

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN DIEUDONNÉ

Sur les espaces uniformes complets

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 56 (1939), p. 277-291

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1939_3_56__277_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES

ESPACES UNIFORMES COMPLETS

PAR J. DIEUDONNÉ.

1. **Préliminaires.** — Les notions et résultats essentiels, dont il est fait usage dans ce travail, proviennent pour la plupart du mémoire de A. Weil sur les *espaces uniformes* ⁽¹⁾ et des notes de H. Cartan sur les *filtres* ⁽²⁾; nous commencerons par les rappeler brièvement, en les complétant sur quelques points et en renvoyant, pour les démonstrations, aux ouvrages précités ⁽³⁾.

Une *structure topologique*, ou plus brièvement une *topologie*, sur un ensemble E , est définie par la donnée d'une famille \mathcal{O} de sous-ensembles de E satisfaisant aux *axiomes des ensembles ouverts* ⁽⁴⁾, et qui sont dits *ensembles ouverts* de cette topologie. Si \mathcal{T} et \mathcal{T}' sont deux topologies sur un même ensemble E , définies respectivement par les familles d'ensembles ouverts \mathcal{O} et \mathcal{O}' , \mathcal{T}' est dite *plus fine* que \mathcal{T} si $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$; il revient au même de dire que tout voisinage d'un point quelconque de E , dans la topologie \mathcal{T} , est encore un voisinage de ce point dans la topologie \mathcal{T}' .

Une *structure uniforme*, sur un ensemble E , est définie par la donnée d'un *filtre* \mathcal{S} sur $E \times E$, satisfaisant aux axiomes :

U_1 . L'intersection des ensembles de \mathcal{S} est la diagonale Δ .

⁽¹⁾ A. WEIL, *Act. scient. et industr.*, n° 531, Paris, 1937.

⁽²⁾ H. CARTAN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 203, 1937, p. 595 et 777.

⁽³⁾ On trouvera un exposé didactique et détaillé de ces questions dans la partie du *Traité d'Analyse* de N. Bourbaki consacrée à la Topologie générale, qui paraîtra prochainement. La terminologie et les notations utilisées ici s'apparentent à celles de cet Ouvrage.

⁽⁴⁾ A. WEIL, *loc. cit.*, p. 4.

U_{II} . Quel que soit $V \in \mathcal{E}$, il existe $W \in \mathcal{E}$ tel que $WW \subset V$. Les ensembles de \mathcal{E} sont dits *entourages* de la structure uniforme définie par \mathcal{E} . Si \mathcal{U} et \mathcal{U}' sont deux structures uniformes sur un même ensemble E , définies respectivement par les filtres d'entourages \mathcal{E} et \mathcal{E}' , \mathcal{U}' est dite *plus fine* que \mathcal{U} si $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$, c'est-à-dire si tout entourage de \mathcal{U} est encore un entourage de \mathcal{U}' .

D'une structure uniforme \mathcal{U} sur un ensemble E , on *déduit* une structure topologique, en prenant pour voisinages d'un point x les ensembles $V(x)$, où V parcourt le filtre des entourages de \mathcal{U} . On dit aussi que \mathcal{U} est *compatible* avec une topologie \mathfrak{T} sur E si \mathfrak{T} est identique à la topologie déduite de \mathcal{U} . Des structures uniformes *distinctes* peuvent être compatibles avec la *même* topologie; c'est là un fait qui joue un rôle essentiel dans ce qui suit. En tout cas, si \mathcal{U} et \mathcal{U}' sont deux structures uniformes sur E telles que \mathcal{U}' soit *plus fine* que \mathcal{U} , la topologie déduite de \mathcal{U}' est *plus fine* que celle déduite de \mathcal{U} (ce qui n'exclut naturellement pas qu'elle puisse lui être identique).

On appelle *pseudo-métrique* sur un ensemble E une fonction numérique $f(x, y)$ définie sur $E \times E$, et satisfaisant aux conditions $f(x, y) \geq 0$, $f(x, y) \leq f(x, z) + f(y, z)$, et $f(x, x) = 0$; on en tire $f(x, y) = f(y, x)$; il n'est pas exclu que $f(x, y) = 0$ pour des couples (x, y) tels que $x \neq y$; on dit que f est une *métrique* lorsque ce fait ne peut se produire.

Soit alors Φ une famille quelconque (finie ou non) de pseudo-métriques $f_i(x, y)$ sur E ; pour tout système d'un nombre fini d'indices $i_k (k = 1, 2, \dots, n)$ et tout système de n nombres $a_k > 0$, considérons l'ensemble des couples (x, y) satisfaisant aux n inégalités $f_{i_k}(x, y) < a_k$; on vérifie sans peine que la famille de ces ensembles (pour tous les choix possibles du nombre n , des indices i_k et des nombres a_k) forme la *base* d'un filtre d'entourages, pourvu que la condition suivante soit réalisée : quel que soit le couple (x, y) tel que $x \neq y$, il existe un indice i tel que $f_i(x, y) \neq 0$. Ainsi, toute famille Φ de pseudo-métriques satisfaisant à cette condition définit une structure uniforme \mathcal{U} sur E ; si Φ' est une seconde famille de pseudo-métriques telle que $\Phi \subset \Phi'$, il est clair que Φ' définit une structure uniforme \mathcal{U}' *plus fine* que \mathcal{U} .

L'importance de ce mode de définition provient du fait que *toute*

structure uniforme peut être obtenue de cette manière ⁽¹⁾; on déduit aisément de ce théorème que, pour qu'il existe une structure uniforme compatible avec la topologie d'un espace E (ce qu'on exprime encore en disant que E est *uniformisable*), il faut et il suffit que E soit un espace de Hausdorff et que la condition suivante soit vérifiée : quel que soit $x \in E$, et quel que soit le voisinage V de x , il existe une fonction à valeurs réelles comprises entre 0 et 1, définie et continue dans E , prenant la valeur 0 en x , et la valeur 1 en dehors de V .

Remarquons encore que, si une structure uniforme \mathcal{U} est définie sur un ensemble E par une famille Φ de pseudo-métriques, toute pseudo-métrique $f_i(x, y)$ de la famille Φ est continue (et même uniformément continue) sur $E \times E$. Inversement, si E est muni d'une topologie \mathcal{T} , et si on y définit une structure uniforme \mathcal{U} par une famille Φ de pseudo-métriques *continues* sur $E \times E$ (relativement à la topologie \mathcal{T}), \mathcal{T} est *plus fine* que la topologie déduite de \mathcal{U} . Si E est *uniformisable*, et si Φ_0 est la famille de *toutes* les pseudo-métriques continues sur $E \times E$, Φ_0 définit une structure uniforme \mathcal{U}_0 compatible avec la topologie de E , et qui est *la plus fine* de toutes les structures uniformes ayant cette propriété; on l'appelle structure *universelle* sur E , en raison de la propriété suivante : toute fonction continue sur E , prenant ses valeurs dans un espace uniforme E' , est uniformément continue dans E , relativement à la structure uniforme \mathcal{U}_0 ⁽²⁾.

Terminons ces généralités en rappelant ce qu'on entend par espace uniforme *complet*. E étant muni d'une structure uniforme \mathcal{U} , un filtre \mathcal{F} sur E est dit *filtre de Cauchy* pour cette structure si, quel que soit l'entourage V de \mathcal{U} , il existe un ensemble A de \mathcal{F} tel que $A \times A \subset V$ (ensembles «aussi petits qu'on veut»). On dit que E est *complet* si tout filtre de Cauchy sur E est *convergent* (relativement à la topologie déduite de \mathcal{U}). Si E n'est pas complet, on démontre ⁽³⁾ qu'on peut toujours considérer E comme un sous-espace partout dense d'un espace complet \bar{E} , défini d'une manière unique par la donnée de la structure uniforme de E , et qu'on appelle l'espace *complété* de E .

⁽¹⁾ A. WEIL, *loc. cit.*, p. 15. La forme sous laquelle ce résultat est présenté ici, à l'aide de la notion de pseudo-métrique, est due à H. Cartan.

⁽²⁾ *Ibid.*, p. 16.

⁽³⁾ *Ibid.*, p. 19.

2. **Résumé du mémoire.** — A la fin de son Mémoire précité (*loc. cit.*, p. 38), A. Weil s'exprime en ces termes : « ... notre théorie conduit naturellement à se demander quels sont les espaces topologiques susceptibles d'une structure uniforme pour laquelle ils soient complets ». Cet article est consacré à l'exposé de quelques résultats relatifs au problème ainsi posé.

Au paragraphe 3 est développée une méthode permettant d'obtenir des conditions *suffisantes* pour qu'il existe une structure d'espace complet compatible avec la topologie d'un espace (uniformisable) E ; ces conditions sont en particulier vérifiées lorsque E est *métrisable*. Partant de ce dernier résultat, on en déduit des critères *nécessaires et suffisants* au paragraphe 4; ces critères sont malheureusement peu maniables.

Au paragraphe 5, par une méthode analogue à celle du paragraphe 3, on montre qu'il existe des espaces *non normaux* (et *a fortiori* non métrisables) susceptibles d'être munis d'une structure d'espace complet.

Enfin, ces résultats seraient évidemment dénués d'intérêt si *tout* espace uniformisable pouvait être muni d'une structure d'espace complet; mais il n'en est rien, comme le montre l'étude (faite au paragraphe 6) d'un espace localement compact considéré par A. Tychonoff ⁽¹⁾.

Tout cela est évidemment loin de constituer une solution satisfaisante du problème posé par A. Weil. S'il semble douteux qu'on puisse donner une caractérisation topologique simple des espaces susceptibles d'une structure d'espace complet, il subsiste néanmoins bien des questions intéressantes que nous n'avons pu élucider; en particulier, la question de savoir si tout espace *normal* est susceptible d'une telle structure, reste ouverte ⁽²⁾.

3. Le point de départ des raisonnements qui vont suivre est la remarque suivante : soient \mathcal{U} et \mathcal{U}' deux structures uniformes compatibles avec la topologie d'un espace E , et supposons que \mathcal{U}' soit *plus fine* que \mathcal{U} ; dans ces conditions, tout filtre de Cauchy relative-

(1) A. TYCHONOFF, *Math. Ann.*, t. 102, 1930, p. 553.

(2) (Note ajoutée pendant la correction des épreuves). Depuis la rédaction de ce travail, j'ai pu montrer qu'il existe des espaces *normaux* (et même *complètement normaux*) non susceptibles d'une structure d'espace complet (*C. R. Acad. Sc.*, 209, 1939, p. 145).

ment à la structure \mathcal{U}' est encore un filtre de Cauchy relativement à la structure \mathcal{U} ; d'une manière plus imagée, on peut dire que, lorsqu'on remplace la structure \mathcal{U} par une structure uniforme plus fine, on *diminue* le nombre des filtres de Cauchy.

Soit alors E un espace uniformisable; par hypothèse, il existe au moins une structure uniforme \mathcal{U} compatible avec la topologie de E . Supposons qu'avec cette structure, E ne soit pas complet, autrement dit qu'il existe des filtres de Cauchy (relatifs à \mathcal{U}) non convergents; si l'on peut remplacer \mathcal{U} par une structure uniforme plus fine \mathcal{U}' , compatible avec la topologie de E , et telle qu'*aucun des filtres de Cauchy non convergents* de la structure \mathcal{U} ne soit un filtre de Cauchy pour la structure \mathcal{U}' , il ne restera plus, relativement à cette structure, que des filtres de Cauchy convergents, autrement dit, E sera *complet* lorsqu'on le munit de la structure \mathcal{U}' .

Pour obtenir des conditions rendant possible cette opération, remarquons qu'on peut toujours supposer la structure \mathcal{U} définie par une famille Φ de pseudo-métriques; nous chercherons à définir \mathcal{U}' par une famille Φ' de pseudo-métriques *contenant* Φ . Pour que \mathcal{U}' soit compatible avec la topologie de E , il faudra que les pseudo-métriques supplémentaires soient *continues* sur $E \times E$; mais cette condition sera aussi suffisante; car si elle est remplie, la topologie déduite de \mathcal{U}' sera *moins fine* que celle de E , puisque les pseudo-métriques définissant \mathcal{U}' sont continues; et d'autre part, comme \mathcal{U}' est plus fine que \mathcal{U} , la topologie déduite de \mathcal{U}' sera aussi *plus fine* que celle de E , ce qui montre qu'elle lui est identique.

Reste à définir les pseudo-métriques de $\Phi' - \Phi$ de sorte qu'elles éliminent les filtres de Cauchy non convergents de la structure \mathcal{U} . Or, E , muni de la structure \mathcal{U} , peut être considéré comme un sous-espace partout dense d'un espace complet \bar{E} ; et tout filtre de Cauchy \mathcal{F} non convergent sur E , est, sur \bar{E} , une base de filtre qui converge vers un point $x_0 \in \bar{E} - E$. Supposons alors qu'on puisse former, pour chaque point $x_0 \in \bar{E} - E$, une fonction numérique $f_{x_0}(x)$, définie et continue sur E , et qui *tende vers* $+\infty$ lorsque x tend vers x_0 en restant dans E ; prenons pour famille $\Phi' - \Phi$ la famille des pseudo-métriques $F_{x_0}(x, y) = |f_{x_0}(x) - f_{x_0}(y)|$ où x_0 parcourt $\bar{E} - E$; la structure \mathcal{U}'

définie par la famille Φ' de pseudo-métriques ainsi formée est une *structure d'espace complet*.

En effet, soit \mathcal{F} un filtre de Cauchy de la structure \mathcal{U} , non convergent sur E , et convergent sur \bar{E} vers un point x_0 ; si \mathcal{F} était un filtre de Cauchy pour la structure \mathcal{U}' , à tout nombre $a > 0$ correspondrait un ensemble $A \in \mathcal{F}$ tel que, si x et y sont deux points quelconques de A , $|f_{x_0}(x) - f_{x_0}(y)| < a$. Soit z un point de A , et posons $|f_{x_0}(z)| = b$; par hypothèse, il existe un voisinage V de x_0 tel qu'en tout point x de $V \cap E$, $f_{x_0}(x) > a + b$; donc V et A n'ont aucun point commun; mais par hypothèse, V contient un ensemble $B \in \mathcal{F}$, qui n'aurait donc aucun point commun avec A , contrairement au fait que \mathcal{F} est un filtre. Nous aboutissons donc à une contradiction, ce qui démontre la proposition.

Il nous faut maintenant trouver des conditions garantissant l'existence des fonctions f_{x_0} jouissant des propriétés précédentes. Montrons qu'on pourra trouver une telle fonction *s'il existe un système fondamental dénombrable de voisinages de x_0 dans \bar{E}* . En effet, soient V_n les voisinages de ce système; on peut toujours supposer que $V_{n+1} \subset V_n$ quel que soit n . Comme \bar{E} est uniformisable, il existe une fonction g_n , à valeurs réelles comprises entre 0 et 1, définie et continue sur \bar{E} , égale à 0 en x_0 , et à 1 en dehors de V_n . La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{2^n}$ est donc uniformément convergente sur \bar{E} , et a pour somme une fonction $g(x)$ continue dans \bar{E} , égale à 0 en x_0 , et *différente de 0* en tout point $x \neq x_0$; si l'on pose $f_{x_0}(x) = \frac{1}{g(x)}$ en tout point de E , on obtient bien une fonction répondant aux conditions posées. On a donc le théorème suivant :

S'il existe une structure uniforme \mathcal{U} compatible avec la topologie de E , et telle que, si \bar{E} est l'espace complété de E (muni de cette structure), tout point de $\bar{E} - E$ possède un système fondamental dénombrable de voisinages, alors on peut munir E d'une structure uniforme d'espace complet, plus fine que \mathcal{U} . On peut encore dire que, dans ces conditions, la structure universelle sur E est une structure d'espace complet.

On remarquera que, dans la démonstration précédente, on pourrait seulement supposer qu'il existe une famille dénombrable de voisinages de x_0 telle que l'intersection des voisinages de cette famille se réduise au point x_0 , mais sans que cette famille soit un système fondamental.

Une première application du théorème précédent est relative au cas où E est un espace *localement compact, dénombrable à l'infini*, c'est-à-dire réunion dénombrable d'ensembles compacts; en adjoignant à E un « point à l'infini » ω dont les voisinages sont les complémentaires des ensembles compacts de E , on obtient, d'après un théorème d'Alexandroff, un espace \bar{E} compact, donc complet, dans lequel le point ω possède un système fondamental dénombrable de voisinages. Il en résulte que E peut être muni d'une structure d'espace complet; on retrouve ainsi une proposition implicitement contenue dans un théorème de A. Weil ⁽¹⁾.

Un autre cas plus intéressant est celui où E est *métrisable* : si l'on munit E d'une structure d'espace métrique compatible avec sa topologie, l'espace complété \bar{E} correspondant est encore un espace métrique, dont tout point possède donc un système fondamental de voisinages; le théorème ci-dessus est applicable, et montre qu'on peut munir tout espace métrisable d'une structure uniforme d'espace complet, compatible avec sa topologie.

Il est naturel de se demander si cette structure d'espace complet peut être une structure d'espace métrique. Ce n'est pas toujours le cas, comme le montre l'exemple de l'ensemble Q des nombres rationnels, considéré comme un sous-espace de la droite : c'est un espace métrisable qui ne peut être muni d'une structure d'espace métrique complet; car, d'après un théorème de Baire, un espace métrique complet ne peut être réunion dénombrable d'ensembles partout non denses, ce qui est précisément le cas pour Q .

Au contraire, nous allons voir que, si E est un sous-espace d'un espace métrique complet E' , tel que $E' - E$ soit réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, on peut munir E d'une structure d'espace métrique complet, compatible avec sa topologie.

⁽¹⁾ *Loc. cit.*, p. 29.

Nous nous appuyerons sur un théorème de A. Weil, d'après lequel une structure uniforme dont le filtre des entourages a une base dénombrable est une structure d'espace métrique ⁽¹⁾; il en résulte immédiatement qu'une structure uniforme définie par une famille *dénombrable* de pseudo-métriques est une structure d'espace métrique.

Soient alors G_n ($n = 1, 2, \dots$) les ensembles fermés dont la réunion forme $E' - E$; $d(x, y)$ désignant une métrique définissant la structure de E' , $d(x, A)$ la distance d'un point x à un ensemble A , relativement à cette métrique, on voit immédiatement qu'on peut reprendre le raisonnement qui nous a conduit au théorème ci-dessus en définissant la structure uniforme \mathcal{U} sur E par la famille de pseudo-métriques Φ' composée d'une part de $d(x, y)$, et d'autre part, des pseudo-métriques $F_n(x, y) = \left| \frac{1}{d(x, G_n)} - \frac{1}{d(y, G_n)} \right|$; comme Φ' est dénombrable, \mathcal{U} est bien une structure d'espace métrique complet.

On peut encore dire que, dans un espace métrique complet, tout ensemble O_δ (intersection dénombrable d'ensembles ouverts) est un sous-espace susceptible de recevoir une structure d'espace métrique complet ⁽²⁾; l'exemple de l'ensemble des rationnels montre qu'il n'en est déjà plus de même pour les F_σ (réunions dénombrables d'ensembles fermés). Comme cas particuliers de cette proposition, on voit qu'on peut munir d'une structure d'espace métrique complet l'ensemble des *nombres irrationnels*, ou l'ensemble des *nombres transcendants* (considérés comme sous-espaces de la droite) : il serait intéressant de démontrer directement ces résultats en utilisant les propriétés arithmétiques de ces deux ensembles pour former sur eux une métrique d'espace complet ⁽³⁾.

4. Nous allons maintenant élargir les résultats du paragraphe précédent. Remarquons tout d'abord que *tout produit* (fini ou non) *d'espaces métrisables peut être muni d'une structure uniforme d'espace complet, compatible avec sa topologie* : il suffit de considérer la struc-

⁽¹⁾ *Loc. cit.* p. 16.

⁽²⁾ On retrouve ainsi un théorème dû à MM. ALEXANDROFF (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178, 1924, p. 185) et HAUSDORFF (*Fund. Math.*, t. 6, 1924, p. 146).

⁽³⁾ Pour l'ensemble des nombres irrationnels, on connaît une telle métrique, celle qui définit l'« espace de dimension 0 » de Baire (voir par exemple, HAUSDORFF, *Mengenlehre*).

ture produit des structures d'espaces complets dont on peut munir chacun des espaces facteurs; cette structure est en effet une structure d'espace complet ⁽¹⁾. Plus généralement, on peut encore munir d'une structure d'espace complet *tout sous-espace fermé d'un produit quelconque d'espaces métrisables*, puisque tout sous-espace fermé d'un espace complet est un sous-espace complet. Mais inversement, tout espace uniforme E est isomorphe à un sous-espace d'un produit d'espaces métriques ⁽²⁾, et si E est complet, ce sous-espace est nécessairement fermé. On peut donc dire qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace topologique puisse être muni d'une structure d'espace complet compatible avec sa topologie, est qu'il soit homéomorphe à un sous-espace fermé d'un produit d'espaces métrisables.

Cette condition, n'étant pas vérifiable directement lorsqu'on se donne la topologie d'un espace d'une manière quelconque (autrement qu'en le définissant comme sous-espace d'un produit d'espaces métrisables), est fort peu maniable. Nous allons en donner une autre équivalente, qui l'est peut-être un peu plus, et qu'on obtient par un raisonnement voisin du précédent.

Soit E un espace uniformisable, et munissons-le de sa structure universelle \mathcal{U}_0 , définie par la famille Φ_0 de toutes les pseudo-métriques $f_\alpha(x, y)$ continues sur $E \times E$; nous allons montrer que E est un espace uniforme isomorphe à un sous-espace d'un produit d'espaces métriques, par une autre méthode que celle de A. Weil. La relation d'équivalence $f_\alpha(x, y) = 0$ définit un partage de E en classes X_α , deux points x, y appartenant à une même classe quand $f_\alpha(x, y) = 0$; les classes X_α sont des ensembles fermés, en vertu de la continuité de f_α . De plus, sur l'ensemble E_α des classes X_α , la fonction $d_\alpha(X_\alpha, Y_\alpha)$, égale à la valeur de $f_\alpha(x, y)$ pour des points $x \in X_\alpha, y \in Y_\alpha$, est une *métrique*, définissant donc sur E_α une structure d'espace métrique (c'est de cette manière qu'on définit l'espace L^2 à partir de l'ensemble des fonctions de carré sommable). Considérons alors le produit $F = \prod_{\alpha} E_\alpha$ des espaces métriques E_α ; si $X_\alpha(x)$ désigne la

⁽¹⁾ Ce résultat découle aisément des définitions; on en trouvera une démonstration dans le *Traité* de N. Bourbaki.

⁽²⁾ A. WEIL, *loc. cit.*, p. 15.

classe d'indice α qui contient le point $x \in E$, faisons correspondre à x le point $x' = (X_\alpha(x))$ de coordonnées $X_\alpha(x)$ dans le produit F . Comme, lorsque $x \neq y$, il existe un α tel que $f_\alpha(x, y) \neq 0$, la correspondance précédente applique *biunivoquement* E sur une partie E' de F ; de plus, cette correspondance est un *isomorphisme* des structures uniformes de E et E' ; car un entourage de la structure de E' (induite par la structure uniforme de F) contient l'ensemble des couples (x', y') où $x' = (X_\alpha(x))$, $y' = (X_\alpha(y))$, tels que $d_\alpha[X_\alpha(x), X_\alpha(y)] < a_\alpha$ pour un nombre fini d'indices α et de nombres $a_\alpha > 0$; il correspond donc à l'ensemble des couples (x, y) de E tels que $f_\alpha(x, y) < a_\alpha$ pour les mêmes indices, et ces ensembles constituent une base du filtre d'entourages de E .

Cela étant, si E est susceptible d'être muni d'une structure d'espace complet, il est complet quand on le munit de la structure \mathcal{U}_0 ; il en est de même de E' , qui est donc *fermé* dans F . Mais inversement, si E' est fermé dans F , on peut le munir d'une structure d'espace complet, d'après le critère donné ci-dessus (cette structure est d'ailleurs plus fine que la structure induite sur E' par celle de F , donc elle est identique à cette structure induite puisque cette dernière est la structure universelle sur E').

Mais nous allons pouvoir transformer cette condition, en écrivant que le complémentaire de E' dans F est *ouvert*. Il est clair que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point (X_α) de F appartienne à E' est que l'intersection des ensembles X_α dans E ne soit pas vide; autrement dit, un point (X_α) de $F - E'$ est caractérisé par la condition que $\bigcap_\alpha X_\alpha$ soit *vide*. Or, un voisinage d'un point $X_\alpha \in E_\alpha$ contient l'ensemble des classes d'équivalence Y_α des points $y \in E$ tels que $f_\alpha(x, y) < a$ où $a > 0$ et $x \in X_\alpha$; appelons $V(X_\alpha, a)$ l'ensemble des points y satisfaisant à cette condition. Si l'on se rappelle qu'un voisinage d'un point (X_α) de F est le produit de voisinages d'un nombre fini de X_α et des E_α correspondant aux indices restants, il résulte de ce qui précède qu'en exprimant qu'un voisinage d'un point de $F - E'$ ne contient aucun point de E' , on obtient le critère suivant :

Pour que la structure universelle de l'espace uniformisable E soit une structure d'espace complet, il faut et il suffit que, chaque fois qu'on

prend pour chaque α un X_α de sorte que $\bigcap_{\alpha} X_\alpha$ soit vide, on puisse déterminer un nombre fini d'indices α_i et un nombre $a > 0$ tels que l'intersection des ensembles $V(X_{\alpha_i}, a)$ soit vide.

On notera une certaine analogie entre cette condition et l'axiome des espaces compacts « de toute famille d'ensembles fermés dont l'intersection est vide, on peut extraire une famille finie dont l'intersection soit vide »; et il serait effectivement facile de démontrer que cette condition est une conséquence de l'axiome des espaces compacts, retrouvant ainsi le théorème connu (1) que la structure uniforme unique d'un espace compact est une structure d'espace complet.

D'autre part, si l'on modifie l'énoncé de ce critère, en ne considérant que les X_α correspondant à des pseudo-métriques f_α définissant une structure uniforme compatible avec la topologie de E , mais moins fine que la structure universelle, on obtient une condition *suffisante* pour que E puisse être muni d'une structure d'espace complet, comme il résulte de la démonstration donnée ci-dessus.

5. On peut parfois appliquer la méthode de « raffinement » de la structure uniforme, exposée au paragraphe 3, sans passer par l'intermédiaire de l'espace complété; c'est ce que nous allons montrer sur un exemple d'espace uniformisable *non normal*, dont la définition est due à MM. Niemytzki et van Dantzig. Soit E l'ensemble des points du plan formé du cercle de centre O et de rayon 1, circonférence C comprise; pour chaque point x_0 de C , définissons dans E une fonction numérique f_{x_0} de la manière suivante: $f_{x_0}(x_0) = 0$, et pour tout $x \neq x_0$, $f_{x_0}(x)$ est le rayon de la circonférence passant par x et tangente à C en x_0 . La famille Φ de pseudo-métriques formée de la distance euclidienne $d(x, y)$ et des fonctions $F_{x_0}(x, y) = |f_{x_0}(x) - f_{x_0}(y)|$ pour tous les points x_0 de C , définit sur E une structure uniforme \mathcal{U} ; nous prendrons sur E la topologie déduite de cette structure. \mathcal{U} n'est pas une structure d'espace complet, car une suite (x_n) de points situés sur une circonférence tangente à C en un point x_0 , et dont la distance

(1) A. WEIL, *loc. cit.*, p. 18.

euclidienne à x_0 , tend vers zéro, est une suite de Cauchy non convergente relativement à cette structure.

Nous allons former une structure d'espace complet \mathcal{U} plus fine que \mathcal{U} , et compatible avec la topologie de E . A cet effet, considérons un point quelconque x_0 de C , et deux circonférences C' , C'' , tangentes à C en x_0 , de rayons respectifs r' , r'' tels que, $r'' < r' < 1$. On voit aisément qu'on peut former une fonction $g(x_0, r', r''; x)$ définie dans E , continue relativement à la topologie de cet espace, et possédant les propriétés suivantes : 1° $g(x_0, r', r''; x) = f_{x_0}(x)$ en tout point x tel que $0 \leq f_{x_0}(x) \leq r''$; 2° en tout point x tel que $r' \leq f_{x_0}(x)$, $g(x_0, r', r''; x) = 1 + \frac{1}{r_x}$, où r_x est le rayon du cercle orthogonal à C passant par x_0 et x (par une inversion de pôle x_0 , cela revient à trouver une fonction $f(\xi, \eta)$ continue au sens de la topologie euclidienne dans le demi-plan $\eta \geq 0$, et telle que $f(\xi, \eta) = 1 + |\xi|$ pour $0 \leq \eta \leq a$, et $f(\xi, \eta) = \frac{1}{\eta}$ pour $\eta \geq b$, où $0 < a < b$).

Définissons alors la structure \mathcal{U} par la famille Φ' de pseudo-métriques formée de Φ et des fonctions

$$G(x_0, r', r''; x, y) = |g(x_0, r', r''; x) - g(x_0, r', r''; y)|$$

pour tous les systèmes x_0, r', r'' satisfaisant aux conditions précédentes. Soit \mathcal{F} un filtre de Cauchy pour la structure \mathcal{U} ; c'est aussi un filtre de Cauchy pour la structure euclidienne, donc il converge au sens de la topologie euclidienne vers un point z de E . Si z n'est pas sur C , \mathcal{F} converge aussi vers z au sens de la topologie de E , puisque les voisinages de z dans cette topologie sont identiques aux voisinages euclidiens. Supposons maintenant que z soit un point de C , et que \mathcal{F} ne converge pas vers z au sens de la topologie de E ; il existe donc un nombre $r' > 0$ et un ensemble A de \mathcal{F} tel que A n'ait aucun point commun avec le cercle C' de rayon r' , tangent en z à C . \mathcal{F} étant un filtre de Cauchy, il existe un ensemble B de \mathcal{F} , tel que, pour tout couple (x, y) de points de B , $|g(z, r', r''; x) - g(z, r', r''; y)| < 1$. $A \cap B$ n'est pas vide; soit u un point de cet ensemble (nécessairement distinct de z) et posons $g(z, r', r''; u) = a$; on aura donc pour tout point x de $A \cap B$, $g(z, r', r''; x) < a + 1$, autrement dit $r_x > \frac{1}{a}$; ce qui

entraîne immédiatement que la distance euclidienne de z à l'ensemble $A \cap B$ est un nombre $\rho > 0$. Or, $A \cap B$ est un ensemble de \mathcal{F} , et le cercle de centre z et de rayon $\frac{\rho}{2}$ contient un ensemble K de \mathcal{F} par hypothèse; $A \cap B$ et K n'auraient donc aucun point commun, contrairement à l'hypothèse que \mathcal{F} est un filtre. Il est donc bien établi que tout filtre de Cauchy relatif à la structure \mathcal{U} est convergent, c'est-à-dire que \mathcal{U} est une structure d'espace complet.

L'intérêt de cet exemple est qu'il montre qu'en tout cas, le fait qu'un espace soit normal n'est pas une condition *nécessaire* pour qu'on puisse le munir d'une structure d'espace complet ⁽¹⁾.

6. L'espace de Tychonoff. — Nous allons étudier les structures uniformes compatibles avec la topologie d'un espace *localement compact* et *non normal*, considéré par A. Tychonoff ⁽²⁾, et dont la définition est la suivante :

Sur un ensemble *bien ordonné* E , si l'on prend comme système fondamental de voisinages d'un point x les intervalles $[y, x]$ (c'est-à-dire l'ensemble des z tels que $y \leq z \leq x$), y parcourant l'ensemble des points $< x$, on obtient, comme on le voit sans peine, une topologie d'espace de Hausdorff. De plus, si E admet un plus grand élément, c'est un espace *compact* avec cette topologie (car l'ensemble des points de E qu'on peut recouvrir par un nombre fini de voisinages, extraits d'une famille qui contient un voisinage au moins de chacun des points de E , contient le plus grand élément de E , et ne peut avoir de plus petit élément distinct du plus petit élément de E).

Soit alors A l'ensemble bien ordonné formé des ordinaux de première et de deuxième classe, et du plus petit ordinal de troisième classe Ω ; soit de même B l'ensemble formé des entiers (ordinaux de première classe) et du plus petit ordinal de deuxième classe ω ; munissons A et B de la topologie qui vient d'être définie, et consi-

⁽¹⁾ (Note ajoutée pendant la correction des épreuves). Depuis la rédaction de ce travail, j'ai pu montrer, plus généralement, que tout espace topologique dont la topologie est *plus fine qu'une topologie métrisable*, est susceptible d'une structure d'espace complet (*C. R. Acad. Sc.*, t. 209, 1939, p. 666).

⁽²⁾ A. TYCHONOFF, *Math. Ann.*, t. 102, 1930, p. 553.

dérons l'espace produit $A \times B$; il est compact. Si l'on en enlève le point (Ω, ω) , il reste un espace *localement compact* T qui est l'espace de Tychonoff.

Cela étant, la famille des *complémentaires des ensembles relativement compacts* est un *filtre* \mathcal{F} sur T , dont une *base* est formée par les ensembles $I_{\alpha, n}$, définis pour tout entier n et tout ordinal $\alpha < \Omega$, de la manière suivante : $I_{\alpha, n}$ est l'ensemble des points (x, y) de T tels que $x > \alpha$, $y > n$. Nous allons montrer que, *pour toute structure uniforme compatible avec la topologie de T , \mathcal{F} est un filtre de Cauchy*; comme ce filtre n'est évidemment pas convergent (T étant localement compact), il en résultera d'abord que *T ne peut être muni d'une structure uniforme d'espace complet compatible avec sa topologie*.

Pour cela, considérons une pseudo-métrique *continue* quelconque $F(u, v)$ sur T ; donnons à u la valeur fixe $u_0 = (\Omega, n)$, où n est un entier quelconque, et à v les valeurs (α, n) , α parcourant A ; comme $F(u_0, v)$ est continue en v , et nulle pour $v = u_0$, sa valeur tend vers 0 lorsque α tend vers Ω dans A ; autrement dit, l'ensemble H_m des α tels que $F[u_0, (\alpha, n)] < \frac{1}{m}$ est un voisinage de Ω dans A ; par suite, son complémentaire K_m est *dénombrable*; comme l'ensemble des α tels que $F[u_0, (\alpha, n)] = 0$ est le complémentaire de la réunion des K_m ($m = 1, 2, \dots$) et que A n'est pas dénombrable, on voit qu'il existe un ordinal de deuxième classe α_n tel que, pour tout $\alpha > \alpha_n$, $F[u_0, (\alpha, n)] = 0$. L'intervalle $[1, \alpha_n]$ étant dénombrable, il existe donc un ordinal $\alpha_0 < \Omega$ tel que $\alpha_n < \alpha_0$ quel que soit n ; donc $F[(\Omega, n), (\alpha, n)] = 0$ quel que soit $\alpha > \alpha_0$ et quel que soit n ; d'après l'inégalité du triangle, il en résulte que, quels que soient l'entier n et les ordinaux α, β tels que $\alpha > \alpha_0, \beta > \alpha_0$, $F[(\alpha, n), (\beta, n)] = 0$. D'après la même inégalité, on a

$$\begin{aligned} F[(\alpha, \omega), (\beta, \omega)] &\leq F[(\alpha, \omega), (\alpha, n)] + F[(\alpha, n), (\beta, n)] + F[(\beta, \omega), (\beta, n)] \\ &= F[(\alpha, \omega), (\alpha, n)] + F[(\beta, \omega), (\beta, n)] \end{aligned}$$

pour $\alpha > \alpha_0, \beta > \alpha_0$. Or, en vertu de la continuité de F , il existe un entier n_0 tel que, pour $n > n_0$,

$$F[(\alpha, \omega), (\alpha, n)] < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$F[(\beta, \omega), (\beta, n)] < \frac{\varepsilon}{2};$$

donc

$$F[(\alpha, \omega), (\beta, \omega)] < \varepsilon,$$

et comme ε est arbitraire, $F[(\alpha, \omega), (\beta, \omega)] = 0$ quels que soient $\alpha > \alpha_0$, $\beta > \alpha_0$. Et finalement, pour tout couple de points de l'ensemble I_{α_0, n_0} , on a $F(u, v) < \varepsilon$, ce qui montre bien que \mathcal{F} est un filtre de Cauchy pour toute structure uniforme compatible avec la topologie de T , puisqu'une telle structure est définie par des pseudo-métriques continues.

Ce résultat va nous permettre en outre de montrer qu'il n'y a qu'une seule structure uniforme compatible avec la topologie de T . Soient en effet \mathcal{U} une telle structure, \bar{T} l'espace complété de T relativement à cette structure; à tout point de $\bar{T} - T$ correspond au moins un *ultrafiltre* sur T qui converge vers ce point. Or, soit \mathcal{G} un ultrafiltre quelconque sur T ; s'il contient au moins un ensemble compact C , sa *trace* sur C (c'est-à-dire la famille des intersections des ensembles de \mathcal{G} avec C) est un ultrafiltre sur C , donc *convergent* vers un point de C , d'après la compacité de C ; si au contraire \mathcal{G} ne contient aucun ensemble compact, il contient *tous* les complémentaires des ensembles compacts, donc est *plus fin que* \mathcal{F} , et par suite converge vers le même point de $\bar{T} - T$ que \mathcal{F} . Ces remarques montrent immédiatement que $\bar{T} - T$ se compose d'un seul point, et que tout ultrafiltre sur \bar{T} est convergent, donc que \bar{T} est compact. Or, d'après le théorème d'Alexandroff, il n'y a qu'une manière d'adjoindre un point à un espace localement compact de façon à le rendre compact et, d'autre part, il n'existe qu'une seule structure uniforme compatible avec la topologie d'un espace compact; il en résulte immédiatement l'unicité annoncée de la structure uniforme de T , et l'on voit que cette propriété n'est pas caractéristique des espaces compacts.

