

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

W. DOBLIN

W. DOBLIN

Éléments d'une théorie générale des chaînes simples constantes de Markoff

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 57 (1940), p. 61-111

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1940_3_57__61_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉLÉMENTS D'UNE THÉORIE GÉNÉRALE

DES

CHAÎNES SIMPLES CONSTANTES DE MARKOFF

PAR M. W. DOBLIN.

I. — Introduction.

1. Nous nous consacrerons dans ce Mémoire à l'étude du schéma suivant :

Soit W un ensemble non vide quelconque, \mathcal{F} une famille de sous-ensembles de W [dits mesurables ⁽¹⁾], comprenant W et l'ensemble vide, formant un corps borélien ⁽²⁾. Faisons correspondre à chaque ensemble mesurable \mathcal{E} et à chaque point $x \in W$ une grandeur bien définie $P^{(1)}(x, \mathcal{E}) \geq 0$, complètement additive en \mathcal{E} sur \mathcal{F} , normée c'est-à-dire satisfaisant à $P^{(1)}(x, W) = 1$, mesurable par rapport à x pour chaque $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$. Nous interprétons $P^{(1)}(x, \mathcal{E})$ comme la probabilité de passage de x en \mathcal{E} d'un certain point mobile en une épreuve. Nous désignerons par $P^{(n)}(x, \mathcal{E})$ la probabilité de passer de x dans \mathcal{E} en n épreuves. $P^{(n)}(x, \mathcal{E})$ peut être considéré comme le $n^{\text{ième}}$ itéré de $P^{(1)}(x, \mathcal{E})$, l'opération d'itération étant entendue comme pour un noyau ordinaire (cf. § 1). On a deux problèmes :

⁽¹⁾ Cette définition n'a aucun rapport avec la définition usuelle.

⁽²⁾ HANSDORFF, *Mengenlehre*.

I. *Problème analytique.* — Étude de l'allure asymptotique de la « distribution de probabilité » $P^{(n)}(x, \mathcal{E})$ pour $n \rightarrow \infty$.

II. *Problème probabiliste.* — Étude du mouvement du point mobile.

Nous appellerons *chaîne simple constante de Markoff* le schéma défini ci-dessus.

Résumé. — Nous étudions le problème général des chaînes tel qu'il est défini ci-dessus. Nous montrons que sous des hypothèses très générales (théorème d'application, n° 9), l'on peut trouver un ensemble $\Sigma \mathcal{L}$ stochastiquement fermé, tel que $W - \Sigma \mathcal{L}$ ne contienne plus d'ensembles stochastiquement fermés, $\Sigma \mathcal{L}$ étant la réunion d'ensembles disjoints \mathcal{L} , chaque \mathcal{L} étant stochastiquement fermé et indécomposable si \mathcal{L} est absolument essentiel. Dans le cas général nous prenons cela comme hypothèse. Nous prouvons que l'ensemble $W - \Sigma \mathcal{L}$ est essentiel impropre ou inessentiel, de telle sorte que le point mobile s'éloigne en quelque sorte indéfiniment de $\Sigma \mathcal{L}$ à moins qu'il n'y entre. Les paragraphes 2 et 3 sont consacrés à l'étude du mouvement et des probabilités à l'intérieur d'un ensemble stochastiquement fermé \mathcal{L} indécomposable et absolument essentiel. Nous étudions d'abord, paragraphe 2, la stabilité à la Poisson et montrons que sauf dans un cas anormal (qui est étudié aussi) il existe un sous-ensemble \mathcal{G} qui contient en quelque sorte tout ce qui est absolument essentiel dans \mathcal{L} et que nous appelons ensemble final. L'ensemble $\mathcal{L} - \mathcal{G}$ est essentiel impropre ou inessentiel. Si \mathcal{E} est un ensemble essentiel de \mathcal{G} et E un point quelconque de \mathcal{G} , alors le point mobile passe presque sûrement, à partir de E, une infinité de fois par \mathcal{E} et tout sous-ensemble essentiel de \mathcal{G} est absolument essentiel. Nous montrons dans le paragraphe suivant que l'ensemble final se divise encore en sous-ensembles cycliques entre lesquels il y a le mouvement cyclique bien connu. Il est établi que deux cas seuls peuvent se produire : les $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ sont asymptotiquement périodiques si $n \rightarrow \infty$ quels que soient E et \mathcal{E} ($\in \mathcal{G}$) ou il existe une suite d'ensembles $\mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}_2 \supset \dots \supset \mathcal{E}_i \supset \dots$; $\mathcal{E}_n \rightarrow 0$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i) = 1$ quel que soit i.

Dans le paragraphe 4 nous étudions d'abord les probabilités si l'ensemble \mathcal{L} stochastiquement fermé est essentiel impropre, puis si E et \mathcal{E} sont quelconques. Nous étudions ensuite des questions diverses telles que moyennes de Césaro « mesures invariantes », constantes fondamentales de module 1, etc.

2. Des cas particuliers de ce schéma furent étudiés par un grand nombre d'auteurs ⁽³⁾.

Le premier qui envisagea un cas particulier de ce schéma fut MARKOFF qui supposait que l'ensemble W était fini (c'est-à-dire composé d'un

⁽³⁾ Nous indiquerons les références bibliographiques seulement pour les travaux qui ne se trouvent pas dans la liste de M. HOSTINSKY, *Méthodes générales du Calcul des Probabilités* (Mémoires Sc. math., n° 52, 1931), ou dans l'index du livre de M. FRÉCHET, *Traité du Calcul des Probabilités de M. Borel*, t. 1, fasc. III; *Recherches théoriques modernes*, livre 2, Paris, 1938.

nombre fini d'éléments. Dans ce cas on peut définir le schéma sous la forme intuitive suivante. Considérons un système matériel ne pouvant prendre qu'un nombre fini d'états E_1, \dots, E_r . Faisons une suite dénombrée d'épreuves, la première épreuve, la deuxième épreuve, etc.; et supposons que la probabilité pour que le système matériel passe en une épreuve de l'état E_i à l'état E_k (plus précisément passe de l'état E_i à la $\nu - 1$ ème épreuve à l'état E_k à la ν ème épreuve) ne dépende que de i et k , mais ni de l'indice ν des épreuves ni du mouvement antérieur du système. Soit p_{ik} cette probabilité. Soit P_{ik}^n la probabilité de passer de E_i en E_k en n épreuves.

On vérifie facilement que $P_{ik}^{(n)}$ satisfait à

$$P_{ik}^{(n+m)} = \sum_{j=1}^r P_{ij}^{(n)} P_{jk}^{(m)}, \quad \sum_{k=1}^r P_{ik}^{(n)} = 1, \quad P_{ik}^{(n)} > 0.$$

Il s'agit d'étudier l'allure asymptotique de P_{ik}^n et du mouvement du système.

Ce cas que nous appellerons *le cas d'un nombre fini d'états* a été étudié par MARKOFF en 1908 sous l'hypothèse que tous les p_{ik} soient > 0 . Indépendamment et presque simultanément H. POINCARÉ avait été aussi conduit au même schéma. Après la guerre un très grand nombre de savants s'ignorant souvent mutuellement en ont repris l'étude; nous en citons MM. LEVY, HADAMARD, HOSTINSKY [et ses élèves POTOČEK, KAUCKY (⁴), KONECNY, POSPISZIL], ROMANOVSKY, V. MISES, FRÉCHET, DOBLIN, FOULLADE.

Le cas où l'ensemble W des états possibles est un domaine de mesure lebesgienne finie contenue dans un espace euclidien, et où il y a une densité de probabilité $p(E, F)$ pour que le point mobile passe dans une épreuve de E en F fut, étudié d'abord par MM. HOSTINSKY (⁵) et HADAMARD (⁶) en supposant $p(E, F)$ continu, puis par M. FRÉCHET (⁷) en supposant seulement que $p^{(n)}(E, F)$ [n ème itéré du noyau $p(E, F)$] soit borné quels que soient E et F pour un certain n . Nous désignerons ce

(⁴) Le livre de M. FRÉCHET contient un exposé étendu de ces travaux dans le cas d'un nombre fini d'états.

(⁵) Nos 5-7 dans la liste du fasc. de M. HOSTINSKY.

(⁶) Congrès de Bologne, t. 6, 1928.

(⁷) *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 62, 1933, p. 68-83.

cas par *cas de M. Fréchet* [mais M. FRÉCHET a étudié aussi un autre cas : il a donné ⁽⁸⁾ les conditions nécessaires et suffisantes pour que, si mes(W) est infini, $p^{(n)}(E, F)$ tende uniformément par rapport à E vers une fonction $p(F)$ non presque partout nulle, si $n \rightarrow \infty$].

Le cas où W est dénombrable (désigné plus loin brièvement par *cas dénombrable*) fut étudié d'abord — sous des hypothèses restrictives qui assurent un certain parallélisme de l'allure du mouvement avec le cas d'un nombre fini d'états — par M. FORTET ⁽⁹⁾, puis dans le cas général par M. KOLMOGOROFF ⁽¹⁰⁾.

D'autres hypothèses particulières furent examinées par MM. FORTET ⁽¹¹⁾, DOBLIN ⁽¹²⁾, BOGOLIUBOFF et KRYLOFF ⁽¹³⁾, FOUILLADE ⁽¹⁴⁾.

3. Dans chacun de ces cas les auteurs appliquaient des méthodes différentes en utilisant d'une façon très essentielle la structure particulière de l'ensemble W et les hypothèses restrictives faites sur les probabilités de passage. Certaines de ces méthodes pouvaient s'étendre plus ou moins facilement à des cas différents, mais il n'en existait aucune qui pouvait être appliquée indifféremment par exemple au cas dénombrable le plus général et au cas de M. Fréchet.

Il apparaissait donc comme nécessaire de donner une méthode pouvant s'appliquer indifféremment à tous les cas étudiés, et comme désirable de donner une théorie générale des chaînes simples de Markoff (c'est-à-dire du schéma défini dans 1) contenant comme corollaires les résultats essentiels qu'on avait trouvés dans les cas simples étudiés. C'est à cette tâche qu'est consacré ce Mémoire. Nous allons étudier le schéma 1 sous des hypothèses extrêmement

⁽⁸⁾ *Comment. Math. Helv.*, t. 5, 1933, p. 175-245.

⁽⁹⁾ *Comptes rendus*, t. 202, 1936, p. 1362-1364.

⁽¹⁰⁾ *Recueil Math. Moscou N. S.*, t. 1, 1936, p. 607-610 et *Bull. de l'Univ. d'État de Moscou*, t. 1, 1937.

⁽¹¹⁾ *Comptes rendus*, t. 204, 1937, p. 315-317.

⁽¹²⁾ *Rend. Acad. Lincei*, S. 6^a, t. 25, p. 170-176; *Bull. Soc. Roum. Sc.*, t. 39 (1), 1937, p. 57-115 et t. 39 (2), 1937, p. 1-61.

⁽¹³⁾ *Comptes rendus*, t. 204, 1937, p. 1386-1388 et 1454-1456.

⁽¹⁴⁾ *Bull. Sc. Math.*, t. 61, 1937, p. 302-325 et *Mémoires Soc. Roy. Sc. Liège*, t. II, 1937.

générales ⁽¹⁵⁾. (Nous ne croyons pas qu'on puisse nommer des cas où elles ne sont pas satisfaites.)

Certes si l'on ne voulait obtenir que les résultats essentiels connus dans les cas principaux étudiés, à savoir le cas fini, les cas où il y a un parallélisme très complet avec le cas fini et le cas dénombrable, il aurait été plus vite de considérer successivement ces cas l'un après l'autre et de les traiter avec la méthode qui va suivre. Toutefois si l'on veut étudier des cas plus difficiles tels que le cas où il y a une densité $p^{(1)}(E, F)$ dans un ensemble de mesure infinie, etc., on est obligé de faire des raisonnements qui ne sont guère plus courts que le traitement du cas général.

Nous envisageons donc le cas le plus général où nos hypothèses sont satisfaites. Nous montrerons par des théorèmes d'application que ces hypothèses sont contenues dans d'autres beaucoup plus strictes, mais dont la vérification est sensiblement plus facile. L'analyse de notre schéma nous fera rencontrer un certain cas anormal que nous étudierons et dans lequel les énoncés se compliquent sensiblement.

Nous montrerons que ce cas ne peut pas se présenter si l'on fait des hypothèses très larges sur les $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ ou sur l'ensemble W .

4. Nous ne pensons pas qu'on puisse nommer des cas où nos hypothèses ne sont pas satisfaites, et d'autre part nous ne croyons pas non plus qu'on puisse obtenir des résultats essentiels supplémentaires sans restreindre la généralité. Cependant nous ne prétendons point résoudre avec ce travail le problème général des chaînes de Markoff.

Pour beaucoup de problèmes les résultats obtenus peuvent être considérés comme absolument insuffisants et même insignifiants. Ainsi dans le cas où le mouvement n'est pas aléatoire, nos résultats se résument à ceci : ou bien le point mobile partant du point E revient une infinité de fois en un autre point F , et dans ce cas il parcourt périodiquement à partir d'un certain instant un certain cycle fini de positions, ou bien il ne revient jamais à la même position. Il est d'ailleurs évident que si à peu près tout schéma d'itération peut être ramené à une chaîne de Markoff, il ne sera généralement pas avanta-

(15) Pour l'énoncé précis de ces hypothèses, voir n° 7.

geux de le traiter comme telle. Dans le cas dénombrable nous montrons bien que P_{ik}^n converge toujours en moyenne de Cesàro vers une limite (résultat obtenu par M. Kolmogoroff), mais nous n'obtenons dans le cas général aucun résultat sur $\sum_{E_k \in \mathcal{E}} P_{ik}^n$. Pour obtenir des résultats

plus précis on sera obligé à faire des hypothèses supplémentaires, soit en admettant l'existence d'une « mesure invariante », soit encore en imposant des conditions d'ordre topologique, etc. Nous donnerons une certaine classification des alternatives possibles, mais lorsqu'on aura un cas concret où l'ensemble W est infini, il sera généralement très difficile, sinon impossible, de voir dans quelle catégorie ce cas rentre.

I.

5. Les $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$, $K^{(n)}(E, \mathcal{E})$, $\text{Pr}(E, \mathcal{E})$, $Q(E, \mathcal{E})$. — En appliquant le théorème des probabilités totales et composées on trouve que la probabilité pour que le point mobile passe de E dans \mathcal{E} en n épreuves, soit $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$, satisfait à

$$P^{(n+m)}(E, \mathcal{E}) = \int_W P^{(n)}(F, \mathcal{E}) P^{(m)}(E, d\alpha_F),$$

où l'intégrale est l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes-Radon-Fréchet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \frac{m}{n} P^{(m)}(E, \alpha_{mn}),$$

α_{mn} désignant l'ensemble des points F avec $\frac{m-1}{n} \leq P^{(n)}(F, \mathcal{E}) \leq \frac{m}{n}$; $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ est, comme on prouve par récurrence, mesurable par rapport à E si \mathcal{E} est mesurable, complètement additive par rapport à \mathcal{E} si E est fixe, avec $P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \geq 0$ et $P^{(n)}(E, W) = 1$.

De même $\limsup_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ et $\liminf_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ sont mesurables par rapport à E pour tout \mathcal{E} mesurable.

Soit $\text{Pr}[E, \mathcal{E}]$ la probabilité pour que le point mobile parti de E

passé une fois au moins dans \mathcal{E} dans son mouvement ultérieur. Appelons

$$K^{(n)}(E, \mathcal{E})^{(16)} = \int_{F_1 \in W - \mathcal{E}} \dots \int_{F_{n-1} \in W - \mathcal{E}} P^{(1)}(F_{n-1}, \mathcal{E}) P^{(1)}(F_{n-2}, d\alpha_{F_{n-1}}) \dots P^{(1)}(E, d\alpha_{F_1})$$

la probabilité pour que le point mobile parti de E à l'épreuve initiale se trouve n épreuves après dans \mathcal{E} sans avoir atteint \mathcal{E} aux $n - 1$ épreuves précédentes. On a

$$\Pr[E, \mathcal{E}] = \sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(E, \mathcal{E}).$$

Il ressort immédiatement de la définition que $1 \geq \Pr[E, \mathcal{E}] \geq 0$ et que si

$$K^{(1)}(E, \mathcal{E}) = \dots = K^{(n-1)}(E, \mathcal{E}) = 0,$$

on a

$$K^{(n)}(E, \mathcal{E}) = P^{(n)}(E, \mathcal{E}),$$

$\Pr[E, \mathcal{E}] = 0$ entraîne donc

$$P^{(1)}(E, \mathcal{E}) = \dots = P^{(n)}(E, \mathcal{E}) = \dots = 0.$$

Ni $K^{(n)}(E, \mathcal{E})$, ni $\Pr[E, \mathcal{E}]$ ne sont généralement additives, toutefois si

$$\Pr[E, \mathcal{E}_i] = 0 \quad (i = 1, \dots),$$

on a

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i) = 0,$$

donc

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots) = 0$$

et, par conséquent,

$$\Pr[E, \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots] = 0.$$

Appelons $Q(E, \mathcal{E})$ la probabilité pour que le point mobile parti de E passe une infinité de fois par \mathcal{E} , c'est la limite (si $n \rightarrow \infty$) de la probabilité pour qu'il passe encore au moins une fois par \mathcal{E} après la $n^{\text{ième}}$ épreuve

$$Q(E, \mathcal{E}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_W \Pr[F, \mathcal{E}] P^{(n)}(E, d\alpha_F).$$

(16) Les $K^{(n)}(E, \mathcal{E})$ ont été introduits pour la première fois par Kolmogoroff dans le cas dénombrable, cf. *loc. cit.* (10).

$1 - Q(E, \mathcal{E})$ est la probabilité pour que le point mobile parti de E ne passe qu'un nombre fini de fois par \mathcal{E} . Elle peut être représentée comme la somme de la probabilité pour que le point ne passe pas du tout par \mathcal{E} plus la probabilité qu'il passe par \mathcal{E} à la première épreuve mais pas après, etc. La probabilité pour que le point mobile soit en \mathcal{E} à la $n^{\text{ième}}$ épreuve mais n'y revienne pas après, peut s'écrire

$$\int_{\mathcal{E}} \{1 - \Pr[F, \mathcal{E}]\} P^{(n)}(E, d\alpha),$$

donc

$$1 - Q(E, \mathcal{E}) = 1 - \Pr[E, \mathcal{E}] + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{E}} (1 - \Pr[E, \mathcal{E}]) P^{(n)}(E, d\alpha_F).$$

On prouve sans difficulté que les deux expressions de $Q(E, \mathcal{E})$ données sont équivalentes. Si \mathcal{L} est le sous-ensemble de \mathcal{E} où $\Pr[F, \mathcal{E}] < 1 - \Delta$, on voit qu'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}(E, \mathcal{L}) < \frac{1}{\Delta} < \infty;$$

par conséquent,

$$P^{(n)}(E, \mathcal{L}) \rightarrow 0.$$

6. *Ensembles essentiels, inessentiels, stochastiquement fermés, etc.* — Nous dirons qu'un ensemble \mathcal{E} est *inessentiel* ⁽¹⁷⁾ si $Q(E, \mathcal{E}) = 0$ quel que soit E . Un ensemble inessential ne sera presque sûrement obtenu qu'un nombre fini de fois; quel que soit l'état initial le point mobile ne passera plus dans \mathcal{E} à partir d'une certaine épreuve (aléatoire). L'ensemble \mathcal{E} n'aura donc aucun intérêt pour les propriétés asymptotiques du mouvement, il n'est pas essentiel.

Dans le cas d'un nombre fini d'états [cf. M. Fréchet (*)] tout ensemble d'état formé uniquement d'états des groupes de passage est inessential. Dans le cas de M. Fréchet tout ensemble extérieur aux ensembles finals et tout ensemble de mesure nulle est inessential.

Un ensemble qui n'est pas inessential est dit essentiel. On vérifie immédiatement que la réunion d'un nombre fini d'ensembles inessen-

(17) Nous empruntons à M. Kolmogoroff les mots essentiels et inessentiels (unwesentlich) en les employant dans un sens un peu différent. Ainsi dans le cas dénombrable un état essentiel dans le sens de Kolmogoroff peut très bien être inessential dans le nôtre.

tiels et tout sous-ensemble d'un ensemble inessentiel sont inessentiels. (De même si $\mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}$, et \mathcal{E} essentiel, \mathcal{E}_1 est *a fortiori* essentiel.)

Par contre *la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles inessentiels n'est pas nécessairement inessentielle.*

Il suffit d'envisager le cas dénombrable avec $p_{i,i+1} > 0$ et $p_{ij} = 0$ si $j < i$ (par exemple $p_{i,i+1} = 1$). On constate immédiatement que tout état est inessentiel, mais l'ensemble de tous les états, dans lequel le point se trouve nécessairement à toute épreuve, est visiblement essentiel.

Nous disons qu'un ensemble \mathcal{E} essentiel est *essentiel impropre* si \mathcal{E} est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles inessentiels, *absolument essentiel* s'il ne peut pas être mis sous une telle forme.

Dans les cas les plus simples, tels que le cas fini et les cas qui présentent une grande analogie avec le cas fini, les ensembles essentiels impropres ne peuvent pas se présenter. Remarquons encore que la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles essentiels impropres est encore essentielle impropre, si $\mathcal{E}_1 \supset \mathcal{E}$ et si \mathcal{E} est absolument essentiel, \mathcal{E}_1 l'est aussi.

Remarque. — Si \mathcal{E}_1 est essentiel et si $\Pr[F, \mathcal{E}_2] > a > 0$ quel que soit $F \in \mathcal{E}_1$, alors \mathcal{E}_2 est aussi essentiel; on le vérifie aisément en utilisant la première expression de $Q(E, \mathcal{E})$ donnée page 67.

Nous disons qu'un ensemble \mathcal{E} est *stochastiquement fermé* si la probabilité pour que le point mobile parti d'un point quelconque $E \in \mathcal{E}$ quitte \mathcal{E} dans son mouvement ultérieur est nulle, ce qui est équivalent à

$$P^{(1)}(E, W - \mathcal{E}) = 0, \quad \text{quel que soit } E \in \mathcal{E}.$$

Ainsi dans le cas d'un nombre fini d'états, tout groupe final est stochastiquement fermé, mais il est parfaitement possible qu'en ajoutant à un groupe final certains groupes de passage on obtient encore un ensemble stochastiquement fermé.

La réunion d'un nombre quelconque d'ensembles stochastiquement fermés est évidemment encore stochastiquement fermée. Si $\{\mathcal{E}_i\}$ est une suite décroissante d'ensembles stochastiquement fermés ($\mathcal{E}_i \supset \mathcal{E}_{i+1}$) $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{E}_i$ est soit vide, soit encore stochastiquement fermé, comme on le vérifie immédiatement. L'ensemble W est évidemment stochastiquement fermé. Si \mathcal{E} est un ensemble quelconque et si $\Pr[E_0, \mathcal{E}] = 0$ pour un E_0 , il existe un ensemble \mathcal{C} disjoint de \mathcal{E} stochastiquement

fermé avec $\Pr[E, \mathcal{E}] = 0$ si $E \in \mathcal{C}$. En effet, soit \mathcal{C} l'ensemble des points de $W - \mathcal{E}$ avec $\Pr[E, \mathcal{E}] = 0$, \mathcal{C} n'est pas vide. On a

$$P^{(1)}(E, W - \mathcal{C}) = 0, \quad \text{si } E \in \mathcal{C},$$

car si la probabilité de passer de E dans l'ensemble \mathcal{E} ou dans l'ensemble des points avec $\Pr[F, \mathcal{E}] > 0$ était > 0 , on aurait $\Pr[E, \mathcal{E}] > 0$ contrairement à l'hypothèse.

Nous disons qu'un ensemble \mathcal{E} est *indécomposable* s'il est stochastiquement fermé et s'il ne contient pas deux sous-ensembles disjoints stochastiquement fermés.

Cette définition, qui a été aussi employée par Fouillade (14) n'a guère de rapport avec la définition de l'indécomposabilité des matrices donnée par Frobenius et couramment appliquée dans la théorie du cas d'un nombre fini d'état, définition qui ne peut d'ailleurs pas être généralisée à notre cas. Un groupe final est toujours indécomposable dans les deux sens, mais un groupe de passage n'est pas un ensemble indécomposable dans le nôtre, et dans le cas où il y a un seul groupe final (cas semi-régulier dans la terminologie *nouvelle* de M. Fréchet) nous considérons que l'ensemble de tous les états est indécomposable, même s'il y a des états en dehors du groupe final.

Soient \mathcal{E} un ensemble stochastiquement fermé indécomposable. \mathcal{E}' l'ensemble des points où $\Pr[E, \mathcal{E}'] = 0$, \mathcal{E}'' l'ensemble où $\Pr[E, \mathcal{E}''] = 0$. L'ensemble \mathcal{E}'' n'est pas vide puisqu'il contient \mathcal{E} et est visiblement stochastiquement fermé. Je dis que \mathcal{E}'' est aussi indécomposable. En effet supposons que \mathcal{E}'' contienne deux ensembles A et B disjoints stochastiquement fermés. $A\mathcal{E}$ et $B\mathcal{E}$ ne peuvent pas être vides, car on a $\Pr[E, \mathcal{E}] > 0$ quel que soit $E \in \mathcal{E}''$, $A\mathcal{E}$ et $B\mathcal{E}$ seraient donc stochastiquement fermés et disjoints, ce qui est impossible. A chaque ensemble \mathcal{E} indécomposable on peut ainsi attacher un ensemble \mathcal{E}'' le contenant et qui est le plus grand ensemble indécomposable contenant \mathcal{E} .

Si \mathcal{A} est stochastiquement fermé mais n'est pas indécomposable, soit \mathcal{E} un sous-ensemble stochastiquement fermé de \mathcal{A} . Nous pouvons prendre dans $\mathcal{A} - \mathcal{E}$ l'ensemble $\bar{\mathcal{E}}$ des points F avec $\Pr[F, \mathcal{E}] = 0$, cet ensemble est vide ou stochastiquement fermé et $\mathcal{A} - \mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}}$ ne contient plus d'ensemble stochastiquement fermé (car pour un tel ensemble on aurait aussi $\Pr[F, \mathcal{E}] = 0$).

7. Nous montrerons plus loin qu'on peut étudier d'une façon assez complète le mouvement du point mobile à l'intérieur d'un ensemble

stochastiquement fermé si cet ensemble est indécomposable ou essentiel impropre. *Les hypothèses que nous ferons auront pour but principal de ramener l'étude du mouvement du point mobile à l'étude du mouvement dans ces ensembles-là.*

L'ensemble W est stochastiquement fermé, si W n'est pas indécomposable ni essentiel impropre, il y aura dans W deux ensembles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}'_1 stochastiquement fermés disjoints. Si l'ensemble \mathcal{E}_1 par exemple n'est ni indécomposable ni essentiel impropre, il y aura dans \mathcal{E}_1 deux sous-ensembles \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}'_2 stochastiquement fermés disjoints. Nous pouvons raisonner sur \mathcal{E}_2 comme sur \mathcal{E}_1 . Nous voyons ainsi qu'on peut, à partir de n'importe quel ensemble stochastiquement fermé, construire des suites descendantes d'ensembles stochastiquement fermés, finies ou transfinies. Il peut arriver qu'une telle suite aboutisse finalement à un ensemble stochastiquement fermé étant soit indécomposable soit essentiel impropre; il se peut aussi qu'elle aboutisse à l'ensemble vide, ou qu'à un certain instant l'ensemble cesse d'être stochastiquement fermé ou d'être mesurable. (Ces dernières alternatives ne peuvent d'ailleurs arriver qu'à un indice transfini.)

Nous allons nous placer dans le cas où, pour chaque ensemble stochastiquement fermé, il existe une suite aboutissant finalement à un ensemble stochastiquement fermé, indécomposable ou essentiel impropre.

Si l'ensemble W contient des ensembles indécomposables $\{\mathcal{E}\}$, on peut définir ces ensembles d'une façon univoque en considérant la famille $\{\mathcal{E}''\}$ (\mathcal{E}'' étant le plus grand ensemble indécomposable contenant \mathcal{E}), qu'on peut évidemment déterminer de telle façon que $W - \Sigma \mathcal{E}''$ ne contienne pas des ensembles indécomposables. Si l'ensemble $W - \Sigma \mathcal{E}''$ ne contient même plus d'ensembles stochastiquement fermés, notre premier travail serait fini. Sous les hypothèses indiquées, en admettant que W peut être bien ordonné et sous certaines hypothèses supplémentaires de mesurabilité, on peut montrer qu'il existe une famille $\{\mathcal{L}\}$ d'ensembles essentiels impropres stochastiquement fermés tel que $W - \Sigma \mathcal{E}'' - \Sigma \mathcal{L}$ soit mesurable et ne contienne plus d'ensembles stochastiquement fermés. Mais il est plus commode de poser cela directement comme hypothèse.

Hypothèse. — Il existe dans W une famille d'ensembles stochastiquement fermés \mathcal{L} , indécomposables ou essentiels impropres, telle que $\Sigma \mathcal{L}$ soit mesurable et que $W - \Sigma \mathcal{L}$ ne contienne plus d'ensembles stochastiquement fermés.

Cette hypothèse n'a pas de signification très intuitive, mais elle est utile.

8. THÉORÈME I. — $W - \Sigma \mathcal{L}$ est inessentiel ou essentiel impropre. Dans le second cas, on peut donner une suite dénombrable d'ensembles inessentiels \mathcal{E}_i , telle que le point mobile, parti de $E \in W - \Sigma \mathcal{L}$, passe soit avec probabilité $\Pr[E, \Sigma \mathcal{L}] > 0$ dans $\Sigma \mathcal{L}$ (et n'en revient plus), soit s'éloigne indéfiniment avec probabilité $1 - \Pr[E, \Sigma \mathcal{L}]$ dans la suite \mathcal{E}_i , si $n \rightarrow \infty$ ⁽¹⁸⁾.

Démonstration. — D'après une remarque faite dans le numéro 6, si l'on avait pour un $E \in W - \Sigma \mathcal{L}$, $\Pr[E, \Sigma \mathcal{L}] = 0$, $W - \Sigma \mathcal{L}$ contiendrait un ensemble stochastiquement fermé. On a donc $\Pr[E, \Sigma \mathcal{L}] > 0$, quel que soit E . Soit \mathcal{E}_0 l'ensemble des points E de $W - \Sigma \mathcal{L}$ avec $\Pr[E, \Sigma \mathcal{L}] = 1$, \mathcal{E}_i celui où $\frac{1}{i} > \Pr[E, \Sigma \mathcal{L}] \geq \frac{1}{i+1}$. On a

$$W - \Sigma \mathcal{L} = \mathcal{E}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{E}_i.$$

Si nous partons d'un point de \mathcal{E}_0 on passe presque sûrement dans $\Sigma \mathcal{L}$; partons donc d'un point E de \mathcal{E}_i , $i > 0$. On aura alors

$$\Pr[E, \Sigma \mathcal{L}] = 1 - a.$$

Nous allons appliquer un raisonnement très simple et fort intuitif que nous avons employé dès le commencement de nos recherches sur les chaînes de Markoff qui jouera un grand rôle dans les paragraphes 1 et 2. Si un promeneur a en traversant une rue donnée une probabilité $a > 0$ d'être écrasé par une auto, il ne saurait la traverser indéfiniment car il sera tué avant (nous admettons qu'il ne puisse pas mourir autrement). Si le promeneur a une probabilité $> a'$ dans une certaine région de passer dans cette rue et de la traverser alors il ne pourra davantage se trouver une infinité de fois dans cette région, car il sera alors presque sûrement amené à passer tant de fois dans cette rue et de la traverser qu'il sera certainement écrasé. Si le promeneur ne peut donc atteindre une région à partir de laquelle la probabilité de

⁽¹⁸⁾ Nous entendons par cela, ε étant un nombre > 0 quelconque, i arbitrairement grand, on peut trouver N tel que le point se trouve avec probabilité $> \Pr[E, \Sigma \mathcal{L}] - \varepsilon$ dans $\Sigma \mathcal{L}$, et, avec probabilité, $> 1 - \Pr[E, \Sigma \mathcal{L}] - \varepsilon$ dans $\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_{i+1} + \dots$, à toutes les épreuves d'ordre $n > N$.

revenir dans cette rue est arbitrairement petite ou nulle, il sera certainement écrasé. Dans le cas contraire, le promeneur sera soit écrasé avec une certaine probabilité, soit qu'il passera avec la probabilité complémentaire dans une région de laquelle il n'a qu'une probabilité arbitrairement petite ou nulle de revenir dans cette rue.

Ceci dit revenons à la démonstration de notre théorème. Nous pouvons prendre m suffisamment grand pour que la probabilité pour que le point soit passé de E dans $\Sigma\mathcal{L}$ avant ou à la $m^{\text{ième}}$ épreuve, soit $> 1 - a(1 + \varepsilon')$. La probabilité pour que le point mobile passe de E dans $\Sigma\mathcal{L}$ est égale à la probabilité P_m pour que le point passe avant ou à la $m^{\text{ième}}$ épreuve dans $\Sigma\mathcal{L}$ plus la probabilité pour qu'il ne passe dans $\Sigma\mathcal{L}$ qu'après la $m^{\text{ième}}$ épreuve. Donc

$$\Pr[E, \Sigma\mathcal{L}] = 1 - a = P_m + (1 - P_m) \Pr'_m[E, \Sigma\mathcal{L}],$$

où la signification de $\Pr'_m[E, \Sigma\mathcal{L}]$ est évidente

$$1 - a = 1 - a - \theta\varepsilon' a + a(1 + \theta\varepsilon') \Pr'_m[E, \Sigma\mathcal{L}] \quad \text{avec } 0 \leq \theta \leq 1.$$

Donc

$$\theta\varepsilon' = (1 + \theta\varepsilon') \Pr'_m[E, \Sigma\mathcal{L}].$$

Par conséquent $\Pr'_m[E, \Sigma\mathcal{L}] < 2\varepsilon'$ et la probabilité pour que le point mobile se trouve à la $m^{\text{ième}}$ épreuve dans $\mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_i$ sous l'hypothèse dont la probabilité est $1 - P_m$ est $< 2\varepsilon'(i + 1)$.

Donc

$$(1) \quad P^{(n)}(E, \mathcal{E}_{i+1} + \mathcal{E}_{i+2} + \dots) \rightarrow 1 - \Pr[E, \Sigma, \mathcal{L}].$$

On a même

$$\Pr'_m[E, \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_i] < 2(i + 1)\varepsilon',$$

car si le point vient dans $\mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_i$, il a une probabilité $> \frac{1}{i+1}$ de passer dans $\Sigma\mathcal{L}$. Ceci montre bien que $\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_i, \dots$ sont inessentiels et prouve le théorème.

COROLLAIRE. — Si $\Pr[E, \Sigma\mathcal{L}] > \varepsilon$ quel que soit E , $\Pr[E, \Sigma\mathcal{L}] = 1$. Si la probabilité de passer de E dans $\Sigma\mathcal{L}$ en moins de m épreuves est $> \varepsilon$ quel que soit E , la probabilité $P^{(n)}(E, W - \Sigma\mathcal{L})$ pour que le point se trouve encore à la $nm^{\text{ième}}$ épreuve à l'extérieur de $\Sigma\mathcal{L}$ tend vers zéro, exponentiellement et uniformément par rapport à E (c'est-à-dire est majorée par $Re^{-\lambda n}$).

(Car la probabilité pour que le point se trouve encore à la $nm^{\text{ième}}$ épreuve dans $W - \Sigma \mathcal{L}$ est égale au produit de la probabilité pour qu'il se trouve dans $W - \Sigma \mathcal{L}$ à la $n(m-1)^{\text{ième}}$ épreuve par la probabilité pour que sous cette hypothèse il y reste aux m épreuves suivantes.)

Notre démonstration du théorème prouve aussi le lemme suivant dont nous aurons souvent besoin.

LEMME. — Si \mathcal{A} est un ensemble stochastiquement fermé, \mathcal{L} un sous-ensemble de \mathcal{A} également stochastiquement fermé, et si $\Pr[E, \mathcal{L}] > 0$ pour tout E de \mathcal{A} , $\mathcal{A} - \mathcal{L}$ est inessentiel impropre.

9. THÉORÈME D'APPLICATION. — Si l'on peut définir sur W une fonction d'ensemble complètement additive $f(\mathcal{E})$, non négative avec $f(W) < \infty$, telle que \mathcal{E} stochastiquement fermé entraîne $f(\mathcal{E}) > 0$, alors les hypothèses du numéro 7 sont satisfaites et $S(\mathcal{L})$ est dénombrable au plus.

Démonstration. — Soit $\{\mathcal{O}\}$ la famille des ensembles indécomposables stochastiquement fermés, ensembles qu'on peut définir d'une façon unique (cf. n° 6), ils forment une famille au plus dénombrable. Soit \mathcal{C} l'ensemble des points F avec $\Pr[F, \Sigma \mathcal{O}] = 0$, \mathcal{C} est soit vide, soit il constitue le plus grand ensemble stochastiquement fermé disjoint avec $\Sigma \mathcal{O}$. (Remarquons que $\Sigma \mathcal{O}$ peut très bien être vide, dans ce cas $\mathcal{C} = W$.) Si \mathcal{C} est vide, le théorème est prouvé. Supposons donc \mathcal{C} non vide et démontrons-le.

Puisque \mathcal{C} est stochastiquement fermé et n'est pas indécomposable, il existe dans \mathcal{C} deux ensembles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 stochastiquement fermés disjoints tels que $\mathcal{C} - \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ ne contient plus d'ensembles stochastiquement fermés.

LEMME. — On peut choisir ces ensembles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 tels que

$$(1) \quad f(\mathcal{E}_1) \leq \frac{2}{3}f(\mathcal{C}), \quad f(\mathcal{E}_2) \leq \frac{2}{3}f(\mathcal{C}).$$

Démonstration du lemme. — Nous pouvons admettre que

$$f(\mathcal{E}_1) \geq f(\mathcal{E}_2).$$

Si (1) ne pouvait pas être réalisé, on aurait

$$\text{borne inf. } f(\mathcal{E}_1) = a > \frac{2}{3}f\mathcal{C}.$$

\mathcal{E}_1 étant un ensemble quelconque ayant les propriétés indiquées. Or dans ce cas, si \mathcal{E}'_1 et \mathcal{E}''_1 sont deux ensembles satisfaisant à nos conditions, telles que $f(\mathcal{E}'_1) \geq a$, $f(\mathcal{E}''_1) \geq a$, $\mathcal{E}'_1 \mathcal{E}''_1$ est aussi de mesure $\geq a$, car autrement $\mathcal{E}'_1 \mathcal{E}''_1$ et l'ensemble stochastiquement fermé le plus grand contenu dans $\mathcal{C} - \mathcal{E}'_1 \mathcal{E}''_1$ seraient de mesure $< a$. Prenons alors une suite d'ensembles \mathcal{E}_i^i satisfaisant à nos conditions avec

$$a < f(\mathcal{E}_i^i) < a + \frac{1}{i}.$$

L'ensemble $\mathcal{A} = \mathcal{E}_1^1 \mathcal{E}_1^2, \dots, \mathcal{E}_1^i, \dots$ aura, d'après ce qui précède, la mesure a et sera stochastiquement fermé. Il existe d'autre part, quel que soit ε , dans \mathcal{A} des ensembles stochastiquement fermés de mesure $< \varepsilon$, car si $\underline{\lim} f(\mathcal{E})$ pour tout \mathcal{E} stochastiquement fermé de \mathcal{A} était $\alpha \neq 0$, on construirait comme ci-dessus un ensemble stochastiquement fermé de \mathcal{A} de mesure α . Cet ensemble n'étant pas indécomposable, il y aurait deux sous-ensembles stochastiquement fermés dont la mesure serait $< \alpha$, ce qui amène une contradiction. Soit \mathcal{H} un tel ensemble de mesure $< \varepsilon$, \mathcal{A}' le plus grand ensemble stochastiquement fermé contenu dans $\mathcal{C} - \mathcal{A}$. $\mathcal{A}' + \mathcal{H}$ est stochastiquement fermé de mesure $< \frac{1}{3} f(\mathcal{C}) + \varepsilon < a$. De même le plus grand ensemble stochastiquement fermé \mathcal{A}'' contenu dans $\mathcal{A} - \mathcal{H}$ est de mesure $< a$ et $\mathcal{C} - [\mathcal{A}' + \mathcal{H} + \mathcal{A}'']$ ne contient plus d'ensembles stochastiquement fermés. Ce qui démontre le lemme.

Suite de la démonstration proprement dite du théorème. — Choisissons donc dans \mathcal{C} deux ensembles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 ayant les propriétés du lemme, soit $\mathcal{J}_1 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$. Choisissons dans \mathcal{E}_1 deux ensembles stochastiquement fermés $\mathcal{E}_{11}, \mathcal{E}_{12}$, tels que $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_{11} - \mathcal{E}_{12}$ ne contient plus d'ensembles stochastiquement fermés, avec $f(\mathcal{E}_{1i}) \leq \frac{2}{3} f(\mathcal{E}_1)$ (le lemme s'applique évidemment aussi à tout sous-ensemble stochastiquement fermé contenu dans \mathcal{C}). Opérons de même sur \mathcal{E}_2 et ensuite sur les \mathcal{E}_{ij} etc. Posons

$$\mathcal{C}_n = \sum_{i_1, \dots, i_n} \mathcal{E}_{i_1 i_2 \dots i_n}.$$

On a évidemment

$$\mathcal{C}_n \supset \mathcal{C}_{n+1} \supset \mathcal{C}_{n+2} \supset \dots$$

Supposons que la partie commune des $\mathcal{C}_n \mathcal{C}_{n+1} \mathcal{C}_{n+r} \dots$, ne soit pas vide, elle sera alors stochastiquement fermée de mesure $\neq 0$. Soit F un point de cette partie commune, il y aura une suite descendante d'ensembles $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i_1}, \dots$, chaque ensemble contenant F. La partie commune de ces ensembles n'est pas vide et est par conséquent stochastiquement fermé, donc de mesure > 0 . Or on a

$$f(\mathcal{E}_{i_1 \dots i_n}) \leq \frac{2}{3} f(\mathcal{E}_{i_1 \dots i_{n-1}}).$$

Cette partie commune est donc de mesure nulle, ce qui démontre que $\mathcal{C}_n \mathcal{C}_{n+1} \dots$ est vide. Nous pouvons donc écrire

$$\mathcal{C} = (\mathcal{C} - \mathcal{C}_1) + (\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2) + \dots + (\mathcal{C}_n - \mathcal{C}_{n+1}) + \dots$$

Tous les ensembles $\mathcal{C}_i - \mathcal{C}_{i+1}$ sont essentiels impropres ou inessentiels, comme il résulte de la démonstration du théorème I. \mathcal{C} est donc aussi essentiel impropre.

La famille des ensembles $\mathcal{C}, \mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n, \dots$ est donc telle que $W - (\mathcal{C} + \Sigma \mathcal{O}_i)$ ne contient plus d'ensembles stochastiquement fermés, ce qui démontre le théorème d'application.

Remarque I. — Soit (\mathcal{O}'_i) la famille des ensembles (\mathcal{O}_i) absolument essentiels. $W - \Sigma \mathcal{O}'_i$ est essentiel impropre (ou inessentiel), on peut donc écrire

$$W - \Sigma \mathcal{O}'_i = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots + \mathcal{L}_n + \dots,$$

où \mathcal{L}_n est inessentiel. On aura alors

$$P^{(n)}(E, \mathcal{L}_m) \rightarrow 0, \quad P^{(n)}(E, \mathcal{L}_1 + \dots + \mathcal{L}_m) \rightarrow 0 \quad \text{quel que soit } E \text{ et } m \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Remarque II. — Nous montrerons plus loin que dans tous les cas étudiés jusqu'à maintenant des conditions d'application visiblement plus restrictives sont satisfaites. Nous ne citerons donc ici que le cas suivant, qui est contenu dans le théorème.

W est un ensemble d'un espace euclidien et la probabilité pour que le point reste indéfiniment dans un ensemble de mesure nulle est $\neq 1$. (Il est équivalent de supposer que $P^{(1)}(E, \mathcal{E}) P^{(2)}(E, \mathcal{E}), \dots, P^{(n)}(E, \mathcal{E}), \dots$ ne peuvent pas être $= 1$ pour tout n si \mathcal{E} est un ensemble de mesure nulle quelconque.)

Il suffit pour le voir dans le cas où $\text{mes}(W)$ est infinie de remplacer

la mesure euclidienne par une fonction d'ensemble absolument continue $f(\mathcal{E}) \geq 0$ avec $f(W) < \infty$. On peut par exemple considérer une famille de sphères concentriques S_i de rayon i et de prendre pour $f(\mathcal{E})$ si $\mathcal{E} \subset S_i - S_{i-1}$

$$\frac{1}{i!} \text{mes}(\mathcal{E}).$$

II. — Première étude du mouvement
à l'intérieur d'un ensemble indécomposable absolument essentiel.

Soit \mathcal{H} un ensemble indécomposable absolument essentiel. Si E est un point quelconque de \mathcal{H} , on a $P^{(1)}(E, \mathcal{H}) = 1$, c'est-à-dire l'ensemble est stochastiquement fermé. Si le point mobile se trouve une fois à l'intérieur de \mathcal{H} , il n'en sortira pas. Les ensembles \mathcal{E} et les points E , dont nous parlerons dans ce paragraphe, seront toujours, sauf spécification contraire, des sous-ensembles et des points de \mathcal{H} . L'ensemble \mathcal{H} étant indécomposable, par définition si \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont deux sous-ensembles disjoints de \mathcal{H} , \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 ne sont pas simultanément stochastiquement fermés. C'est de ces deux propriétés ci-dessus citées et de l'hypothèse que \mathcal{H} est absolument essentiel que résulteront tous les résultats que nous démontrerons dans les paragraphes 2 et 3.

Sommaire. — Le n° 10 contient une discussion de laquelle résulte le théorème II et le corollaire énoncés à la fin du n° 10. Dans le n° 11 nous montrons que, sous l'hypothèse générale II y indiquée, on peut trouver dans \mathcal{H} un ensemble « final » \mathcal{F} qui réunit tout ce qu'il y a d'absolument essentiel dans \mathcal{H} ; définition du cas « normal » et « anormal ». Le n° 12 est consacré uniquement au cas anormal. Le n° 13 donne des conditions d'application suffisantes pour écarter le cas anormal.

10. Soit \mathcal{E} un ensemble essentiel. Nous aurons à distinguer plusieurs hypothèses.

A. *L'ensemble \mathcal{F} des points F où $\text{Pr}(F, \mathcal{E}) = 0$ est non vide.* — \mathcal{F} est évidemment stochastiquement fermé. Supposons que l'ensemble \mathcal{F}' où $\text{Pr}[F, \mathcal{F}] = 0$ ne soit pas vide. Cet ensemble serait alors aussi stochastiquement fermé. Pour chaque point de \mathcal{F}' on a $\text{Pr}[F, \mathcal{E}] > 0$, il résulte que $\mathcal{F}\mathcal{F}'$ est vide et comme \mathcal{H} est indécomposable \mathcal{F}' doit être vide. Appelons \mathcal{E}_n l'ensemble des points de $\mathcal{H} - \mathcal{F}$ où

$$\frac{1}{n} \geq \text{Pr}[F, \mathcal{F}] > \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\Pr[F, \mathcal{F}]$ est > 0 pour tout F , nous pouvons écrire

$$\mathcal{H} - \mathcal{F} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_n + \dots,$$

et il résulte du lemme I, n° 8, que $\mathcal{H} - \mathcal{F}$ est un ensemble essentiel impropre ($\mathcal{H} - \mathcal{F}$ ne peut pas être inessentiel, car dans ce cas le point mobile passera presque sûrement dans \mathcal{F} et à partir du moment où il est en \mathcal{F} il y a une probabilité 0 pour qu'il vienne dans \mathcal{E} , ce qui est contraire à l'hypothèse \mathcal{E} essentiel). Nous pouvons écrire

$$\mathcal{E} = \mathcal{F}\mathcal{E} + \mathcal{E}_1\mathcal{E} + \dots,$$

l'ensemble $\mathcal{F}\mathcal{E}$ est inessentiel (si le point se trouve à une certaine épreuve dans \mathcal{F} , il ne passe presque sûrement plus ultérieurement dans \mathcal{E} , on voit aussi que $\mathcal{F} - \mathcal{F}\mathcal{E}$ est aussi stochastiquement fermé); il en est de même de $\mathcal{E}_n\mathcal{E}$. Donc \mathcal{E} est essentiel impropre.

B. \mathcal{F} est vide. — Il se présente alors deux alternatives :

B 1°. *Il existe un ensemble stochastiquement fermé \mathcal{A} avec $\Pr[E, \mathcal{E}] = 1$ si $E \in \mathcal{A}$.* — Nous pouvons prendre \mathcal{A} tel que $\Pr[E, \mathcal{A}] < 1$ si $E \in \mathcal{H} - \mathcal{A}$ (il suffit d'ajouter à l'ensemble primitif l'ensemble où $\Pr[E, \mathcal{A}] = 1$, de $\Pr[E, \mathcal{A}] = 1$ et de $\Pr[E, \mathcal{E}] = 1$ si $E \in \mathcal{A}$ suit $\Pr[E, \mathcal{E}] = 1$!). On a alors $\Pr[E, \mathcal{A}] > 0$ pour tout point de \mathcal{H} et nous déduisons du lemme que $\mathcal{H} - \mathcal{A}$ est essentiel impropre ou inessentiel. D'autre part, si le point mobile se trouve à un instant dans \mathcal{A} , il passe presque sûrement une infinité de fois par \mathcal{E} .

B 2°. *Il n'existe pas de tel ensemble \mathcal{A} .* — Soit \mathcal{E}_n l'ensemble des points E où $\frac{1}{n+1} < \Pr[E, \mathcal{E}] \leq \frac{1}{n}$,

$$\mathcal{E}' = \mathcal{E}_2 + \dots + \mathcal{E}_n + \dots$$

Soit F un point de $\mathcal{H} - \mathcal{E}'$, je dis que $\Pr[F, \mathcal{E}'] > 0$. En effet si $\Pr[F, \mathcal{E}'] = 0$ il y aurait un ensemble stochastiquement fermé \mathcal{A}' avec $\Pr[F, \mathcal{E}'] = 0$ si $F \in \mathcal{A}'$, l'ensemble $\mathcal{A}' - \mathcal{A}'\mathcal{E}'$ serait encore stochastiquement fermé (car pour tout point de \mathcal{A}' l'on a

$$\Pr[E, \mathcal{E}'\mathcal{A}'] = \Pr[E, \mathcal{E}'] = 0),$$

et comme on a $\Pr[E, \mathcal{E}] > \frac{1}{2}$ pour tout point de cet ensemble stochastiquement, on aurait (cf. n° 8)

$$\Pr[E, \mathcal{E}] = 1, \quad \text{si } E \in \alpha' - \alpha' \mathcal{E}' = \alpha$$

et l'on serait dans le cas B 1°.

Par conséquent $\Pr[E, \mathcal{E}'] > 0$ quel que soit E, et nous pouvons écrire

$$\mathcal{H} - \mathcal{E}' = \mathcal{E}'_1 + \dots + \mathcal{E}'_n + \dots,$$

\mathcal{E}'_n étant l'ensemble des points de $\mathcal{H} - \mathcal{E}'$ avec

$$\frac{1}{n} \geq \Pr[E, \mathcal{E}'] > \frac{1}{n+1}.$$

Je dis que les ensembles \mathcal{E}_i et \mathcal{E}'_i sont inessentiels. Supposons que (à partir d'un certain point initial que nous n'avons pas besoin de spécifier) la limite si $m \rightarrow \infty$ de la probabilité pour que le point mobile passe une fois au moins par \mathcal{E}_i après la $m^{\text{ième}}$ épreuve soit $\alpha > 0$. Or si le point passe par \mathcal{E}_i nous savons que la probabilité pour qu'il y revienne encore une infinité de fois est $\leq \left(1 - \frac{1}{i+1}\right)$. Il en résulte qu'on a

$$\alpha \leq \alpha \left(1 - \frac{1}{i+1}\right),$$

c'est-à-dire $\alpha = 0$. Le raisonnement est le même pour \mathcal{E}'_i .

En écrivant

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}'_2 + \dots,$$

on voit que \mathcal{H} est essentiel impropre.

Le cas B 2° ne peut pas se produire si \mathcal{H} est absolument essentiel.

Revenons au cas B 1°, je dis que si $\Pr[E, \mathcal{E}] = 1$ pour tout point d'un ensemble \mathcal{A} stochastiquement fermé absolument essentiel, \mathcal{E} est aussi absolument essentiel.

En effet, soit $\{\mathcal{E}_n\}$ une suite de sous-ensembles quelconques disjoints de \mathcal{E} avec

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n + \dots$$

Il suffira de montrer que pour un n suffisamment grand, $\mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n$ est essentiel. (On ne peut donc pas représenter \mathcal{E} sous forme d'une somme dénombrable d'ensembles inessentiels.)

Soit \mathcal{A}_m l'ensemble des points de \mathcal{A} avec ⁽¹⁹⁾

$$\Pr^{(m-1)}[E, \mathcal{E}] < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \Pr^{(m)}[E, \mathcal{E}] \geq \frac{1}{2},$$

\mathcal{A}_{mn} l'ensemble des points de \mathcal{A}_m où

$$\Pr^{(m)}(E, \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_{m-1}) < \frac{1}{4}, \quad \Pr^{(m)}(E, \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_m) \geq \frac{1}{4}.$$

On a

$$\mathcal{A} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}_m, \quad \mathcal{A}_m = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{mn},$$

donc

$$\mathcal{A} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{mn},$$

\mathcal{A} étant absolument essentiel il faut qu'au moins un des \mathcal{A}_{mn} soit essentiel. Il y a donc un ensemble essentiel avec

$$\Pr[E, \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n] \geq \frac{1}{4},$$

ce qui prouve comme nous savons (n° 6, p. 7 bis) que $\mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n$ est essentiel, ce qui démontre la proposition.

Nous avons donc démontré le théorème :

THÉORÈME II. — *Si \mathcal{E} est un ensemble absolument essentiel, alors il existe un ensemble stochastiquement fermé $\mathcal{A}(\mathcal{E})$ tel qu'on ait*

$$\Pr[E, \mathcal{E}] = 1 \quad \text{si} \quad E \in \mathcal{A}(\mathcal{E})$$

et qu'on passe presque sûrement une infinité de fois dans \mathcal{E} à partir de tout point de \mathcal{A} . Si \mathcal{E} est inessentiel ou essentiel impropre, il existe un ensemble stochastiquement fermé à partir des points duquel on a une probabilité 0 de passer au moins une fois dans \mathcal{E} .

COROLLAIRE. — *Si \mathcal{E} est essentiel impropre, il existe un ensemble $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ non vide essentiel impropre tel que $\mathcal{A} - \mathcal{C}(\mathcal{E})$ est stochastiquement*

⁽¹⁹⁾ $\Pr^{(m)}(E, \mathcal{E})$ est la probabilité pour que le point mobile parti de E atteigne \mathcal{E} avant la $(m+1)^{\text{ième}}$ épreuve.

fermé et que la probabilité pour que le point mobile se trouvant dans $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ y reste indéfiniment est positive.

11. Nous allons maintenant montrer que sous des hypothèses assez générales, on peut trouver dans \mathcal{X} un sous-ensemble \mathcal{G} stochastiquement fermé et tel que pour tout sous-ensemble \mathcal{E} essentiel de \mathcal{G} on ait $\text{Pr}[E, \mathcal{E}] = 1$ si $E \in \mathcal{G}$.

Supposons qu'on peut trouver dans \mathcal{X} une fonction complètement additive d'ensemble non négative bornée $m(\mathcal{E})$ qui est positive pour tout ensemble dans lequel le point mobile peut rester indéfiniment sans sortir. Nous appellerons cela l'hypothèse II.

Soit λ la borne supérieure de $m(\mathcal{E})$, pour les ensembles \mathcal{E} essentiels impropres dans lesquels on peut rester indéfiniment sans sortir. Nous pouvons trouver un ensemble \mathcal{E}_1 de cette catégorie avec $m(\mathcal{E}_1) > \lambda - \varepsilon$. A \mathcal{E}_1 nous pouvons faire correspondre un ensemble $\mathcal{E}'_1 \supset \mathcal{E}_1$ tel que $\mathcal{X} - \mathcal{E}'_1$ soit stochastiquement fermé. Si dans $\mathcal{X} - \mathcal{E}'_1$ il y a encore des ensembles essentiels impropres et donc encore des ensembles de la catégorie que nous avons envisagée, soit λ' la borne supérieure de $m(\mathcal{E})$ pour ces ensembles $\subset \mathcal{X} - \mathcal{E}'_1$. Nous pouvons trouver un ensemble \mathcal{E}_2 de la catégorie avec $m(\mathcal{E}_2) > \lambda' - \varepsilon^2$ et de nouveau un ensemble $\mathcal{E}'_2 \subset \mathcal{X} - \mathcal{E}'_1$ contenant \mathcal{E}_2 tel que $\mathcal{X} - \mathcal{E}'_1 - \mathcal{E}'_2$ soit stochastiquement fermé. \mathcal{E}'_1 et \mathcal{E}'_2 étant disjoints, on aura

$$\text{mes}(\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2) = \text{mes}(\mathcal{E}'_1) + \text{mes}(\mathcal{E}'_2) > \lambda - \varepsilon + \lambda' - \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad \lambda' < \varepsilon.$$

En continuant ainsi et en remarquant que la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles essentiels impropres dans chacun desquels on peut rester indéfiniment est encore un tel ensemble, nous voyons que nous pouvons construire un ensemble de la catégorie envisagée $\Sigma \mathcal{E}'_i$ tel que $\mathcal{G} = \mathcal{X} - \Sigma \mathcal{E}'_i$ est stochastiquement fermé et que la borne supérieure de $m(\mathcal{E})$ pour tout \mathcal{E} de \mathcal{G} essentiel impropre est nulle. L'ensemble stochastiquement fermé \mathcal{G} ne peut plus contenir d'ensembles essentiels impropres et l'on aura pour tout ensemble essentiel $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$,

$$\text{Pr}[E, \mathcal{E}] = 1, \quad \text{si } E \in \mathcal{G}.$$

THÉOREME. — *L'hypothèse II est suffisante pour assurer l'existence dans \mathcal{X} d'un ensemble \mathcal{G} que nous appellerons ensemble final tel que*

tout sous-ensemble \mathcal{E} essentiel de \mathcal{G} est absolument essentiel et que le point mobile se trouvant dans \mathcal{G} passe presque sûrement une infinité de fois par \mathcal{E} .

Nous appellerons *cas normal* le cas où il existe dans \mathcal{H} un ensemble final \mathcal{G} . Nous ne pensons pas qu'on puisse nommer des cas anormaux.

12. ★ (1). Ne faisons pour l'instant aucune hypothèse concernant l'existence ou non-existence de \mathcal{G} . Partons d'un point F déterminé. Nous savons que si \mathcal{E} est essentiel impropre, il existe un ensemble $\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}$ tel que $\mathcal{H} - \mathcal{E}'$ soit stochastiquement fermé. Soit $1 - \mu$ la borne inférieure de $\text{Pr}[F, \mathcal{H} - \mathcal{E}']$ si \mathcal{E} varie. Choisissons \mathcal{E}_1 tel que $\text{Pr}[F, \mathcal{H} - \mathcal{E}'_1] < 1 - \mu + \varepsilon$. Avec probabilité $1 - \text{Pr}[F, \mathcal{H} - \mathcal{E}'_1]$, le point mobile parti de F reste indéfiniment dans \mathcal{E}'_1 . Si $\mathcal{H} - \mathcal{E}'_1$ contient encore un ensemble essentiel impropre, choisissons \mathcal{E}_2 tel que la probabilité pour que le point mobile parti de F passe dans \mathcal{E}'_2 et y reste indéfiniment à partir d'un certain instant (aléatoire) atteigne à $\frac{\varepsilon}{2}$ près sa borne supérieure, et que par conséquent la probabilité pour que le point mobile parti de F atteigne $(\mathcal{H} - \mathcal{E}'_1) - \mathcal{E}'_2$ dépasse de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$ sa borne inférieure. En continuant de raisonner comme ci-dessus l'on voit que le point reste avec probabilité μ indéfiniment dans l'ensemble essentiel impropre $\mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 + \dots$. Soit \mathcal{A}_F le complémentaire stochastiquement fermé (d'après la construction) de $\Sigma \mathcal{E}'_i$. On a $\text{Pr}[F, \mathcal{A}_F] > 0$, donc $\mu < 1$.

Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}_F$ est essentiel, \mathcal{E} est soit absolument essentiel, soit on a $Q[F, \mathcal{E}] = 0$.

(Remarquons que l'ensemble \mathcal{A}_F n'est généralement pas déterminé d'une façon unique.)

En effet, si \mathcal{E} est essentiel impropre $\subset \mathcal{A}_F$, il existe un ensemble $\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}$ essentiel impropre tel que $\mathcal{A}_F - \mathcal{E}'$ est stochastiquement fermé. Si l'on avait $Q(F, \mathcal{E}) > 0$, le point mobile parti de E pourrait avec

★ (1) Le lecteur s'intéressant surtout aux cas simples pourra sauter les numéros marqués du signe ★ qui ne concerneront que le cas anormal.

probabilité positive rester indéfiniment dans \mathcal{E} . Dès lors la probabilité pour que le point passe dans $\mathcal{A}_F - \mathcal{E}'$ serait $< 1 - \mu$, ce qui est contraire à la définition de μ . C. Q. F. D.

Ceci posé nous allons admettre *l'axiome du choix*.

Partons d'un point quelconque F , si \mathcal{A}_F contient des ensembles essentiels impropres, nous pouvons prendre $F_1 \in \mathcal{A}_F$ tel que $\mathcal{A}_{F_1} \subset \mathcal{A}_F$ et $\mathcal{A}_F - \mathcal{A}_{F_1}$ soient essentiels impropres et qu'on puisse rester indéfiniment sans sortir dans $\mathcal{A}_F - \mathcal{A}_{F_1}$ avec probabilité positive. Si \mathcal{A}_{F_1} contient encore des ensembles essentiels impropres, nous pouvons prendre F_2 , etc. Nous obtenons ainsi une suite descendante d'ensembles; dans le cas anormal cette suite ne s'arrêtera qu'à un indice transfini. Trois cas peuvent arriver *a priori* : *a.* pour un certain nombre ordinal $\mathcal{A}_{F_1}, \mathcal{A}_{F_2}, \dots, \mathcal{A}_{F_\zeta}, \dots$ cesse d'être mesurable ou stochastiquement fermé; *b.* $\mathcal{A}_{F_1}, \dots, \mathcal{A}_{F_\zeta}$ a une limite non vide mesurable stochastiquement fermé; *c.* $\mathcal{A}_{F_1}, \dots, \mathcal{A}_{F_\zeta}, \dots$ est vide.

Le second cas entraîne que tout sous-ensemble de $\mathcal{A}_{F_2}, \dots, \mathcal{A}_{F_\zeta}, \dots$ essentiel est absolument essentiel, elle correspond au cas normal. Le premier cas ne peut arriver que s'il existe plus d'une infinité dénombrable d'ensembles essentiels impropres $\mathcal{A}_{F_\zeta} - \mathcal{A}_{F_{\zeta+1}}$ dans lesquels on peut rester avec probabilité positive sans sortir. Le troisième cas ne peut arriver que sous la même hypothèse, car autrement on aurait

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} - \mathcal{A}_F + \mathcal{A}_F - \mathcal{A}_{F_1} + \dots,$$

et \mathcal{H} serait essentiel impropre. D'où :

Le cas anormal ne peut se présenter que s'il existe une infinité non dénombrable d'ensembles disjoints dans \mathcal{H} , dans chacun desquels le point peut rester indéfiniment sans sortir avec probabilité $> \frac{1}{2}$ ⁽²⁰⁾ (ou $1 - \eta$, $\eta > 0$ quelconque).

Il suffit par conséquent, pour éliminer le cas anormal, de faire des hypothèses qui empêchent cela.

⁽²⁰⁾ Si cette probabilité était $< 1 - \eta$ pour tout point de l'ensemble, elle serait nulle cf. n° 8.

13. CAS D'APPLICATION. — Pour que nos hypothèses soient satisfaites et pour écarter le cas anormal *il suffit*, d'après ce que nous avons vu, de remplacer dans l'énoncé de l'hypothèse II \mathcal{H} par W .

Citons maintenant des *cas particuliers* où ces conditions sont satisfaites.

I. *Le cas fini.* — Prenons $f(E_k) = 1$; si $f(\mathcal{E}) < 1$, on a \mathcal{E} vide, par conséquent la probabilité pour que le point puisse rester une seule épreuve dans \mathcal{E} est 0.

II. *Le cas dénombrable.* — Prenons $f(E_k) = K^{-2}$; si $f(\mathcal{E}) = 0$, \mathcal{E} est vide, donc même conclusion que dans le cas fini.

III. *Le cas de M. Fréchet et le cas général où W est un ensemble d'un espace euclidien de mesure finie et où $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ est absolument continu.* — Il suffit de prendre $f(\mathcal{E}) = \text{mes}(\mathcal{E})$, alors $f(\mathcal{E}) = 0$ entraîne $\text{mes}(\mathcal{E}) = 0$ et l'ensemble \mathcal{E} est inessentiel; quel que soit E la probabilité pour que le point passe une fois à partir de E dans son mouvement ultérieur par \mathcal{E} est nulle.

IV. *Le cas où W est un ensemble d'un espace euclidien de mesure quelconque et où $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ est absolument continu* (se ramène au cas III par un changement de mesure *cf.*, § 1, n° 9).

V. *Le cas où W est un ensemble d'un espace euclidien et où*

$$P^{(N)}(E, \mathcal{E}) < 1 - \mu,$$

si \mathcal{E} est de mesure euclidienne nulle, pour un N qui peut d'ailleurs être une fonction de E et de \mathcal{E} , η étant indépendant de E , mais pas nécessairement de \mathcal{E} .

Si \mathcal{E} est de mesure nulle la probabilité pour que le point y reste indéfiniment sans sortir est nulle d'après le n° 8.

VI. *W est un ensemble d'un espace euclidien et pour tout point E la probabilité de rester indéfiniment sans sortir dans un ensemble de mesure nulle est $< 1 - \eta$ [elle est alors nulle (*cf.* § 1, n° 8)], etc.*

III.

Sommaire. — Les n° 14 et 15 sont consacrés à l'étude du mouvement cyclique non aléatoire à l'intérieur d'un ensemble indécomposable du mouvement qui est défini dans le théorème III (à la fin du n° 13). Le n° 17 contient, outre deux lemmes nécessaires pour la démonstration du théorème III, la définition de la notion « pour presque tout point ». Le n° 16 contient un lemme ayant un intérêt propre : quel que soit \mathcal{E} , $\lim. \sup. P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ est pour presque tout E égale à une grandeur indépendante de E. Dans le n° 17 nous donnons deux lemmes essentiels pour la démonstration aussi bien du théorème IV que du théorème V. Les n°s 18 et 19 contiennent la démonstration du théorème IV énoncé au début de 19, les n°s 20-22 contiennent les démonstrations de V (n° 22).

14. LES SOUS-ENSEMBLES CYCLIQUES. — LEMME I. — *Soit \mathcal{E}_E un ensemble avec $P^{(i)}(E, \mathcal{E}_E) = 1$. Pour chaque E il existe un $k = k_E$ tel que $\mathcal{E}_{1E}, \mathcal{E}_{2E}, \dots, \mathcal{E}_{kE}$ ne peuvent pas être tous disjoints.*

Démonstration. — Si un tel k n'existait pas on pourrait trouver une suite double d'ensembles

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1^1, & \mathcal{E}_1^2, & \\ \dots, & \dots, & \\ \mathcal{E}_k^k, & \dots, & \mathcal{E}_k^k, \\ \dots, & \dots, & \dots \end{array}$$

tels que $P^{(i)}(E, \mathcal{E}_i^k) = 1$, les ensembles d'une même ligne étant disjoints.

Comme $P^{(i)}(E, \mathcal{E}_i^k) = 1$ quel que soit k , on aura aussi

$$P^{(i)}(E, \mathcal{E}_i^1 \mathcal{E}_i^2 \dots \mathcal{E}_i^k) = 1.$$

Nous pouvons donc supposer que

$$\mathcal{E}_i^k \supset \mathcal{E}_i^{k+1}.$$

Soit alors

$$\mathcal{E}_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_1^k, \quad \mathcal{E}_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E}_i^k.$$

Les ensembles \mathcal{E}_i sont disjoints et tels que $P^{(i)}(E, \mathcal{E}_i) = 1$.

Soit \mathcal{E}'_i l'ensemble $\subset \mathcal{E}_i$ pour lequel on a pour un k

$$P^{(k)}(F, \mathcal{E}_{i+k}) < 1, \quad \text{si } F \subset \mathcal{E}'_i.$$

On a

$$P^{(i)}(E, \mathcal{E}_i - \mathcal{E}'_i) = 1.$$

Enlevons de chaque \mathcal{E}_i l'ensemble \mathcal{E}'_i . Je dis qu'on a

$$P^{(k)}(F, \mathcal{E}_{i+k} - \mathcal{E}'_{i+k}) = 1, \quad \text{si } F \in \mathcal{E}_i - \mathcal{E}'_i.$$

En effet si l'on avait $P^{(k)}(F, \mathcal{E}'_{i+k}) > 0$, on aurait $P^{(k+j)}(F, \mathcal{E}_{i+k+j}) < 1$ pour un j . On passe donc nécessairement à chaque épreuve de

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}'_i \quad \text{en} \quad \mathcal{F}_{i+1} = \mathcal{E}_{i+1} - \mathcal{E}'_{i+1},$$

les \mathcal{F}_i sont disjoints et l'ensemble $\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \dots$ est stochastiquement fermé et visiblement essentiel impropre contre l'hypothèse. Le lemme est donc démontré.

Remarque. — Ceci posé, remarquons qu'il existe un k tel que l'ensemble des points E de \mathcal{H} avec $k_E = k$ soit absolument essentiel. Autrement \mathcal{H} serait essentiel impropre.

On démontre de même que pour tout E il existe un k_E et un nombre $\varepsilon > 0$ tel que $P^{k_E}(E, \mathcal{E}) \geq 1 - \varepsilon$ entraîne que \mathcal{E} est absolument essentiel.

La notion pour presque tout point de \mathcal{H} (resp \mathcal{G}). — Nous disons qu'une propriété a lieu pour presque tout point E de \mathcal{H} si l'ensemble R des points de \mathcal{H} où elle n'a pas lieu est inessentiel ou essentiel impropre. Il existera (théorème II) alors un ensemble stochastiquement fermé dans \mathcal{H} pour chaque point duquel la propriété a lieu. Dans le cas normal si une propriété a lieu pour presque tout point de \mathcal{G} alors l'ensemble des points où elle n'a pas lieu est inessentiel. Comme il sera entendu dans ce paragraphe dans tout ce qui suit qu'on se trouve à l'intérieur de \mathcal{H} resp de \mathcal{G} dans le cas normal, nous dirons plus brièvement qu'une propriété a lieu pour presque tout point lorsque nous voulons dire qu'elle a lieu pour presque tout point de \mathcal{H} resp de \mathcal{G} .

LEMME II. — *Un ensemble \mathcal{A} de \mathcal{H} inessentiel, essentiel impropre ou absolument essentiel reste inessentiel, essentiel impropre ou absolument essentiel lorsqu'on envisage au lieu des probabilités de passage $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$, les probabilités $P^{(k)}(E, \mathcal{E})$.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que si \mathcal{A} est inessentiel pour $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ (ou pour $P^{(1)}$) il l'est aussi pour $P^{(k)}$ et inversement. Or si \mathcal{A} est inessentiel pour $P^{(1)}$, la probabilité pour que le point mobile

passer une infinité de fois par \mathcal{A} est nulle quel que soit le point initial, il en est de même *a fortiori* de la probabilité pour que le point passe une infinité de fois par \mathcal{A} aux épreuves multiples de k . Par conséquent \mathcal{A} est encore inessentiel pour P^k . Admettons maintenant que \mathcal{A} était essentiel pour $P^{(1)}$ et inessentiel pour $P^{(k)}$. Là, \mathcal{A} étant essentiel pour $P^{(1)}$ il existe au moins un i ($1 \leq i \leq k$) tel que la probabilité pour que le point passe une infinité de fois à partir de E par \mathcal{A} aux épreuves de la forme $nk + i$ ($n = 1, 2, \dots$) soit positive. Or quelle que soit la position où le point mobile parti de E se trouve à la $i^{\text{ième}}$ épreuve, \mathcal{A} étant inessentiel pour P^k , la probabilité pour que le point passe une infinité de fois par \mathcal{A} aux épreuves de la forme $nk + i$ est nulle. \mathcal{A} doit donc être aussi inessentiel pour $P^{(1)}$. C. Q. F. D.

15. *Les ensembles stochastiquement fermés pour $P^{(k)}(E, \mathcal{E}) \subset \mathcal{H}$.* — Envisageons les sous-ensembles de \mathcal{H} qui sont stochastiquement fermés pour $P^{(k)}(E, \mathcal{E})$, c'est-à-dire satisfaisant à

$$P^{(k)}(E, W - \mathcal{E}) = 0, \quad \text{si } E \in \mathcal{E} \quad \text{ou à} \quad P^{(k)}(E, \mathcal{E}) = 1.$$

Si le point se trouve dans un ensemble stochastiquement fermé pour $P^{(k)}$, il y revient presque sûrement périodiquement toutes les k épreuves.

Soient $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \dots$ des ensembles stochastiquement fermés pour $P^{(k)}$ compris dans \mathcal{H} . Soit $\mathcal{E}_i(\mathcal{J}_1)$ ($i < k$) l'ensemble des points F de \mathcal{H} avec $P^{(k-i)}(F, \mathcal{J}_1) = 1$. De $P^{(k)}(E, \mathcal{J}_1) = 1$ si $E \in \mathcal{J}_1$ on déduit immédiatement

$$P^{(i)}(E, \mathcal{E}_i(\mathcal{J}_1)) = 1, \quad \text{si } E \in \mathcal{J}_1,$$

donc aussi

$$P^{(k)}(F, \mathcal{E}_i(\mathcal{J}_1)) = 1, \quad \text{si } F \in \mathcal{E}_i(\mathcal{J}_1).$$

Je dis que l'ensemble $\mathcal{E}_1(\mathcal{J}_1) + \dots + \mathcal{E}_{k-1}(\mathcal{J}_1) + \mathcal{J}_1$ est stochastiquement fermé pour $P^{(1)}$, admettons en effet que

$$P^{(l)}(E, \mathcal{J}_1 + \dots + \mathcal{E}_{k-1}(\mathcal{J}_1)) < 1, \quad \text{pour } E \in \mathcal{E}_i(\mathcal{J}_1),$$

on aurait, si $mk + i$ est le plus petit nombre de la forme $nk + i \geq l$, $P^{(mk+i)}(E, \mathcal{J}_1) < 1$, ce qui est impossible.

Soit

$$\mathcal{L}(\mathcal{J}_1) = \mathcal{J}_1 + \mathcal{E}_1(\mathcal{J}_1) + \dots + \mathcal{E}_{k-1}(\mathcal{J}_1);$$

supposons qu'il y ait plus de k ensembles \mathcal{J}_i disjoints, l'ensemble

$\mathcal{L}[\mathcal{J}_1] \mathcal{L}[\mathcal{J}_2]$ ne peut pas être vide, car \mathcal{H} est indécomposable et $\mathcal{L}[\mathcal{J}_1]$ et $\mathcal{L}[\mathcal{J}_2]$ stochastiquement fermés, $\mathcal{L}[\mathcal{J}_1] \mathcal{L}[\mathcal{J}_2]$ est donc stochastiquement fermé; il en est de même pour $\mathcal{L}[\mathcal{J}_1] \mathcal{L}[\mathcal{J}_2] \dots \mathcal{L}[\mathcal{J}_k] \mathcal{L}[\mathcal{J}_{k+1}]$. Or si le point mobile se trouve à un moment donné dans $\mathcal{L}[\mathcal{J}_i]$ il passe presque sûrement périodiquement toutes les k épreuves par \mathcal{J}_i . Les ensembles $\mathcal{J}_1 \dots \mathcal{J}_{k+1}$ étant tous disjoints, le point mobile ne peut pas, se trouvant dans $\mathcal{L}[\mathcal{J}_1] \dots \mathcal{L}[\mathcal{J}_{k+1}]$, passer en k épreuves presque sûrement dans ces $k + 1$ ensembles. *Par conséquent il y a au plus k sous-ensembles stochastiquement fermés pour P^k , disjoints dans l'ensemble indécomposable \mathcal{H} .*

Nous pouvons dès lors prendre pour $\mathcal{J}_1 \dots$ des ensembles indécomposables pour P^k , c'est-à-dire stochastiquement fermés et ne contenant plus deux sous-ensembles stochastiquement fermés disjoints pour $P^{(k)}$ (cf. n° 7, § 1). Je dis qu'alors $\mathcal{E}_i(\mathcal{J}_1)$ est aussi indécomposable pour P^k . En effet, dans le cas contraire, $\mathcal{E}_i(\mathcal{J}_1)$ contiendrait deux sous-ensembles \mathcal{E}' et \mathcal{E}'' stochastiquement fermés pour P^k et disjoints. Alors soit \mathcal{J}'_1 la région de \mathcal{J}_1 où $P^{(k)}(\mathbf{E}, \mathcal{E}') = 1$, \mathcal{J}''_1 celle où $P^{(k)}(\mathbf{E}, \mathcal{E}'') = 1$, on vérifie immédiatement que \mathcal{J}'_1 et \mathcal{J}''_1 sont stochastiquement fermés pour $P^{(k)}$ et disjoints, \mathcal{J}_1 ne serait donc pas indécomposable.

Soient donc $\mathcal{J}_1, \dots, \mathcal{J}_\rho$ ($\rho \leq k$) des sous-ensembles de \mathcal{H} disjoints et indécomposables pour P^k , tels que $\mathcal{H} - (\mathcal{J}_1 + \dots + \mathcal{J}_\rho)$ ne contienne plus de sous-ensembles stochastiquement fermés pour P^k , $\mathcal{H} - (\mathcal{J}_1 + \dots + \mathcal{J}_\rho)$ sera (en vertu du raisonnement du § 1, n° 8) essentiel impropre ou inessentiel pour P^k , donc d'après le lemme I encore essentiel impropre ou inessentiel pour $P^{(1)}$. Il existe donc (théorème II, § 2) un ensemble \mathcal{H}' , stochastiquement fermé pour $P^{(1)}$, compris dans $\mathcal{J}_1 + \dots + \mathcal{J}_\rho$. Il résulte de ce qui a été dit plus haut que de $\mathcal{H}' \mathcal{J}_i$ on ne peut passer dans une épreuve que dans un ensemble $\mathcal{H}' \mathcal{J}_i$ bien déterminé, soit $\mathcal{J}_2 \mathcal{H}'$, (si $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_1$, ceci revient à dire que le point ne peut pas passer de $\mathcal{H}' \mathcal{J}_1$ à l'extérieur, donc $\rho = 1$), etc. *On peut donc ranger les \mathcal{J}_i dans un ordre circulaire*

$$(1) \quad \mathcal{J}_1 \rightarrow \mathcal{J}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{J}_\rho \rightarrow \mathcal{J}_1 \rightarrow \dots,$$

tel qu'on passe presque sûrement en chaque épreuve de $\mathcal{H}' \mathcal{J}_i$ à l'ensemble suivant dans l'ordre circulaire ($\mathcal{H}' \mathcal{J}_{i+1}$, si $i < \rho$, $\mathcal{H}' \mathcal{J}_1$ si $i = \rho$).

Montrons maintenant que le nombre des ensembles stochastiquement fermés pour P^k , disjoints et compris dans \mathcal{A} , est borné, quel que soit k . Il résulte de la remarque faite à la fin du lemme I qu'il existe un ensemble absolument essentiel T et un nombre d' , tels que pour tout point E de T les équations $P^{(n)}(E, \mathcal{E}_n) = 1$ et $P^{(n+d')}(E, \mathcal{E}_{n+d'}) = 1$ entraînent, pour un n au moins, $\mathcal{E}_n \mathcal{E}_{n+d'}$ non vide. La partie commune $T \mathcal{A}'$ n'est pas vide (car $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ est essentiel impropre) si $E \in \mathcal{A}' \mathcal{J}_\rho$, par exemple, fait partie de T , on aura

$$P^{(n)}(E, \mathcal{J}_l \mathcal{A}') = 1, \quad \text{si } n \equiv l \pmod{\rho}.$$

Les égalités $P^{(n)}(E, \mathcal{E}_n) = 1$, $P^{(n+d')}(E, \mathcal{E}_{n+d'}) = 1$ ne peuvent entraîner $\mathcal{E}_n \mathcal{E}_{n+d'}$ non vide que si $\rho \leq d'$.

Ce qui démontre que ρ est borné. Soit d le maximum de ρ quand k varie. On aura pour un certain k_1 [multiple de d d'après (1)] d ensembles $\bar{\mathcal{J}}_1, \bar{\mathcal{J}}_2, \dots, \bar{\mathcal{J}}_d$ disjoints, indécomposables pour P^k , et tels que $\bar{\mathcal{J}}_1 + \bar{\mathcal{J}}_2 + \dots + \bar{\mathcal{J}}_d$ est stochastiquement fermé (il suffit de prendre $\bar{\mathcal{J}}_1 = \mathcal{J}_1 \mathcal{A}'$). Les ensembles $\bar{\mathcal{J}}_i$ sont déjà (en vertu du mouvement cyclique) stochastiquement fermés pour P^d , et indécomposables pour tout P^{nd} . (Dans le cas contraire, il y aurait pour P^{nd} plus de d ensembles stochastiquement fermés.) Nous avons donc démontré le :

THÉORÈME III. — *Il existe dans \mathcal{A} un nombre fini $d \geq 1$ de sous-ensembles dits cycliques $\bar{\mathcal{J}}_1, \bar{\mathcal{J}}_2, \dots, \bar{\mathcal{J}}_d$, qu'on peut ranger dans un ordre circulaire, tel que le point mobile se trouvant dans $\bar{\mathcal{J}}_1 + \bar{\mathcal{J}}_2 + \dots + \bar{\mathcal{J}}_d$ passe presque sûrement dans chaque épreuve cycliquement d'un sous-ensemble au suivant. $\mathcal{A} - (\bar{\mathcal{J}}_1 + \bar{\mathcal{J}}_2 + \dots + \bar{\mathcal{J}}_d)$ sera inessentiel ou essentiel impropre. Si l'on n'envisage le mouvement que de d en d épreuves et si le point se trouve dans $\bar{\mathcal{J}}_i$ à l'instant initial il s'y trouvera presque sûrement à chaque instant dans le même sous-ensemble cyclique. Il est impossible d'introduire $d' > 1$ sous-ensembles cycliques des sous-ensembles cycliques.*

Corollaire. — *Dans le cas normal on peut choisir \mathcal{G} de telle sorte que*

$$\mathcal{G} = \mathcal{G} \bar{\mathcal{J}}_1 + \mathcal{G} \bar{\mathcal{J}}_2 + \dots + \mathcal{G} \bar{\mathcal{J}}_d.$$

LEMME III*. — *$\limsup_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ est égale pour tout \mathcal{E} à une grandeur*

indépendante de E , $\overline{P(\mathcal{E})}$, sauf peut-être si E se trouve dans un certain ensemble essentiel impropre (pouvant varier avec \mathcal{E}).

16. LEMME III. — Dans le cas normal, $\limsup_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ est égale à $\overline{P(\mathcal{E})}$ dans \mathcal{G} sauf peut-être pour un ensemble de points E inessentiel.

Démonstration. — Soit $\bar{\lambda} = \overline{P(\mathcal{E})}$ la borne inférieure des nombres λ pour lesquels l'ensemble des points E où $\overline{\lim} P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \leq \lambda$ est absolument essentiel. Donc l'ensemble où $\overline{\lim} P^{(n)}(E, \mathcal{E}) < \bar{\lambda} - \frac{1}{n}$ est inessentiel ou essentiel impropre quel que soit n . Il en est par conséquent de même de l'ensemble où $\overline{\lim} P^{(n)}(E, \mathcal{E}) < \bar{\lambda}$. D'autre part, quel que soit i , l'ensemble, soit \mathcal{N} , où $\overline{\lim} P^{(n)}(E, \mathcal{E}) < \bar{\lambda} + \frac{1}{2i}$, est absolument essentiel. D'après le théorème II il existe un ensemble stochastiquement fermé \mathcal{N}' tel qu'on ait $\Pr(E, \mathcal{N}) = 1$ pour tout point de cet ensemble. Soit E un point de \mathcal{N}' , nous allons prendre m tel que

$$\sum_{m+1}^{\infty} K^{(j)}(E, \mathcal{N}) < \frac{1}{16i}, \quad \sum_1^{\infty} K^{(j)}(E, \mathcal{N}) = \Pr[E, \mathcal{N}] = 1.$$

Appelons $P_t^{(n)}(\mathcal{E})$ la probabilité pour que le point mobile parti de E se trouve n épreuves après dans \mathcal{E} sous l'hypothèse dont la probabilité est $K^{(t)}(E, \mathcal{N})$. Nous pouvons écrire

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) < K^{(1)}(E, \mathcal{N}) P_1^{(n)}(\mathcal{E}) + \dots + K^{(m)}(E, \mathcal{E}) P_m^{(n)}(\mathcal{E}) + \sum_{m+1}^{\infty} K^{(j)}(E, \mathcal{N}).$$

Or si le point se trouve dans un point F de \mathcal{N} à la $t^{\text{ième}}$ épreuve, on a

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n-t)}(F, \mathcal{E}) < \bar{\lambda} + \frac{1}{2i}.$$

Nous pouvons donc prendre N suffisamment grand, tel qu'on ait $P^{(n-t)}(F, \mathcal{E}) < \bar{\lambda} + \frac{3}{4i}$ pour tout $n > N$, $t \leq m$, et pour tout point F de \mathcal{N} sauf peut-être pour un ensemble \mathcal{Z} de points $\in \mathcal{N}$, tel que

$$K^{(1)}(E, \mathcal{Z}) + \dots + K^{(m)}(E, \mathcal{Z}) \leq P^{(1)}(E, \mathcal{Z}) + \dots + P^{(m)}(E, \mathcal{Z}) < \frac{1}{16i}.$$

Alors, si $n > N$,

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) < \bar{\lambda} + \frac{1}{i}.$$

Nous concluons que

$$\limsup P^{(n)}(E, \mathcal{E}) < \bar{\lambda} + \frac{1}{i}, \quad \text{pour tout point de } \mathcal{N}'.$$

L'ensemble $\mathcal{H} - \mathcal{U}$ étant inessentiel ou essentiel impropre, l'ensemble où $\limsup_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}) > \bar{\lambda} + \frac{1}{i}$ sera essentiel impropre ou inessentiel quel que soit E, par conséquent, l'ensemble où

$$\limsup P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \neq \bar{\lambda} = \overline{P(\mathcal{E})}$$

est inessentiel ou essentiel impropre.

Comme dans le cas normal tout ensemble essentiel est absolument essentiel, les lemmes III et III' se trouvent démontrés.

17. Soit $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ l'ensemble où $\limsup_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}) = \overline{P(\mathcal{E})}$. $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ est absolument essentiel, $\mathcal{H} - \mathcal{L}(\mathcal{E})$ est essentiel impropre. Nous savons alors qu'on peut trouver un ensemble stochastiquement fermé $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, contenu dans $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ (dans le cas normal cet ensemble pourra se distinguer de \mathcal{G} d'un ensemble non essentiel).

Prenons un point de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$. On a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}) = \overline{P(\mathcal{E})} \quad \text{sur } \mathcal{C}(\mathcal{E}).$$

Pour chaque point, il existe une suite n_i , avec $P^{(n_i)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow \overline{P(\mathcal{E})}$. Soit $\rho_E (1 \leq \rho_E \leq \infty)$ le plus grand nombre entier, tel qu'il existe une suite n_i avec $\lim_{i \rightarrow \infty} P^{(n_i)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow \overline{P(\mathcal{E})}$ dans laquelle figure une infinité de fois avec n_i les nombres

$$n_i, \quad n_i + D, \quad n_i + 2D, \quad \dots, \quad n_i + \rho_E D,$$

D étant le plus petit nombre tel que, sur un ensemble de points E absolument essentiel, les égalités

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}_n) = 1 \quad \text{et} \quad P^{(n+D)}(E, \mathcal{E}_{n+D}) = 1$$

entraînent, au moins pour un n , $\mathcal{E}_n \mathcal{E}_{n+D} \neq 0$ ⁽²⁴⁾.

(24) Il résulte du théorème III que D est un multiple de d .

LEMME IV. — Si $\rho_{E_1} = \tau < \infty$, $\rho_F \geq \tau$ pour presque tout F.

Démonstration. — Nous pouvons prendre une suite n_i avec $P^{(n_i)}(E_1, \mathcal{E}) \rightarrow P(\mathcal{E})$ dans laquelle figure une infinité de fois avec $n_i, n_i + D, \dots, n_i + \rho_{E_1} D$. Désignons par $\mathcal{F}_{i,N}$ l'ensemble des points de $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ où

$$P^{(n)}(F_i, \mathcal{E}) > \overline{P(\mathcal{E})} + \frac{1}{4^i}, \quad \text{pour un } n \geq N.$$

Soit b un entier positif quelconque. De la suite $\{n_i\}$, nous pouvons extraire une suite $\{n'_i\}$ contenant encore une infinité de fois avec n'_i les nombres $n'_i + D, \dots, n'_i + \rho_E D$ et telle qu'on ait

$$P^{(n'_i)}(E_1, \mathcal{E}) > \overline{P(\mathcal{E})} - \frac{1}{4^i} \quad \text{et} \quad P^{(b)}(E_1, \mathcal{F}_{i, n'_i - b}) < \frac{1}{4^i}.$$

Soit $\mathcal{F}'_{i,b}$ l'ensemble des points F où $P^{(n'_i - b)}(F, \mathcal{E}) < \overline{P(\mathcal{E})} - 2^{-i}$ on a

$$P^{(n'_i)}(E_1, \mathcal{E}) = \int_{\mathcal{C}(\mathcal{E})} P^{(n'_i - b)}(F, \mathcal{E}) P^{(b)}(E_1, d\alpha_F),$$

donc

$$\overline{P(\mathcal{E})} - \frac{1}{4^i} < (1 - P^b(E_1, \mathcal{F}'_{i,b})) \left(\overline{P(\mathcal{E})} + \frac{1}{4^i} \right) + \frac{1}{4^i} + P^b(E_1, \mathcal{F}'_{i,b}) \left(\overline{P(\mathcal{E})} - \frac{1}{2^i} \right)$$

ou

$$P^{(b)}(E_1, \mathcal{F}'_{i,b}) < \frac{3}{2^i}.$$

Par conséquent

$$P^{(b)}\left(E_1, \sum_{i=\rho}^{\infty} \mathcal{F}'_{i,b}\right) < \frac{3}{2^{\rho-1}}, \quad P^{(b)}\left(E_1, \sum_{i=\rho}^{\infty} \mathcal{F}_{i, n'_i - b}\right) < \frac{2}{4^{\rho}}.$$

Si

$$F \in \mathcal{C}(\mathcal{E}) - \sum_{i=\rho}^{\infty} (\mathcal{F}'_{i,b} + \mathcal{F}_{i, n'_i - b})$$

nous avons

$$(2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} P^{(n'_i - b)}(F, \mathcal{E}) = \overline{P(\mathcal{E})}.$$

ρ étant arbitraire, la relation (2) sera valable pour tout F sauf sur un ensemble R avec $P^{(b)}(E_1, R) = 0$. Ceci étant vrai quel que soit b , nous trouvons $\rho_F \geq \rho_{E_1}$, pour tout F, sauf peut-être sur un ensemble R' avec

$$P^{(1)}(E_1, R') = P^{(2)}(E_1, R') = \dots = 0,$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME V. — ρ_E est presque partout $= \infty$.

Démonstration. — Dans le cas contraire ρ_E sera partout borné sur $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, $\leq \rho$ par exemple. Or prenons un point $F \in \mathcal{C}(\mathcal{E})$ de l'ensemble où

$$P^{n+D}(F, \mathcal{E}_{n+D}) = 1 \quad \text{et} \quad P^{(n)}(F, \mathcal{E}_n) = 1$$

entraînent pour un n que $\mathcal{E}_{n+D} \mathcal{E}_n$ est non vide et tel que $\rho_F = \rho$. A ce point nous pouvons attacher comme ci-dessus une suite n'_i . On aura

$$(1) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} P^{(n'_i - n)}(E, \mathcal{E}) = \overline{P(\mathcal{E})}$$

en dehors d'un ensemble R avec $P^{(n)}(F, R) = 0$, et de même

$$(2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} P^{(n'_i - n - D)}(E, \mathcal{E}) = \overline{P(\mathcal{E})}$$

en dehors d'un ensemble R' avec $P^{(n+D)}(F, R') = 0$. Pour une certaine valeur de n , $P^{(n)}(F, R') = 0$, $P^{(n+D)}(F, R') = 0$, entraînent $(\mathcal{C}(\mathcal{E}) - R)(\mathcal{C}(\mathcal{E}) - R') \neq 0$, il existe donc un point F' pour lequel on a à la fois (1) et (2) et, pour F' , on aura visiblement

$$\rho_{F'} \geq \rho + 1.$$

Ce qui démontre le lemme.

18. Proposition. — Si $D = 1$ et si

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{P(\mathcal{E}_i)} \rightarrow 0$$

pour toute suite descendante d'ensembles \mathcal{E}_i tendant vers l'ensemble vide, $P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow \overline{P(\mathcal{E})}$, pour presque tout $E \in \mathcal{E}$.

Démonstration. — D étant $= 1$, nous déduisons du numéro 17 qu'on peut prendre une suite n_i telle que

$$P^{(n_i)}(E, \mathcal{E}), \quad P^{(n_i+1)}(E, \mathcal{E}), \quad \dots, \quad P^{(n_i+i)}(E, \mathcal{E})$$

sont $> \overline{P(\mathcal{E})} - \varepsilon$, pour tout E d'un ensemble absolument essentiel \mathcal{X} , ε pouvant être rendu arbitrairement petit si $i \rightarrow \infty$. \mathcal{X} étant absolument essentiel, nous allons envisager l'ensemble stochastiquement fermé \mathcal{A} où $\text{Pr}[E, \mathcal{X}] = 1$. Nous pouvons écrire

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \dots + \mathcal{A}_n + \dots,$$

\mathcal{A}_n étant l'ensemble où

$$\sum_{i=1}^n K^{(i)}(E, \mathcal{X}) \geq 1 - \varepsilon, \quad \sum_{i=1}^{n-1} K^{(i)}(E, \mathcal{X}) < 1 - \varepsilon;$$

ε étant fixe, prenons j tel que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{A}_j + \mathcal{A}_{j+1} + \dots) < \varepsilon, \quad \text{pour presque tout } E.$$

Soit E un point de \mathcal{A} avec $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{A}_j + \dots) < \varepsilon$, nous pouvons prendre m_0 tel que

$$P^{(m)}(E, \mathcal{A}_j + \dots) < 2\varepsilon, \quad \text{si } m \geq m_0;$$

il vient ($0 \leq \theta < 1, n > m_0$)

$$P^{(n+m)}(E, \mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{j-1} \int_{\mathcal{A}_i} P^{(n)}(F, \mathcal{E}) P^{(m)}(E, d\mathcal{A}_F) + \theta \cdot 2\varepsilon.$$

Évaluons $P^{(n)}(F, \mathcal{E})$ si $F \in \mathcal{A}_i$. Supposons que $n = n_j + j$, alors

$$P^{(n)}(F, \mathcal{E}) = K^{(1)}(F, \mathcal{X}) P^{(n-1)}(F, \mathcal{E}) + \dots + K^{(j)}(F, \mathcal{X}) P^{(n-j)}(F, \mathcal{E}) + \theta' \varepsilon.$$

$P^{(n-i)}(F, \mathcal{E})$ désignant une moyenne des $P^{(n-i)}(G, \mathcal{E})$ pour $G \in \mathcal{X}$
Or si $G \in \mathcal{X}$ et que n a la valeur indiquée, on a

$$P^{(n)}(G, \mathcal{E}) > \overline{P}(\mathcal{E}) - \varepsilon, \quad \dots, \quad P^{(n-j)}(G, \mathcal{E}) > \overline{P}(\mathcal{E}) - \varepsilon.$$

Donc

$$P^{(n-i)}(F, \mathcal{E}) > \overline{P}(\mathcal{E}) - 2\varepsilon, \quad \text{si } n = n_j + j$$

et

$$P^{(n+m)}(E, \mathcal{E}) > \overline{P}(\mathcal{E}) - 4\varepsilon, \quad \text{si } m > m_0.$$

Il en résulte

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow \overline{P}(\mathcal{E}), \quad \text{pour presque tout } E (\in \mathcal{A}). \quad \text{C. Q. F. D.}$$

19. THÉORÈME IV. — Si $\lim_{i \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i) = 0$ pour presque tout E quelle que soit la suite descendante d'ensembles \mathcal{E}_i tendant vers l'ensemble vide, alors si \mathcal{E} appartient à \mathcal{J}_l on a pour presque tout $E \in \mathcal{J}_l$,

$$(1) \quad \begin{cases} P^{(n)}(E, \mathcal{E}) = 0, & \text{si } n \not\equiv (l-l') \pmod{d}, \\ \rightarrow \overline{P}(\mathcal{E}), & \text{si } n \equiv (l-l') \pmod{d}. \end{cases}$$

Démonstration. — Supposons que E appartienne aussi à \mathcal{J}_l , le point mobile parti d'un point de \mathcal{J}_l y passera presque sûrement toutes les d épreuves. D étant un multiple de d , si nous n'envisageons les épreuves que de D en D et que nous nous bornons au mouvement à l'intérieur de $\overline{\mathcal{J}_l}$, nous nous trouvons ramené au cas de la proposition précédente, et il en résulte que

$$(2) \quad P^{(nd)}(F, \mathcal{E}) \rightarrow \overline{P(\mathcal{E})}, \quad \text{pour presque tout point F de } \mathcal{J}_l,$$

Dès lors nous pouvons prendre un ensemble stochastiquement fermé \mathcal{J} tel que pour tout point de $\overline{\mathcal{J}\mathcal{J}_l}$ on ait (2). Comme on a, si $E \in \overline{\mathcal{J}_l\mathcal{J}}$,

$$P^{(m)}(E, \overline{\mathcal{J}_l\mathcal{J}}) = 1, \quad \text{si } m \equiv (l - l') \pmod{d}$$

et

$$P^{(m)}(E, \overline{\mathcal{J}_l\mathcal{J}}) = 0, \quad \text{si } m \not\equiv (l - l') \pmod{d},$$

il en résulte le théorème.

COROLLAIRE. — Sous l'hypothèse du théorème $\overline{P(\mathcal{E})} = P_l(\mathcal{E})$ si $\mathcal{E} \in \overline{\mathcal{J}_l}$. $P_l(\mathcal{E})$ est complètement additif avec $P_l(\overline{\mathcal{J}_l}) = 1$, et est > 0 si $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{J}_l}$ est absolument essentiel.

Démonstration. — Comme

$$P^{nd}(E, \mathcal{E}_1) \rightarrow P_l(\mathcal{E}_1) \quad \text{et} \quad P^{nd}(E, \mathcal{E}_2) \rightarrow P_l(\mathcal{E}_2) \quad \text{pour presque tout point E de } \mathcal{J}_l,$$

on aura visiblement si \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont disjoints $\subset \mathcal{J}_l$,

$$P_l(\mathcal{E}_1) + P_l(\mathcal{E}_2) = P_l(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2).$$

L'additivité complète résulte alors immédiatement de l'hypothèse du théorème, suivant laquelle $P_l(\mathcal{E}_i) \rightarrow 0$, si $\mathcal{E}_i \supset \mathcal{E}_{i+1} \supset \dots$ et que $\lim \mathcal{E}_i$ est vide. L'équation $P_l(\overline{\mathcal{J}_l}) = 1$ est évidente, il reste à prouver que $P_l(\mathcal{E})$ est positif si $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{J}_l}$ est absolument essentiel. Or, pour presque tout point de \mathcal{J}_l , on a $\text{Pr}[E, \mathcal{E}] = 1$. Soit α l'ensemble stochastiquement fermé où $\text{Pr}[E, \mathcal{E}] = 1$. Nous pouvons écrire

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots,$$

α_i étant l'ensemble où

$$\sum_1^i K^{(l)}(E, \mathcal{E}) \geq \frac{1}{2}, \quad \sum_1^{i-1} K^{(l)}(E, \mathcal{E}) < \frac{1}{2},$$

Supposons $\overline{\lim} P^{(nd)}(E, \mathcal{A}_i \mathcal{J}_l) > b > 0$ pour un i si $E \in \mathcal{J}_l$. On aura une infinité de fois

$$P^{nd}(E, \mathcal{E}) > \frac{1}{2^i} b > 0$$

$$\left(\text{car } P^{nd+1}(E, \mathcal{E}) + \dots + P^{nd+i}(E, \mathcal{E}) > \int_{\mathcal{A}_i} \sum_1^{i-1} K^{(l)}(F, \mathcal{E}) P^{nd}(E, d\mathcal{A}_F) \right).$$

$P_{\mathcal{J}_l}(\mathcal{E}) = 0$ entraînerait donc $P(\mathcal{A}_i) = 0$, et par conséquent

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(F, \mathcal{A}_{l+1} + \mathcal{A}_{l+2} + \dots) = 1,$$

contrairement à l'hypothèse.

COROLLAIRE. — *Dans le cas normal, les équations (1) ont lieu, quel que soit \mathcal{E} pour tout E de l'ensemble final.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{J}_l$ quelconque. $P^{(nd)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow P_l(\mathcal{E})$ en dehors peut-être d'un ensemble inessentiel R dans \mathcal{J}_l . Or, si $F \in R$, on a

$$P^{(nd)}(E, \mathcal{E}) = \int_{\mathcal{J}_l - R} P^{(n'd)}(F, \mathcal{E}) P^{(n'd)}(E, d\mathcal{A}_F) + \int_R$$

$$\int_R \rightarrow 0, \quad \text{si } n'' \rightarrow \infty; \quad \int_{\mathcal{J}_l - R} \rightarrow P_l(\mathcal{E}), \quad \text{si } n' \rightarrow \infty,$$

R est donc vide et en vertu du mouvement cyclique, on aura (1) quel que soit E dans l'ensemble final. C. Q. F. D.

★ **COROLLAIRE.** — *Dans le cas anormal, si $S\{\mathcal{E}\}$ est une famille d'ensembles dénombrable il existe un ensemble stochastiquement fermé tel que pour tout point de cet ensemble et pour tout \mathcal{E} de cette famille on ait les équations (1).*

Si E est un point fixe quelconque de \mathcal{J}_l , \mathcal{E} un ensemble quelconque de \mathcal{A}_E (1) (nous pouvons supposer pour plus de commodité que \mathcal{E} appartient à un ensemble \mathcal{J}_l déterminé), on aura

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow \text{Pr}[E, \mathcal{A}_E] P_{\mathcal{J}_l}(\mathcal{E}), \quad \text{si } n \equiv (l - l') \pmod{d},$$

$$= 0, \quad \text{si } n \not\equiv (l - l') \pmod{d}.$$

(1) L'ensemble \mathcal{A}_E a été défini au n° 12*. Nous rappelons que, si $\mathcal{F} \in \mathcal{A}_E$ est inessentiel impropre, on a $Q(E, \mathcal{F}) = 0$.

Démonstration. — La première partie est évidente d'après ce qui précède, le lecteur démontrera lui-même facilement la seconde.

20. *Analyse du cas où* $\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i)$ *n'est pas* $= 0$ *pour presque tout* E *pour une certaine suite descendante* $\{\mathcal{E}_i\}$ *avec* $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{E}_i = 0$. — Par hypothèse on a

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i) \neq 0,$$

si E se trouve dans un certain ensemble absolument essentiel.

Comme $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i) = \overline{P}(\mathcal{E}_i)$ pour presque tout E , on en déduit que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{P}(\mathcal{E}_i) = \alpha \neq 0.$$

L'ensemble où $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i) \neq \overline{P}(\mathcal{E}_i)$ est inessentiel ou essentiel impropre, la réunion pour tout i de ces ensembles est aussi inessentielle impropre. Il existe donc (théorème II) un ensemble stochastiquement fermé K tel que pour tout $E \in K$,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i) = \alpha > 0.$$

Nous allons de nouveau supposer d'abord que $D = 1$.

LEMME VI. — *Il existe un ensemble absolument essentiel* \mathcal{A} *tel que, uniformément par rapport à* F *sur* \mathcal{A}

$$P^{(n_i)}(F, \mathcal{E}_{m_i}) \rightarrow \alpha, \quad \dots, \quad P^{(n_i+l)}(F, \mathcal{E}_{m_i}) \rightarrow \alpha$$

et en même temps

$$P^{(n_i)}(F, \mathcal{E}'_{m'_i}) \rightarrow 0, \quad \dots, \quad P^{(n_i+l)}(F, \mathcal{E}'_{m'_i}) \rightarrow 0,$$

où $\{n_i\}, \{m_i\}, \{m'_i\}$ *sont trois suites d'entiers croissantes convenables.*

Démonstration. — K désignant toujours l'ensemble stochastiquement fermé pour tout point E duquel

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i) = \alpha > 0,$$

soit E un point de K . Soit ρ un indice tel que $P^{(\rho)}(E, \mathcal{E}) = 1$ entraîne

que \mathcal{E} est absolument essentiel, nous savons que $P^{(\rho)}(E, \mathcal{E}) > 1 - \varepsilon$ entrainera encore que \mathcal{E} est absolument essentiel, si ε est suffisamment petit. Nous allons prendre une suite $\{m_k\}$, telle que

$$\overline{P(\mathcal{E}_{m_k})} - \alpha < \frac{1}{4^k}.$$

Pour chaque \mathcal{E}_{m_k} nous pouvons prendre $n'_k (n'_{k+1} > n'_k)$ tel que

$$|P^{(n'_k)}(E, \mathcal{E}_{m_k}) - \alpha| < \frac{2}{4^k},$$

.....

$$|P^{(n'_k+k)}(E, \mathcal{E}_{m_k}) - \alpha| < \frac{2}{4^k},$$

et qu'on ait de plus, \mathcal{F}_k désignant l'ensemble où

$$P^{(n)}(F, \mathcal{E}_{m_k}) - \alpha > \frac{2}{4^k} \text{ pour un } n \geq n'_k - \rho, \quad P^{(\rho)}(E, \mathcal{F}_k) < \frac{\varepsilon}{4^k}.$$

On voit très simplement par le même raisonnement qu'au n° 17 que l'ensemble \mathcal{L} des points F où

$$|P^{(n_k)}(F, \mathcal{E}_{m_k}) - \alpha| < \frac{1}{2^k},$$

.....

$$|P^{(n_k+k)}(F, \mathcal{E}_{m_k}) - \alpha| < \frac{1}{2^k}$$

$$(n_k = n'_k - \rho, k > k_0)$$

satisfait à $P^{(\rho)}(E, \mathcal{L}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$. Maintenant, $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ étant complètement additive, on pourra trouver une suite m'_n , telle que

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}_{m'_n}) < \frac{1}{2} \frac{1}{4^n},$$

dès lors nous pouvons choisir n_0 tel que l'ensemble R des points F où, pour un $n > n_0$, $P^{(n-\rho)}(F, \mathcal{E}_{m'_n}) > \frac{1}{2^n}$ sera tel que

$$P^{(\rho)}(E, R) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

On aura

$$P^{(\rho)}(E, \mathcal{E} - \mathcal{L}(\mathcal{E} - R)) < \varepsilon;$$

$\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H} - \mathbf{R})$ sera donc absolument essentiel, ce qui démontre le lemme.

LEMME VII. — $\liminf_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(\mathbf{E}, \mathcal{A}) = 0$ pour tout point \mathbf{E} de l'ensemble stochastiquement fermé \mathbf{K} .

Démonstration. — Prenons un point \mathbf{E} quelconque de \mathbf{K} . De

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(\mathbf{E}, \mathcal{E}_i) = \alpha$$

résulte qu'on pourra prendre un i avec

$$\alpha \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(\mathbf{E}, \mathcal{E}_i) < \alpha + \varepsilon.$$

Il existera (lemme VI) un ρ et un k tels que, pour tout point \mathbf{F} de \mathcal{A} ,

$$P^\rho(\mathbf{F}, \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+k}) > \frac{\alpha}{2}.$$

Soit $\{n_j\}$ une suite avec

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P^{n_j}(\mathbf{E}, \mathcal{E}_{i+k}) = \overline{P(\mathcal{E}_{i+k})} \geq \alpha.$$

On aura, en vertu de

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(\mathbf{E}, \mathcal{E}_i) &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [P^n(\mathbf{E}, \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+k}) + P^n(\mathbf{E}, \mathcal{E}_{i+k})] < \alpha + \varepsilon, \\ \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} P^{n_j}(\mathbf{E}, \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+k}) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Or

$$P^{(n_j)}(\mathbf{E}, \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+k}) \geq \int_{\mathcal{A}} P^\rho(\mathbf{F}, \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i+k}) P^{(n_j - \rho)}(\mathbf{E}, d\mathcal{A}_{\mathbf{F}}),$$

d'où

$$\varepsilon \geq \frac{\alpha}{2} \lim_{j \rightarrow \infty} P^{(n_j - \rho)}(\mathbf{E}, \mathcal{A}),$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME VIII. — De $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(\mathbf{E}, \mathcal{A}) = 0$ pour presque tout \mathbf{E} résulte qu'il existe une suite descendante d'ensembles \mathcal{E}_i^1 convergeant vers l'ensemble vide avec

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(\mathbf{E}, \mathcal{E}_i^1) = 1$$

pour presque tout \mathbf{E} .

Démonstration. — Nous savons que pour presque tout E il existe une suite t_j de la forme $n_j, n_j + 1, \dots, n_j + j$ avec

$$(1) \quad \lim_{j \rightarrow \infty} P^{(t_j)}(E, \alpha) = 0.$$

D'autre part pour presque tout point on a

$$\Pr(E, \alpha) = 1,$$

soit \mathcal{C} l'ensemble stochastiquement fermé où $\Pr(E, \alpha) = 1$. Nous pouvons écrire

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_n + \dots,$$

\mathcal{C}_n étant l'ensemble où

$$\sum_1^n K^{(t)}(E, \alpha) \geq \frac{1}{2}, \quad \sum_1^{n-1} K^{(t)}(E, \alpha) < \frac{1}{2}.$$

Si

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} P^{(n_j)}(E, \mathcal{C}_1 + \dots + \mathcal{C}_n) > \lambda > 0, \quad \text{pour un } n,$$

on aurait

$$(2) \quad \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} P^{(n_j + i)}(E, \alpha) \geq \frac{\lambda}{2n},$$

où l est un certain entier compris entre 0 et n . (1) et (2) sont visiblement contradictoires. On a, par conséquent,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i) = 1, \quad \text{où } \mathcal{E}_i = \mathcal{C}_i + \mathcal{C}_{i+1} + \dots,$$

ce qui démontre le lemme.

A la suite \mathcal{E}_i correspond un ensemble absolument essentiel \mathcal{A}' avec les mêmes propriétés qu'avait \mathcal{A} relatif aux \mathcal{E}_i . Nous pouvons supposer que $\mathcal{A}'\mathcal{E}'_m$ est vide si $m > m_0$. Car $\mathcal{A}' = \mathcal{A}' - \mathcal{A}'\mathcal{E}'_1 + (\mathcal{A}'\mathcal{E}'_1 - \mathcal{A}'\mathcal{E}'_2) + \dots$, \mathcal{A}' étant absolument essentiel, un des ensembles $\mathcal{A}' - \mathcal{A}'\mathcal{E}'_1$, $\mathcal{A}'\mathcal{E}'_1 - \mathcal{A}'\mathcal{E}'_{i+1}$ sera absolument essentiel, il suffit de le considérer au lieu de \mathcal{A}' . On a aussi

$$\underline{\lim} P^{(n)}(E, \mathcal{A}') = 0$$

pour presque tout E.

LEMME IX. — $\overline{\lim} P^n(E, \mathcal{A}') = 0$ pour presque tout E.

Démonstration. — Soit $\beta = \overline{\lim} P^{(n)}(E, \mathcal{A}')$, supposons $\beta > 0$. De la

définition de \mathcal{A}' résulte l'existence d'un nombre n_1 , tel qu'on ait pour chaque point F de \mathcal{A}'

$$(3) \quad P^{(n_1)}(F, W - \mathcal{A}') > 1 - \varepsilon.$$

Il existe un nombre n_2 tel qu'on ait pour chaque point de \mathcal{A}'

$$(4) \quad P^{(n_2)}(F, W - \mathcal{A}') > 1 - \varepsilon, \quad P^{(n_1+n_2)}(F, W - \mathcal{A}') > 1 - \varepsilon.$$

(On a en effet $\lim P^{(t_i)}(F, \mathcal{E}'_m) = 1$, où $\{t_i\}$ contient avec n_j aussi les nombres $n_j + 1, \dots, n_j + j$, et $\mathcal{E}'_m \mathcal{A}'$ est vide.)

Il existe enfin un nombre n_k tel qu'on ait

$$(4') \quad \left\{ \begin{array}{l} P^{(n_k)}(F, W - \mathcal{A}') > 1 - \varepsilon, \quad P^{(n_k+n_{k-1})}(F, W - \mathcal{A}') > 1 - \varepsilon, \quad \dots, \\ P^{(n_k+\dots+n_1)}(F, W - \mathcal{A}') > 1 - \varepsilon. \end{array} \right.$$

D'autre part, pour presque tout point E, il existe un m tel que

$$P^m(E, \mathcal{A}') > \beta(1 - \varepsilon), \quad \dots, \quad P^{(m+n_k+\dots+n_1)}(E, \mathcal{A}') > \beta(1 - \varepsilon).$$

Soit K la probabilité pour que le point mobile se trouve à la $m^{\text{ième}}$ épreuve dans \mathcal{A}' , K_i la probabilité pour que le point se trouve à la $(m + n_k + \dots + n_{k+i})^{\text{ième}}$ épreuve dans \mathcal{A}' sans y avoir été à la $m^{\text{ième}}$, $(m + n_k)^{\text{ième}}$, ... $(m + n_k + \dots + n_{k+i-1})^{\text{ième}}$ épreuve. Alors (théorème des probabilités totales et composées) ⁽¹⁾, en tenant compte de (3), (4) et (5)

$$\begin{aligned} P^{(m+n_k+\dots+n_{k-i})}(E, \mathcal{A}') &= K\theta\varepsilon + K_0\theta\varepsilon + \dots + K_{i-1}\theta\varepsilon + K_i, \\ K_i &> P^{(m+n_k+\dots+n_{k-i})}(E, \mathcal{A}) - \varepsilon > \beta - 2\varepsilon, \\ 1 &\geq K + K_0 + K_1 + \dots + K_{k-1} > k(\beta - 2\varepsilon), \end{aligned}$$

k étant quelconque, ε arbitrairement petit, il résulte $\beta = 0$.

C. Q. F. D.

THÉORÈME V. — *Si les conditions du théorème IV ne sont pas satisfaites, il existe une suite descendante d'ensembles $\{\mathcal{E}_i\}$, convergeant vers l'ensemble vide, telle que pour tout point E de \mathcal{H} on ait*

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i) &= 1, \\ P^{(n)}(E, \mathcal{H} - \mathcal{E}_i) &\rightarrow 0, \quad \text{si } n \rightarrow \infty \text{ quel que soit } i. \end{aligned}$$

(1) θ désignant toujours des quantités variables comprises entre 0 et 1.

Démonstration. — Si les conditions du théorème IV ne sont pas satisfaites il existe une suite descendante d'ensembles $\mathcal{E}'_i \rightarrow 0$ telle que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{P(\mathcal{E}'_i)} \neq 0.$$

Les ensembles \mathcal{E}'_i étant absolument essentiels [autrement $\overline{P(\mathcal{E}'_i)}$ serait = 0], il existe au moins un sous-ensemble cyclique $\overline{\mathcal{J}}_i$ tel que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \overline{P(\mathcal{E}'_i \overline{\mathcal{J}}_i)} \neq 0.$$

Renonçons à l'hypothèse $D = 1$. Il résulte des lemmes précédents (cf. aussi la démonstration du théorème IV) qu'il existe une suite descendante d'ensembles $\{\mathcal{E}''_i\}$ contenus dans $\overline{\mathcal{J}}_i$ et convergeant vers l'ensemble vide tels que

$$(1) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P^{nD}(E, \mathcal{E}''_i) = 1,$$

pour presque tout E de $\overline{\mathcal{J}}_i$.

Il existe dès lors un ensemble stochastiquement fermé \mathcal{X}' , tel que pour tout point de $\overline{\mathcal{J}}_i \mathcal{X}'$, on ait (1). Si maintenant F est un point quelconque de $\overline{\mathcal{J}}_l \mathcal{X}'$, on obtient immédiatement, en tenant compte du mouvement cyclique et de l'équation

$$P^n(F, \mathcal{E}''_i) = \int_{\mathcal{X}'} P^{nD}(\sigma, \mathcal{E}''_i) P^m(F, d\alpha_\sigma) = \int_{\overline{\mathcal{J}}_l \mathcal{X}'} P^{nD}(\sigma, \mathcal{E}''_i) P^m(F, d\alpha_\sigma),$$

[$n = n'D + m$, $m \equiv (l - l') \pmod{d}$],

que

$$(2) \quad P^{(n)}(F, \mathcal{E}''_i) \rightarrow 1, \quad \text{si } n \equiv (l - l') \pmod{d}.$$

Soit alors \mathcal{E}'''_i l'ensemble de $(\overline{\mathcal{J}}_1 + \dots + \overline{\mathcal{J}}_d) \mathcal{X}'$ où

$$(3) \quad P^{(m)}(E, \mathcal{E}''_i) > \frac{1}{2}, \quad \text{pour un } m \leq d.$$

Comme $P^{(m)}(E, \mathcal{E})$ est complètement additif, on a

$$\mathcal{E}'''_i \supset \mathcal{E}'''_{i+1} \quad \text{avec } \lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{E}'''_i \text{ vide.}$$

Je dis qu'on a

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}'''_i) \rightarrow 1, \quad \text{pour tout point de } (\overline{\mathcal{J}}_1 + \dots + \overline{\mathcal{J}}_d) \mathcal{X}'.$$

En effet, E appartenant à $\overline{\mathcal{J}}_l \mathcal{H}$, déterminons u par la condition.

$$u \equiv (l - l') \pmod{d}, \quad u - d \leq n \leq u.$$

Il résulte de (2) et (3) que

$$1 - \varepsilon < P^{(u)}(E, \mathcal{E}_i) < \frac{1}{2} P^{(n)}(E, \mathcal{H}' - \mathcal{E}_i''') + P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i'''),$$

d'où résulte

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i''') \rightarrow 1, \quad \text{quels que soient } i \text{ et } E \in (\overline{\mathcal{J}}_1 + \dots + \overline{\mathcal{J}}_d) \mathcal{H}'.$$

$\mathcal{H} - (\overline{\mathcal{J}}_1 + \dots + \overline{\mathcal{J}}_d) \mathcal{H}'$ étant inessentiel ou essentiel impropre, on pourra écrire

$$\mathcal{H} - (\overline{\mathcal{J}}_1 + \dots + \overline{\mathcal{J}}_d) \mathcal{H}' = \mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2 + \dots + \mathcal{O}_n + \dots,$$

où \mathcal{O}_i est inessentiel ou vide. Le lecteur vérifiera facilement que

$$\lim_n P^{(n)}(E, \mathcal{E}_i) = 1, \quad \text{si } \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_i''' + \mathcal{O}_{i+1} + \mathcal{O}_{i+2} + \dots, \quad \text{quel que soit } E \in \mathcal{H}'.$$

Le théorème est donc démontré.

IV. — Compléments divers. Étude du mouvement dans les autres cas, moyennes de Cesàro, mesures invariantes, etc.

21. a). Nous avons étudié l'allure asymptotique des $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ quand E et \mathcal{E} font partie d'un même ensemble indécomposable absolument essentiel.

Si E se trouve à l'intérieur d'un ensemble stochastiquement fermé essentiel impropre \mathcal{L} , on a

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}'_1 + \mathcal{L}'_2 + \dots,$$

\mathcal{L}'_i étant inessentiel et visiblement,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{L}'_i) = 0, \quad \text{quel que soit } i$$

et

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{L}'_i + \mathcal{L}'_{i+1} + \dots) = 1.$$

Si \mathcal{E} est un ensemble quelconque ayant une partie commune avec une infinité d'ensembles \mathcal{L}'_i , nous ne pouvons généralement rien dire sur l'allure asymptotique des $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$.

b). Pour éviter des complications d'écriture (d'ailleurs pas très importantes) nous nous bornons maintenant au cas où l'on se trouve dans chaque ensemble stochastiquement fermé dans le cas normal. Soit $\{\mathcal{G}_\eta\}$ la famille des ensembles finals. Supposons que E soit quelconque et $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}_\eta$. Désignons par $\mathcal{J}_1(\eta), \dots, \mathcal{J}_d(\eta)$ les sous-ensembles cycliques de \mathcal{G}_η , le nombre d de ces ensembles dépendra d'ailleurs en général de η . Soit

$$\Pr'[\mathbf{E}, \mathcal{J}_i(\eta)] = \lim_{n \rightarrow \infty} P^{nd(\eta)}[\mathbf{E}, \mathcal{J}_i(\eta)].$$

Comme

$$P^{nd(\eta)}[\mathbf{F}, \mathcal{J}_i(\eta)] = 1, \quad \text{si } \mathbf{F} \in \mathcal{J}_i(\eta),$$

$P^{nd(\eta)}[\mathbf{E}, \mathcal{J}_i(\eta)]$ est une fonction croissante de n et $\Pr'[\mathbf{E}, \mathcal{J}_i(\eta)]$ existe donc. Distinguons deux cas : suivant que l'hypothèse du théorème IV est satisfaite ou ne l'est pas. Dans le premier cas on aura

$$P^n(\mathbf{E}, \mathcal{E}) \approx \sum_1^{d(\eta)} \Pr'[\mathbf{E}, \mathcal{J}_{l_n}(\eta)] P_{l,\eta}(\mathcal{E}) = \sum \Pr'[\mathbf{E}, \mathcal{J}_{l_n}(\eta)] P_{l,\eta}(\mathcal{E})$$

où

$$(2) \quad P_{l,\eta}(\mathcal{E}) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^{nd(\eta)}(\mathbf{F}, \mathcal{E}), \quad \text{si } \mathbf{F} \in \mathcal{J}_l(\eta),$$

et où $\mathcal{J}_{l_n}(\eta)$ est le sous-ensemble cyclique de \mathcal{G}_η dont l'indice est déterminé par

$$n \equiv (l - l_n) \pmod{d(\eta)}.$$

Si \mathcal{E} appartient à un sous-ensemble cyclique déterminé $\mathcal{J}_l(\eta)$, on aura plus simplement

$$(4) \quad P^{(n)}[\mathbf{E}, \mathcal{E}] \approx \Pr'[\mathbf{E}, \mathcal{J}_{l_n}(\eta)] P_{l,\eta}(\mathcal{E}).$$

Envisageons maintenant le cas où l'hypothèse du théorème IV n'est pas vérifiée dans \mathcal{G}_η . Alors

$$\mathcal{G}_\eta = \sum \mathcal{C}_i$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(\mathbf{F}, \mathcal{C}_i) \rightarrow 0, \quad \text{si } \mathbf{F} \in \mathcal{G}_\eta.$$

Si l'ensemble \mathcal{E} n'appartient qu'à un nombre fini de \mathcal{C}_i , on aura

$$P^{(n)}(\mathbf{E}, \mathcal{E}) \rightarrow 0, \quad \text{quel que soit } \mathbf{E}.$$

Si \mathcal{E} coïncide avec $\mathcal{J}_l(\eta)$ (à un nombre fini de \mathcal{C}_i près), on aura

$$P^{(n)}(\mathbf{E}, \mathcal{E}) \approx P^{(n)}[\mathbf{E}, \mathcal{J}_l(\eta)]$$

et si \mathcal{E} coïncide avec \mathcal{G}_η [à un ensemble avec $P^{(n)}(F, R) \rightarrow 0$ près] on aura

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \approx P^{(n)}(E, \mathcal{G}_\eta) \rightarrow \Pr[E, \mathcal{G}_\eta],$$

où

$$\Pr[E, \mathcal{G}_\eta] = \sum_{l=1}^{d(\eta)} \Pr'[E, \mathcal{J}_l(\eta)].$$

Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}_\eta$ est quelconque, on ne saura rien dire sur $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$.

c. On passe de là facilement au cas où \mathcal{E} est contenu dans une infinité dénombrable d'ensembles finals ou stochastiquement fermés et essentiels impropres. Si \mathcal{E} appartient à une infinité non dénombrable d'ensembles finals \mathcal{G}_η , à l'intérieur desquels on se trouve toujours dans le cas du théorème IV, on peut encore obtenir des résultats en faisant des hypothèses de mesurabilité supplémentaires.

Supposons que la réunion S_ρ des ensembles finals contenant ρ sous-ensembles cycliques soit mesurable quel que soit ρ . Soit $\bar{K}^{(m)}(E, \mathcal{U})$ la probabilité pour que le point passe de F dans $\mathcal{U} \subset \sum S_\rho$ en m épreuves

sans avoir été dans $\sum_{\rho} S_\rho$ avant la $m^{\text{ième}}$ épreuve

$$\bar{K}^{(1)}(E, \mathcal{U}) = P^{(1)}(E, \mathcal{U}), \quad \bar{K}^{(m)}(E, \mathcal{U}) = \int_{W - \sum S_\rho} P^{(1)}(F, \mathcal{U}) P^{(m-1)}(E, d\alpha_F).$$

Nous pouvons écrire, puisque $\mathcal{E} \subset \sum S_\rho$,

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) = \sum_{m=1}^n \sum_{\rho=1}^{\infty} \int_{S_\rho} P^{(n-m)}(F, \mathcal{E}) \bar{K}^{(m)}(E, d\alpha_F).$$

Évaluons

$$\sum_{m=1}^n \int_{S_\rho} P^{(n-m)}(F, \mathcal{E}) \bar{K}^{(m)}(E, d\alpha_F).$$

Nous pouvons prendre m_0 , tel que la probabilité pour que le point mobile parti de E se trouve encore à la $m_0^{\text{ième}}$ épreuve à l'extérieur de la réunion des ensembles finals et passe ultérieurement dans cette réunion soit $< \epsilon$. Supposons $m > m_0$ et envisageons

$$\sum_{l=1}^{md} \int_{S_d} P^{(n-l)}(F, \mathcal{E}) K^{(l)}(F, d\alpha_F) = \int_{S_d} P^{(n-md)}(F, \mathcal{E}) P^{md}(F, d\alpha_F).$$

Laissons m fixe et faisons tendre n vers infini, par valeurs $\equiv n_1 \pmod{d}$

$$n = n_1 + md, \quad \dots, \quad n_1 + md + ld, \quad \dots$$

Pour chaque point de S_d , si $l \rightarrow \infty$, $P^{(n_1+md+ld)}(F, \mathcal{E})$ tend vers une limite, indépendante de m , soit $P_{n_1}(F, \mathcal{E})$, mesurable par rapport à F . Il en résulte, $P^{md}(E, \mathcal{E})$ étant complètement additive, que

$$\int_{S_d} P^{(n-md)}(F, \mathcal{E}) P^{(md)}(E, d\alpha_F) \rightarrow \int_{S_d} P_{n_1}(F, \mathcal{E}) P^{(md)}(E, d\alpha_F).$$

D'autre part,

$$P_{n_1}(F, \mathcal{E}) = P_{l_{n_1}, \eta}(\mathcal{E}), \quad \text{si } F \in \mathcal{J}_l(\eta),$$

où

$$n_1 \equiv l_{n_1} - l \pmod{d}.$$

On a donc

$$\int_{S_d} P_{n_1}(F, \mathcal{E}) P^{(md)}(E, d\alpha_F) = \int_{S_d} P_{l_{n_1}, \eta}(\mathcal{E}) P^{(md)}[E, d\mathcal{J}_l(\eta)],$$

cette intégrale étant la limite (existante) de

$$\sum_{i=1}^t \frac{i}{t} P^{md}[E, \alpha_{i,t}],$$

$\alpha_{i,t}$ étant la réunion des ensembles $\mathcal{J}_l(\eta)$ pour lesquels

$$\frac{i}{t} \leq P_{l_{n_1}, \eta}(\mathcal{E}) < \frac{i+1}{t};$$

d'autre part, $P^{(md)}(E, \alpha_{i,t})$ est une fonction non décroissante de m , soit $\text{Pr}'[E, \alpha_{i,t}]$ sa limite, on aura alors

$$\int_{S_d} P_{l_{n_1}, \eta}(\mathcal{E}) P^{md}[E, d\mathcal{J}_l(\eta)] \approx \int_{S_d} P_{l_{n_1}, \eta}(\mathcal{E}) \text{Pr}'[E, d\mathcal{J}_l(\eta)].$$

On déduit de cela immédiatement

$$(5) \quad \boxed{P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \approx \sum_{a=1}^{\infty} \int_{S_d} P_{l_{n_1}, \eta}(\mathcal{E}) \text{Pr}'[E, d\mathcal{J}_l(\eta)].}$$

Nous répétons cette formule est valable si les ensembles S_d sont mesu-

rables, si $\mathcal{E} \subset \sum_{d=1}^{\infty} S_d$, et si dans tout ensemble final on est dans le cas du théorème IV.

d. Or admettons, (Hypothèse III), que pour tout E

$$(6) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(F, \mathcal{E}_l) = 0,$$

quelle que soit la suite descendante d'ensembles \mathcal{E}_l dont la limite est vide et que les S_d soient mesurables. Alors on a (5) quel que soit \mathcal{E} .

Démonstration. — Nous savons que cette condition suffit pour qu'on se trouve dans tout ensemble indécomposable dans le cas normal, et même dans tout ensemble final dans le cas du théorème IV. Comme nous supposons de plus que les S_d soient mesurables, l'équation (5) aura bien lieu pour tout \mathcal{E} appartenant à la réunion des ensembles finals. L'hypothèse est incompatible avec l'existence d'ensembles stochastiquement fermés essentiels impropres [cf. formule (1)]. Si l'ensemble $W - \sum S_d$ était essentiel on aurait la formule (1), ce qui est aussi incompatible avec notre hypothèse. Donc

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow 0, \quad \text{si } \mathcal{E} \subset W - \sum S_d.$$

$P_{l,\eta}(\mathcal{E})$ étant nul, si $\mathcal{E} \subset W - \sum S_d$, on aurait bien la formule (5) même si $\mathcal{E} \subset W - \sum S_d$. En vertu de l'additivité de $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$, elle aura lieu pour tout \mathcal{E} .

Nous voyons que dans ce cas pour tout E et \mathcal{E} , $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ est, en fonction de n, une fonction qui est asymptotiquement équivalente à une fonction $Pr^{(n)}(E, \mathcal{E})$ qui est la somme d'une série de termes périodiques en n (à périodes entières). Les $Pr^{(n)}(E, \mathcal{E})$ sont d'autre part, comme il résulte de leur expression et du corollaire du théorème IV, complètement additives en fonction de \mathcal{E} . On voit d'ailleurs immédiatement que les hypothèses indiquées sont les plus larges sous lesquelles la formule (5) est vérifiée quels que soient E et \mathcal{E} (sauf peut-être l'hypothèse de mesurabilité de S_d).

Remarquons encore que, si nous n'avons donné aucun résultat sur

l'allure des $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ lorsque \mathcal{E} appartient à une infinité non dénombrable d'ensembles stochastiquement fermés essentiels impropres, il se pourrait quand même que dans certains cas des régularités se présentent.

22. *La convergence en moyenne de Cesàro.* — Nous avons démontré que (dans le cas général pour des ensembles d'une certaine structure, sous l'hypothèse III, pour tout E et \mathcal{E}) $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ tend soit vers une limite ou est asymptotiquement périodique, soit est équivalent asymptotiquement à une série de termes périodiques en n . Il en résulte immédiatement que dans ces cas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P^{(1)}(E, \mathcal{E}) + \dots + P^{(n)}(E, \mathcal{E})}{n} = \lim \Pi^{(n)}(E, \mathcal{E}) = \Pi(E, \mathcal{E})$$

existe.

Plaçons-nous à l'intérieur d'un ensemble final \mathcal{G}_η à l'intérieur duquel la condition (6) est applicable. On vérifie immédiatement que, si $E \in \mathcal{G}_\eta$,

$$\Pi^{(n)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow \frac{1}{d(\eta)} [P_{1,\eta}(\mathcal{E}) + \dots + P_{d,\eta}(\mathcal{E})].$$

Soit

$$\Pi_\eta(\mathcal{E}) = \frac{1}{d(\eta)} [P_{1,\eta}(\mathcal{E}) + \dots + P_{d,\eta}(\mathcal{E})];$$

$\Pi_\eta(\mathcal{E})$ est complètement additive, avec $\Pi_\eta(\mathcal{G}_\eta) = 1$, $\Pi_\eta(W - \mathcal{G}_\eta) = 0$ et $\Pi_\eta(\mathcal{E}) > 0$ si $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}_\eta$ est essentiel. La limite $\Pi_\eta(\mathcal{E})$ de $\Pi^{(n)}(E, \mathcal{E})$ si $E \in \mathcal{G}_\eta$ est indépendante de la position initiale dans \mathcal{G}_η .

Si E est un point quelconque et $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}_\eta$ on voit immédiatement que

$$\Pi^{(n)}(E, \mathcal{E}) \rightarrow \Pr[E, \mathcal{G}_\eta] \Pi_\eta(\mathcal{E}), \quad \text{si } E \in \mathcal{G}_\eta.$$

Si nous nous plaçons maintenant dans le cas où (6) est vérifiée pour tout point E , on vérifie sans peine que, quels que soient E et \mathcal{E} , on a

$$\Pi(E, \mathcal{E}) = \int_W \Pi_\eta(\mathcal{E}) \Pr[E, d\mathcal{G}_\eta],$$

cette intégrale étant définie comme l'intégrale (5).

23. *Les mesures invariantes.* — Disons qu'une fonction complètement additive d'ensembles définie sur W , $f(\mathcal{E})$, est une mesure invariante si $f(\mathcal{E})$ est non négative et bornée et si quel que soit \mathcal{E}

$$(7) \quad f(\mathcal{E}) = \int_W P^{(1)}(E, \mathcal{E}) f(d\alpha_E).$$

On peut sans restriction supposer $f(W) = 1$, alors $f(\mathcal{E})$ peut être interprété comme distribution de probabilité initiale et le problème est de trouver une distribution initiale telle que les probabilités absolues

$$(8) \quad \int_W P^{(n)}(E, \mathcal{E}) f(d\alpha_E)$$

soient *stables*, c'est-à-dire indépendantes de n , $= f(\mathcal{E})$.

A l'intérieur d'un ensemble final on voit aisément que si la condition du théorème IV est satisfaite, $\Pi_\tau(\mathcal{E})$ est une mesure invariante et que c'est la seule (à un facteur près).

Dans le cas où l'hypothèse III du numéro s'applique, toute mesure invariante sera de la forme

$$\int_W \Pi(F, \mathcal{E}) f(d\alpha_F),$$

ou encore

$$\int_W \Pi_\tau(\mathcal{E}) \text{Pr}[d\mathcal{G}_\tau],$$

cette intégrale étant définie comme (5).

La forme des mesures invariantes étant établie et leur existence démontrée sous l'hypothèse III, passons au cas général. Si \mathcal{G}_τ est un ensemble final dans lequel l'hypothèse (6) n'est pas satisfaite en tenant compte de l'égalité

$$f(\mathcal{E}) = \int_W \Pi^{(n)}(E, \mathcal{E}) f(d\alpha_E),$$

on vérifie que $f(\mathcal{E})$ est nulle si $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}_\tau$. Donc dans ce cas il n'existe pas de mesure invariante affectant une valeur positive à \mathcal{G}_τ . Il n'en existe pas davantage à l'intérieur d'un ensemble stochastiquement fermé essentiel impropre, car de (8) résulte que $f(\mathcal{E}) = 0$ si \mathcal{E} est

inessentiel et comme $f(\mathcal{E})$ est par hypothèse complètement additif, on aura encore $f(\mathcal{E}) = 0$ si \mathcal{E} est essentiel impropre. Par contre il est très bien possible, et il est facile d'en donner des exemples, qu'il existe une mesure invariante, c'est-à-dire une distribution de probabilité initiale, affectant toute la probabilité à un ensemble qui est la réunion d'une infinité non dénombrable d'ensembles stochastiquement fermés non absolument essentiels.

24. *Constantes fondamentales de module 1.* — On peut maintenant envisager les équations

$$(9) \quad \begin{cases} \psi(\mathcal{E}) = \lambda \int_{\mathbb{W}} P^{(1)}(\mathbb{F}, \mathcal{E}_d) \psi(d\alpha_{\mathbb{F}}), \\ \varphi(\mathbb{E}) = \lambda \int_{\mathbb{W}} \varphi(\mathbb{F}) P^{(1)}(\mathbb{E}, d\alpha_{\mathbb{F}}), \end{cases}$$

où $\psi(\mathcal{E})$ est complètement additif non identiquement nul, borné, $\varphi(\mathbb{E})$ borné. $\psi(\mathcal{E})$ satisfait à l'équation

$$\psi(\mathcal{E}) = \lambda^n \int_{\mathbb{W}} P^{(n)}(\mathbb{F}, \mathcal{E}) \psi(d\alpha_{\mathbb{F}}),$$

$\varphi(\mathbb{E})$ à une équation analogue. On en déduit immédiatement que

$$\lambda \geq 1,$$

car $\int_{\mathbb{W}} P^{(n)}(\mathbb{E}, \mathcal{E}) \psi(d\alpha_{\mathbb{F}})$ est borné. Envisageons uniquement les valeurs de λ de module 1. A l'intérieur d'un ensemble final [c'est-à-dire si l'on substitue dans (9) \mathcal{G} à \mathbb{W}], on voit facilement que, si l'on se trouve dans le cas du théorème IV, et si

$$\lambda^d = 1$$

(d étant le nombre des sous-ensembles cycliques de \mathcal{G}) les fonctions $\varphi(\mathbb{E})$, $\psi(\mathcal{E})$ existent. $\psi(\mathcal{E})$ sera une combinaison linéaire des $P_i(\mathcal{E})$, $\varphi(\mathbb{E})$ sera constant dans chaque sous-ensemble cyclique. Pour toutes les autres valeurs de λ , $\varphi(\mathbb{E})$ et $\psi(\mathcal{E})$ seront nulles. Si l'on ne se trouve plus dans le cas du théorème IV, $\varphi(\mathbb{E})$ aura encore la même

forme, mais $\psi(\mathcal{E})$ sera identiquement nul. On a le même résultat dans le cas d'un ensemble indécomposable absolument essentiel quelconque.

Si nous envisageons un ensemble stochastiquement fermé essentiel impropre, les fonctions $\psi(\mathcal{E})$ sont $\equiv 0$ pour tout λ de module 1, pour $\lambda = 1$ on peut toujours prendre $\varphi(\mathcal{E}) = 1$ et l'on peut donner des exemples où $\varphi(\mathcal{E})$ existe, c'est-à-dire n'est pas $\equiv 0$ pour toute valeur de λ de la forme $e^{2i\pi \frac{n}{m}}$.

Bornons-nous maintenant aux $\psi(\mathcal{E})$; on vérifie facilement que λ étant de module 1, $\psi(\mathcal{E}) = 0$, si \mathcal{E} est essentiel impropre. S'il n'existe donc qu'une infinité dénombrable d'ensembles indécomposables ou stochastiquement fermés essentiels impropres (par exemple dans le cas de l'hypothèse du n° 9), $\psi(\mathcal{E})$ sera $\equiv 0$ pour tout λ de module 1 lorsque \mathcal{E} est extérieur à ceux des ensembles indécomposables pour lesquels on ne se trouve pas dans le cas du théorème IV. Si $d_1, \dots, d_\eta, \dots$ sont le nombre des sous-ensembles cycliques de $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_\eta, \dots$, λ n'est pas racine d'une équation $\lambda^{d_\eta} = 1$, quand $\psi(\mathcal{E})$ sera $\equiv 0$, et si λ est racine d'une de ces équations, $\psi(\mathcal{E})$ sera une combinaison linéaire de ceux des $P_{l,\eta}(\mathcal{E})$ ($l = 1, \dots, d_\eta$), pour lesquels $\lambda^{d_\eta} = 1$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où l'hypothèse (6) est vérifiée. On vérifie immédiatement que $\psi(\mathcal{E})$ est identiquement nulle si λ n'est pas racine d'une équation $\lambda^{d_\eta} = 1$, et dans le cas contraire que $\psi(\mathcal{E})$ est une intégrale par rapport à η des fonctions $\psi_\eta(\mathcal{E})$, donc de combinaisons des $P_{l,\eta}(\mathcal{E})$.

