Sigma x_i p_i$. L'existence de Z_2 scinderait X. Si Z_1 existe

$$(XZ_1) = a_2^1 (x_1 p_1 - x_2 p_2) + a_3^2 (x_3 p_3 - x_2 p_2),$$

dont les ρ ne sont en progression arithmétique que si $a_2^1 = a_3^2$. D'où $Y = x_1 p_1 - x_3 p_3$.

Si Z_1 n'existe pas, Z_3 et Z_4 existent nécessairement, et Y a la même expression.

On voit alors que, dans l'un et l'autre cas, il existe une cinquième transformation.

b. On peut supposer $Y = \Sigma \rho_i x_i p_i$ *et* $(X_i Y) = \lambda_i X_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Considérons les formules de structure $(X_i Y) = c_{i4s} X_s$ $(s = 1, 2, 3, 4;$ $i = 1, 2, 3)$ (en convenant $Y = X_4$).

Leur réduction à une forme canonique dépend de l'équation

$$\Delta(\lambda) \equiv | c_{i4k} - \varepsilon_k^i \lambda | = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Les racines de (7) sont prises parmi les six différences $\rho_i - \rho_k$ des ρ de Y. Or l'égalité de trois de ces six nombres entraîne $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ et donc $= 0$, ce qui est impossible $(\mathbf{P}_{23})$ puisque $(XY) = X$. Donc $\Delta(\lambda)$ n'a pas de racine triple.

Plaçons-nous dans l'hypothèse où Y, ayant un ρ double, ne serait pas réductible à $\Sigma \rho_i x_i p_i$; $(X_1 Y) = X_1$ et (A) donnent

$$\left\{ \begin{array}{ll} X_1 = x_1 p_2, & Y = a x_1 p_1 + (a+1) x_2 p_2 + \alpha x_3 p_2 + (\beta x_1 + \gamma x_3) p_3 \\ & \text{avec} \quad \gamma = a \quad \text{ou} \quad \gamma = a + 1. \end{array} \right. \tag{8}$$

D'autre part (7) a certainement une racine nulle; dans le cas contraire ses racines, prises parmi les multiplicateurs non nuls de Y, seraient (D) : $\lambda, \lambda, -\lambda$. Si l'on prend par exemple

$$Y = a(x_1 p_1 + x_2 p_2) + b x_2 p_1 + c x_3 p_3, \tag{9}$$

aux deux valeurs opposées correspondent : ou bien $x_3 p_1$ et $x_1 p_3$; ou bien $x_3 p_2$ et $x_2 p_3$. Le crochet donne, dans les deux cas, une transformation dont le multiplicateur est nul.

Or à une racine nulle de (7) correspond une transformation Z telle que $(YZ) = 0$. Car on ne peut avoir à la fois $(\mathbf{P}_{24})$

$$(YZ) = Y, \qquad (X_1 Y) = X_1.$$

Si l'on prend Y sous la forme (9), avec $b \neq 0$, la condition $(YZ) = 0$ donne

$$Z = \alpha(x_1 p_1 + x_2 p_2) + \beta x_2 p_1 + \gamma x_3 p_3.$$

Si $a\gamma - cd \neq 0$ (G″) donne $\mathcal{R} = 0$. Par suite

$$Z = x_2 p_1.$$

Revenons alors à (8). Soit $\gamma = a$; on peut alors supposer $\alpha = 0$ dans Y. La transformation permutable avec Y, est alors, comme on vient de le voir, $x_1 p_3$, et, sans modifier $(X_1 Y) = X_1$, on peut annuler β dans Y. De même si $\gamma = a + 1$.

Enfin, $\Delta(\lambda)$ ayant au plus une racine double, les seules irrégularités qui peuvent se présenter dans la réduction des formules de structure $(X_i Y) = c_{i4s} X_s$ sont incompatibles avec la condition $Y = \Sigma \rho_i x_i p_i$ ($\mathbf{P}_{26}$).

c. Détermination du groupe. $Y = \Sigma \rho_i x_i p_i$ $(X_i Y) = \lambda_i X_i$.

X_i est une chaîne à un terme si $\lambda_i \neq 0$, ou bien si Y a deux ρ égaux; dans le cas contraire $X_i = \Sigma \sigma_r x_r p_r$. Comme il ne peut y avoir trois transformations $\Sigma \rho_i x_i p_i$ indépendantes, il peut exister : ou bien trois chaînes à un terme

$$x_2 p_1, \quad x_3 p_1, \quad x_2 p_3; \qquad Y = \Sigma \rho_i x_i p_i, \quad ?a_3^1; \qquad (G'') \text{ donne } \rho_1 = 2\rho_2 + \rho_3;$$

ou bien

$$x_1 p_1 + \alpha x_3 p_3, \quad x_2 p_2 + \beta x_3 p_3,$$

et deux chaînes à un terme que (G″) permet de déterminer facilement.

C. — Groupe γ à trois paramètres.

On peut trouver très rapidemment leur structure. Considérons l'équation caractéristique relative à la transformation générale désignée par X_1

$$\Delta(\lambda) \equiv | c_{1ik} - \varepsilon_k^i \lambda | = 0 \qquad (i, k = 2, 3).$$

Lorsque $\Delta(\lambda)$ a une racine double non nulle, on peut prendre pour X_2 la transformation qui correspond à la racine double

$$(X_1 X_2) = X_2, \qquad (X_1 X_3) = a X_1 + b X_2 + X_3.$$

Si l'on annule a en remplaçant X_3 par $X_3 + a X_1$, $\overline{X_1 X_2 X_3}$ donne

$$2(X_2 X_3) = [(X_2 X_3) X_1]$$

et comme $\Delta(\lambda)$ n'a qu'une racine double prise égale à 1,

$$(X_2 X_3) = 0.$$

D'autre part, pour qu'à une racine nulle de $\Delta(\lambda)$ ne corresponde pas de transformation permutable avec X_1, il faut que cette racine soit double. Dans le cas contraire, on aurait $(X_1 X_2) = X_2$, $(X_1 X_3) = X_1$ ce qui est impossible ($\mathbf{P}_{24}$). Mais si $\Delta(\lambda)$ a une racine double nulle et que $(X_1 X_2) = X_1$, $(X_1 X_3) = X_2$, l'équation caractéristique relative à X_2 a certainement une racine non nulle; il suffira de partir de X_2 et non de X_1.

1. *Il n'existe pas de sous-groupe abélien.*

$\Delta(\lambda)$ a, par conséquent, deux racines distinctes non nulles

$$(X_1 X_2) = \lambda X_2, \qquad (X_1 X_3) = \mu X_3, \qquad (X_2 X_3) = a_s X_s;$$

$$\overline{X_1 X_2 X_3}: \quad a_2 = 0, \qquad a_3 = 0, \qquad a_1(\lambda + \mu) = 0 \quad (\lambda + \mu) = 0. \qquad \text{Cas } \alpha.$$

2. *Il existe au moins un sous-groupe abélien* $(X_1 X_2) = 0$.

Si l'on a également $(X_1 X_3) = 0$. Soit $(X_2 X_3) = a_s X_s$ qui donne les deux cas : β, $a_1 \neq 0$, $a_2 = a_3 = 0$; γ', a_2 ou $a_3 \neq 0$.

Si $(X_1 X_3) = a_s X_s$ et par symétrie $(X_2 X_3) = b_s X_s$; l'un des a et l'un des b étant non nuls $\overline{X_1 X_2 X_3}$: $a_3 b_s X_s = b_3 a_s X_s$. Si donc : $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \lambda$, $X_2 - \lambda X_1$ est permutable avec X_1 et X_3; par suite, il faut supposer $a_3 = b_3 = 0$. D'où deux cas : γ, qui comprend β pour $a_1 = 0$ et γ', et δ.

$\mathbf{P}_{27}$. *Structure d'un groupe à trois paramètres*

(α)	$(X_2 X_3) = X_1,$	$(X_3 X_1) = X_3,$	$(X_1 X_2) = X_2;$
(β)	$(X_2 X_3) = X_1,$	$(X_3 X_1) = 0,$	$(X_1 X_2) = 0;$
(γ)	$(X_2 X_3) = \lambda X_2,$	$(X_3 X_1) = \mu X_1,$	$(X_1 X_2) = 0;$
(δ)	$(X_2 X_3) = X_2,$	$(X_1 X_3) = X_2 + X_1,$	$(X_1 X_2) = 0.$

Il suffit ensuite d'appliquer à chacun de ces cas les principes qui ont servi à déterminer γ. De même pour γ_2.

Les résultats sont récapitulés dans le tableau ci-après.

Groupe γ relatif aux G. C., G. M., G. S. et a $n=3$.

G. C. $n(n+1)$		$p_k,\ x_ip_k,\ x_i \sum_{k=1}^{n} x_kp_k,\ (i,\ k=1, 2, \ldots, n)$	
G. M. $(n-1)(n-2)+3$		$x_ip_k,\ [i=2, \ldots, n;\ k=1, 3, \ldots, (n-1)];\ x_2p_n;\ 2x_1p_1+x_2p_2;\ x_1p_1+x_np_n$	
G. S. $n \geqq 4$ $(n-1)(n-2)+2$	**1**	$x_ip_k,\ (i=2, \ldots, n;\ k=3, \ldots, n);\ x_2p_1;\ x_1p_1-x_2p_2$	? R^1_{12}
	2	$x_ip_k-\varepsilon^i_k x_{n-1}p_{n-1},\ (i=2, \ldots, n;\ k=3, \ldots, n);$ $x_2p_n;\ x_1p_1+x_np_n+\lambda x_{n-1}p_{n-1};\ x_2p_2-2x_np_n+\mu x_{n-1}p_{n-1}$	? R^1_{22n}
	3	$x_ip_k,\ [i=2, \ldots, n;\ k=1, 3, \ldots, (n-1)];\ 2x_1p_1+x_2p_2;\ x_1p_1+x_np_n$	? R^1_{22n}
	4	$x_ip_k,\ (i=2, \ldots, n;\ k=3, \ldots, n);\ x_2p_1;\ x_1p_1$	? R^1_{212}
	5	$x_ip_k,\ [i=2, \ldots, n;\ k=1, 3, \ldots, (n-1)];$ $x_2p_n;\ x_1p_1+\rho x_2p_2+(1-2\rho)x_np_n$	? R^1_{22n}
G. S. $n=4$		$x_4p_3;\ x_3p_4;\ x_ip_1;\ x_1p_1+x_ip_i\ (i=2, 3, 4)$	? $R^1_{234}\ R^1_{342}$
$n=3\ \gamma_4$	**1**	$\sum \rho_ix_ip_i,\ \rho_1=2\rho_2+\rho_3;\ x_2p_1;\ x_3p_1;\ x_2p_3$	? a^1_3
	2	$2x_1p_1+x_2p_2;\ x_1p_1+x_3p_3;\ x_2p_1;\ x_3p_1$ ou x_2p_3	? a^1_3
	3	$x_1p_1;\ x_2p_2-x_3p_3;\ x_2p_3;\ x_3p_2$	? $c^2_3=-c^3_2$
	4	$x_1p_1;\ x_3p_3;\ x_2p_1;\ x_2p_3$	? b_{13}
$n=3\ \gamma_3$	**1**	$\sum \rho_ix_ip_i,\ \rho_1=2\rho_2+\rho_3;\ x_2p_1;\ x_3p_1$ (? a^1_2 si ρ_i : 3, 1, 1)	? a^1_3
	2	$3x_1p_1+x_2p_2+(x_2+x_3)p_3;\ x_2p_1;\ x_3p_1$	? a^1_3
	3	$5x_1p_1+x_2p_2+3x_3p_3;\ x_2p_1;\ x_3p_1+x_2p_3$	? a^1_3
	4	$2x_1p_1+x_2p_2;\ x_3p_1;\ x_2p_1+x_3p_2$	? $a^1_3=b_{12}$
	5	$x_1p_1-x_2p_2;\ x_1p_2;\ x_2p_1$	? $c^2_1=-c^1_2$
	6	$x_2p_1;\ x_3p_1;\ x_2p_3$	? a^1_3
	7	$\sum \rho_ix_ip_i;\ x_2p_1;\ x_2p_3$	$\rho_1=2\rho_2+\rho_3$? a^1_3; $\rho_2=0$? b_{13}
	8	$(x_1+x_3)p_1+x_3p_3;\ x_2p_1;\ x_2p_3$	? a^1_3
	9	$x_1p_1+x_3p_3;\ x_2p_2-2x_3p_3;\ x_3p_1$ ou x_2p_1 ou x_2p_3	? a^1_3
	10	$x_1p_1;\ x_2p_2-x_3p_3;\ x_2p_1$	? c^3_2
	11	$x_1p_1;\ x_2p_2-x_3p_3;\ x_1p_2$ ou x_3p_2	$c^3_2=-c^2_3$
	12	$x_2p_2;\ x_3p_3;\ x_1p_2$	? b_{23}

GROUPE γ RELATIF AUX G. C., G. M., G. S. ET A $n=3$ (*suite*).

$n=3\gamma_2$	1	$\sum \rho_i x_i p_i;\ x_2 p_1$	
	2	$(x_1+x_3)p_1+x_3p_3;\ x_2p_1$	? a_3^1
	3	$3x_1p_1+x_2p_2+(x_2+x_3)p_3;\ x_2p_1$	? a_3^1
	4	$x_1p_1+x_2p_3;\ x_2p_1$	? b_{13}
	5	$5x_1p_1+x_2p_2+3x_3p_3;\ x_3p_1+x_2p_3$	? a_3^1
	6	$x_1p_1-x_2p_2+3x_3p_3;\ x_2p_1+x_1p_3$	? $2a_3^1=c_1^2$
	7	$2x_1p_1+x_2p_2;\ x_2p_1+x_3p_2$	? $a_3^1=b_{21}$
	8	$x_1p_1+\alpha x_3p_3;\ x_2p_2+\beta x_3p_3$	
	9	$(x_1+x_2)p_1+x_2p_2-x_3p_3;\ x_2p_3$ ou x_3p_1	? $a_3^1,\ c_3^2$
	10	$x_2p_1;\ x_2p_3+x_3p_1$	? $a_3^1,\ b_{31}=a_2^1$
	11	$x_2p_1;\ x_3p_1$	? $a_2^1,\ a_3^1$
	12	$x_2p_1;\ x_2p_3$	? $a_3^1,\ a_1^3,\ b_{31}$
$n=3\gamma_1$	1	$\sum \rho_i x_i p_i$	
	2	$x_1p_1+(x_1+x_2)p_2+\alpha x_3p_3\ (\alpha=0,\ -1,\ 3)$	
	3	$x_3p_3+x_1p_2$	
	4	x_2p_1	
	5	$x_2p_1+x_1p_3$	
$n=2\gamma$		x_2p_1	

CHAPITRE VI.

DÉTERMINATION DES GROUPES MAXIMUM ET SOUS-MAXIMUM (n QUELCONQUE) ET DE TOUS LES SYSTÈMES G QUI ADMETTENT UN GROUPE ($n=3$).

SECTION I. — UTILISATION DES MULTIPLICATEURS POUR LA DÉTERMINATION DE LA STRUCTURE.

A. — Méthode générale.

Soit un ensemble de transformations dont on ne mentionne que les termes de l'ordre le moins élevé

$$T_{ik}=x_ip_k+\ldots\quad(i\neq k);\qquad T=\sum_{r=1}^{n}\rho_r x_r p_r+\ldots,\qquad X_i=p_i+\ldots,$$

Le groupe γ des $T_{ik}T$ [il peut y avoir plusieurs transformations du type (T)] étant supposé déterminé, il convient de lui adjoindre des transformations d'ordre zéro : $X_i = p_i + \ldots$. La transformation X_i existe certainement lorsque l'opérateur p_i figure effectivement dans l'une des T_{ik}, T, mais cette condition n'est pas nécessaire.

On a défini (**D**$_9$, p. 277) le multiplicateur de T_{ik} relativement à $T = (\rho_k - \rho_i)$.

Nous poserons encore

$$(U)_m \text{ ou } (V)_m = \text{ensemble des termes } a_s^r x_s p_r \text{ dont les multiplicateurs [relativement à (T)] sont tous égaux à } m.$$

P$_{28}$. *L'équation*

$$H.Z = (ZT) + a(U)_m \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \Sigma \rho_r x_r p_r, \ U : \text{transformations données}; \\ Z : \text{transformation inconnue}; \\ H, a : \text{valeurs numériques données} \end{array} \right.$$

admet pour solution

si $a = 0$, $Z = (V)_H$, les coefficients des termes de V demeurent indéterminés;

si $a \neq 0$, $m \neq H$, $Z = (V)_H + \dfrac{a}{H - m}(U)_m$;

si $a \neq 0$, $m = H$, *aucune solution.*

Considérons alors une formule de structure relative à deux transformations X_i, T déterminées

$$(X_i T) = \rho_i X_i + (U)_{\rho_i} + (V)_k + \ldots + (W)_l \qquad (k, \ldots, l \neq \rho_i).$$

Il suffit de remplacer X_i par $X_i + \dfrac{1}{\rho_i - k}(V)_k + \ldots + \dfrac{1}{\rho_i - l}(W)_l$ pour obtenir

$$(1) \qquad (X_i T) = \rho_i X_i + (U)_{\rho_i}.$$

L'identité de Jacobi donne, relativement à une autre transformation, $T' = \Sigma \rho'_r x_r p_r$ $(\rho'_i = 0)$

$$\rho_i (X_i T') + [(U)_{\rho_i} T'] = [(X_i T') T];$$

$(X_i T')$ est du premier ordre; et comme $[x_i p_k T'] = \lambda x_i p_k$, $[(U)_{\rho_i} T'] = (V)_{\rho_i}$. Par suite (**P**$_{28}$)

$$(2) \qquad [(U)_{\rho_i} T'] = 0, \qquad (X_i T') = (U')_{\rho_i}.$$

On forme de même à partir de (1)

$$(3)\qquad \begin{cases} (\rho_k - \rho_j + \rho_i)(X_i T_{jk}) = [(X_i T_{jk}) T] + [T_{jk}(U)_{\rho_i}] \\ \text{avec} \qquad (X_i T_{jk}) = \varepsilon_i^j X_k + \ldots; \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} (\rho_i + \rho_k)(X_i X_k) = [(X_i X_k) T] - [X_i (V)_{\rho_k}] + [X_k (U)_{\rho_i}] \\ \text{avec} \qquad (X_k T) = \rho_k X_k + (V)_{\rho_k}. \end{cases}$$

On en déduit, par application de $\mathbf{P}_{28}$, la forme des formules de structure. *Elles sont dites régulières lorsqu'elles ont la même forme que si les transformations étaient réduites à leurs termes de l'ordre le moins élevé.* [Ce qui arrive par exemple pour $(X_i T)$ $(X_i T')$ lorsque le grouge γ qui est donné ne comporte pas de T_{jk} dont le multiplicateur soit égal à ρ_i.] Cette méthode permet de déterminer rapidement celles des formules de structure qui sont irrégulières dont on indique la nature en les faisant précéder du symbole I. S. Il est commode de former un tableau

	X_1	X_2	$\ldots$	X_{n-1}	X_n	T_{ij}	$\ldots$	T_{kl}
T	ρ_1	ρ_2	$\ldots$	ρ_{n-1}	ρ_n	$\rho_j - \rho_i$	$\ldots$	$\rho_l - \rho_k$
X_1						m_{ij}^1	$\ldots$	m_{kl}^1
X_2	$\rho_1 + \rho_2$					m_{ij}^2	$\ldots$	m_{kl}^2
..	......					...	...	...
..	......	....				...	...	...
X_{n-1}	$\rho_1 + \rho_{n-1}$	$\rho_2 + \rho_{n-1}$	$\ldots$			m_{ij}^{n-1}	$\ldots$	m_{ij}^{n-1}
X_n	$\rho_1 + \rho_n$	$\rho_2 + \rho_n$	$\ldots$	$\rho_{n-1} + \rho_n$		m_{ij}^n	$\ldots$	m_{kl}^{n-1}

$$m_{ij}^p = \rho_j - \rho_i + \rho_p$$

Les irrégularités proviennent de l'égalité, à l'un des nombres de la première ligne [auxquels il faut adjoindre zéro, multiplicateur de T], de l'un des nombres des lignes suivantes.

B. — Application au cas $n = 3$.

1. *Régularité des crochets* $(X_i T)$.

$\mathbf{P}_{29}$. *Lorsque le groupe* γ *comporte la transformation* $T = \Sigma \rho_r x_r p_r$ $(\rho_r \neq 0)$, *on peut choisir les* $X_i = p_i + \ldots$ *de telle façon que les* $(X_i T)$

soient réguliers, sauf peut-être

$$\begin{array}{lll} \mathrm{T} = 2x_i p_i - x_j p_j + x_k p_k, & \text{I. S.} & (\mathrm{X}_k \mathrm{T}) = \mathrm{X}_k + \lambda \mathrm{T}_{ki}; \\ \mathrm{T} = x_i p_i + 4x_j p_j + 2x_k p_k, & \text{I. S.} & (\mathrm{X}_i \mathrm{T}) = \mathrm{X}_i + \mu \mathrm{T}_{ik} \\ & \text{ou bien [1]} & (\mathrm{X}_k \mathrm{T}) = 2\mathrm{X}_k + 2\nu \mathrm{T}_{kj}. \end{array}$$

D'après 1, il ne peut y avoir d'irrégularité que si les racines de T sont liées par une relation $\rho_\alpha = \rho_\beta - \rho_\gamma$. D'autre part ces mêmes quantités (que l'on suppose non nulles) sont liées par l'une des deux relations (**P**$_{20}$, p. 274) : $2\rho_c = \rho_a - \rho_b$, $\rho_a + \rho_b = 0$. Il résulte de là que les valeurs des ρ qui correspondent à des cas d'irrégularités sont entièrement déterminées. Certains de ces cas s'éliminent, soit que le système $\mathcal{R}$ (p. 274) se réduise à zéro par G″, soit à raison de l'identité de Jacobi.

Remarque. — Les résultats précédents reposent sur deux conditions : 1° les transformations T_{jk} qui font partie du groupe répondent à $(\mathrm{T}_{jk}, \mathrm{T}) = (\rho_k - \rho_j)\mathrm{T}_{jk}$; 2° l'existence de T_{jk} entraîne que certains des symboles a, b, c (p. 274) sont nuls. Or il arrive que le groupe comporte des transformations du type $\mathrm{T}'_{ij} = x_i p_j + x_j p_k$ $(i\,j\,k \neq)$. Mais l'on constate que T'_{ij} satisfait aux deux conditions précédentes exactement comme T_{ij}; en sorte que **P**$_{29}$ *vaut pour les* T'_{ij} *comme pour les* T_{ij}.

2. *Transformation* T *effectivement linéaires et dont aucun* ρ *n'est nul.*

Lorsque la structure est entièrement régulière

$$(\mathrm{X}_i \mathrm{T}) = \rho_i \mathrm{X}_i, \qquad (\mathrm{X}_i \mathrm{X}_k) = 0; \qquad \mathrm{X}_i = p_i, \qquad \mathrm{T} = \sum_s \rho_s x_s p_s \qquad (\rho \neq 0);$$

il est utile de savoir *a priori* dans quelles conditions un tel ensemble peut exister.

P$_{30}$. *Le groupe* $\mathrm{X}_i = p_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\mathrm{T} = \sum_{s=1}^{3} \rho_s x_s p_s$, *ne peut être admis par un système* G *que si* T *a l'une des deux formes suivantes :*

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{T} = 4x_i p_i + 2x_j p_j + x_k p_k, \\ \mathrm{T} = 2x_i p_i + x_j p_j - x_k p_k, \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{les } f^i_{jk} \textit{ et les } \mathrm{R}^i_{jkl} \\ \textit{sont } \mathrm{C}, \textit{ excepté} \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} f^i_{jj}, & f^j_{kk}; & \mathrm{R}^i_{kkj} = f^i_{jj} f^j_{kk} \\ f^j_{ik}, & f^i_{jj}; & \mathrm{R}^j_{jjk} = \mathrm{R}^i_{ikj} = \mathrm{R}^i_{kij} = f^j_{ik} f^i_{jj}. \end{array}\right.$$

---

[1] Car s'il existe à la fois T_{ik} *et* T_{kj} la structure est régulière.

Compte tenu des transformations p_i, les équations de définition de (T) donnent

$$(\rho_i - \rho_j - \rho_k) f^i_{jk} = \varepsilon^i_j \omega_k + \varepsilon^i_k \omega_j.$$

Par suite tous les f sont C, à moins que les invariants ne satisfassent à des relations

$$(6) \qquad (6^a) \quad \rho_i = 2\rho_j, \qquad (6^b) \quad \rho_i = \rho_j + \rho_k \qquad (ijk \neq).$$

De plus, étant supposé que les f ne sont pas tous C, il faut encore exclure le cas dans lequel tous les R le seraient. Les ρ_a doivent donc satisfaire à des relations (**P**$_{20}$, p. 274)

$$(7) \qquad \rho_a + \rho_b = 0, \qquad 2\rho_c = \rho_a - \rho_b.$$

Enfin on peut calculer les R directement à partir des f. On voit facilement que s'il n'existe qu'un seul f non C, il doit être du type f^i_{ij}. Mais, dans l'hypothèse $\rho_j \neq 0$, les f de ce type sont précisément toujours C. Il doit donc exister au moins deux f non C, et par conséquent deux relations du type (6_a) ou (6_b) :

deux relations distinctes du type (6_a)

$$\rho_i = 2\rho_j, \quad \rho_i = 2\rho_k \quad \text{ne satisfait pas à (7)}; \qquad \rho_i = 2\rho_j, \quad \rho_j = 2\rho_k;$$

deux relations distinctes du type (6_b), l'un des invariants est nul, cas exclu; une relation (6_a) et une relation (6_b). Compte tenu de (7)

$$\rho_i = 2\rho_j, \qquad \rho_j = \rho_i + \rho_k.$$

SECTION II. — DÉTERMINATION DU GROUPE MAXIMUM (n AU MOINS ÉGAL A 3).

A. — Méthode.

Dans tous les cas mentionnés par le tableau de la page 291, il existe un ensemble de transformations $x_i p_k$ (i, k prennent un même ensemble de valeurs : 3, ..., n par exemple). On peut alors faire état des propositions démontrées en général au sujet des couples *i.d.* L'ensemble précédent est immédiatement réductible à la forme régulière p_k, $x_i p_k$. On détermine alors facilement la forme de toute autre transformation appartenant au groupe :

Transformations du premier ordre..... $T_{k\alpha} = x_k \left[p_\alpha + \sum \xi^\sigma p_\sigma + \lambda \sum_{s=i,k} x_s p_s \right]$.

Transformations d'ordre zéro......... $X_\alpha = p_\alpha + \sum_\sigma \nu_\sigma p_\sigma + \mu \sum_i x_i p_i$

i, k, indices appartenant au système proposé;
σ, indices distincts de ceux de ce système;
ξ^σ, ν^σ, μ, fonction des x d'indice grec; λ est une constante.

A partir de ces formes générales, il est facile de déterminer, dans chaque cas, l'expression des transformations qui font partie du groupe sans rentrer dans le système $x_i p_k$. Enfin, les équations de définition du groupe donnent la forme du système différentiel qui lui correspond.

On peut également employer la méthode des multiplicateurs. Elle donne, comme on l'a vu, les I.S. et, à partir de là, la forme du groupe.

Dans le cas présent, γ contient (p. 291, G. M.) $(n-1)$ transformations indépendantes du type $T = r_s x_s p_s$. La transformation T la plus générale $T = \rho_i x_i p_i$ renferme alors en effet $(n-1)$ arbitraires; il ne peut donc exister entre les ρ, quels que soient les r, qu'une seule identité. On connaît d'ailleurs la forme de cette identité. L'un au moins des R^i_{jkl} étant non C, on doit avoir

$$\rho_i = \rho_j + \rho_k + \rho_l. \tag{8}$$

Nous appellerons *nombre de termes d'une telle relation* le nombre des quantités ρ qui y figurent effectivement, compte tenu du coefficient de chacune d'entre elles. (On suppose que tous les coefficients sont entiers et que la plus petite de leurs valeurs absolues est l'unité.) La relation précédente est à quatre termes si $i \neq j, k, l$, même lorsque jkl deviennent égaux; elle n'est qu'à deux termes si $i = j$. Il est clair que si l'on introduit un nombre quelconque d'égalités entre les indices d'une relation linéaire entre les ρ, la parité du nombre des termes demeure la même. Cependant, lorsque $i = j$, $k = l$, la relation $2\rho_k = 0$ doit être écrite $\rho_k = 0$ et elle devient, par conséquent relation à un seul terme. En dehors du cas dans lequel la relation (8) se réduit à $\rho_k = 0$, le nombre des termes de (8) demeure toujours pair.

Or, les relations qui doivent exister entre les ρ pour que des irrégularités de structure s'introduisent sont respectivement :

(a)	relativement à $(X_i\,T)$.....	$\rho_i = \rho_k - \rho_j$ ou 0
(b)	» à $(X_i\,T_{jk})$....	$\rho_i + \rho_k - \rho_j = (\rho_l - \rho_k)$ ou 0
(c)	» à $(X_i\,X_j)$.....	$(\rho_i + \rho_j) = \rho_k$ ou 0 ou $\rho_k - \rho_l$

Les relations (a) et (b) et la première des relations (c) ont un nombre impair de termes. Elles ne peuvent donc, en aucun cas, dériver de la relation (8) qui en comporte un nombre pair. Seules sont à quatre termes les relations (c) des deux derniers types. On obtient alors immédiatement celles d'entre elles qui dérivent de (8) :

Lorsque (8) *est à quatre termes :* $i \neq jkl$.

$(\text{I. S.})_1$ $\quad \rho_i = \rho_j + \rho_k + \rho_l \quad (i, j, k, l \neq); \qquad (X_\alpha, X_\beta) = \lambda T_{\gamma i} \quad (\alpha, \beta, \gamma = j, k, l).$

$(\text{I. S.})_2$ $\quad \rho_i = 2\rho_j + \rho_l \quad (i, j, l \neq); \qquad (X_j, X_l) = \lambda T_{ji}.$

Lorsque (8) *est à deux termes :* $\rho_a + \rho_b = 0$ $(a \neq b)$; *alors* $\rho_a + \rho_b + \rho_i = \rho_i$.

$(\text{I. S}_1)_3$ $\quad (X_a, X_b) = \lambda T, \qquad (X_a, X_i) = \mu T_{bi}, \qquad (X_b, X_i) = \nu T_{ai}.$

B. — Structure du groupe maximum G. M. $[(n-1)(n-2)+3]$ **paramètres.**

On voit, en se reportant à la forme du G. M. signalée page 291 $(n \geqq 3)$ que la transformation la plus générale du type $\Sigma \rho_i x_i p_i$ est

$$T = 2x_1p_1 + x_2p_2 + r_n(x_1p_1 + x_np_n) + \sum_{i=3}^{n-1} r_i x_i p_i,$$

$$\rho_1 = 2 + r_n, \qquad \rho_2 = 1, \qquad \rho_i = r_i \qquad (i = 3, \ldots, n).$$

La seule identité qui existe entre les ρ est $\rho_1 = 2\rho_2 + \rho_n$. On peut alors appliquer $(\text{I. S.})_2$

$(\textbf{I. S.})$ $\qquad (X_2 X_n) = \lambda T_{21}.$

C. — Forme du G. M. et du système correspondant.

Lorsque $\lambda = 0$, la structure entièrement régulière implique l'existence du G. C. Par suite, on peut prendre $\lambda = 1$.

$$X_i = p_i \quad [i = 1, 2, \ldots, (n-1)]; \qquad (X_2 X_n) = T_{21}, \qquad [X_2(X_2 X_n)] = X_1,$$

d'où l'on déduit

$$X_n = p_n + \frac{1}{2} x_2^2 p_1, \qquad T_{21} = x_2 p_1.$$

Les crochets (X_i, T_{jk}), tous réguliers, donnent ensuite

$$T_{ik} = x_i p_k, \qquad \text{sauf} \qquad T_{2n} = x_2 p_n + \frac{1}{6} x_2^3 p_1.$$

Enfin on achève la détermination de la transformation la plus générale

$$T = \Sigma \rho_i x_i p_i + \xi^s(x_n) p_s$$

(les ξ étant du second ordre), en écrivant $(X_n T) = \rho_n X_n$. Compte tenu de $\rho_1 = 2\rho_2 + \rho_n$, on obtient $\xi^s = 0$. Le résultat est mentionné pages 304 et 305; le groupe étant connu, on en déduit facilement un système qui l'admet et les solutions de celui-ci.

Rappelons enfin que, dans ce cas comme dans tous ceux qui suivent, le passage du groupe γ (tableau p. 291) au groupe effectivement admis par le système peut s'effectuer par application de la théorie des couples.

SECTION III. — LE GROUPE SOUS-MAXIMUM (n AU MOINS ÉGAL A 3).

Nous ne reproduirons pas le détail des calculs qui permettent la détermination du G. S. Notons que chaque détermination d'un type de groupe et du système associé doit être complétée par les conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe effectivement admis par le système ne comporte pas de transformation supplémentaire. On précise, en utilisant les multiplicateurs de la transformation $T = \Sigma \rho_s x_s p_s$ la plus générale, la forme d'une transformation supplémentaire de γ. Il lui correspond, pour les coefficients du système, des conditions dont il suffit de prendre la contradictoire.

Il existe trois types de groupes G. S. que l'on rapprochera du G. M.

G. M. $\left\{\begin{array}{l} p_k; \quad x_i p_k \quad [i=2, \ldots, n;\ k=1, 3, \ldots, (n-1)]; \quad p_n + \frac{1}{2}x_2^2 p_1; \\ x_1 p_1 + x_n p_n; \quad 2x_1 p_1 + x_2 p_2; \quad x_2 p_n. \end{array}\right.$

G. S. I $\left\{\begin{array}{l} p_k; \quad x_i p_k \quad (i, k=3, \ldots, n); \quad p_1, \quad x_1 p_1, \quad \varphi(x_2) p_1 \\ [\varphi(x_2) \text{ non homographique}]. \end{array}\right.$

G. S. II $\left\{\begin{array}{l} p_k; \quad x_i p_k \quad [i=2, \ldots, n;\ k=1, 3, \ldots, (n+1)]; \quad x_1 p_1 + x_n p_n \\ p_n, \quad x_2 p_n + \xi(x_2) p_1, \quad \varphi^1_{2n,2} \neq \text{const.} \\ \text{ou, au lieu de } p_n, \quad p_n + \frac{1}{2}x_2^2 p_1, \quad \varphi^1_{22,n} \neq \text{const.} \end{array}\right.$

(Les φ^i_{jk} désignent les coefficients f^i_{ik}, mais envisagés à une forme C près.)

G. S. III $\left\{\begin{array}{l} p_1, \quad p_2, \quad p_3 + x_2 x_4 p_1, \quad p_4 - x_2 x_3 p_1; \quad x_3 p_4, \quad x_4 p_3; \\ x_i p_1, \quad x_i p_i + x_1 p_1 \quad (i=2, 3, 4). \end{array}\right.$

G. M. ⊙	**G. S. I**
$\rho_1 = 2\rho_2 + \rho_n$	. . . . $\rho_2 = 0$
$x_1'' = x_n x_2'^2, \quad x_i'' = 0$	. . . . . . $x_1'' = \frac{\varphi''}{\varphi'} x_1' x_2', \quad x_i'' = 0$
$x_1 = \frac{1}{2}\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma$	.... $x_1 = k\varphi(x_2) + l$
$\alpha x_2 + \delta x_n + \gamma = 0$	.... $x_k = \lambda_k x_2 + \mu_k$
$\lambda_i x_2 + \mu_i x_i + \nu_i = 0$	. . . . . .
$[i=3, \ldots, (n-1)]$	. . . . . .

G. S. II ⊙	**G. S. III (n = 4)** ⊙
$\rho_1 = \rho_n$	. . $\rho_1 = \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$
	$x_1'' = 2(x_3 x_4' - x_4 x_3') x_2'$
$x_1'' = \frac{\varphi''}{\varphi'} x_2' x_n', \quad x_i'' = 0$	. . . $x_i'' = 0 \quad (i=2, 3, 4)$
$\frac{dx_1}{dx_2} = \alpha[\mathrm{L}\varphi'(x_2)] + \lambda$	. . . $x_1 = (b\alpha - a\beta)x_2^2 + \lambda x_2 + \mu$
$x_n = \alpha x_2 + \nu_n$	$x_3 = a x_2 + \alpha, \quad x_4 = b x_2 + \beta$
$x_i = \alpha_i x_2 + \nu_i$	
$[i=3, \ldots, (n-1)]$	

Les schémas précédents indiquent les distributions des transformations dans les différents cas. Chaque . indique une transformation à laquelle correspond un paramètre indépendant et par conséquent un coefficient non nul. $\odot$ indique un coefficient non nul, mais égal à une combinaison des paramètres qui figurent déjà dans le tableau

G. M. $\rho_1 = 2\rho_2 + \rho_n$; **G. S. II** $\rho_1 = \rho_n$; **G. S. III** $\rho_1 = \rho_2 + \rho_3 + \rho_4$.

On voit alors immédiatement que *les trois cas du* G. S. *sont irréductibles les uns aux autres* :

(α). *Soit en raisonnant sur la composition de* γ.

Désignons par π le produit des ρ de la transformation la plus générale extraite de γ et par π_1 le produit de ses ρ non nuls lorsque π est nul.

G. M. π dépend de $[(n-3)^2+1]$ arbitraires; **G. S. I** $\pi = 0$;
G. S. III π dépend de $[(n-2)^2+1] (=5)$ arbitraires; **G. S. II** $\pi = 0$.

Et l'on distingue les deux cas G. S. I et G. S. II en considérant π_1 qui est égal au mineur principal relatif à $\xi^2_{,2}$

G. S. I π_1 dépend de $[(n-2)^2+1]$ arbitraires;
G. S. II π_1 dépend de $[(n-3)^2+1]$ arbitraires.

(β). *Soit en raisonnant sur les courbes solutions.*

Ces courbes dépendent d'une fonction arbitraire pour G. S. I et G. S. II, tandis que ce sont des paraboles pour G. M. et G. S. III. Les courbes G. S. I et G. S. II sont des courbes planes, et ces deux ensembles coïncident en ce sens que toute courbe de l'un de ces ensembles se retrouve dans l'autre. Mais on ne peut dire que les deux ensembles coïncident si l'on tient compte de leur distribution. Les courbes M de l'ensemble G. S. I qui correspondent à une courbe donnée m du plan des $x_1 x_2$ peuvent être situées dans un plan quelconque, tandis que ce plan est déterminé à une translation près pour l'ensemble G. S. II. En d'autres termes, la courbe m étant donnée, l'ensemble G. S. I comprend toutes les transformations (linéaires) qui changent les M les unes dans les autres. Tandis que dans le cas G.S.II, ces mêmes transformations permutent en même temps différentes courbes m. Enfin on peut encore dire que, dans le cas G. S. I, la famille à deux paramètres de multiplicités à $(n-1)$ dimensions $x_1 = k\varphi(x_2) + l$ demeure invariante par le groupe. Tandis qu'il n'existe pas de telle famille dans l'ensemble G. S. II.

Une remarque analogue s'applique aux deux ensembles G. M. et G. S. III. Les multiplicités à deux dimensions

$$\underset{(\mathbf{G.\,M.})}{\mathbf{m}}\quad \left\{\begin{aligned} & x_1 = \frac{1}{2}\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma, \\ & \alpha x_2 + \delta x_4 + \gamma = 0; \end{aligned}\right.$$

$$\underset{(\mathbf{G.\,S.\,III})}{\mathbf{m}'}\quad \left\{\begin{aligned} & x_1 = (b\alpha - a\beta)x_2^2 + \lambda x_2 + \mu, \\ & x_4 = b\alpha_2 + \beta \end{aligned}\right.$$

coïncident bien dans leur ensemble. Mais, dans le cas G. M., on obtient toutes les courbes qui correspondent à une m donnée en associant à celle-ci un plan quelconque, tandis que ce plan est, dans le cas G. S. III, assujetti à appartenir au faisceau $x_3 = \alpha$, $x_2 = 0$. Les multiplicités à $(n-2)$ dimensions m sont invariantes par G. M. tandis que les m' ne le sont pas par G. S. III.

Tous ces résultats valent pour $n = 3$.

SECTION IV. — DÉTERMINATION POUR $n = 3$ DES SYSTÈMES DU SECOND ORDRE QUI ADMETTENT UN GROUPE.

Dans un grand nombre de cas, l'existence du groupe considéré entraîne celle du G. M. Il est utile de les connaître.

$\mathbf{P}_{31}$. *Conditions suffisantes pour l'existence du G. M. :*

1° *le groupe comporte* X_i, $T = \Sigma\rho_s x_s p_s$, $T_{21} = x_2 p_1 + \ldots$;

2° *les* ρ, *supposés non nuls ne sont proportionnels ni à* 1, 4, 2; *ni à* 2, 1, —1;

3° *la structure est la suivante*

$$(X_i X_k) = 0, \quad \textit{sauf } (X_2 X_3) = \lambda T_{21}; \qquad (X_i T_{21}) = \varepsilon_i^2 X_1; \qquad (X_i T) = \rho_i X_i.$$

Si $\lambda = 0$, la proposition n'est autre que $\mathbf{P}_{29}$. Si $\lambda \neq 0$, soit $\lambda = 1$ on obtient

$$X_1 = p_1, \qquad X_2 = p_2, \qquad X_3 = p_3 + \frac{1}{2} x_2^2 p_1, \qquad T_{21} = x_2 p_1.$$

Le crochet $(X_3 T) = \rho_3 X_3$ montre ensuite que T a la forme régulière $\sum_s \rho_s x_s p_s$. En se reportant aux équations (G) (p. 226), on voit que seul le symbole $f_{22}^1 = x_3$ peut être non C. On est bien dans le cas du G. M.

Dans tous les cas mentionnés page 291, où le groupe γ comporte effectivement des transformations, on utilise $\mathbf{P}_{28}$, $\mathbf{P}_{29}$, $\mathbf{P}_{30}$, $\mathbf{P}_{31}$ et la méthode ci-dessus indiquée pages 293-294. Mais le détail de l'application ne souffrant pas d'être résumé n'a pu trouver place ici.

Lorsque γ est identiquement nul $\mathbf{P}_{27}$ (p. 290) donne la structure du groupe. On obtient facilement les groupes et les systèmes correspondants. Les quinze fonctions φ_{jk}^i sont solution d'un système différentiel ordinaire. Leurs valeurs initiales demeurant arbitraires, *on pourra toujours les choisir de telle façon que le groupe ne comporte pas de transformation supplémentaire*. Celle-ci serait en effet du premier ordre et imposerait aux valeurs initiales des φ_{jk}^i des relations que l'on peut toujours supposer non vérifiées.

LE CAS $n = 2$.

La structure du groupe est connue ($\mathbf{P}_{27}$) puisque celui-ci comprend au maximum trois transformations X_1, X_2, T_{21}. Mais on constate que *le groupe complet existe sauf dans les deux cas* :

1° $X_1 = p_1$, $X_2 = p_2 + x_1 p_1$; l'existence d'une transformation supplémentaire entraînant celle du G. C., il suffira d'écrire ($\mathbf{P}_{10}$, p. 223) $\lambda_{ik/i} - \lambda_{ii/k} \neq 0$ pour l'un au moins des couples de valeurs ik;

2° $X_1 = p_1$. Il suffira de spécifier que les φ ne satisfont pas aux conditions qu'impose le cas 1°.

TABLEAU DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Système différentiel (à une forme C près).	Solutions du système.
G. M. $x_1''=x_n x_2'^2$ $x_i''=0$	$x_1=\frac{1}{2}\alpha x_2^2+\beta x_2+\gamma$ $\alpha x_2+\delta x_n+\gamma=0$ $\lambda_i x_2+\mu_i x_i+\nu_i=0\quad [i=3,\,\ldots,\,(n-1)]$
n **quelconque,** γ : $[(n-\mathbf{1})(n-\mathbf{2})+\mathbf{3}]$ **paramètres.**	
G. S. I $x_1''=\frac{\varphi''(x_2)}{\varphi'(x_2)}x_1'x_2'$ $x_i''=0$	$x_1=\lambda_1\varphi(x_2)+\mu_1$ $x_i=\lambda_i x_2+\mu_i\quad (i=3,\,\ldots,\,n)$
G. S. II $x_1''=\frac{\varphi''(x_2)}{\varphi'(x_2)}x_2'x_n'$ $x_i''=0$	$\frac{dx_1}{dx_2}=\alpha\,[\mathrm{L}\varphi'(x_2)]+\lambda$ $x_n=\alpha x_2+\nu_n$ $x_i=\alpha_i x_2+\nu_i\quad [i=3,\,\ldots,\,(n-1)]$
n **quelconque,** γ : $[(n-\mathbf{1})(n-\mathbf{2})+\mathbf{2}]$ **paramètres.**	
G. S. III $x_1''=2(x_3x_4'-x_4x_3')x_2'$ $x_i''=0$	$x_1=(\beta\rho-\alpha\sigma)x_2^2+\lambda x_2+\mu$ $x_3=\alpha x_2+\rho$ $x_4=\beta x_2+\sigma$
$n=\mathbf{4}$, γ : $[(n-\mathbf{1})(n-\mathbf{2})+\mathbf{2}]=$ **huit paramètres.**	
III $x_1''=f''(x_3)x_2'^2$ $x_2''=0$ $x_3''=0$	$x_1=\frac{\alpha}{\beta^2}f(x_3)+\lambda x_3+\mu$ $\frac{x_2}{\alpha}-\frac{x_3}{\beta}=\nu$
$n=3$, γ : **trois paramètres.**	

Groupe admis.	Valeurs des R^{l}_{jkl} non C. Conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe ne comporte pas de transformation supplémentaire d'ordre 1, ou bien comporte une transformation supplémentaire d'ordre zéro.
$p_a[a=1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1)]$; $p_n+\frac{1}{2}x_2^2p_1$ $x_ip_k[i=2,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ 3,\ \ldots,\ (n-1)]$ $x_1p_1+x_np_n,\ 2x_1p_1+x_2p_2,\ x_2p_n$	$R^1_{22n}=-1$
n quelconque, γ : $[(n-1)(n-2)+3]$ paramètres.	
$p_k,\ x_ip_k,\ x_2p_k(i,\ k=3,\ \ldots,\ n)$ $p_1,\ x_1p_1,\ \varphi(x_2)p_1$ $p_a,\ a\neq 2$. X_2 n'existe pas $x_ip_k[i=2,\ \ldots,\ n;\ k=1,\ 3,\ \ldots,\ (n-1)]$ $x_1p_1+x_np_n$; $x_2p_n+\varphi(x_2)p_1$	$R^1_{221}=\psi'-\psi^2\left(\psi=\frac{1}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)$, $\varphi(x_2)\neq\frac{\alpha x_2+\beta}{\gamma x_2+\delta}$ Si $\varphi=e^{x_2}$ il peut exister p_2 $R^1_{22n}=\left[\frac{\varphi''}{2\varphi'}\right]'\neq 0$
n quelconque, γ : $[(n-1)(n-2)+2]$ paramètres.	
$p_1,\ p_2,\ p_3+x_2x_4p_1,\ p_4-x_2x_3p_1$ $x_3p_4,\ x_4p_3$ $x_ip_1,\ x_ip_i+x_1p_1\ (i=2,\ 3,\ 4)$	$R^1_{324}=R^1_{432}=1$
$n=4$, γ : $[(n-1)(n-2)+2]=$ huit paramètres.	
$p_1,\ p_2;\ x_2p_1,\ x_3p_1,\ 2x_1p_1+x_2p_2$ $\left\{X_3=[1+(\gamma-\beta)x_3]p_3+\left(\frac{\lambda}{2}x_2^2-\beta x_1\right)p_1\right\}$	$f^{IV}\neq 0$. Pour l'existence de X_3 : si $\beta=\gamma$: $f''=\lambda x_3+\mu$ ou $f''=\frac{\lambda}{\beta}+c\,e^{-\beta x_3}$ si $\beta\neq\gamma$: $f''=\frac{\lambda}{\beta}+[1+(\gamma-\beta)x_3]^{\frac{1}{1-\frac{\gamma}{\beta}}}$ si $\beta=0$: $f''=\frac{\lambda}{\gamma}L(1+\gamma x_3)$
$n=3$, γ : trois paramètres.	

TABLEAU DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Système différentiel (à une forme C près).	Solutions du système.
IV $x_1'' = \frac{1}{2}\frac{f''(x_3)}{[f'(x_3)]^2}x_2'^2$ $x_2'' = \frac{f''}{f'}x_2'x_3'$ $x_3'' = 0$	$2x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 + \gamma = 0$ $x_2 + \alpha f(x_3) \quad + \delta = 0$
V $x_1'' = x_2'(fx_1' + \varphi x_3')$ $x_2'' = 0$ $x_3'' = x_2'(\psi x_1' + g x_3')$	$x_1'' = \alpha(fx_1' + \varphi x_3')$ $x_3'' = \alpha(\psi x_1' + g x_3')$ $f, g, \varphi, \psi, \xi, \zeta$: fonctions de x_2
VI $x_1'' = 0$ $x_2'' = 0$ $x_3'' - Ax_1'x_2' = B(x_3' - Ax_2x_1')^2$	$x_1 = \alpha x_2 + \beta$ $x_3 = \frac{A\alpha}{2}x_2^2 - \frac{1}{B}[L(x_2 - \gamma)] + \delta$ A, B : const.

$n = 3$, γ : trois paramètres.

Système différentiel (à une forme C près).	Solutions du système.
VII $x_1'' = A\,e^{-x_1}x_1'x_2' + B\,e^{-2x_1}x_2'^2$ $x_2'' = x_1'x_2' + A\,e^{-x_1}x_2'^2$ $x_3'' = 0 \qquad$ (A, B : const.)	
VIII $x_1'' = 0$, $x_2'' = 0$ $x_3'' = x_3'[f(x_2x_3)x_2' + g(x_2x_3)x_3']$	

$n = 3$, γ : deux paramètres.

QUI ADMETTENT DES GROUPES (*suite*).

Groupe admis.	Valeurs des R^i_{jkl} non C. Conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe ne comporte pas de transformation supplémentaire d'ordre 1, ou bien comporte une transformation supplémentaire d'ordre zéro.
p_1, p_2; X_3 n'existe pas $x_3 p_1,\ 2x_1 p_1 + x_2 p_2,\ x_2 p_1 + f(x_3).p_2$	$f \neq \dfrac{1}{\alpha x_3 + \beta},\quad f \neq \gamma x_3 + \delta$ $R^2_{332} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{f''}{f'}\right]'$ $R^1_{232} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{f''}{f'^2}\right]' + \dfrac{1}{4}\dfrac{f''^2}{f'^3}$
p_1, p_3; X_2 n'existe pas $x_1 p_1 + x_3 p_3$ Deux tr. $\xi p_1 + \zeta p_3$ $\left\{\begin{array}{l}\xi'' = f\xi' + \varphi\zeta' \\ \zeta'' = \psi\xi' + g\zeta'\end{array}\right.$	$R^1_{223} = \dfrac{\varphi'}{2} - \dfrac{\varphi g}{4}$ $R^1_{212} = -\dfrac{f'}{2} + \dfrac{\varphi\psi}{4}$ (sym. 1, 3) On n'a pas : $\dfrac{f}{f_0} = \dfrac{\varphi}{\varphi_0} = \dfrac{g}{g_0} = \dfrac{\psi}{\psi_0}$ avec $f_0 g_0 - \varphi_0 \psi_0 = 0$
$p_1, p_2 + A x_1 p_3, p_3$ $x_1 p_1 - x_2 p_2$ $x_1 p_2 + \dfrac{A}{2} x_1^2 p_3,\ x_2 p_1 + \dfrac{A}{2} x_2^2 p_3$	$R^3_{112} = -\dfrac{3}{2} BA^2 x_2,\ R^3_{123} = -\dfrac{AB}{2}$ $AB \neq 0$
$n = 3$, γ : **trois paramètres.**	
$p_1 + x_2 p_2,\ p_2,\ p_3$ $x_2 p_1 + \dfrac{1}{2} x_2^2 p_2,\ x_3 p_3$	$b_{13} = R^1_{212} - R^3_{232} = -A e^{-x_1} + \left(\dfrac{B}{2} - A^2\right) e^{-2x_1}$ $c^1_2 = -c^2_1 = -\dfrac{3A}{4} e^{-x_1}$ A ou $B \neq 0$
$p_1,\ x_2 p_1,\ x_1 p_1$	? b_{13}, c^3_2; x''_3 ne doit pas être réductible par $y_3 = H(x_2 x_3)$ à $G(x_2) x'_2 x'_3$
$n = 3$, γ : **deux paramètres.**	

TABLEAU DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Système différentiel (à une forme C près).	Solutions du système.
IX $x_1'' = f(x_3)\,x_2'^2$ $x_2'' = 2\,g(x_3)\,x_2' x_3'$ $x_3'' = 0$	$\dfrac{d^2 x_1}{dx_3^2} = \gamma^2 f(x_3)\, e^{4\int g(x_3)\, dx_3}$ $\dfrac{dx_2}{dx_3} = \gamma\, e^{2\int g(x_3)\, dx_3}$
X $x_1'' = 0$ $x_2'' = x_3 x_2'^2$ $x_3'' = -\,x_3^3 x_2'^2 - 2\,x_3 x_2' x_3'$	$\dfrac{dx_2}{dx_1} = \alpha\gamma\, e^{\beta\, e^{\alpha(x_1+\lambda)}}$ $x_3 = \dfrac{\alpha\beta}{\gamma}\, e^{\alpha(x_1+\lambda)}\, e^{-\beta\, e^{\alpha(x_1+\lambda)}}$
XI $x_1'' = x_3' \left\{ (1 + x_2)\dfrac{g}{f'}\, x_2' + \left[\dfrac{1}{f'} + \dfrac{(1+x_2)f''}{2f'^2}\right] x_3' \right\}$ $x_2'' = 0$ $x_3'' = x_2' \left[g x_2' + \dfrac{f''}{f'}\, x_3' \right]$	
XII $x_1'' = x_3' \left\{ \dfrac{g x_2'}{f'} + \dfrac{f''}{2f'^2}\, x_3' \right\}$ $x_2'' = 0$ $f,\ g$: fonctions de x_2 $x_3'' = x_2' \left[g x_2' + \dfrac{f''}{f'}\, x_3' \right]$	
XIII $x_1'' = f x_2'^2 + 2\,g x_2' x_3' + h\, x_3'^2$ $x_2'' = 0$ $f,\ g,\ h$: fonctions $x_3'' = 0$ de $x_2 x_3$	

$n = 3$, γ : **deux paramètres.**

QUI ADMETTENT DES GROUPES (*suite*).

Groupe admis.	Valeurs des R^i_{jkl} non C. Conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe ne comporte pas de transformation supplémentaire d'ordre 1, ou bien comporte une transformation supplémentaire d'ordre zéro.
$p_1,\ p_2;\ x_3p_1,\ 2x_1p_1+x_2p_2$ $\{X_3=p_3+(\alpha+\beta x_3)(x_1p_1+x_3p_3)+\gamma x_2p_2\}$	$a^1_3=R^1_{223}=-(f'+fg),\ b_{12}=g'-g^2,\ fg\neq 0$ Exclusion de $f=\lambda x_3+\mu,\ g=-\dfrac{1}{x_3+\mu}$ Pour X_3 : $f'=(\beta x_3-2\gamma)f;\ g'+(\alpha+2\beta x_3)g=0$
$p_1,\ p_2,\ p_3+\frac{1}{2}x_2^2p_2-x_3p_3$ $x_1p_1,\ x_2p_2-x_3p_3$	$c^2_3=-1,\ c^3_2=-1$
$p_1,\ p_3;$ X_2 n'existe pas $x_2p_1,\ x_3(1+x_2)p_1+fp_3$ $f,\ g$: fonctions de x_2	$a^1_3=\left[\dfrac{g}{f'}\right]'+\dfrac{(1+x_2)gf''}{4f'^2}$ $a^1_2=-\dfrac{1+x_2}{2}\left[\left(\dfrac{f''}{f'^2}\right)'+\dfrac{1}{2}\dfrac{f''^2}{f'^3}\right]$ $g\neq 0,\ a^1_2$ ou $a^1_3\neq 0$
$p_1,\ p_3;\ x_2p_1,\ x_3p_1+fp_3$ $\{X_2=p_2+\alpha(x_1p_1+x_3p_3)$ $+(\beta x_2+\gamma x_3)(x_3p_1+fp_3)-\frac{1}{2}\gamma x_3^2p_1\}$	$a^1_3=\left(\dfrac{g}{f'}\right)'+\dfrac{gf''}{4f'^2}$ $a^1_2=-\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{f''}{f'^2}\right)'+\dfrac{1}{2}\dfrac{f''^2}{f'^3}\right]$ $g\neq 0,\ a^1_2$ ou $a^1_3\neq 0$, X_2 existe si : $f'=f'_0+\alpha f+\gamma f^2$ $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{g}{f'}\right)'=\beta-\left(\gamma\dfrac{g}{f'}+\beta\dfrac{f''}{2f'^2}\right)f$
$p_1,\ x_2p_1,\ x_3p_1$	$a^1_3=g_2-f_3,\ a^1_2=g_3-f_2$ Non réductibilité à G.S. I; G.S. II

$n=3$, γ : deux paramètres.

TABLEAU DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Système différentiel (à une forme C près).	Solutions du système.
XIV $x_1'' = (x_2' - \mathrm{A}x_1x_3')^2$ $x_2'' = 2\mathrm{B}x_1'x_3'$ $x_3'' = 0$	$\mathrm{A} = 2\mathrm{B},\ x_1 = \frac{\lambda}{2}(x_3-\gamma)^2 + \mu(x_3-\gamma) + \alpha$ $x_2 = \frac{\mathrm{B}\lambda}{3}(x_3-\gamma)^3 + \mathrm{B}\mu(x_3-\gamma)^2 + 2\mathrm{B}\alpha(x_3-\gamma) + \beta$ $2\mathrm{B} - \mathrm{A} = \mathrm{C} \neq 0,\ dx_3 = \dfrac{dx_1}{\sqrt{\frac{2}{3}\mathrm{C}^2\left(x_1 + \frac{\alpha}{\mathrm{C}}\right)^3 + \lambda}}$ $dx_2 = (2\mathrm{B}x_1 + \alpha)\,dx_3$
XV $x_1'' = 2f(x_3)x_1'x_3'$ $x_2'' = 2g(x_3)x_2'x_3'$ $x_3'' = 2h(x_3)x_1'x_2'$	$\dfrac{dx_1}{dt} = \alpha e^{2\int f dx_3}$ $\dfrac{dx_2}{dt} = \beta e^{2\int g dx_3}$ $\dfrac{d^2x_3}{dt^2} = \alpha\beta h e^{2\int (f+g)\,dx_3}$
XVI $x_1'' = x_2x_1'^2$ $x_2'' = -3x_2^3x_1'^2 - 2x_2x_1'x_2' + 2h(x_3)[x_2x_1' + x_2']x_3'$ $x_3'' = u(x_3)[x_2^2x_1'^2 + 2x_1'x_2'] + v(x_3)x_3'^2$	
XVII $x_1'' = 0$ $x_2'' = l(b + 3a + 3l)x_1'^2 + (b - a - 3l)x_2x_1'x_2' + alx_2^2x_1'x_3' + ax_2'x_3'$ $x_3'' = (l - 2b + 2kl)x_2^2x_1'^2 + 2kx_1'x_2' + (2b - l)x_1'x_3' + lx_3'^2$	

$n = 3$, γ : un paramètre.

QUI ADMETTENT DES GROUPES (*suite*).

Groupe admis.	Valeurs des R^l_{jkl} non C. Conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe ne comporte pas de transformation supplémentaire d'ordre 1, ou bien comporte une transformation supplémentaire d'ordre zéro.
$p_1 + Ax_3p_2,\ p_2,\ p_3$ $2x_1p_1 + x_2p_2 - x_3p_3$	$c_3^2 = 2B - A,\ c_2^3 = -2B,\ b_{12} = ABx_1$ A ou $B \neq 0$
$p_1,\ p_2,\ x_1p_1 - x_2p_2$ $\{ X_3 = p_3 + \lambda x_1 p_1 \}$	$b_{12} = g' - f' - (g^2 - f^2)$, $c_2^1 = h(g - 3f) - h',\ c_1^2 = h(f - 3g) - h'$, $h \neq 0$; et l'on n'a pas : $-\dfrac{h'}{2h} = f = g$.
$p_1,\ p_2 + \dfrac{1}{2} x_1^2 p_1 - x_1x_2p_2$ $x_1p_1 - x_2p_2$ $\{ X_3 = p_3 \}$	$c_2^1 = 1 + u' \neq 0$ Pour que X_3 existe, h et v : const.
$p_1,\ p_3,\ p_2 + x_1p_3 + l\left(\dfrac{1}{2} x_2^2 p_2 - x_3p_3\right)$ $x_1p_1 - x_2p_2$ $a,\ b,\ k,\ l$: const.	$c_2^1 = k\left(b + \dfrac{a}{2}\right) \neq 0$

$n = 3$, γ : un paramètre.

TABLEAU DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Système différentiel (à une forme C près).	Solutions du système.
XVIII $x''_1 = 0$ $x''_2 = f x'^2_2 + 2 g x'_2 x'_3 + h x'^2_3$ $x''_3 = \varphi x'^2_2 + 2 \psi x'_2 x'_3 + \chi x'^2_3$	$f, \ldots, \chi$: fonctions de $x_2 x_3$
XIX $x''_1 = f x'^2_2 + 2 g x'_2 x'_3 + h x'^2_3$ $x''_2 = 0$ $x''_3 = \varphi x'^2_2 + 2 \psi x'_2 x'_3 + \chi x'^2_3$	$f, \ldots, \chi$: fonctions de $x_2 x_3$ p_1, $x_2 p_1$
$n = 3$, γ : un paramètre.	
Système différentiel.	
XXI $x''_i = f^i_{rs} x'_r x'_s$ $f^1_{jk} = e^{x_2} \varphi'_{jk}$ $f^j_{11} = e^{-x_2} \varphi^j_{11}$ $f^j_{1k} = e^{-x_2} \varphi^j_{ik}$ $f^1_{11} - 2 f^j_{j1} = e^{-x_2} (\varphi'_{11} - 2 \varphi^j_{j1})$	$f^j_{kk} = \varphi^j_{kk} \quad (j \neq k)$ $f^j_{jj} - 2 f^k_{kj} = \varphi^j_{jj} - 2 \varphi^k_{kj} \quad (j \neq k)$ $(j, k = 2, 3)$ Les φ sont fonction de x_3
XXII $x''_i = f^i_{rs} x'_r x'_s$ $\varphi^i_{jk,1} = 0$ $\varphi^i_{jk,2} = 0$	$\varphi^i_{jk,3} = (\rho_i - \rho_j - \rho_k) \varphi^i_{jk} \, (\rho_3 = 0)$ Les f ne diffèrent des φ que par une forme C
XXIII $x''_i = f^i_{rs} x'_r x'_s$ $\varphi^i_{jk,1} = 0$ $\varphi^i_{jk,2} = 0$	$\varphi^i_{jk,3} = \varepsilon^i_1 \varphi^2_{jk} - \varepsilon^2_j \varphi^i_{1k} - \varepsilon^3_k \varphi^i_{1j}$ Les f ne diffèrent des φ que par une forme C

QUI ADMETTENT DES GROUPES (*suite*).

Groupe admis.	Valeurs des R^i_{jkl} non C. Conditions nécessaires et suffisantes pour que le groupe ne comporte pas de transformation supplémentaire d'ordre 1, ou bien comporte une transformation supplémentaire d'ordre zéro.
$p_1,\ x_1 p_1$	? $b_{12},\ b_{13},\ c_3^2,\ c_2^3$

XX $x_1'' = e^{-2x_1} f x_2'^2 + 2e^{-x_1} g x_2' x_3' + h x_3'^2$

$x_2'' = x_1' x_2'$

$x_3'' = e^{-2x_1} \varphi x_2'^2 + 2e^{-x_1} \psi x_2' x_3' + \chi x_3'^2$

$f, \ldots, \chi$, fonction de x_3

$p_1 + x_2 p_2,\ p_2$

$x_2 p_1 + \frac{1}{2} x_2^2 p_2$

$n = 3$, γ : un paramètre.

Groupe admis.	Conditions pour que le groupe ne comporte pas de transformation supplémentaire.
p_1 $p_2 + x_1 p_1$ $\left\{ \frac{1}{2} x_1^2 + e^{2x_2} [\alpha(x_3)] \right\} p_1 + x_1 p_2 + e^{x_2} p_3$ p_1 p_2 $p_3 + \rho_1 x_1 p_1 + \rho_2 x_2 p_2$ p_1 p_2 $p_3 + x_2 p_1$	Les valeurs initiales des φ, considérées comme solutions d'équations différentielles, demeurent arbitraires. Elles seront choisies de manière à ne pas satisfaire aux conditions qu'imposerait l'existence d'une transformation supplémentaire.

TABLEAU DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

Système différentiel.

XXIV $x''_i = f^i_{rs} x'_r x'_s$

$\varphi^i_{jk,1} = 0$

$\varphi^i_{jk,2} = 0$

$\varphi^i_{jk,3} = \varepsilon^i_2 \varphi^1_{jk} - \varepsilon^1_j \varphi^i_{2k} - \varepsilon^k_1 \varphi^i_{2j} + (\rho_i - \rho_j - \rho_k)\varphi^i_{jk}$

avec $\rho_1 = 1,\ \rho_2 = 1,\ \rho_3 = 0$

$n = 3$, **G : trois paramètres.**

XXV $x''_i = f^i_{rs} x'_r x'_s$

$\varphi^i_{jk,1} = 0$

$\varphi^i_{jk,2} = (\rho_i - \rho_j - \rho_k)\varphi^i_{jk}\ (\rho_2 = 0,\ \rho_3 = 0)$

$n = 3$, **G : deux paramètres.**

XXVI $x''_i = f^i_{rs} x'_r x'_s$ $\qquad \varphi^i_{jk,1} = 0$

$n = 3$, **G : un paramètre.**

I $x''_1 = a e^{-x_2} x'^2_1 + c e^{x_2} x'^2_2$

$x''_2 = d e^{-2x_2} x'^2_1 + b x'^2_2$ $\qquad a, b, c, d$: const.

$n = 2$, **G : deux paramètres.**

II $x''_1 = \alpha x'^2_1 + \gamma x'^2_2$

$x''_2 = \delta x'^2_1$ $\qquad \alpha, \gamma, \delta$: fonctions de x_2

$n = 2$, **G : un paramètre.**

QUI ADMETTENT DES GROUPES (*fin*).

Groupe admis.	Conditions pour que le groupe ne comporte pas de transformation supplémentaire.
p_1 p_2 $p_3 + x_1 p_1 + (x_1 + x_2) p_2$	Les valeurs initiales des φ, considérées comme solutions d'équations différentielles, demeurent arbitraires. Elles seront choisies de manière à ne pas satisfaire aux conditions qu'imposerait l'existence d'une transformation supplémentaire.
$n = 3$, G : trois paramètres.	
p_1 $p_2 + \rho_1 x_1 p_1$	Remarque de même nature.
$n = 3$, G : deux paramètres.	
p_1	Remarque de même nature.
$n = 3$, G : un paramètre.	
p_1 $p_2 + x_1 p_1$	$a, b, c, d,$ ne répondent à aucune des trois conditions. **1** $b = 1,\ c = 0,\ d = \left(\frac{a}{3}\right)^2$ **2** $a = 0,\ d = 0$ **3** $b + 2 = 3a,\ a(a-1) = 3cd$
$n = 2$, G : deux paramètres.	
p_1	$\alpha, \gamma, \delta,$ ne vérifient aucune des trois mêmes conditions.
$n = 2$, G : un paramètre.	