GEORGES GIRAUD

Sur une classe d'équations linéaires ou figurent des valeurs principales d'intégrales simples

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 56 (1939), p. 119-172
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1939_3_56__119_0>

SUR UNE

CLASSE D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

OU FIGURENT DES

VALEURS PRINCIPALES D'INTÉGRALES SIMPLES

PAR M. GEORGES GIRAUD.

Introduction.

Des questions d'hydrodynamique, d'électromagnétisme et d'analyse pure ont conduit à des équations intégrales linéaires, où l'intégrale sous laquelle figure la fonction inconnue, est à prendre en valeur principale, soit au sens de Cauchy si l'inconnue doit dépendre d'une seule variable, soit en un sens analogue s'il y a plusieurs variables indépendantes. De telles équations ont été considérées notamment par Poincaré (1), par Villat (2), par Tricomi (3) et par G. Bertrand (4). Le

(1) HENRI POINCARÉ, *Mécanique céleste*, t. III (Théorie des marées), spécialement p. 253 à 256.

(2) HENRI VILLAT, *Sur la résolution de certaines équations intégrales et sur quelques problèmes qui s'y rattachent* (*Acta math.*, t. 40, 1916, p. 101 à 178).

(3) FRANCESCO TRICOMI, *Su di un' equazione integrale di prima specie* (*Rend. del Circ. mat. di Palermo*, t. 46, 1922, p. 357 à 388). *Sulle equazioni lineari alle derivate di 2° ordine di tipo misto* (*Mem. della R. Accad. dei Lincei*, 5e série, t. 14, 1923, p. 133 à 247), spécialement Chap. VI, § 6, et Chap. VII. *Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale doppio* (*Mathematische Zeitschrift*, t. 27, 1927, p. 87 à 133). Les formules (45), (46) et (47) de ce dernier Mémoire, p. 106 et 107, sont inexactes; les deux premières n'étant que des préparations à la dernière, il suffit d'indiquer que dans celle-ci f_1 et f_2 doivent être remplacés par $\overline{f}_1$ et $\overline{f}_2$, qui représentent certaines primitives de f_1 et f_2; le mémoire avait été précédé par une Note (*Rend. Accad. Lincei*, 6e série, vol. 3, 1926, p. 535 à 539), où le terme inexact de la formule (47) du Mémoire est correctement imprimé au milieu de la page 539, mais une faute d'impression a fait disparaître les petits traits dans la formule finale, en bas de la même page, et de là est venue l'inexactitude du Mémoire.

(4) GASTON BERTRAND, *La théorie des marées et les équations intégrales* (*Ann. scient.*

passage à la limite qui sert à définir les valeurs principales d'intégrales, est nécessité par une singularité du noyau de l'intégrale, singularité qui, dans les questions auxquelles il a été fait allusion, se présente quand les deux points variables dont dépend le noyau, tendent vers un même point-limite. Une classe générale de telles équations, où la singularité est d'un type qui semble particulièrement intéressant pour les applications, a été discutée dans deux articles de ce recueil ([5]). Puis la théorie a été étendue à d'autres classes d'équations ([6]).

Cette étude a mis en évidence des cas étendus où les conclusions sont les mêmes que s'il s'agissait d'une équation de Fredholm, pourvu que le paramètre qui multiplie l'intégrale varie dans certains domaines bien déterminés. Dans d'autres cas, ces équations ont des propriétés plus variées : c'est ainsi que le nombre des solutions linéairement indépendantes des équations homogènes peut différer du nombre des conditions de compatibilité des équations non homogènes, quoique ces conditions se forment comme pour les équations de Fredholm; la différence entre ces deux nombres est constante quand le paramètre qui multiplie l'intégrale varie dans certains domaines bien déterminés.

École norm. sup., 3[e] série, t. 40, 1923, p. 151 à 258). *Le problème de Dirichlet et le potentiel de simple couche* (*Bull. Sc. math.*, 2[e] série, t. 47, 1923, p. 282 à 288 et 298 à 307).

([5]) *Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application* (*Ann. scient. École Norm. sup.*, 3[e] série, t. 51, 1934, p. 251 à 372), et complément rectificatif *Sur certaines équations à intégrales principales* (même recueil, t. 54, 1937, p. 293 et 294; *voir* ci-après § 21); cet article sera désigné dans les citations par la lettre *i*. *Équations à intégrales principales d'ordre quelconque* (même recueil, t. 53, 1936, p. 1 à 40); cet article sera désigné par la lettre *j*. Une application à l'électromagnétisme a fait l'objet d'une Note (*Rend. Accad. Lincei*, 6[e] série, vol. 22, 1935, p. 334 à 341).

([6]) *Sur un type d'équations à intégrales principales* (*Journ. de Math. pures et appliq.*, 9[e] série, t. 15, 1936, p. 193 à 205). Autres résultats dans *C. R. Acad. sc.*, t. 202, 1936, p. 2124 à 2126; t. 203, 1936, p. 292 à 294; t. 204, 1937, p. 628 à 630; t. 205, 1937, p. 765 à 768 et p. 1024 et 1025; le présent Mémoire développe une partie de la troisième de ces Notes. S. Michlin, *Composition des intégrales singulières doubles* (*C. R. Acad. Sc. U. R. S. S.*, 1936, vol. 2, p. 3 à 6). Dans cette importante Note, Michlin relève l'inexactitude de Tricomi, mais commet lui-même une erreur (*voir* Note citée, *C. R. Acad. sc.*, t. 202, 1936, note de la page 2126), corrigée dans le Mémoire définitif qui a paru en langue russe (*Rec. math. Moscou*, t. 1, 1936, p. 535 à 552, et complément aux pages 963 et 964; courts résumés finals en français).

Ces circonstances plus générales se rencontrent même quand l'inconnue est fonction d'une seule variable. L'étude est cependant plus simple pour une variable que pour plusieurs, parce que la singularité du noyau de l'opération résolvante se trouve plus rapidement.

Au lieu d'une seule équation, on peut aussi en considérer plusieurs, avec un nombre d'inconnues égal au nombre des équations. La théorie s'applique à tout nombre de variables indépendantes. S'il n'y a qu'une variable, les singularités des noyaux des intégrales qui figurent dans les formules de résolution se trouvent en résolvant un système d'équations algébriques du premier degré.

La présente étude est consacrée au cas d'une seule variable, et plus particulièrement au cas d'une seule équation. Les systèmes de plusieurs équations feront l'objet de quelques indications. Des définitions et des propriétés essentielles seront rappelées dans les premiers paragraphes. Nous aurons à nous appuyer sur un article qui a récemment paru (7).

Certains problèmes relatifs à des équations aux dérivées partielles du type elliptique, à deux variables indépendantes, peuvent être ramenés à de telles équations intégrales; la discussion de ces problèmes est certainement plus compliquée que la discussion des cas particuliers antérieurement traités, précisément parce que les équations intégrales en question peuvent avoir les propriétés nouvelles rencontrées dans cette étude. Cette discussion sera omise, mais nous citerons les recherches de Liénard (8), qui suivent une autre voie, et d'où peuvent être tirés des exemples de ces propriétés nouvelles.

L'étude des équations et des systèmes d'équations à intégrales principales, pour tout nombre de variables indépendantes, devra faire l'objet d'un travail nécessairement plus étendu. Mais après que sont trouvées les singularités des noyaux qui doivent figurer dans les

(7) *Définitions élargies des noyaux résolvants de Fredholm et des fonctions de Green* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 61, 1937, p. 172 à 192, 200 à 208 et 288). Dans les citations, cet article sera désigné par la lettre *m*.

(8) Alfred Liénard, *C. R. Acad. sc.*, t. 201, 1935, p. 320 à 322. M. Liénard a développé ces démonstrations dans un Mémoire : *Problème plan de la théorie oblique dans la théorie du potentiel*, dont le début a déjà paru (*Journ. de l'Éc. Polytech.*, 3e série, no 5, p. 35 à 96; no 6, p. 97 à 158).

formules de résolution (ou, plus précisément, les « parties positivement homogènes et d'ordre $-m$ » de ces noyaux, m étant le nombre des variables); les raisonnements sont semblables à ceux qu'on trouvera dans le présent Mémoire.

1. **Variétés closes à une dimension.** — Les variétés $\mathcal{V}$ les plus générales que nous considérons, ne sont pas nécessairement connexes; elles sont composées d'un nombre fini n_1 de parties $\mathcal{V}_n (1 \leqq n \leqq n_1 ; n_1 \geqq 1)$, sur chacune desquelles la position d'un point X est déterminée par une coordonnée x, définie à un multiple près d'une certaine période positive, qui dépend de l'indice n de $\mathcal{V}_n$. Si l'on change de coordonnée sur un des $\mathcal{V}_n$, la nouvelle coordonnée t devra avoir par rapport à l'ancienne coordonnée x une dérivée positive et qui remplisse une condition de Lipschitz avec un exposant donné h, avec $0 < h \leqq 1$, c'est-à-dire que la différence des valeurs de cette dérivée aux points où l'ancienne coordonnée a les valeurs respectives x_1 et x_2, doit valoir $O(|x_1 - x_2|^h)$ [9]. Naturellement $\frac{dt}{dx}$ doit être une fonction périodique de x, avec la période donnée, de sorte que lorsque x augmente d'une période, t augmente d'une quantité constante, qui sera nommée la nouvelle période.

En outre, on donne sur chaque $\mathcal{V}_n$ une fonction Ω de la coordonnée x. Ω doit être positif et périodique, avec la période donnée, et de plus Ω doit remplir une condition de Lipschitz avec l'exposant h. Si l'on change de coordonnée, Ω doit être remplacé par une autre fonction Ω', de façon que $\Omega' dt$ soit égal à $\Omega\, dx$, t étant la nouvelle coordonnée; autrement dit, Ω est un tenseur covariant. On constate que si le changement de coordonnée remplit les conditions posées ci-dessus, Ω' remplit par rapport à t les conditions qui ont été imposées à Ω par rapport à x. L'invariant $\Omega\, dx = d\sigma$ se nomme l'*élément* de la variété $\mathcal{V}$. On écrira $d\sigma_X$ s'il faut spécifier que l'élément est pris au point X.

2. **Noyaux d'équations à intégrales principales.** — Soit $G(X, \Xi)$ une fonction de deux points de notre variété $\mathcal{V}$; cette fonction n'est pas

(9) O est un symbole de Landau : $y = O(z)$ signifie que yz^{-1} est borné.

nécessairement réelle. Elle pourra jouer, dans ces pages, le rôle de noyau d'une équation à intégrale principale si elle remplit les conditions suivantes :

1° Si X et Ξ n'appartiennent pas à une même partie connexe $\mathcal{V}_n$, G remplit par rapport à chacun de ces points une condition de Lipschitz avec l'exposant h; c'est-à-dire que de telles conditions sont remplies par rapport aux coordonnées de chaque point, les coefficients (constante sous-entendue dans le symbole O du paragraphe précédent) étant indépendants des deux points.

2° Si X et Ξ appartiennent à une même partie connexe $\mathcal{V}_n$, soient x et ξ leurs coordonnées respectives, et soit ω la période. Nous supposons qu'on a

$$G(X, \Xi) = \frac{\pi}{\omega} c(x) \cot \frac{\pi(x-\xi)}{\omega} + G_2(X, \Xi),$$

où $c(x)$ est une fonction qui remplit une condition de Lipschitz avec l'exposant h, et qui admet la période ω; $G_2(X, \Xi)$ est une fonction qui admet la période ω par rapport à chacune des variables x et ξ, et qui admet la limitation

$$G_2(X, \Xi) = O\left[\left|\sin \frac{\pi(x-\xi)}{\omega}\right|^{h-1}\right];$$

en outre, si les différences $y - x$ et $\xi - y$ sont de même signe et si $2|\xi - x|$ est $\leqq \omega$, on a

$$G_2(X, \Xi) - G_2(Y, \Xi) = O(|x-y|^h |y-\xi|^{-1})$$

(les majuscules continuent à désigner les points dont les coordonnées sont représentées par les minuscules correspondantes); enfin, si les différences $\upsilon - \xi$ et $x - \upsilon$ sont de même signe et si $2|\xi - x|$ est $\leqq \omega$, on a

$$G_2(X, \Xi) - G_2(X, \Upsilon) = O(|\xi - \upsilon|^h |\upsilon - x|^{-1}).$$

Les deux points variables jouent des rôles identiques dans ces conditions, qui sont invariantes pour tous les changements de coordonnée, moyennant les conditions du paragraphe 1, en considérant c comme un tenseur contravariant.

3. **Valeur principale d'une intégrale.** — Soit G un noyau qui remplit les conditions du paragraphe 2, et soit $\rho(X)$ une fonction, non nécessairement réelle, d'un point de $\mathcal{V}$. On suppose que ρ remplit une condition de Lipschitz avec un exposant $k (o < k \leqq h)$. Qu'entendons-nous par *valeur principale* de l'intégrale

$$(1) \qquad f(X) = \int_{\mathcal{V}} G(X, A) \rho(A)\, d\sigma_A \,?$$

Nous excluons de la partie $\mathcal{V}_n$ de $\mathcal{V}$ où se trouve X, un intervalle $(x - \eta, x + \eta)$: c'est-à-dire que, ω étant la période relative à $\mathcal{V}_n$, aucun des nombres $a + q\omega$, où q est entier, ne doit être à l'intérieur de l'intervalle exclu quand A appartient à $\mathcal{V}_n$. Cela fait, nous intégrons dans toute la partie restante de $\mathcal{V}$; enfin nous faisons tendre η vers zéro : la valeur de notre intégrale tend alors vers une limite qui, par définition, est $f(X)$; la démonstration résulte de ce que l'intégrale de

$$\frac{\pi}{\omega} c(x) \rho(x) \Omega(x) \cot \frac{\pi(x-a)}{\omega}\, da,$$

dans l'intervalle non exclu de $\mathcal{V}_n$, est nulle, et si l'on retranche cette expression de $G(X, A)\rho(A)\, d\sigma_A$, la différence est sommable sur tout $\mathcal{V}_n$. Cette *valeur principale* ou *intégrale principale* a été considérée par Cauchy.

Si, au lieu d'exclure l'intervalle $(x - \eta, x + \eta)$, nous excluons l'intervalle $(x - \eta, x + \zeta)$, où η et ζ sont deux infiniment petits positifs équivalents, la limite est la même que ci-dessus, car l'intégrale de $|G(X, A)\rho(A)|\, d\sigma_A$, étendue à l'intervalle $(x + \eta, x + \zeta)$, vaut $O\left(\log \frac{\zeta}{\eta}\right)$, et par suite elle tend vers zéro. Il en résulte que, dans nos changements de coordonnée, l'expression de l'intégrale principale se transforme comme l'expression d'une intégrale ordinaire.

Convenons que, dans la suite, quand le champ d'intégration sera sous-entendu, ce champ sera $\mathcal{V}$, et l'intégrale sera prise en valeur principale s'il en est besoin.

4. **Intégrales principales superposées.** — Si λ est un nombre positif donné, inférieur à k, on démontre que la fonction $f(X)$ exprimée par

(1) remplit une condition de Lipschitz avec l'exposant λ. Si alors $G^\star(X, \Xi)$ est un autre noyau d'intégrale principale, nous pouvons considérer la fonction

$$u(X) = \int G^\star(X, A) f(A)\, d\sigma_A = \int G^\star(X, A) \int G(A, \Xi) \rho(\Xi)\, d\sigma_\Xi\, d\sigma_A.$$

On démontre que si $c^\star$ joue par rapport à $G^\star$ le même rôle que c par rapport à G, *on a*

$$u(X) = -\pi^2 c(X) c^\star(X) \Omega^2(X) \rho(X) + \int \rho(\Xi) \int G^\star(X, A) G(A, \Xi)\, d\sigma_A\, d\sigma_\Xi, \tag{2}$$

où l'intégrale

$$\int G^\star(X, A) G(A, \Xi)\, d\sigma_A = H(X, \Xi)$$

doit être prise en valeur principale, au sens de Cauchy, avec un intervalle d'exclusion autour de X et un autre autour de Ξ; nous désignons par $c(X)$, $c^\star(X)$ et $\Omega(X)$ les valeurs prises en X, *relativement à une certaine coordonnée,* par les *tenseurs* c, $c^\star$ et Ω; il est évident que le produit $cc^\star\Omega^2$ est invariant, ce qui est d'accord avec la formule (2). On démontre en outre que *la fonction* $H(X, \Xi)$ *remplit les conditions imposées à* G *au paragraphe* 2, *sauf le remplacement de h par un nombre positif donné* $< h$, *et de plus cette fonction* H *est sommable,* c'est-à-dire que, pour elle, le tenseur analogue à c est partout nul [10].

C'est en vue de cette propriété que les conditions du paragraphe 2 ont été posées.

5. **Opérations intégrales linéaires.** — Reprenons les deux noyaux G et $G^\star$ du paragraphe précédent. Soient de plus $g(X)$ et $g^\star(X)$ deux fonctions données d'un point de $\mathcal{V}$; on suppose que ces fonctions remplissent des conditions de Lipschitz, avec n'importe quels exposants. Pour toute fonction $u(X)$ qui remplit une condition de Lipschitz, quel

---

(10) Pour avoir une démonstration adaptée à nos hypothèses, on peut consulter le travail cité *i*, où l'on particularisera pour une variable les démonstrations du Chapitre I, qu'on complétera par le paragraphe 2 du Chapitre III. Mais d'autres démonstrations se trouvent dans le deuxième travail cité de Tricomi et dans les deux travaux cités de G. Bertrand.

que soit l'exposant de cette condition, nous posons

$$\mathrm{J}\, u(\mathrm{X}) = g(\mathrm{X})\,u(\mathrm{X}) - \int \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,u(\mathrm{A})\,d\sigma_{\mathrm{A}},$$
$$\mathrm{J}^{\star} u(\mathrm{X}) = g^{\star}(\mathrm{X})\,u(\mathrm{X}) - \int \mathrm{G}^{\star}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,u(\mathrm{A})\,d\sigma_{\mathrm{A}},$$

où les intégrales doivent être prises en valeurs principales; J et $\mathrm{J}^{\star}$ sont deux opérations intégrales linéaires. Nous désignons par $\mathrm{J}^{\star}\mathrm{J}u(\mathrm{X})$ le résultat obtenu en appliquant l'opération $\mathrm{J}^{\star}$ à la fonction $\mathrm{J}u(\mathrm{X})$; ce résultat s'obtient en appliquant à u une opération $\mathrm{J}^{\star}\mathrm{J}$ qui se déduit de J en y remplaçant $g(\mathrm{X})$ par

$$g(\mathrm{X})\,g^{\star}(\mathrm{X}) - \pi^2 c(\mathrm{X})\,c^{\star}(\mathrm{X})\,\Omega^2(\mathrm{X}) \tag{3}$$

et $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi)$ par

$$g^{\star}(\mathrm{X})\,\mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi) + \mathrm{G}^{\star}(\mathrm{X}, \Xi)\,g(\Xi) - \int \mathrm{G}^{\star}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\mathrm{G}(\mathrm{A}, \Xi)\,d\sigma_{\mathrm{A}}. \tag{4}$$

Le dernier terme de cette dernière expression étant sommable, on voit que le tenseur qui joue pour $\mathrm{J}^{\star}\mathrm{J}$ le rôle que $c(\mathrm{X})$ joue pour J, est

$$c(\mathrm{X})\,g^{\star}(\mathrm{X}) + c^{\star}(\mathrm{X})\,g(\mathrm{X}); \tag{5}$$

il est donc le même pour $\mathrm{J}\mathrm{J}^{\star}$ que pour $\mathrm{J}^{\star}\mathrm{J}$. De même l'expression (3) ne change pas si l'on échange les rôles de J et de $\mathrm{J}^{\star}$. Cependant, les opérations $\mathrm{J}^{\star}\mathrm{J}$ et $\mathrm{J}\mathrm{J}^{\star}$ ne sont pas généralement identiques.

Faisons correspondre à l'opération J la fonction

$$\mathrm{TJ}(\mathrm{X}, \theta) = g(\mathrm{X}) - i\pi\Omega(\mathrm{X})\,c(\mathrm{X})\,\theta \qquad (\theta = \pm 1); \tag{6}$$

pour les deux valeurs de θ, c'est une fonction scalaire, qui remplit sur $\mathcal{V}$ une condition de Lipschitz. Nous avons alors

$$\mathrm{TJ}^{\star}(\mathrm{X}, \theta) = g^{\star}(\mathrm{X}) - i\pi\Omega(\mathrm{X})\,c^{\star}(\mathrm{X})\,\theta,$$
$$\begin{aligned}\mathrm{T}(\mathrm{J}\mathrm{J}^{\star})(\mathrm{X}, \theta) = {} & g(\mathrm{X})\,g^{\star}(\mathrm{X}) - \pi^2\Omega^2(\mathrm{X})\,c(\mathrm{X})\,c^{\star}(\mathrm{X}) \\ & - i\pi\Omega(\mathrm{X})\,[c(\mathrm{X})\,g^{\star}(\mathrm{X}) + c^{\star}(\mathrm{X})\,g(\mathrm{X})]\,\theta.\end{aligned}$$

Nous constatons ainsi l'identité fondamentale

$$\mathrm{T}(\mathrm{J}\mathrm{J}^{\star}) = \mathrm{TJ} \times \mathrm{TJ}^{\star}. \tag{7}$$

6. **Équation intégrale linéaire.** — Considérons l'équation

$$g(X)u(X) - \int G(X, A)u(A)\,d\sigma_A = f(X), \tag{8}$$

où $g(X)$ et $G(X, \Xi)$ sont donnés et remplissent les conditions posées dans les paragraphes 2 et 5; $f(X)$ est une fonction donnée, soumise à une condition de Lipschitz, dont l'exposant n'importe pas. La fonction $u(X)$ est l'inconnue, qui devra remplir une condition de Lipschitz, cette dernière condition n'étant pas donnée; autrement dit

$$\frac{\log L(X, Y)}{\log |u(X) - u(Y)|}$$

doit être borné dès que $L(X, Y)$ est assez petit.

Soit $Ju(X)$ le premier membre de (8). Nous voulons trouver une opération $J^\star$ telle qu'on ait identiquement

$$J^\star J u(X) = u(X) - \int H(X, A)u(A)\,d\sigma_A,$$

où H doit être sommable; cette opération $J^\star$ doit être du type défini au paragraphe 5, et auquel appartient aussi l'opération J. Nous voulons donc faire en sorte qu'on ait

$$T(J^\star J)(X, \theta) = 1,$$

quels que soient X et θ. D'après l'identité fondamentale (7), cette relation s'écrit aussi

$$TJ^\star(X, \theta)\,TJ(X, \theta) = 1.$$

Donc l'opération $J^\star$ ne peut exister que si, pour chacune des deux valeurs de θ, $TJ(X, \theta)$ ne peut s'annuler pour aucun point X de $\mathcal{V}$. S'il en est ainsi, $J^\star$ existe, car, en donnant successivement à θ ses deux valeurs, nous avons pour déterminer $g^\star$ et $c^\star$ deux équations algébriques linéaires, dont le déterminant n'est pas nul, et nous en tirons

$$g^\star = \frac{g}{g^2 + \pi^2\Omega^2 c^2}, \qquad c^\star = \frac{-c}{g^2 + \pi^2\Omega^2 c^2};$$

on vérifie que $g^\star$ et $c^\star$ remplissent des conditions de Lipschitz. Nous voyons que $c^\star(X)\Omega(X)$ est une fonction scalaire; $c^\star(X)$ est donc un tenseur contravariant. Ce tenseur étant connu, il est facile de construire un noyau $G^\star(X, \Xi)$ qui, avec $g^\star$, nous donne une des opérations $J^\star$ cherchées; la fonction égale à

$$\frac{\pi}{\omega} c^\star(x) \cot \frac{\pi(x-\xi)}{\omega},$$

quand X et Ξ appartiennent à une même partie connexe de $\mathcal{V}$ (nous reprenons les notations du paragraphe 2), et à zéro dans les autres cas, est un tel noyau; tous les autres noyaux $G^\star$ possibles s'obtiennent en ajoutant à cette fonction une autre fonction qui soit à la fois sommable et soumise aux conditions du paragraphe 2. Notamment on peut prendre

$$G^\star(X, \Xi) = \frac{-G(X, \Xi)}{g^2(X) + \pi^2 \Omega^2(X) c^2(X)}.$$

Il est alors évident que toute solution de l'équation (8) satisfait à l'équation

$$u(X) - \int H(X, A) u(A) \, d\sigma_A = J^\star f(X), \tag{9}$$

qui est une équation de Fredholm, car la fonction sommable H(X, A), qui remplit nécessairement les conditions du paragraphe 2 (d'après § 4), vaut $O[|x-a|^{k-1}]$, où k est une certaine constante positive, quand les points X et A, dont x et a sont les coordonnées, sont sur une même partie connexe de $\mathcal{V}$, et quand en outre $|x-a|$ est au plus une demi-période ([11]). D'ailleurs toute solution de (9) remplit une condition de Lipschitz : cela résulte de ce que, u étant nécessairement continu, l'intégrale du premier membre remplit nécessairement une condition de Lipschitz ([12]); donc u est susceptible de l'opération J.

Si l'on change d'inconnue en posant

$$u(X) = J^\star v(X), \tag{10}$$

([11]) L'équation (9) fut introduite, dans des cas plus ou moins généraux, par Poincaré, par Tricomi et par G. Bertrand, dans leurs travaux cités, où ils présentaient sa formation comme une application du procédé nommé itération. Villat la forma également, à la fin de son Mémoire cité, et il rattacha ce procédé à des remarques dues à Hilbert (*Cong. des math.*, Heidelberg, 1904, Verhandlungen, p. 233).

([12]) Mémoire cité *i*, spécialement Chap. I, § 2.

avec la même opération $J^\star$, on constate que toute solution d'une certaine autre équation de Fredholm

$$(11) \qquad v(X) - \int K(X, A)v(A)\, d\sigma_A = f(X)$$

fournit, par l'intermédiaire de (10), une solution de (8), pourvu toutefois que v remplisse une condition de Lipschitz, cas où u existe et en remplit aussi une; c'est une équation de Fredholm parce que $T(JJ^\star)$ est partout égal à *un*, ce qui entraîne pour K les propriétés déjà énoncées pour H; en outre toute solution v remplit une condition de Lipschitz d'après le même raisonnement qu'à l'alinéa précédent.

Quand il est possible de former les équations (9) et (11), il se peut que l'équation (9) admette des solutions qui ne conviennent pas à (8), ou qu'une solution de (8) ne soit pas susceptible d'être mise sous la forme (10). D'autre part, il n'est pas certain que les conditions d'orthogonalité entre $J^\star f(X)$ et les solutions de l'équation homogène adjointe à (9), soient toutes distinctes; il n'est pas certain non plus que deux solutions distinctes de (11) donnent toujours deux solutions distinctes de (8). La suite de ce Mémoire renseignera sur la discussion générale de l'équation (8). Il est d'abord utile que nous introduisions un paramètre dans notre équation intégrale, comme on fait pour les équations de Fredholm.

7. **Introduction d'un paramètre.** — Au lieu de l'équation (8), nous considérons maintenant l'équation

$$(12) \qquad g(X)u(X) - \lambda \int G(X, A)u(A)\, d\sigma_A = f(X),$$

c'est-à-dire que nous remplaçons G par λG, où λ est un paramètre; nous gardons toutes nos hypothèses relatives à G, à g et à f. Il y aura souvent lieu de considérer l'équation homogène

$$(12\ bis) \qquad g(X)u(X) - \lambda \int G(X, A)u(A)\, d\sigma_A = 0.$$

Nous désignons par $J_\lambda u(X)$ le premier membre de (12). Nous avons alors

$$TJ_\lambda(X; \theta) = g(X) - i\pi\lambda\Omega(X)c(X)\theta \qquad (\theta = \pm 1).$$

Les transformations qui aboutissent aux équations (9) et (11) du paragraphe précédent, sont possibles quand, pour chacune des deux valeurs de θ, TJ_λ ne s'annule en aucun point X de $\mathcal{V}$. Chaque point X de $\mathcal{V}$ où c n'est pas nul, conduit ainsi à exclure de nos considérations une ou deux valeurs de λ, savoir :

$$\lambda = \pm \frac{ig(X)}{\pi\Omega(X)c(X)}, \tag{13}$$

valeurs qui ne sont confondues que si $g(X)$ est nul. Si $c(X)$ et $g(X)$ s'annulent en un même point X de $\mathcal{V}$, nos considérations ne peuvent s'appliquer pour aucune valeur de λ; *nous supposons formellement que cela n'arrive pas.*

Si $g(X)$ est identiquement nul, nous avons, pour $\lambda = 1$, les équations

$$-\int G(X, A)\,u(A)\,d\sigma_A = f(X), \tag{14}$$

$$\int G(X, A)\,u(A)\,d\sigma_A = 0, \tag{14 bis}$$

pour lesquelles les mêmes transformations sont possibles, moyennant la condition, nécessaire et suffisante, que $c(X)$ ne s'annule en aucun point de $\mathcal{V}$. Si nous remplaçons $f(X)$ dans (12) par $\lambda f(X)$, puis que nous divisions les deux membres par λ et que nous fassions tendre λ vers l'infini, nous voyons que l'équation (14) apparaît comme un certain cas-limite d'équations du type (12) [on considère à la fois toutes les équations (12) qui ne diffèrent entre elles que par le second membre f]. Pour ce motif, nous dirons que *si c s'annule en un point* X *de* $\mathcal{V}$, *le point à l'infini, dans le plan de la variable complexe* λ, *est exclu de nos considérations; si au contraire* c *ne s'annule nulle part, nos considérations s'appliqueront même à ce point à l'infini, c'est-à-dire à l'équation* (14).

Plaçons-nous dans le cas particulièrement intéressant où g et G sont réels. Alors les valeurs exclues, données par la formule (13), sont purement imaginaires ou nulles ou infinies. Quand X varie sur une des n_1 parties connexes $\mathcal{V}_n$ qui constituent $\mathcal{V}$, λ varie continûment, sauf quand c s'annule. Si g et c ne s'annulent en aucun point de ce $\mathcal{V}_n$, nous avons à exclure, pour ce $\mathcal{V}_n$, deux segments de l'axe purement imaginaire, ces deux segments étant symétriques l'un de l'autre par rapport au point *zéro;* ces segments se réduisent à des points si $\frac{g}{\Omega c}$ est constant. Si c s'annule en au moins un point, mais que g ne s'annule nulle part, nous devons exclure deux demi-droites portées par l'axe purement imaginaire, et symétriques l'une de l'autre par rapport au point *zéro;* ces demi-droites se réduisent au seul point à l'infini si c est identiquement nul. Si g s'annule en au moins un point, mais que c ne s'annule nulle part, nous devons exclure un seul segment porté par l'axe purement imaginaire, et dont le point *zéro* est le milieu; si g est identiquement nul, ce segment se réduit au seul point *zéro*. Si g et c s'annulent tous deux (mais non en un même point), nous devons exclure tout l'axe purement imaginaire. L'ensemble C de tous les points exclus peut donc former jusqu'à $2n_1$ segments de l'axe purement imaginaire, et il peut aussi comprendre tout cet axe; il est toujours fermé, et symétrique par rapport au point *zéro* ([13]). Si C ne comprend pas tout l'axe purement imaginaire, la partie restante E du plan complexe forme un seul *domaine* (en entendant par *domaine* un ensemble ouvert connexe). Si C comprend tout l'axe purement imaginaire, E forme deux domaines.

Si g ou G ne sont pas partout réels, l'ensemble exclu C est encore fermé et symétrique par rapport au point *zéro*, mais il n'est plus nécessairement porté par l'axe purement imaginaire. L'ensemble complémentaire E est ouvert; les domaines dont il se compose ne sont pas nécessairement en nombre fini.

On remarque que si c est identiquement nul sur $\mathfrak{V}$, C se réduit au seul point à l'infini. Dans ce cas, puisque g ne peut s'annuler en aucun point de $\mathfrak{V}$, l'équation (12) est du type de Fredholm, et l'équation (14) est ce qu'on nomme une équation de première espèce, dont pourtant l'inconnue doit remplir une condition de Lipschitz, ce qui empêche de la modifier arbitrairement sur un ensemble de mesure nulle, comme on pourrait le faire sans cette restriction; il est connu que les propriétés des équations de première espèce sont plus compliquées que celles des équations de Fredholm. Cela fait donc un cas où l'on

---

([13]) Dans l'article *i* l'ensemble C n'était pas examiné aussi complètement, et l'on se bornait au cas où g est identique à *un*.

est renseigné sur ce qui se passe quand λ vient sur C. L'étude générale du cas où λ vient sur C semble malaisée, et nous ne nous en occuperons point.

Quand λ appartient à E, nous pouvons former une opération $J^\star_\lambda$,

$$(15)\qquad J^\star_\lambda v(X) = g^\star(X;\lambda)v(X) - \lambda\int G^\star(X, A;\lambda)v(A)\,d\sigma_A,$$

qui jouit des propriétés requises (§ 6); on a

$$(16)\qquad g^\star(X;\lambda) = \frac{g}{g^2+\pi^2\lambda^2\Omega^2c^2}, \qquad c^\star(X;\lambda) = \frac{-c}{g^2+\pi^2\lambda^2\Omega^2c^2}.$$

On pourrait prendre

$$G^\star(X, \Xi;\lambda) = \frac{-G(X, \Xi)}{g^2(X)+\pi^2\lambda^2\Omega^2(X)c^2(X)},$$

mais ce n'est pas obligatoire, et il est utile dans la suite de ne pas garder toujours la même fonction $G^\star$. Toutefois $G^\star(X, \Xi;\lambda)$ *devra toujours être holomorphe par rapport à λ dans* E, pourvu que les points X et Ξ soient différents, et les constantes sous-entendues dans les limitations du paragraphe 2 seront bornées quand λ variera dans un ensemble borné et fermé, contenu dans E; il est toujours possible de s'arranger ainsi, et cela a lieu notamment pour la fonction $G^\star$ particulière qui vient d'être écrite. Nous posons

$$(17)\qquad \begin{aligned} H(X, \Xi;\lambda) = {} & g^\star(X;\lambda)G(X, \Xi) + G^\star(X, \Xi;\lambda)g(\Xi) \\ & -\lambda\int G^\star(X, A;\lambda)G(A, \Xi)\,d\sigma_A, \end{aligned}$$

de sorte qu'on a identiquement

$$(18)\qquad J^\star_\lambda J_\lambda u(X) = u(X) - \lambda\int H(X, A;\lambda)u(A)\,d\sigma_A,$$

quelle que soit la fonction u, pourvu qu'elle remplisse une condition de Lipschitz. De même, nous posons

$$(19)\qquad \begin{aligned} K(X, \Xi;\lambda) = {} & g(X)G^\star(X, \Xi;\lambda) + G(X, \Xi)g^\star(\Xi;\lambda) \\ & -\lambda\int G(X, A)G^\star(A, \Xi;\lambda)\,d\sigma_A, \end{aligned}$$

de sorte que nous avons identiquement

$$J_\lambda J_\lambda^\star u(X) = u(X) - \lambda \int K(X, A; \lambda) u(A) d\sigma_A. \tag{20}$$

Les fonctions H et K remplissent les conditions du paragraphe 2, quel que soit λ dans E, et de plus elles sont sommables; elles sont holomorphes par rapport à λ dans E pourvu que X et Ξ soient distincts; les constantes sous-entendues dans les limitations du paragraphe 2 sont bornées dans les mêmes conditions que pour $G^\star$.

8. Lemme. — A partir de ce lemme et jusqu'au paragraphe 13 inclusivement, nous abandonnons les notations des paragraphes précédents. Seules, les notations du paragraphe 1 sont maintenues.

Soit $H(X, \Xi; \lambda)$ *une fonction mesurable par rapport à chacun des points* X *et* Ξ *de* $\mathcal{V}$ *et par rapport à leur ensemble, quand* λ *appartient à un domaine complexe* D; *on suppose que* H *est borné quand* X *et* Ξ *varient sur* $\mathcal{V}$ *et quand* λ *varie dans n'importe quel ensemble fermé contenu dans* D; *de plus,* H *est holomorphe par rapport à* λ *dans* D. *Il existe alors dans* D *un certain ensemble* E *de points, qui n'a aucun point d'accumulation* ([14]) *dans* D, *et qui est tel qu'en tout point de* D — E *l'équation*

$$\varphi(X) - \lambda \int H(X, A; \lambda) \varphi(A) d\sigma_A = 0 \tag{21}$$

a un nombre constant r de solutions linéairement indépendantes ($r \geqq 0$); *aux points de* E, *la même équation a plus de r solutions linéairement indépendantes.*

Si r est nul, cela signifie que, dans D — E, l'équation (21) n'a que la solution *zéro*. Il en est ainsi si en un point de D l'équation (21) n'a que la solution *zéro;* en effet, pour ce point de D, le déterminant de Fredholm n'est pas nul; or ce déterminant est une fonction holomorphe de λ dans D, et par suite il ne s'annule qu'aux points d'un ensemble E, sans point d'accumulation de D; le théorème se vérifie

([14]) Un point d'accumulation d'un ensemble est, par définition, tout point-limite d'une suite de points de l'ensemble.

donc. Cela arrive en particulier si D contient le point *zéro*, car, pour $\lambda = 0$, l'équation (21) n'a que la solution *zéro*.

Supposons maintenant qu'en tout point de D l'équation (21) ait des solutions non identiquement nulles. Alors le déterminant de Fredholm est identiquement nul dans D. Le mineur d'ordre n de ce déterminant est une fonction de $2n$ points de $\mathcal{V}$ et d'un point λ de D; soit r le plus petit ordre pour lequel ce mineur n'est pas identiquement nul quand ces $2r+1$ éléments varient. Choisissons un système de $2r$ points de $\mathcal{V}$ et d'un point de D, tel que ce mineur ne soit pas nul; si nous faisons varier λ dans D, nous avons une fonction holomorphe, dont les zéros forment un ensemble E_1 sans point d'accumulation dans D. Les positions de λ pour lesquelles le mineur est nul quels que soient les $2r$ points de $\mathcal{V}$, forment un sous-ensemble E de l'ensemble E_1; E n'a donc aucun point d'accumulation dans D. D'après la théorie de Fredholm ([15]), E a les propriétés annoncées. Le lemme est donc établi.

Soit $(X_1, \ldots, X_r; \Xi_1, \ldots, \Xi_r; \lambda_0)$ un système de $2r$ points de $\mathcal{V}$ et d'un point de D, tel que le mineur pris en ces points ne soit pas nul. Bien que le paramètre λ ne figure pas ici comme dans la théorie de Fredholm, nous écrivons ce mineur

$$\mathcal{D}\begin{pmatrix} X_1, & \ldots, & X_r; & \lambda_0 \\ \Xi_1, & \ldots, & \Xi_r; & \end{pmatrix}.$$

Nous avons une solution de (21) en remplaçant un des points $X_1, \ldots, X_r$ par X, et λ_0 par λ; en faisant porter le remplacement successivement sur chacun des points $X_1, \ldots, X_r$, nous avons r solutions, qui sont holomorphes par rapport à λ dans D. Ces solutions sont linéairement indépendantes en tout point de $D - E_1$; elles sont identiquement nulles en tout point de E. On peut trouver un autre système de solutions jouissant des mêmes propriétés, sauf que, pour lui, l'ensemble $E_1 - E$ est remplacé par un autre, dont un point donné de $E_1 - E$ ne fait pas partie.

([15]) Édouard Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. III, 2e édit., Chap. XXXI, § 568; Vito Volterra et Joseph Pérès, *Théorie générale des fonctionnelles*, t. I, Chap. VIII, § 14.

9. LEMME. — *Outre les hypothèses du lemme précédent, supposons que* D *comprend un segment* D_1 *réel, et supposons que* H *est réel quand* λ *appartient à* D_1. *Si le nombre r est positif, on peut trouver r fonctions* $\varphi_n(X; \lambda)$ $(n = 1, \ldots, r)$, *réelles sur* D_1 *et holomorphes par rapport à* λ *dans un certain domaine* $D^\star$ *contenant* D_1, *et, en tout point de* $D^\star$, *ces fonctions satisfont à l'équation* (21); *ces solutions forment en tout point de* $D^\star$ *un système orthogonal et normal, c'est-à-dire qu'on a*

$$(22) \qquad (n-p)\int \varphi_n \varphi_p \, d\sigma = 0, \qquad \int \varphi_n^2 \, d\sigma = 1 \qquad (n, p = 1, \ldots, r).$$

L'intérêt de ce théorème est que les fonctions φ_n sont linéairement indépendantes en tout point de $D^\star$, sans aucune exception pour les points d'un ensemble analogue à l'ensemble E_1 du paragraphe précédent, ni même pour les points de l'ensemble E, où il y a plus de r solutions linéairement indépendantes.

Soient $\varphi_n^\star(X; \lambda)$ $(1 \leqq n \leqq r)$ les solutions de (21) qui ont été trouvées au paragraphe 8; elles sont holomorphes dans D, et elles sont linéairement indépendantes en tout point de $D - E_1$; nous prenons sur D_1 la valeur λ_0 du paragraphe 8, et ainsi ces fonctions sont réelles quand λ appartient à D_1. Suivons les calculs destinés à former un système orthogonal et normal de r fonctions φ_n, qui soient des combinaisons linéaires des $\varphi_n^\star$.

L'intégrale $\int \varphi_1^{\star 2} \, d\sigma$ est holomorphe dans D; elle est positive ou nulle sur D_1, où elle ne peut s'annuler qu'en des points de E_1; ses zéros situés sur D_1 sont d'ordre pair. Soit donc $D^{(1)}$ un domaine simplement connexe, contenu dans D, contenant D_1, et ne contenant aucun autre zéro de cette intégrale que les zéros situés sur D_1. Cette intégrale est le carré d'une fonction $q_1(\lambda)$, holomorphe dans $D^{(1)}$, et réelle sur D_1. Le quotient

$$\frac{\varphi_1^\star(X; \lambda)}{q_1(\lambda)} = \varphi_1(X; \lambda)$$

est méromorphe dans $D^{(1)}$, et réel sur D_1; l'identité

$$\int \varphi_1^2 \, d\sigma = 1$$

montre que φ_1 n'a aucun pôle sur D_1, ni par suite dans $D^{(1)}$, et elle montre aussi que cette fonction n'est identiquement nulle pour aucune valeur de λ dans $D^{(1)}$; dans tout $D^{(1)}$, φ_1 est solution de (21).

Si r est > 1, les fonctions

$$\varphi_n^\star(X;\lambda) - \varphi_1(X;\lambda)\int \varphi_n^\star(A;\lambda)\varphi_1(A;\lambda)\,d\sigma \qquad (n \geqq 2)$$

sont des solutions linéairement indépendantes de (21) en tout point de $D^{(1)} - E$, et elles sont holomorphes dans $D^{(1)}$, et réelles sur D_1; elles sont orthogonales à φ_1. En faisant $n = 2$, nous pouvons appliquer à la fonction obtenue le procédé qui a servi à former φ_1. Nous obtenons ainsi une fonction $\varphi_2(X;\lambda)$, holomorphe dans un domaine $D^{(2)}$ simplement connexe, contenu dans $D^{(1)}$ et contenant D_1; c'est une solution de (21), et l'on a

$$\int \varphi_1\varphi_2\,d\sigma = 0, \qquad \int \varphi_2^2\,d\sigma = 1.$$

Et ainsi de suite. Finalement nous aurons bien un système de r fonctions φ_n, qui jouissent des propriétés de l'énoncé dans un certain domaine $D^{(r)} = D^\star$.

Aux points de l'ensemble $D^\star E$ (commun à $D^\star$ et à E), l'équation (21) a en outre des solutions linéairement indépendantes des φ_n.

10. Lemme. — *Soient* $H_{\alpha,\beta}(X, \Xi; \lambda)$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, p)$ *un système de* p^2 *fonctions qui satisfont aux mêmes hypothèses que la fonction* H *du paragraphe* 9. *On suppose que le système d'équations intégrales*

$$\varphi_\alpha(X) - \lambda\Sigma_\beta \int H_{\alpha,\beta}(X, A;\lambda)\varphi_\beta(A)\,d\sigma_A = 0. \tag{23}$$

admet des solutions non identiquement nulles quel que soit λ *dans* D. *Alors on peut trouver un certain nombre* r *de systèmes de* p *fonctions* $[\varphi_{1,n}(X;\lambda), \ldots, \varphi_{p,n}(X;\lambda)]$ $(1 \leqq n \leqq r)$, *holomorphes par rapport à* λ *dans un certain domaine* $D^\star$ *contenant* D_1, *et qui, en tout point de* $D^\star$, *sont solutions de* (23); *en tout point de* $D^\star$, *ces solutions forment un système orthogonal et normal, c'est-à-dire qu'on a*

$$(n-p)\int \Sigma_\alpha \varphi_{\alpha,n}\varphi_{\alpha,p}\,d\sigma = 0, \qquad \int \Sigma_\alpha \varphi_{\alpha,n}^2\,d\sigma = 1; \tag{24}$$

les $\varphi_{\alpha,n}$ *sont réels sur* D_1 ; *enfin le système* (23) *n'a de solution linéairement indépendante des précédentes, que si* λ *appartient à un certain ensemble* E *qui n'a aucun point d'accumulation dans* $D^\star$.

Ce lemme se ramène au précédent. Considérons p variétés $\mathcal{W}_\alpha (\alpha = 1, \ldots, p)$, toutes identiques à $\mathcal{V}$, et dont l'ensemble sera considéré comme constituant une variété $\mathcal{W}$. La fonction $H(X, \Xi; \lambda)$ qui, quand X appartient à $\mathcal{W}_\alpha$ et Ξ à $\mathcal{W}_\beta$, est égale aux valeurs correspondantes de $H_{\alpha,\beta}$, remplit les conditions du paragraphe 9, et les conclusions du même paragraphe sont applicables à l'équation

$$\varphi(X) - \lambda \int_{\mathcal{W}} H(X, A; \lambda)\varphi(A)\, d\sigma_A = 0,$$

qui équivaut au système (23) à condition que, sur $\mathcal{W}_\alpha$, φ soit égal aux valeurs correspondantes de φ_α. Avec ces définitions, le nouveau lemme n'est qu'une traduction de celui du paragraphe 9.

11. Lemme. — *Dans les hypothèses générales du paragraphe* 8, *si r est positif, tout point* λ_0 *de* D *est intérieur à un domaine* $D^\star$, *dépendant de* λ_0, *contenu dans* D, *où l'on peut trouver r solutions* φ_n *de* (21) *et r autres fonctions* $\chi_n (1 \leqq n \leqq r)$, *telles qu'on ait*

$$(25)\quad (n-p)\int \varphi_n \chi_p\, d\sigma = 0, \qquad \int \varphi_n \chi_n\, d\sigma = 1 \qquad (1 \leqq n \leqq r,\ 1 \leqq p \leqq r),$$

et les $2r$ *fonctions* φ_n *et* χ_n *sont holomorphes par rapport à* λ *dans* $D^\star$.

Soit λ_0 un point de D; si c'était le point *zéro*, on aurait $r = 0$ (§ 8); donc λ_0 n'est pas nul. Posons

$$\lambda_0 H(X, \Xi; \lambda_0 \mu) = R(X, \Xi; \mu) + i I(X, \Xi; \mu),$$

où R et I sont réels avec μ; ce sont des fonctions holomorphes de μ dans un domaine D_μ qui contient le point *un*. A toute solution du système

$$(26)\quad \begin{cases} \psi(X) - \mu \displaystyle\int [R(X, A; \mu)\psi(A) - I(X, A; \mu)\omega(A)]\, d\sigma_A = 0, \\ \omega(X) - \mu \displaystyle\int [I(X, A; \mu)\psi(A) + R(X, A; \mu)\omega(A)]\, d\sigma_A = 0, \end{cases}$$

correspond une solution $\varphi = \psi + i\omega$ de l'équation (21) pour $\lambda = \lambda_0 \mu$.

Le système (26) satisfait aux hypothèses du paragraphe 10. Si (ψ, ω) en est une solution, $(-\omega, \psi)$ en est une autre solution, et ces deux solutions sont orthogonales. Dès que, conformément aux paragraphes 10 et 9, nous avons formé une solution (ψ_1, ω_1) de (26), holomorphe pour $\mu = 1$, réelle avec μ au voisinage de *un*, et telle qu'on ait

$$\int (\psi_1^2 + \omega_1^2)\, d\sigma = 1,$$

nous avons une autre solution $(-\omega_1, \psi_1)$, orthogonale à la première et qui jouit des mêmes propriétés que celle-ci. S'il reste des solutions linéairement indépendantes des deux premières, nous obtiendrons une autre solution (ψ_2, ω_2), orthogonale aux deux premières et qui jouit des mêmes propriétés que (ψ_1, ω_1); mais alors $(-\omega_2, \psi_2)$ jouit de ces mêmes propriétés, et est orthogonale aux trois solutions (ψ_1, ω_1), $(-\omega_1, \psi_1)$ et (ψ_2, ω_2), ce qui entraîne l'indépendance linéaire des quatre solutions ainsi trouvées. Et ainsi de suite. Finalement nous obtenons 2ρ solutions (ψ_n, ω_n) et $(-\omega_n, \psi_n)$ de (26) $(1 \leqq n \leqq \rho)$, qui forment un système orthogonal et normal en tout point d'un domaine D_μ^* qui contient le point $\mu = 1$, domaine dans lequel ces solutions sont fonctions holomorphes de μ, et réelles avec μ. Sauf aux points d'un ensemble dépourvu de point d'accumulation dans D_μ^*, toute solution de (26) est une combinaison linéaire de ces 2ρ solutions.

Les fonctions

$$\varphi_n = \psi_n + i\omega_n, \qquad \chi_n = \psi_n - i\omega_n \qquad (1 \leqq n \leqq \rho)$$

forment deux suites finies, biorthogonales et normales, c'est-à-dire qu'on a

$$(27) \quad (n-p)\int \varphi_n \chi_p\, d\sigma = 0, \qquad \int \varphi_n \chi_n\, d\sigma = 1 \qquad (1 \leqq n \leqq \rho,\ 1 \leqq p \leqq \rho).$$

Cela entraîne que les ρ fonctions φ_n sont linéairement indépendantes. Comme elles sont solutions de (21) pour $\lambda = \lambda_0 \mu$, on a $r \geqq \rho$. Mais quand μ est réel et appartient à D_μ^*, toute solution de (21) peut être mise d'une façon et d'une seule sous la forme $\psi + i\omega$, où (ψ, ω) est une solution réelle de (26). D'autre part, entre les $2r$ fonctions φ_n et $i\varphi_n (1 \leqq n \leqq r)$, il n'existe aucune combinaison linéaire à coefficients réels qui soit identiquement nulle, sinon la combinaison où tous les coefficients sont nuls, car les fonctions φ_n sont linéairement indépendantes; donc 2ρ est $\geqq 2r$. Par suite r est égal à ρ. Les relations (27) sont donc les relations annoncées (25). On voit d'ailleurs que les φ_n et les χ_n sont holomorphes dans le domaine $D^\star$ déduit de $D^\star_\mu$ par la transformation $\lambda = \lambda_0 \mu$; $D^\star$ contient λ_0.

12. Lemme. — *Dans les paragraphes* 8 *à* 11, *remplaçons l'hypothèse que* H *est borné par celles qu'il est sommable par rapport à chaque point et par rapport à leur ensemble, et que les noyaux itérés de* H *existent, et que, à partir d'un certain rang, ils sont bornés quand* X *et* Ξ *varient sur* $\mathcal{V}$ *et quand* λ *varie dans un ensemble fermé donné, contenu dans* D. *En maintenant les autres hypothèses des paragraphes* 8 *à* 11, *les conclusions subsistent.*

Ce sera établi si nous prouvons qu'en choisissant un certain noyau itéré borné, toutes les solutions de l'équation obtenue appartiennent à l'équation (21), sauf peut-être aux points d'un ensemble dépourvu de points d'accumulation dans D. Introduisons un paramètre μ, qui pourra prendre des valeurs $\mu_n (n = 1, \ldots, p)$, et posons

$$F_n u(X) = u(X) - \mu_n \lambda \int H(X, A; \lambda) u(A) \, d\sigma_A.$$

Nous regardons λ comme égal à une constante donnée. Je dis que *toute solution de l'équation homogène*

$$F_1 F_2 \ldots F_p u(X) = 0, \tag{28}$$

où le premier membre désigne le résultat obtenu en appliquant d'abord à $F_p u(X)$ l'opération F_{p-1}, puis à ce premier résultat, si p est > 2, l'opération F_{p-2}, et ainsi de suite jusqu'à F_1, *est une combinaison linéaire de solutions des équations*

$$F_1 u = 0, \qquad F_2 u = 0, \qquad \ldots, \qquad F_p u = 0,$$

à condition que $\mu_1, \ldots, \mu_p$ *soient distincts.* Nous allons procéder par induction, en supposant la propriété vraie pour une opération de moins; comme, pour $p = 1$, l'énoncé se réduit à une tautologie, la démonstration sera complète. Il est évident que le produit $\mu_1 \ldots \mu_p$ peut être supposé non nul. Or on a, pour toute solution de (28),

$$F_1 F_2 \ldots F_{p-1} v(X) = 0,$$

en posant $F_p u(X) = v(X)$. Alors nous avons, par hypothèse,

$$v(X) = v_1(X) + v_2(X) + \ldots + v_{p-1}(X),$$

où $v_n(X)$ est une solution de $F_n v_n(X) = 0$. Mais on a

$$F_p v_n(X) = \left(1 - \frac{\mu_p}{\mu_n}\right) v_n(X);$$

donc $u(X) - \sum_{n=1}^{p-1} \frac{\mu_n}{\mu_n - \mu_p} v_n(X)$ est une solution $v_p(X)$ de l'équation $F_p v_p = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

La réciproque, qu'il est inutile d'énoncer, est évidente. On remarquera que les opérations F_n sont permutables.

En particulier, si nous prenons $\mu_n = \exp \frac{2in\pi}{p}$ $(1 \leqq n \leqq p)$, $F_1 \ldots F_p$ est l'opération itérée de rang p.

L'équation

$$u(X) - \mu\lambda \int H(X, A; \lambda) u(A)\, d\sigma_A = 0,$$

où λ a une valeur donnée λ_0, n'a de solutions non identiquement nulles que pour des valeurs de μ en nombre fini dans toute région bornée. En particulier, cela n'arrive que pour un nombre fini de valeurs sur la circonférence $|\mu| = 1$; parmi ces valeurs, ne retenons que celles dont l'argument θ est le produit de π par un nombre rationnel; s'il y a au moins une telle valeur de μ, non égale à *un*, mettons la ou les valeurs de $\frac{\theta}{2\pi}$ sous forme de fractions irréductibles, et désignons par N le produit de tous les dénominateurs; nous choisirons un rang p d'itération qui soit premier avec N, et qui soit assez grand pour que le noyau itéré soit borné; si $\mu = 1$ est la seule valeur retenue, il suffit de prendre n'importe quel noyau itéré borné.

Le rang d'itération étant ainsi choisi, nous avons atteint notre but :

toutes les solutions de l'équation itérée

$$(29)\qquad \varphi(X) - \lambda^p \int H^{(p)}(X, A; \lambda)\varphi(A)\, d\sigma_A = 0$$

satisfont à l'équation (21), sauf peut-être quand λ appartient à un certain ensemble dépourvu de points d'accumulation dans D; nous allons le démontrer. Tout d'abord si l'entier positif n est $< p$, l'équation

$$(30)\qquad \varphi(X) - \exp\frac{2ni\pi}{p}\lambda \int H(X, A; \lambda)\varphi(A)\, d\sigma_A = 0$$

n'a de solution non identique à zéro que quand λ appartient à un certain ensemble sans point d'accumulation dans D; ce dernier ensemble peut même être vide. En effet, pour $\lambda = \lambda_0$, l'équation (30) n'a pas de solution non identiquement nulle. Par conséquent, certaines équations itérées de (30) ont un noyau borné et n'ont, pour $\lambda = \lambda_0$, que la solution *zéro;* à ces équations itérées, le paragraphe 8 s'applique, et par suite elles ne peuvent avoir de solution autre que *zéro*, que lorsque λ appartient à un certain ensemble sans point d'accumulation dans D. Il en est donc de même pour (30), puisque toutes ses solutions appartiennent à toutes les équations itérées. Or, les solutions de (29) ne peuvent ne pas satisfaire à l'équation (21) que si une des équations (30) a des solutions non identiquement nulles, d'après ce qui a été établi pour l'équation (28). Le lemme est donc démontré.

13. **Remarque.** — On pourrait trouver r solutions $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ de l'équation (21), telles qu'on eût, pour tout point λ de D,

$$(n-p)\int \varphi_n \bar{\varphi}_p\, d\sigma = 0, \qquad \int \varphi_n \bar{\varphi}_n\, d\sigma = 1 \qquad (1 \leqq n \leqq r,\ 1 \leqq p \leqq r),$$

où $\bar{\varphi}_n$ est l'imaginaire conjuguée de φ_n. On pourrait faire en sorte que ces φ_n fussent fonctions analytiques de λ et de son imaginaire conjuguée $\bar{\lambda}$, mais on ne pourrait ordinairement pas faire en sorte qu'ils fussent fonctions holomorphes de λ seul. Cela nous détourne d'employer ces fonctions φ_n dans les raisonnements qui vont suivre.

14. **Choix d'opérations auxiliaires particulières.** — Nous revenons

à l'opération auxiliaire $J_\lambda^\star$, exprimée par la relation (15) (§ 7). Le noyau $G^\star$ est arbitraire dans une large mesure, puisque $c^\star(X; \lambda)$ seul est déterminé. Nous allons remplacer ce noyau $G^\star$ successivement par d'autres noyaux, qui ne seront holomorphes que dans des domaines plus restreints, mais qui jouiront de propriétés nouvelles. Étant donné un point λ_0, qui appartient à l'ensemble E du paragraphe 7, les noyaux que nous formerons maintenant seront fonctions méromorphes de λ, dans un domaine qui contienne λ_0; ce domaine n'aura pas de point commun avec C, mais sa frontière peut contenir des points qui n'appartiennent pas à C.

Soit d'abord $G^\star$ un noyau conforme aux conditions posées dans le paragraphe 7. D'après le lemme du paragraphe 12, appliqué à l'opération (18) et à l'opération associée, il existe $4r_1$ fonctions $\varphi_1(X; \lambda)$, $\rho_n(X; \lambda)$, $\psi_n^\star(X; \lambda)$ et $\omega_n^\star(X; \lambda)$ $(1 \leqq n \leqq r_1)$, holomorphes par rapport à λ dans un certain domaine D_1 qui contient λ_0, et où, jusqu'à nouvel avis, seront situées toutes les valeurs considérées de λ, et qui remplissent les conditions

$$\varphi_n(X; \lambda) - \lambda \int H(X, A; \lambda) \varphi_n(A; \lambda)\, d\sigma_A = 0, \tag{31}$$

$$(n-p) \int \varphi_n \rho_p \, d\sigma = 0, \qquad \int \varphi_n \rho_n \, d\sigma = 1 \quad ([16]), \tag{32}$$

$$\psi_n^\star(\Xi; \lambda) - \lambda \int H(A, \Xi; \lambda) \psi_n^\star(A; \lambda)\, d\sigma_A = 0,$$

$$(n-p) \int \psi_n^\star \omega_p^\star \, d\sigma = 0, \qquad \int \psi_n^\star \omega_n^\star \, d\sigma = 1 \qquad (1 \leqq n \leqq r_1,\ 1 \leqq p \leqq r_1);$$

si le nombre r_1 relatif à la partie de E à laquelle appartient λ_0, est nul, les fonctions φ_n, ρ_n, $\psi_n^\star$ et $\omega_n^\star$ n'existent pas, et l'on doit remplacer par zéro les sommations qui porteront sur ces fonctions dans les calculs qui vont suivre. D'après un article qui a récemment paru ([17]), il existe, en tout point de D_1 où l'équation $J_\lambda^\star J_\lambda u = 0$ n'a que r_1 solutions linéairement indépendantes, une fonction $R^\star$ parfaitement déterminée,

---

([16]) Dans une Note aux *C. R. Acad. sc.* (t. 204, 1937, p. 628 à 630), les ρ_n ont été pris identiques aux φ_n, ce qui est possible quand λ_0 est réel (§ 9): on peut aussi atteindre de cette façon le cas général, à condition de considérer deux équations au lieu d'une (§§ 10, 11 et 24).

([17]) *m*, spécialement Chap. I, §§ 4 à 6.

qui remplit les conditions

$$(33)\quad \begin{aligned}&R^\star(X, \Xi; \lambda) + H(X, \Xi; \lambda)\\ &\quad - \lambda \int R^\star(X, A; \lambda) H(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A = \sum_n \frac{\varphi_n(X; \lambda)\rho_n(\Xi; \lambda)}{\lambda},\end{aligned}$$

$$(34)\quad \rho_n(\Xi; \lambda) - \lambda \int \rho_n(A; \lambda) R^\star(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A = 0 \qquad (1 \leqq n \leqq r_1),$$

$$\begin{aligned}&R^\star(X, \Xi; \lambda) + H(X, \Xi; \lambda)\\ &\quad - \lambda \int H(X, A; \lambda) R^\star(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A = \sum_n \frac{\omega_n^\star(X; \lambda)\psi_n^\star(\Xi; \lambda)}{\lambda};\end{aligned}$$

la relation (34) disparaît si r_1 est nul. D'après la façon dont on l'obtient, cette fonction $R^\star$ est méromorphe dans D_1 : ses pôles sont les points où l'équation $J_\lambda^\star J_\lambda u = 0$ a plus de r_1 solutions linéairement indépendantes; les sommes $\sum_n \frac{\varphi_n \rho_n}{\lambda}$ et $\sum_n \frac{\omega_n^\star \psi_n^\star}{\lambda}$ sont en effet holomorphes dans D_1, même si D_1 contient le point zéro, car dans ce dernier cas r_1 est nul, et alors ces sommes sont nulles. Si λ varie de façon que la distance du point λ aux pôles de $R^\star$ et à la frontière de D_1 ait une borne inférieure positive, $R^\star(X, \Xi; \lambda)$ est sommable par rapport à chacun des points X et Ξ dans le champ ainsi défini pour λ, et remplit les conditions du paragraphe 2 ([18]). Dans (33), remplaçons H par son expression (17) :

$$\begin{aligned}&R^\star(X, \Xi; \lambda) + g^\star(X; \lambda) G(X, \Xi) + G^\star(X, \Xi; \lambda) g(\Xi)\\ &\quad - \lambda \int G^\star(X, A; \lambda) G(A, \Xi)\, d\sigma_A - \lambda \int R^\star(X, A; \lambda)\\ &\quad \times \left[g^\star(A; \lambda) G(A, \Xi) + G^\star(A, \Xi; \lambda) g(\Xi) - \lambda \int G^\star(A, B; \lambda) G(B, \Xi)\, d\sigma_B \right] d\sigma_A\\ &\quad = \sum_n \frac{\varphi_n(X; \lambda)\rho_n(\Xi; \lambda)}{\lambda}.\end{aligned}$$

En nous rappelant que $R^\star$ est sommable, nous avons, d'après le paragraphe 4,

$$\begin{aligned}&\lambda^2 \int R^\star(X, A; \lambda) \int G^\star(A, B; \lambda) G(B, \Xi)\, d\sigma_B\, d\sigma_A\\ &\quad = \lambda^2 \int G(B, \Xi) \int R^\star(X, A; \lambda) G^\star(A, B; \lambda)\, d\sigma_A\, d\sigma_B\\ &\qquad + \lambda^2 \pi^2 \Omega^2(\Xi) c(\Xi) c^\star(\Xi; \lambda) R^\star(X, \Xi; \lambda);\end{aligned}$$

([18]) Conséquence immédiate de l'article cité *i*, spécialement Chap. I, § 2.

d'ailleurs, d'après les relations (16), nous avons

$$\lambda^2\pi^2\Omega^2 cc^\star = gg^\star - 1.$$

En tenant compte de ces résultats et en posant

$$(35) \qquad \mathrm{R}_1(\mathrm{X}, \Xi; \lambda) = \mathrm{R}^\star(\mathrm{X}, \Xi; \lambda) g^\star(\Xi; \lambda) + \mathrm{G}^\star(\mathrm{X}, \Xi; \lambda) - \lambda \int \mathrm{R}^\star(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \lambda) \mathrm{G}^\star(\mathrm{A}, \Xi; \lambda)\, d\sigma_{\mathrm{A}},$$

la relation (33) devient enfin

$$(36) \qquad g^\star(\mathrm{X}; \lambda) \mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi) + \mathrm{R}_1(\mathrm{X}, \Xi; \lambda) g(\Xi) - \lambda \int \mathrm{R}_1(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \lambda) \mathrm{G}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\sigma_{\mathrm{A}} = \sum_n \frac{\varphi_n(\mathrm{X}; \lambda) \rho_n(\Xi; \lambda)}{\lambda}.$$

Par rapport à λ, R_1 est méromorphe dans D_1, et ses pôles sont les mêmes que ceux de $\mathrm{R}^\star$; si le point λ varie de façon que sa distance aux pôles et à la frontière de D_1 ait une borne inférieure positive, R_1 remplit les conditions du paragraphe 2, et, par rapport à chacun des points X et Ξ, la différence $\mathrm{R}_1 - \mathrm{G}^\star$ est sommable. Les relations (34) et (35) entraînent

$$(37) \qquad g^\star(\Xi; \lambda) \rho_n(\Xi; \lambda) - \lambda \int \rho_n(\mathrm{A}; \lambda) \mathrm{R}_1(\mathrm{A}, \Xi; \lambda)\, d\sigma_{\mathrm{A}} = 0.$$

En nous servant non plus de H, mais du noyau K défini par la relation (19), nous formons de même des fonctions $\psi_n(\mathrm{X}; \lambda)$ et $\omega_n(\mathrm{X}; \lambda)$ ($1 \leqq n \leqq s_1$; s_1 est parfois nul), holomorphes dans un domaine D_2 contenu dans D_1 et contenant λ_0, et qui remplissent les conditions

$$(38) \qquad \psi_n(\Xi; \lambda) - \lambda \int \psi_n(\mathrm{A}; \lambda) \mathrm{K}(\mathrm{A}, \Xi; \lambda)\, d\sigma_{\mathrm{A}} = 0,$$

$$(39) \qquad (n-p) \int \psi_n \omega_p\, d\sigma = 0, \qquad \int \psi_n \omega_n\, d\sigma = 1 \qquad (1 \leqq n \leqq s_1,\ 1 \leqq p \leqq s_1),$$

et nous formons en outre une fonction $\mathrm{R}_2(\mathrm{X}, \Xi; \lambda)$, méromorphe dans D_2, et qui remplit les conditions

$$(40) \qquad g(\mathrm{X}) \mathrm{R}_2(\mathrm{X}, \Xi; \lambda) + \mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi) g^\star(\Xi; \lambda) - \lambda \int \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) \mathrm{R}_2(\mathrm{A}, \Xi; \lambda)\, d\sigma_{\mathrm{A}} = \sum_n \frac{\omega_n(\mathrm{X}; \lambda) \psi_n(\Xi; \lambda)}{\lambda},$$

$$(41) \qquad g^\star(\mathrm{X}; \lambda) \omega_n(\mathrm{X}; \lambda) - \lambda \int \mathrm{R}_2(\mathrm{X}, \mathrm{A}; \lambda) \omega_n(\mathrm{A}; \lambda)\, d\sigma_{\mathrm{A}} = 0.$$

De plus, si le point λ varie dans D_2 de façon que sa distance aux pôles de R_2 et à la frontière de D_2 ait une borne inférieure positive, R_2 remplit les conditions du paragraphe 2, et, par rapport à chacun des points X et Ξ, la différence $R_2 - G^\star$ est sommable. Les pôles de R_2 sont les points de D_2 où l'équation $J_\lambda J_\lambda^\star u = 0$ a plus de s_1 solutions linéairement indépendantes.

15. **Nouveau choix d'opérations auxiliaires.** — De ce qu'on a

$$J_\lambda^\star J_\lambda \varphi_n = 0,$$

il résulte qu'en posant

$$J_\lambda \varphi_n = v_n,$$

on a

$$J_\lambda^\star v_n = 0,$$

mais il n'en résulte pas qu'on ait $v_n = 0$. Si r fonctions v_n sont, sauf pour des valeurs exceptionnelles de λ, des combinaisons linéaires des autres, et si ces dernières sont linéairement indépendantes, nous pouvons faire en sorte que, parmi les r_1 fonctions v_n, les r premières soient identiquement nulles; ce résultat est obtenu d'emblée dans deux cas : celui où les r_1 fonctions v_n sont linéairement indépendantes, et alors, pour la suite, on posera $r = 0$, et le cas où tous les v_n sont identiquement nuls, cas où, dans les paragraphes suivants, on posera $r = r_1$; nous supposons donc ici $0 < r < r_1$. Pour obtenir le résultat annoncé, il suffit de remplacer les r_1 fonctions $\varphi_n(X; \lambda)$ par r_1 combinaisons linéaires distinctes, les coefficients qui interviennent dans ces combinaisons étant méromorphes par rapport à λ dans un domaine qui contient λ_0; en même temps, les fonctions ρ_n sont remplacées par d'autres, déduites des premières par la transformation transposée de l'inverse de celle qui intervient pour les φ_n (de sorte que si les φ_n et les ρ_n étaient des variables indépendantes, ces transformations conserveraient $\Sigma_n \varphi_n \rho_n$); on vérifie en effet qu'ainsi les nouvelles fonctions φ_n et ρ_n remplissent encore les conditions (32), ce qui suffit pour notre objet; il est d'ailleurs évident que les identités (36) et (37) subsistent si, sans changer R_1, nous y remplaçons les anciennes fonctions φ_n et ρ_n par les nouvelles. La question étant ainsi ramenée à la recherche de la transformation linéaire à appliquer à l'ensemble des fonctions φ_n, nous remarquons que les fonctions $J_\lambda \varphi_n = v_n$ subissent la même transformation linéaire. Dès lors, cette transformation et le nombre r se trouvent par le procédé de l'orthogonalisation : par les points λ_0 et *zéro* (non confondus puisque, par hypothèse, r_1 n'est pas nul), menons une droite dont L sera un segment ouvert, contenu dans D_2 et contenant λ_0 ; en supposant que λ appartienne à L, nous formons des combinaisons linéaires $w_n (n = r_1, r_1 - 1, \ldots)$ de nos fonctions v_n, telles qu'on ait, quels que soient n et p,

$$(n-p)\int w_n \overline{w}_p \, d\sigma = 0, \qquad \int w_n \overline{w}_n \, d\sigma = 1,$$

$\overline{w}_n$ désignant l'imaginaire conjuguée de w_n; le procédé classique s'arrête de lui-même après la formation de $r_1 - r$ fonctions w_n, car, après qu'on a retranché des r fonctions v_n encore inemployées, des combinaisons linéaires de ces $r_1 - r$ fonctions w_n, de façon que les restes soient orthogonaux à ces fonctions w_n, ces restes sont nuls. Ainsi nous avons trouvé une transformation linéaire, de déterminant non nul, qui, appliquée aux v_n, donne $r_1 - r$ fonctions linéairement indépendantes et r fonctions identiquement nulles, λ appartenant à L et n'étant pas exceptionnel; des raisonnements semblables à ceux du paragraphe 11 prouvent d'ailleurs que les coefficients qui définissent cette transformation sont *méromorphes* dans une région qui contient L; dans cette région donc, en dehors des pôles des coefficients, nous avons bien $r_1 - r$ fonctions linéairement indépendantes qui sont des combinaisons linéaires des v_n, et r autres combinaisons linéaires qui sont identiquement nulles. La transformation linéaire, à coefficients méromorphes et à déterminant non nul, qui vient d'être appliquée aux v_n, c'est celle qu'il suffit d'appliquer aux φ_n, d'après ce qui a été dit il y a un instant.

Toutefois nous désirons que les fonctions φ_n soient non seulement méromorphes, mais holomorphes dans un domaine qui contienne λ_0 : nous y parvenons encore par le procédé de l'orthogonalisation, appliqué comme aux paragraphes 9 et 11, en rangeant les fonctions déjà obtenues dans l'ordre naturel des indices; ainsi les r premières nouvelles fonctions φ_n dépendent uniquement des r premières fonctions déjà obtenues, et le résultat antérieur n'est pas détruit. Les fonctions φ_n holomorphes qui résultent du nouveau calcul, sont linéairement indépendantes; les fonctions ρ_n sont aussi holomorphes; les $r_1 - r$ fonctions $J_\lambda \varphi_n$ dont l'indice n est $> r$, sont linéairement indépendantes, sauf peut-être aux pôles d'une certaine fonction méromorphe.

Nous supposons que ces opérations, et les opérations analogues relatives aux ψ_n, pour lesquelles intervient l'opération

$$\bar{J}_\lambda u(\Xi) = g(\Xi) u(\Xi) - \lambda \int G(A, \Xi) u(\Xi)\, d\sigma_A,$$

nommée l'associée de J_λ, ont été accomplies avant la formation de R_1 et de R_2, de sorte que nous n'avons pas à changer les notations du paragraphe 14. Pour les ψ_n, s sera le nombre analogue à r, de sorte que, si s est positif, les ψ_n dont l'indice n est $\leqq s$ rempliront la condition

$$\bar{J}_\lambda \psi_n = 0 \qquad (n \leqq s),$$

et, si s est $< s_1$, les autres $\bar{J}_\lambda \psi_n$ seront linéairement indépendants. L'ensemble D_2, qui contient λ_0, est, par définition, tel que toutes les fonctions φ_n, ρ_n, ψ_n et ω_n y sont holomorphes, et R_1 et R_2 y sont méromorphes.

Si r_1 est $> r \geqq 0$, nous allons maintenant former un autre noyau R_3, analogue à R_1; il sera relatif à une opération J_λ^{**}, qui doit remplir les mêmes conditions que J_λ^*. Pour R_3, les fonctions analogues aux φ_n comprendront d'abord $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$, puis un nombre indéterminé $r_2 - r$ d'autres fonctions, que nous nommerons encore φ_n, en donnant à l'indice n des valeurs supérieures à r_1 : $r_1 < n \leqq r_1 + r_2 - r$ (si r_2 est $> r$). Mais nous voulons absolument que les $r_1 + r_2 - 2r$ fonctions φ_n dont l'indice n est $> r$ (savoir $r_1 - r$ fonctions qui interviennent pour R_1, et $r_2 - r$ fonctions qui interviennent pour R_3), soient linéairement indépendantes. Il s'agit de former une opération J_λ^{**}, remplissant les conditions du paragraphe 7, et telle que, pour aucune combinaison linéaire φ des φ_n pour lesquels on a $r < n \leqq r_1$, on n'ait $J_\lambda^{**} J_\lambda \varphi = 0$, sauf peut-être aux pôles d'une certaine fonction méromorphe de λ, et à moins que φ ne soit identiquement nul. Pour cela, nous posons de nouveau $J_\lambda \varphi_n = v_n (r < n \leqq r_1)$ et nous reprenons les combinaisons linéaires w_n des v_n, combinaisons qui constituent un système orthogonal et normal en tout point de L; nous nommons w_n les fonctions holomorphes de λ qui coïncident sur L avec ces combinaisons linéaires, et nous nommons u_n les fonctions holomorphes de λ qui coïncident sur L avec les imaginaires conjuguées des w_n, de sorte qu'on a

$$(n-p)\int w_n u_p d\sigma = 0, \qquad \int w_n u_n d\sigma = 1;$$

les $2r_1 - 2r$ fonctions w_n et u_n ne sont peut-être holomorphes que dans un domaine D_3 compris dans D_2, mais D_3 contient λ_0; si elles sont holomorphes dans tout D_2, D_3 sera identique à D_2. Alors, à la fonction $G^\star$ qui nous a fourni R_1, nous ajoutons la fonction

$$S(X, \Xi; \lambda) = \Sigma_{r<n\leqq r_1} a_n(X; \lambda) u_n(\Xi; \lambda),$$

où les $a_n(X; \lambda)$ sont des fonctions linéairement indépendantes, arbitrairement choisies, mais holomorphes dans D_3; c'est cette somme $G^\star + S$ qui remplace $G^\star$ pour la formation de $J_\lambda^{\star\star}$ et de R_3. Il est clair qu'on a

$$J_\lambda^{\star\star} w_n = -\lambda a_n,$$

résultats linéairement indépendants par hypothèse (car si le point *zéro* appartenait à D, tous ces calculs seraient sans objet, r_1 étant nul). Ainsi les $r_1 + r_2 - 2r$ fonctions φ_n dont l'indice n est $> r$, sont linéairement indépendantes, sauf peut-être aux pôles d'une certaine fonction méromorphe (les pôles des coefficients qui ont servi à former les w_n).

Si nous remplaçons R_1 par R_3 dans le premier membre de (36), il faut remplacer le second membre par

$$\sum_{n\leqq r} \frac{\varphi_n(X; \lambda)\rho_n(\Xi; \lambda)}{\lambda} + \sum_{n>r_1} \frac{\varphi_n(X; \lambda)\rho_n(\Xi; \lambda)}{\lambda}.$$

Retranchons membre à membre la nouvelle identité de la première :

$$\begin{aligned} &[R_1(X, \Xi; \lambda) - R_3(X, \Xi; \lambda)] g(\Xi) \\ &\quad - \lambda \int [R_1(X, A; \lambda) - R_3(X, A; \lambda)]\, G(A, \Xi)\, d\sigma_A \\ &\quad = \sum_{r<n\leqq r_1} \frac{\varphi_n(X; \lambda)\rho_n(\Xi; \lambda)}{\lambda} - \sum_{n>r_1} \frac{\varphi_n(X; \lambda)\rho_n(\Xi; \lambda)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Au second membre figurent $r_1 + r_2 - 2r$ fonctions φ_n linéairement indépendantes. Donnons à X successivement $r_1 + r_2 - 2r$ positions, de façon que, pour un point λ_1 où R_1 et R_3 sont holomorphes, le déterminant des valeurs de ces φ_n ne soit pas nul; nous avons ainsi r_1+r_2-2r équations que nous résolvons par rapport aux ρ_n. Nous mettons ainsi chacune des r_1+r_2-2r fonctions ρ_n sous la forme

$$\rho_n(\Xi;\lambda)=\lambda\tau_n(\Xi;\lambda)g(\Xi)-\lambda^2\int\tau_n(A;\lambda)G(A,\Xi)\,d\sigma_A,$$

où les τ_n sont méromorphes dans D_3. En posant alors

$$R_4(X,\Xi;\lambda)=R_1(X,\Xi;\lambda)-\Sigma_{r<n\leqq r_1}\varphi_n(X;\lambda)\tau_n(\Xi;\lambda),$$

nous avons

$$(43)\qquad \begin{aligned} &g^*(X;\lambda)G(X,\Xi)+R_4(X,\Xi;\lambda)g(\Xi)\\ &\quad-\lambda\int R_4(X,A;\lambda)G(A,\Xi)\,d\sigma_A=\sum\nolimits_{n\leqq r}\frac{\varphi_n(X;\lambda)\rho_n(\Xi;\lambda)}{\lambda},\end{aligned}$$

$$(44)\qquad g^*(\Xi;\lambda)\rho_n(\Xi;\lambda)-\lambda\int\rho_n(A;\lambda)R_4(A,\Xi;\lambda)\,d\sigma_A=0\qquad(n\leqq r),$$

la dernière relation résultant de (32) et de (37).

Nous formons de même une fonction R_5, méromorphe dans un domaine D_4, contenu dans D_3 et contenant λ_0, et qui remplit les mêmes conditions que R_2, mais pour laquelle s_1 est remplacé par s, de sorte qu'on a

$$(45)\qquad \begin{aligned} &g(X)R_5(X,\Xi;\lambda)+G(X,\Xi)g^*(\Xi;\lambda)\\ &\quad-\lambda\int G(X,A)R_5(A,\Xi;\lambda)\,d\sigma_A=\sum\nolimits_{n\leqq s}\frac{\omega_n(X;\lambda)\psi_n(\Xi;\lambda)}{\lambda},\end{aligned}$$

$$(46)\qquad g^*(X;\lambda)\omega_n(X;\lambda)-\lambda\int R_5(X,A;\lambda)\omega_n(A;\lambda)\,d\sigma_A=0\qquad(n\leqq s).$$

Si r ou s sont nuls, il suffit de remplacer par zéro les seconds membres de (43) ou de (45), et de supprimer les relations (44) ou (46).

16. **Opération résolvante au sens élargi.** — Nous allons maintenant former une fonction $N(X,\Xi;\lambda)$, méromorphe dans D_4, remplissant les mêmes conditions que R_1, et qui peut remplacer R_4 et R_5 dans toutes les relations (43) à (46).

Dans (43), nous remplaçons Ξ par B, nous multiplions les deux membres par $\lambda R_5(B,\Xi;\lambda)\,d\sigma_B$, nous intégrons sur $\mathcal{V}$, et nous ajoutons aux deux membres de la relation ainsi obtenue les produits des deux membres de (45) par $g^\star(X;\lambda)$:

$$\begin{aligned}
&\lambda\int R_4(X, A; \lambda)g(A)R_5(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A \\
&\quad -\lambda^2\int R_5(B, \Xi; \lambda)\int R_4(X, A; \lambda)G(A, B)\, d\sigma_A\, d\sigma_B \\
&\quad + g^\star(X; \lambda)g(X)R_5(X, \Xi; \lambda) + g^\star(X; \lambda)G(X, \Xi)g^\star(\Xi; \lambda) \\
&\quad\quad = \sum_{n\leqq r}\varphi_n(X; \lambda)\int \rho_n(A; \lambda)R_5(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A \\
&\quad + g^\star(X; \lambda)\sum_{q\leqq s}\frac{\omega_q(X; \lambda)\psi_q(\Xi; \lambda)}{\lambda}.
\end{aligned}$$

En échangeant d'une part les rôles de R_4 et de R_5, d'autre part ceux de X et de Ξ, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\lambda\int R_4(X, A; \lambda)g(A)R_5(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A \\
&\quad -\lambda^2\int R_4(X, A; \lambda)\int G(A, B)R_5(B, \Xi; \lambda)\, d\sigma_B\, d\sigma_A \\
&\quad + g^\star(\Xi; \lambda)g(\Xi)R_4(X, \Xi; \lambda) + g^\star(X; \lambda)G(X, \Xi)g^\star(\Xi; \lambda) \\
&\quad\quad = g^\star(\Xi; \lambda)\sum_{n\leqq r}\frac{\varphi_n(X; \lambda)\rho_n(\Xi; \lambda)}{\lambda} \\
&\quad + \sum_{q\leqq s}\psi_q(\Xi; \lambda)\int R_4(X, A; \lambda)\omega_q(A; \lambda)\, d\sigma_A.
\end{aligned}$$

En nous rappelant que $R_4 - G^\star$ et $R_5 - G^\star$ sont sommables, nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\int R_5(B, \Xi; \lambda)\int R_4(X, A; \lambda)\, G(A, B)\, d\sigma_A\, d\sigma_B \\
&\quad = \int R_4(X, A; \lambda)\int G(A, B)R_5(B, \Xi; \lambda)\, d\sigma_B\, d\sigma_A \\
&\quad\quad + \pi^2\Omega^2(X)c(X)c^\star(X; \lambda)R_5(X, \Xi; \lambda) - \pi^2\Omega^2(\Xi)c(\Xi)c^\star(\Xi; \lambda)R_4(X, \Xi; \lambda).
\end{aligned}$$

Nous devons en outre observer qu'on a, d'après (16),

$$gg^\star - \lambda^2\pi^2\Omega^2 cc^\star = 1.$$

Alors en retranchant membre à membre une des deux relations précédemment écrites de l'autre relation, puis en simplifiant et en faisant passer certains termes d'un membre dans l'autre, nous obtenons l'identité

$$(47)\quad \begin{aligned}&R_4(X, \Xi; \lambda)\\ &+\sum_{q\leqq s}\frac{\psi_q(\Xi;\lambda)}{\lambda}\Big[g^\star(X;\lambda)\omega_q(X;\lambda)\\ &\qquad -\lambda\int R_4(X, A;\lambda)\omega_q(A;\lambda)\,d\sigma_A\Big] = R_5(X, \Xi;\lambda)\\ &+\sum_{n\leqq r}\frac{\varphi_n(X;\lambda)}{\lambda}\Big[g^\star(\Xi;\lambda)\rho_n(\Xi;\lambda)-\lambda\int\rho_n(A;\lambda)R_5(A, \Xi;\lambda)\,d\sigma_A\Big],\end{aligned}$$

dont nous désignons les deux membres par $N(X, \Xi; \lambda)$:

$$(48)\quad \begin{aligned}N(X, \Xi;\lambda) = R_4(X, \Xi;\lambda)+\sum_{q\leqq s}\frac{\psi_q(\Xi;\lambda)}{\lambda}\\ \times\Big[g^\star(X;\lambda)\omega_q(X;\lambda)-\lambda\int R_4(X, A;\lambda)\omega_q(A;\lambda)\,d\sigma_A\Big].\end{aligned}$$

Maintenant nous constatons les identités

$$(49)\quad \begin{aligned}&N(X, \Xi;\lambda)g(\Xi)+g^\star(X;\lambda)G(X, \Xi)\\ &\quad -\lambda\int N(X, A;\lambda)G(A, \Xi)\,d\sigma_A = \sum_{n\leqq r}\frac{\varphi_n(X;\lambda)\rho_n(\Xi;\lambda)}{\lambda},\end{aligned}$$

$$(50)\quad g^\star(\Xi;\lambda)\rho_n(\Xi;\lambda)-\lambda\int\rho_n(A;\lambda)N(A, \Xi;\lambda)\,d\sigma_A = 0 \qquad (1\leqq n\leqq r),$$

$$(51)\quad \begin{aligned}&G(X, \Xi)g^\star(\Xi;\lambda)+g(X)N(X, \Xi;\lambda)\\ &\quad -\lambda\int G(X, A)N(A, \Xi;\lambda)\,d\sigma_A = \sum_{q\leqq s}\frac{\omega_q(X;\lambda)\psi_q(\Xi;\lambda)}{\lambda},\end{aligned}$$

$$(52)\quad g^\star(X;\lambda)\omega_q(X;\lambda)-\lambda\int N(X, A;\lambda)\omega_q(A;\lambda)\,d\sigma_A = 0 \qquad (1\leqq q\leqq s).$$

Comme, d'après (48), $N - G^\star$ est sommable quand λ n'est pas un pôle, le dessein annoncé au début du paragraphe est accompli. Il n'y a aucune identité (50) quand r est nul, ni aucune identité (52) quand s est nul.

Lorsque la distance du point λ aux pôles de N et à la frontière du domaine de E où N est méromorphe, a une borne inférieure positive, N remplit toutes les conditions d'abord imposées à $G^\star$. La notation I_λ désignera dans la suite l'opération

$$(53)\qquad I_\lambda u(X) = g^\star(X;\lambda)u(X)-\lambda\int N(X; A;\lambda)u(A)\,d\sigma_A;$$

c'est ce que nous nommons une *opération résolvante au sens élargi;*

N sera nommé un *noyau résolvant au sens élargi;* nous sous-entendrons souvent les mots : *au sens élargi.* Nous rappelons que N est méromorphe dans un certain domaine qui contient un point λ_0 donné de l'ensemble E; les pôles sont indépendants de X et de Ξ.

17. **Premier cas de la discussion.** — Supposons que λ soit situé dans le domaine de E où N est méromorphe, et ne soit pas un pôle de N. Nous allons discuter l'équation (12) dans ce cas.

D'après (49), toute solution de (12) satisfait à l'équation

$$u(X) - \Sigma_{n \leqq r}\varphi_n(X;\lambda)\int \rho_n(A;\lambda)u(A)\,d\sigma_A = I_\lambda f(X).$$

On a donc nécessairement

$$u(X) = I_\lambda f(X) + \Sigma_{n \leqq r} a_n \varphi_n(X;\lambda), \tag{54}$$

où les a_n sont indépendants de X. Les a_n doivent être choisis de façon qu'on ait

$$a_n = \int \rho_n u\,d\sigma \qquad (1 \leqq n \leqq r). \tag{55}$$

Mais on a

$$\begin{aligned}&\int \rho_n(A;\lambda)I_\lambda f(A)\,d\sigma_A \\ &\quad = \int f(A)\left[g^\star_\lambda(A;\lambda)\rho_n(A;\lambda) - \lambda\int \rho_n(X;\lambda)N(X,A;\lambda)\,d\sigma_X\right]d\sigma_A,\end{aligned}$$

et le second membre est nul, d'après (50). D'après (32), les relations (55) sont donc satisfaites, quels que soient les a_n. Ainsi toute solution de (12) est de la forme (54); mais nous ne savons pas encore si l'équation (12) est compatible. Toutefois, si elle l'est, toutes les fonctions u dont (54) est l'expression générale, en sont solutions, car d'une part une certaine d'entre ces fonctions en est solution, et d'autre part tous les φ_n satisfont à l'équation homogène (12 *bis*).

Posons maintenant, dans (12),

$$u(X) = I_\lambda v(X); \tag{56}$$

nous parvenons, d'après (51), à l'équation

$$v(X) - \Sigma_{q \leqq s}\omega_q(X;\lambda)\int \psi_q(A;\lambda)v(A)\,d\sigma_A = f(X).$$

On a donc nécessairement

$$v(X) = f(X) + \Sigma_{q \leqq s} b_q \omega_q(X; \lambda),$$

où les b_q ne dépendent pas de X. On doit avoir

$$b_q = \int \psi_q v \, d\sigma \qquad (1 \leqq q \leqq s);$$

d'après (39), ces dernières relations équivalent à

$$\int f \psi_q \, d\sigma = 0 \qquad (1 \leqq q \leqq s). \tag{57}$$

Or nous avons, quels que soient les b_q,

$$u(X) = I_\lambda f(X), \tag{58}$$

d'après les identités (52). Si donc les conditions (57) sont remplies, la fonction u donnée par (58) est une solution particulière de (12), dont (54) exprime alors la solution générale. Si les conditions (57) ne sont pas remplies, la fonction u donnée par (58) satisfait non pas à l'équation (12), mais à l'équation

$$J_\lambda u(X) = f(X) - \Sigma_{q \leqq s} \omega_q(X; \lambda) \int f \psi_q \, d\sigma;$$

comme cette fonction u est de celles qui sont exprimées par (54), l'équation (12) est alors incompatible.

En résumé, *les s conditions* (57) *sont nécessaires et suffisantes pour que* (12) *soit compatible. Si elles sont remplies,* (54) *exprime la solution générale, et* (58) *est la solution caractérisée par les conditions*

$$\int \rho_n u \, d\sigma = 0 \qquad (1 \leqq n \leqq r). \tag{59}$$

Il ne semble pas nécessaire d'énoncer séparément ce qui convient pour le cas dans lequel r ou s sont nuls.

18. **Conséquences.** — Soit D un des domaines (ensembles ouverts connexes) qui constituent l'ensemble E du paragraphe 7. *Quel que soit le point* λ_0 *choisi dans* D, *et quel que soit le noyau résolvant formé* (N dépend des fonctions ρ_n et ω_q, qui sont arbitraires dans une certaine

mesure), *on obtient toujours les mêmes nombres r et s*. En effet, soient λ_0 et λ_1 deux points de D; réunissons-les par une courbe située dans D. Cette courbe est un ensemble fermé, dont chaque point est intérieur à un domaine où l'on peut former une opération I_λ; d'après un théorème de Borel et de Lebesgue, cette courbe est donc recouverte par un nombre fini de tels domaines. Si deux de ces domaines ont une partie commune, il est évident, d'après le paragraphe 17, que le système des valeurs de r et de s est le même pour tous deux; donc, de proche en proche, ces systèmes de valeurs sont les mêmes dans le domaine qui contient λ_0 et dans celui qui contient λ_1. *Ces nombres r et s sont donc attachés au domaine* D.

Une autre conséquence de cette discussion est que, une fois choisies les fonctions ρ_n et ω_q, qui, avec les deux systèmes de fonctions φ_n et ψ_q, donnent lieu aux relations (32) et (39), *la fonction* N, telle que $N - G^\star$ soit sommable, *est entièrement déterminée par les conditions* (50) *et* (51). En effet la solution générale de (51) s'obtient en remplaçant $N(X, \Xi; \lambda)$ par $N(X, \Xi; \lambda) + \Sigma_{n \leqq r} \varphi_n(X; \lambda) a_n(\Xi; \lambda)$, où les a_n sont arbitraires; ensuite (50) nous donne $\lambda a_n(\Xi; \lambda) = 0$, d'où $a_n = 0$ (on se rappelle que, si D contient le point *zéro*, r et s sont nuls d'après le paragraphe 8). Donc les identités (49) et (52) sont des conséquences de (50) et de (51) [19].

19. **Exemples.** — Si $G(X, \Xi)$ est sommable par rapport à Ξ, D comprend tout le plan, sauf le point à l'infini, et r et s sont nuls. Il est utile de citer des exemples où l'un au moins de ces nombres n'est pas nul.

Comme premier exemple, prenons une variété $\mathcal{V}$ formée d'une seule partie connexe, sur laquelle les points sont déterminés par la coordonnée x, par rapport à laquelle les fonctions données et inconnues doivent avoir la période 2π; l'élément de $\mathcal{V}$ est dx; enfin on a

$$J_\lambda u(x) = -\lambda \int_{\mathcal{V}} \cot \frac{x-y}{2} u(y)\, dy.$$

Pour cette opération, l'ensemble C du paragraphe 7 se réduit à l'unique

[19] De même, dans l'article cité *m*, les identités (38) et (41) résultent des conditions (39) et (40); ce n'était pas mentionné dans cet article.

point *zéro*. Pour toute autre valeur de λ, l'équation homogène $J_\lambda u = 0$ a comme solution générale une constante arbitraire ([20]); il en est de même de l'équation homogène associée. Donc les deux nombres r et s sont ici égaux à *un*.

Pour avoir un deuxième exemple moins simple, prenons la même variété $\mathcal{V}$, et choisissons deux fonctions réelles $g(x)$ et $u_1(x)$, soumises à des conditions de Lipschitz, et dont le produit est identiquement nul quoique aucun des facteurs ne le soit : il suffit, par exemple, que $g(x)$ soit nul dans tout l'intervalle $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, et que $u_1(x)$ soit nul dans tout l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$. Soit $b(x)$ une fonction telle qu'on ait $\int b u_1\, dx = 1$. Soit enfin

$$a(x) = \int \cot\frac{x-y}{2}\, u_1(y)\, dy.$$

Si l'on pose

$$J_\lambda u(x) = g(x)\,u(x) - \frac{\lambda}{2\pi}\int\left[\cot\frac{x-y}{2} - a(x)\,b(y)\right]u(y)\,dy,$$

l'ensemble C se compose d'un segment de l'axe purement imaginaire; les extrémités de ce segment ont pour affixes respectifs le produit de i par le maximum de $|g|$ et le nombre opposé. Ici, le nombre r est au moins égal à *un*, car u_1 est une solution de l'équation homogène, quel que soit λ. Nous verrons (§ 21) que le nombre s est ici, comme dans le premier exemple, égal à r.

On trouvera plus loin (§ 23) un exemple précis où r n'est pas égal à s.

20. Pôles du noyau de l'opération résolvante. — Il s'agit de compléter notre discussion, en traitant le cas où λ est un pôle de N. A vrai dire, si l'on fixe λ, sans s'inquiéter si l'on est en un pôle de N, on peut développer des raisonnements semblables à ceux qui ont prouvé l'existence de N; c'est même plus simple, car il n'y a pas à s'occuper de la façon dont les fonctions formées dépendent d'un paramètre :

([20]) Cet exemple se rattache à une équation étudiée antérieurement (*j*, spécialement Chap. III, § 3). Cette équation avait d'ailleurs été étudiée par Villat dans son article cité, auquel Volterra et Pérès l'ont empruntée pour leur Ouvrage cité (t. I, Chap. IX, § 17).

λ étant fixé, il n'y a plus de paramètre. On prouve ainsi que l'équation (12 *bis*) a un certain nombre fini r (peut-être nul) de solutions linéairement indépendantes φ_n $(1 \leqq n \leqq r$, si r n'est pas nul), et que l'équation homogène associée

$$(60) \qquad g(\Xi)v(\Xi) - \lambda \int G(A, \Xi)v(A)\, d\sigma_A = 0$$

en a un certain nombre s (peut-être nul); soient ψ_q ces dernières fonctions $(1 \leqq q \leqq s$, si s n'est pas nul). Les raisonnements du paragraphe 17 prouvent encore que, *pour la compatibilité de l'équation* (12), *il faut et il suffit que f soit orthogonal à tous les ψ_q*. Mais sur la comparaison entre les nombres r et s relatifs à un point donné λ, et les nombres r et s relatifs aux points infiniment voisins, nous ne savons qu'une chose : leurs valeurs au point donné sont au moins égales aux valeurs relatives aux points infiniment voisins (à cause de l'existence des fonctions holomorphes φ_n et ψ_q du paragraphe 14). L'étude suivante nous renseignera plus profondément : si r et s sont les nombres attachés au domaine D (§ 18), les nombres des solutions linéairement indépendantes des deux équations homogènes associées $J_\lambda u = 0$ et $\bar{J}_\lambda u = 0$, quand λ est un pôle de N, sont respectivement $r + t$ et $s + t$, où t est un même nombre positif (et non nul).

Dans (51), remplaçons λ par un autre nombre μ. Traitons l'identité (49) et l'identité (51) ainsi modifiées, de la même façon que nous avons traité les identités (43) et (45) pour en déduire (47); en utilisant en outre les identités (50) et (52), et en divisant par $\lambda - \mu$, nous parvenons à l'identité

$$\begin{aligned}(61) \quad & \int N(X, A; \lambda) g(A) N(A, \Xi; \mu)\, d\sigma_A + \frac{N(X, \Xi; \lambda) - N(X, \Xi; \mu)}{\lambda - \mu} \\ & - \pi^2 [\mu \Omega^2(\Xi) c(\Xi) c^\star(\Xi; \mu) N(X, \Xi; \lambda) + \lambda \Omega^2(X) c(X) c^\star(X; \lambda) N(X, \Xi; \mu)] \\ & = \frac{1}{\lambda} \Sigma_n \varphi_n(X; \lambda) \Big[g^\star(\Xi; \mu) \frac{\rho_n(\Xi; \lambda) - \rho_n(\Xi; \mu)}{\lambda - \mu} \\ & \qquad - \mu \int \frac{\rho_n(A; \lambda) - \rho_n(A; \mu)}{\lambda - \mu} N(A, \Xi; \mu)\, d\sigma_A \Big] \\ & + \frac{1}{\mu} \Sigma_q \psi_q(\Xi; \mu) \Big[g^\star(X; \lambda) \frac{\omega_q(X; \lambda) - \omega_q(X; \mu)}{\lambda - \mu} \\ & \qquad - \lambda \int N(X, A; \lambda) \frac{\omega_q(A; \lambda) - \omega_q(A; \mu)}{\lambda - \mu}\, d\sigma_A \Big],\end{aligned}$$

où la fonction donnée G ne figure plus.

Soit k un pôle de $N(X, \Xi; \lambda)$ dans E; k n'est certainement pas nul. Dans le développement de ce noyau suivant les puissances ascendantes de $\lambda - k$, soit $Q(X, \Xi; \lambda)$ l'ensemble des termes où l'exposant de $\lambda - k$ est négatif. D'après l'identité (61), nous avons

$$(62) \qquad \int Q(X, A; \lambda) g(A) Q(A, \Xi; \mu)\, d\sigma_A + \frac{Q(X, \Xi; \lambda) - Q(X, \Xi; \mu)}{\lambda - \mu} = 0.$$

Nous remarquons en outre que $Q(X, \Xi; \lambda)$ coïncide, pour X distinct de Ξ (et $\lambda \neq k$), avec une fonction qui est continue même quand X et Ξ se confondent : en effet on trouve successivement qu'il en est ainsi, pour l'ensemble des termes où l'exposant de $\lambda - k$ est négatif, dans la fonction R^* du paragraphe 14, puis dans toutes les fonctions R_n, et enfin dans N. Bien entendu, Q remplit aussi les conditions du paragraphe 2, et même il remplit par rapport à X et à Ξ des conditions de Lipschitz, pourvu que $|\lambda - k|$ ait une borne inférieure positive.

Nous tirons de (62)

$$Q(X, \Xi; \lambda) + \lambda \int Q(X, A; 0) g(A) Q(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A = Q(X, \Xi; 0),$$

et cette identité signifie que, par rapport à $g\, d\sigma$, $Q(X, \Xi; \lambda)$ est le noyau résolvant relatif au noyau $-Q(X, \Xi; 0)$ [21]. D'autre part, en ordonnant les deux membres de (51) suivant les puissances ascendantes de $\lambda - k$, et en prenant l'ensemble des termes dont l'exposant est négatif, il vient

$$g(X) Q(X, \Xi; \lambda) - \lambda \int G(X, A) Q(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A = -\int G(X, A) B_1(A, \Xi)\, d\sigma_A,$$

où la signification de B_1 se trouve dans le développement

$$Q(X, \Xi; \lambda) = \sum_{n=1}^{n=p} B_n(X, \Xi)(\lambda - k)^{-n}.$$

De là nous déduisons

$$\lambda \int [G(X, A) + g(X) Q(X, A; 0) g(A)] Q(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A$$
$$= \int G(X, A) B_1(A, \Xi)\, d\sigma_A + g(X) Q(X, \Xi; 0).$$

([21]) *Voir* les définitions et les raisonnements nécessités par le fait que g peut s'annuler, dans l'article cité *m*, spécialement Chap. I, §§ 4 et 7.

En ordonnant par rapport à $\lambda - k$ et en séparant les termes, nous trouvons

$$\int [G(X, A) + g(X)Q(X, A; o)g(A)]B_p(A, \Xi)\, d\sigma_A = o,$$

puis, si p est > 1,

$$\int [G(X, A) + g(X)Q(X, A; o)g(A)][kB_n(A, \Xi) + B_{n+1}(A, \Xi)]\, d\sigma_A = o \qquad (n < p);$$

enfin, avec les termes de degré zéro, nous obtenons une conséquence de l'identité

$$\int Q(X, A; o)g(A)B_1(A, \Xi)\, d\sigma_A = Q(X, \Xi; o),$$

qui résulte de (62) en y faisant $\lambda = o$. De là résultent toutes les identités

$$(63) \qquad \int [G(X, A) + g(X)Q(X, A; o)g(A)]B_n(A, \Xi)\, d\sigma_A = o \qquad (1 \leqq n \leqq p),$$

et par suite

$$(64) \qquad \int [G(X, A) + g(X)Q(X, A; o)g(A)]Q(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A = o.$$

On obtient de même les identités

$$(65) \qquad \int B_n(X, A)[G(A, \Xi) + g(A)Q(A, \Xi; o)g(\Xi)]\, d\sigma_A = o \qquad (1 \leqq n \leqq p),$$

$$(66) \qquad \int Q(X, A; \lambda)[G(A, \Xi) + g(A)Q(A, \Xi; o)g(\Xi)]\, d\sigma_A = o.$$

Or nous savons (par le travail cité m) qu'on peut écrire

$$kQ(X, \Xi; o) = -\sum_{\alpha=1}^{t}\sum_{\beta=1}^{p(\alpha)} \varphi_{\alpha,\beta}(X)\psi_{\alpha,\beta}(\Xi),$$

où les deux systèmes de fonctions linéairement indépendantes $\varphi_{\alpha,\beta}$ et

$\psi_{\alpha,\beta}$ remplissent, d'après (64) et (66), les conditions

$$\int [G(X, A) + g(X) Q(X, A; 0) g(A)] \varphi_{\alpha,\beta}(A)\, d\sigma_A = 0,$$

$$\int \psi_{\alpha,\beta}(A) [G(A, \Xi) + g(A) Q(A, \Xi; 0) g(\Xi)]\, d\sigma_A = 0,$$

et sont liés par les relations

$$\int \varphi_{\alpha,\beta} \psi_{\gamma,\delta}\, g\, d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{si l'on a} \quad \alpha = \gamma \quad \text{et} \quad (\delta - \beta)(\delta - \beta + 1) = 0, \\ 0 & \text{dans les autres cas;} \end{cases}$$

il en résulte qu'on a

$$g(X) \varphi_{\alpha,\beta}(X) - k \int G(X, A) \varphi_{\alpha,\beta}(A)\, d\sigma_A = \begin{cases} 0 & \text{pour } \beta = 1, \\ - g(X) \varphi_{\alpha,\beta-1}(X) & \text{pour } \beta > 1, \end{cases}$$

$$g(\Xi) \psi_{\alpha,\beta}(\Xi) - k \int \psi_{\alpha,\beta}(A) G(A, \Xi)\, d\sigma_A = \begin{cases} 0 & \text{pour } \beta = p(\alpha), \\ - g(\Xi) \psi_{\alpha,\beta+1}(\Xi) & \text{pour } \beta < p(\alpha). \end{cases}$$

Par conséquent, pour $\lambda = k$, les t fonctions $\varphi_{\alpha,1}$ satisfont à l'équation (12 *bis*); ces t fonctions sont linéairement indépendantes entre elles, et nous allons prouver que, avec les r fonctions $\varphi_n(X; k)$, elles forment un système de $r + t$ fonctions linéairement indépendantes. En effet, d'après (50), les termes d'exposants négatifs, dans le développement de $\lambda \int \rho_n(A; \lambda) Q(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A$ suivant les puissances ascendantes de $\lambda - k$, sont nuls. Or $Q(X, \Xi; \lambda)$ [noyau résolvant de $- Q(X, \Xi; 0)$] est bilinéaire par rapport aux deux systèmes de fonctions $\varphi_{\alpha,\beta}$ et $\psi_{\alpha,\beta}$; comme les $\psi_{\alpha,\beta}$ sont linéairement indépendants, le coefficient de $\psi_{\alpha,p(\alpha)}(\Xi)(\lambda - k)^{-p(\alpha)}$, dans le développement de $\lambda \int \rho_n(A; \lambda) Q(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A$, est *zéro;* cela équivaut aux relations

$$\int \rho_n \varphi_{\alpha,1}\, d\sigma = 0 \qquad (1 \leqq n \leqq r;\ 1 \leqq \alpha \leqq t), \tag{67}$$

où, dans ρ_n, λ doit être remplacé par k. Si donc nous avons une identité

$$\sum_{n=1}^{n=r} a_n \varphi_n(X; k) + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=t} b_\alpha \varphi_{\alpha,1}(X) = 0,$$

où les a_n et les b_α sont constants, les égalités (32) et (67) permettent d'en déduire que tous les a_n sont nuls; comme les $\varphi_{\alpha,1}$ sont linéairement indépendants, les b_α sont nuls; ainsi tous les coefficients de cette identité sont nuls, ce qu'il fallait démontrer.

Je dis enfin que toute solution de l'équation (12 *bis*), pour $\lambda = k$, est une combinaison linéaire des $r+t$ solutions ainsi trouvées. En effet, soient

$$P(X, \Xi; \lambda) = N(X, \Xi; \lambda) - Q(X, \Xi; \lambda);$$

$$R(X, \Xi) = P(X, \Xi; k) + \frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{t}\sum\nolimits_{1 \leqq \beta < p(\alpha)} \varphi_{\alpha,\beta+1}(X)\psi_{\alpha,\beta}(\Xi),$$

où la dernière somme ne contient effectivement que les valeurs de α pour lesquelles $p(\alpha)$ est > 1; des relations (49) et (51) et des calculs du présent paragraphe se déduisent les identités

$$\begin{aligned}(68)\quad & R(X, \Xi)g(\Xi) + g^\star(X; k)G(X, \Xi) - k\int R(X, A)G(A, \Xi)\, d\sigma_A \\ & = \sum\nolimits_{n \leqq r} \frac{\varphi_n(X; k)\rho_n(\Xi; k)}{k} + \frac{g(\Xi)}{k}\Sigma_{\alpha \leqq t}\varphi_{\alpha,1}(X)\psi_{\alpha,1}(\Xi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(69)\quad & G(X, \Xi)g^\star(\Xi; k) + g(X)R(X, \Xi) - k\int G(X, A)R(A, \Xi)\, d\sigma_A \\ & = \sum\nolimits_{q \leqq s} \frac{\omega_q(X; k)\psi_q(\Xi; k)}{k} + \frac{g(X)}{k}\Sigma_{\alpha \leqq t}\varphi_{\alpha,p(\alpha)}(X)\psi_{\alpha,p(\alpha)}(\Xi),\end{aligned}$$

dont la première entraîne ce qui vient d'être annoncé.

Des raisonnements semblables, où intervient l'identité (69), prouvent que pour $\lambda = k$ toute solution de (60) est une combinaison linéaire des $s+t$ solutions particulières ψ_q et $\psi_{\alpha,p(\alpha)}$, qui sont linéairement indépendantes.

Ainsi, comme nous l'avons annoncé, *il existe un nombre positif t tel que, pour $\lambda = k$, le nombre des solutions linéairement indépendantes de l'équation* (12 *bis*) *est $r+t$, et le nombre analogue pour* (60) *est $s+t$. La différence est la même : $r-s$, qu'aux points de* D *qui ne sont pas des pôles de* N.

D'après cela, de quelque façon que soient choisis les ρ_n et les ω_q, sous réserve des conditions de Lipschitz et des relations (32) et (39), les pôles du noyau résolvant ont toujours les mêmes positions.

21. **Étude du point à l'infini.** — Si le tenseur c ne s'annule en aucun point de $\mathcal{V}$, nous avons vu (§ 7) que le point $\lambda = \infty$ fait partie de

l'ensemble ouvert E. Il existe donc un domaine D qui comprend ce point. Que deviennent, pour ce domaine D, les résultats qui précèdent ? Nous allons voir qu'ils subsistent, même au point $\lambda = \infty$, avec ce renseignement supplémentaire qu'on a toujours $r = s$.

Le développement de $c^\star$ suivant les puissances descendantes de λ commence par un terme en λ^{-2}; nous pouvons donc supposer qu'il en est de même pour le développement de $G^\star(X, \Xi; \lambda)$. En conséquence, nous poserons pour un instant

$$K(X, \Xi) = -\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 \int G^\star(X, A; \lambda) G(A, \Xi)\, d\sigma_A.$$

Si l'équation

$$u(X) - \int K(X, A) u(A)\, d\sigma_A = 0$$

n'a que la solution *zéro*, on trouve que, dans le paragraphe 14, le développement de $R^\star(X, \Xi; \lambda)$ suivant les puissances descendantes de λ commence par un terme de degré -1, et le développement de R_1 commence par un terme de degré -2. Des hypothèses semblables entraînent que les développements de R_2 et de R_3 (§ 15) commencent au degré -2. Si, de plus, au paragraphe 15, le point $\lambda = \infty$ n'est pas un des points exceptionnels pour lesquels les $\varphi_n(X; \lambda)$ dont l'indice n est $> r$, cessent d'être linéairement indépendants par rapport à X, le développement de R_4 commence aussi au degré -2. Une conclusion semblable est valable pour R_5, et alors, au paragraphe 16, le développement de $N(X, \Xi; \lambda)$ suivant les puissances descendantes de λ commence au degré -2.

D'après cela, *nous considérons d'abord le cas où* $\lambda^2 N(X, \Xi; \lambda)$ *n'a pas de pôle à l'infini*, et nous posons

$$N(X, \Xi; \lambda) = \Sigma_{n \geqq 0} M_n(X, \Xi) \lambda^{-n-2}.$$

Alors les identités (49) à (52) entraînent

$$(49\ bis) \qquad -\int M_0(X, A) G(A, \Xi)\, d\sigma_A = \Sigma_{n \leqq r} \varphi_n(X; \infty) \rho_n(\Xi; \infty),$$

$$(50\ bis) \qquad \int \rho_n(A; \infty) M_0(A, \Xi)\, d\sigma_A = 0,$$

$$(51\ bis) \qquad -\int G(X, A) M_0(A, \Xi)\, d\sigma_A = \Sigma_{q \leqq s} \omega_q(X; \infty) \psi_q(\Xi; \infty),$$

$$(52\ bis) \qquad \int M_0(X, A) \omega_q(A; \infty)\, d\sigma_A = 0.$$

De plus $M_0(X, \Xi) - \lim_{\lambda \to \infty} \lambda^2 G^\star(X, \Xi; \lambda)$ est sommable. On en conclut, comme au paragraphe 17, que l'équation (14) n'est compatible que si l'on a

$$\int f \psi_q \, d\sigma = 0 \qquad (1 \leqq q \leqq s); \tag{57 bis}$$

si ces s conditions sont remplies, l'équation est compatible et l'on a

$$u(X) = -\int M_0(X, A) f(A) \, d\sigma_A + \Sigma_{n \leqq r} a_n \varphi_n(X; \infty), \tag{54 bis}$$

où les a_n sont des constantes arbitraires.

Mais si quelqu'une des hypothèses faites en suivant la formation de N, n'est pas réalisée, le point $\lambda = \infty$ peut être un pôle pour $\lambda^2 N(X, \Xi; \lambda)$, et l'on a alors

$$N(X, \Xi; \lambda) = \Sigma_{0 < n \leqq p} B_n(X, \Xi) \lambda^{n-2} + \Sigma_{n \geqq 0} M_n(X, \Xi) \lambda^{-n-2}. \tag{70}$$

On constate, en suivant la formation de N, que les B_n sont continus même quand les deux points sont confondus; des conditions de Lipschitz sont remplies par rapport à chaque point. Nous posons

$$Q(X, \Xi; \lambda) = \Sigma_{0 < n \leqq p} B_n(X, \Xi) \lambda^{n-2}, \tag{71}$$

$$Q_1(X, \Xi; \lambda) = Q(X, \Xi; \lambda) - B_1(X, \Xi) \lambda^{-1}. \tag{72}$$

L'identité (61) nous montre qu'on a

$$\int Q_1(X, A; \lambda) g(A) Q_1(A, \Xi; \mu) \, d\sigma_A + \frac{Q_1(X, \Xi; \lambda) - Q_1(X, \Xi; \mu)}{\lambda - \mu} = 0. \tag{73}$$

Comme Q_1 est un polynome en λ, on peut y faire $\lambda = 0$; nous voyons donc que $Q_1(X, \Xi; \lambda)$ est le noyau résolvant de $-Q_1(X, \Xi; 0)$ relativement à $g d\sigma$. Mais nous avons en outre, toujours d'après (61),

$$\begin{aligned} &\int Q(X, A; \lambda) g(A) Q(A, \Xi; \mu) \, d\sigma_A \\ &\quad + \frac{Q(X, \Xi; \lambda) - Q(X, \Xi; \mu)}{\lambda - \mu} + \frac{Q(X, \Xi; \lambda)}{\mu} + \frac{Q(X, \Xi; \mu)}{\lambda} = 0, \end{aligned} \tag{74}$$

identité d'où nous tirons

$$(75)\qquad \int B_1(X, A)g(A)B_1(A, \Xi)\,d\sigma_A + B_1(X, \Xi) = 0,$$

$$(76)\qquad \int B_1(X, A)g(A)Q_1(A, \Xi; \lambda)\,d\sigma_A = -Q_1(X, \Xi; \lambda),$$

$$(77)\qquad \int Q_1(X, A; \lambda)g(A)B_1(A, \Xi)\,d\sigma_A = -Q_1(X, \Xi; \lambda).$$

Or l'équation homogène

$$w(X) + \int B_1(X, A)g(A)w(A)\,d\sigma_A = 0$$

est du type de Fredholm, et par suite elle n'a qu'un nombre fini de solutions linéairement indépendantes. Les identités (75) et (76) nous indiquent que les fonctions $B_1(X, \Xi)$ et $Q_1(X, \Xi; 0)$ ou $B_2(X, \Xi)$ sont, quel que soit Ξ, des combinaisons linéaires de ces fonctions $w(X)$; $B_1(X, \Xi)$ et $B_2(X, \Xi)$ sont donc des sommes de produits de fonctions de X par des fonctions de Ξ. Comme en outre le noyau résolvant $Q_1(X, \Xi; \lambda)$ de $-B_2(X, \Xi)$ est un polynome en λ, des raisonnements semblables à ceux de Goursat [22] permettent d'écrire, si Q_1 n'est pas identiquement nul,

$$(78)\qquad B_2(X, \Xi) = -\Sigma_\alpha \Sigma_{\beta<p(\alpha)} \varphi_{\alpha,\beta}(X)\psi_{\alpha,\beta+1}(\Xi),$$

où α et β prennent tous les systèmes de valeurs entières et positives, telles qu'on ait

$$\alpha \leqq t_1, \qquad \beta < p(\alpha),$$

$p(\alpha)$ étant un entier au moins égal à deux pour $\alpha \leqq t_1$, et l'on a, pour toutes les fonctions $\varphi_{\alpha,\beta}$ et $\psi_{\gamma,\delta}$ qui figurent dans (78) [on a donc, pour elles, $\beta < p(\alpha)$ et $\delta > 1$],

$$(79)\qquad \int \varphi_{\alpha,\beta}\psi_{\gamma,\delta}\, g\, d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{quand on a } \alpha = \gamma \quad \text{et} \quad \beta = \delta, \\ 0 & \text{dans les autres cas;} \end{cases}$$

les fonctions $\varphi_{\alpha,\beta}$ sont linéairement indépendantes, et les fonctions

(22) Édouard Goursat, *op. cit.*, Chap. XXXI, §§ 577 et 578.

$\psi_{\gamma,\delta}$ le sont aussi. La formule (76) entraîne donc, en faisant $\lambda = 0$,

$$\int B_1(X, A) g(A) \varphi_{\alpha,\beta}(A)\, d\sigma_A = -\varphi_{\alpha,\beta}(X), \tag{80}$$

et la formule (77) entraîne

$$\int \psi_{\alpha,\beta}(A) g(A) B_1(A, \Xi)\, d\sigma_A = -\psi_{\alpha,\beta}(\Xi). \tag{81}$$

D'après (78) et (79), nous avons aussi

$$\int B_2(X, A) g(A) \varphi_{\alpha,\beta}(A)\, d\sigma_A = \begin{cases} 0 & \text{pour } \beta = 1, \\ -\varphi_{\alpha,\beta-1}(X) & \text{pour } \beta > 1, \end{cases} \tag{82}$$

$$\int \psi_{\alpha,\beta}(A) g(A) B_2(A, \Xi)\, d\sigma_A = \begin{cases} 0 & \text{pour } \beta = p(\alpha), \\ -\psi_{\alpha,\beta+1}(\Xi) & \text{pour } \beta < p(\alpha). \end{cases} \tag{83}$$

Nous nous proposons maintenant de construire des fonctions $\varphi_{\alpha,p(\alpha)}$ et $\psi_{\alpha,1}$ $(\alpha \leqq t_1)$, telles que les formules (79) à (83) restent valables même quand ces nouvelles fonctions y figurent. Soient ρ_α et τ_α $(1 \leqq \alpha \leqq t_1)$ des fonctions d'un point de $\mathcal{V}$, remplissant des conditions de Lipschitz et satisfaisant aux relations

$$\int \rho_\alpha \psi_{\gamma,\delta} g\, d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{pour } \gamma = \alpha \quad \text{et} \quad \delta = p(\alpha), \\ 0 & \text{dans les autres cas,} \end{cases}$$

$$\int \varphi_{\alpha,\beta} \tau_\gamma g\, d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{pour } \gamma = \alpha \quad \text{et} \quad \beta = 1, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Si nous posons alors

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha,p(\alpha)}(X) = &-\int B_1(X, A) g(A) \rho_\alpha(A)\, d\sigma_A \\ &+ \Sigma_\gamma \varphi_{\gamma,1}(X) \int \tau_\gamma(A) g(A) \int B_1(A, \Xi) g(\Xi) \rho_\alpha(\Xi)\, d\sigma_\Xi\, d\sigma_A, \end{aligned}$$

$$\psi_{\alpha,1}(\Xi) = -\int \tau_\alpha(A) g(A) B_1(A, \Xi)\, d\sigma_A,$$

nous constatons que les formules (79) à (83) restent valables même pour ces nouvelles fonctions, qui remplissent des conditions de Lipschitz. D'après (79), la suite des $\varphi_{\alpha,\beta}$ et la suite des $\psi_{\alpha,\beta}$ forment un système biorthogonal et normal; donc chacune des deux suites est composée de fonctions linéairement indépendantes.

Ce point acquis, nous posons

$$B(X, \Xi) = -\Sigma_{\alpha \leqq t_1} \Sigma_\beta \varphi_{\alpha,\beta}(X) \psi_{\alpha,\beta}(\Xi);$$

le second membre contient toutes les fonctions que nous venons de définir. Nous avons, d'après (79), (80) et (81),

$$\int [B_1(X, A) - B(X, A)] g(A) B(A, \Xi)\, d\sigma_A = 0, \tag{84}$$

$$\int B(X, A) g(A) [B_1(A, \Xi) - B(A, \Xi)]\, d\sigma_A = 0, \tag{85}$$

et, d'après (75),

$$\int [B_1(X, A) - B(X, A)] g(A) [B_1(A, \Xi) - B(A, \Xi)]\, d\sigma_A + B_1(X, \Xi) - B(X, \Xi) = 0.$$

Puisque, d'après (75), $B_1(X, \Xi)$ est une somme de produits de fonctions de X par des fonctions de Ξ, nous écrivons

$$B_1(X, \Xi) = -\sum_{\alpha=1}^{\alpha=t} \sum_{\beta=1}^{\beta=p(\alpha)} \varphi_{\alpha,\beta}(X) \psi_{\alpha,\beta}(\Xi), \tag{86}$$

où t est un entier $\geqq t_1$; pour $\alpha > t_1$, on convient que $p(\alpha)$ est égal à *un*; les dernières identités écrites nous permettent de conclure que les formules (79) restent valables pour les nouvelles fonctions $\varphi_{\alpha,1}$ et $\psi_{\alpha,1}$. Il n'y a rien à changer à cette conclusion si Q_1 est identiquement nul, mais t_1 est nul dans ce cas ([23]).

Or nous déduisons des identités (49) et (51)

$$Q_1(X, \Xi; \lambda) g(\Xi) = \lambda \int Q(X, A; \lambda) G(A, \Xi)\, d\sigma_A,$$

$$g(X) Q_1(X, \Xi; \lambda) = \lambda \int G(X, A) Q(A, \Xi; \lambda)\, d\sigma_A,$$

([23]) Dans le Mémoire *i*, Chap. III, § 9, une erreur avait fait énoncer que l'ordre du pôle à l'infini, dans le cas particulier alors traité, serait toujours *un* [*comparer* la deuxième relation après (36), dans le Mémoire *i*, avec l'actuelle relation (74)]. Le complément rectificatif du Mémoire *i* a rectifié la conclusion; on trouve ici la démonstration.

ce qui entraîne

$$\int G(X, A)\varphi_{\alpha,\beta}(A)\,d\sigma_A = \begin{cases} 0 & \text{pour } \beta = 1, \\ g(X)\varphi_{\alpha,\beta-1}(X) & \text{pour } \beta > 1, \end{cases}$$

$$\int \psi_{\alpha,\beta}(A)G(A, \Xi)\,d\sigma_A = \begin{cases} 0 & \text{pour } \beta = p(\alpha), \\ g(\Xi)\psi_{\alpha,\beta+1}(\Xi) & \text{pour } \beta < p(\alpha). \end{cases}$$

Nous voyons donc que l'équation (14 *bis*) admet les solutions $\varphi_{\alpha,1}$. Avec les $\varphi_n(X; \infty)$, c'est un système de $r+t$ solutions linéairement indépendantes, car on a, d'après (50),

$$\int \rho_n(A; \infty)\varphi_{\alpha,1}(A)\,d\sigma_A = 0.$$

Toute solution de (14 *bis*) est une combinaison linéaire de ces $r+t$ solutions, car on trouve

$$-\int [M_0(X, A) + \Sigma_{\alpha,\beta}\varphi_{\alpha,\beta}(X)\psi_{\alpha,\beta-1}(A)]G(A, \Xi)\,d\sigma_A$$
$$= \Sigma_{n\leqq r}\varphi_n(X; \infty)\rho_n(\Xi; \infty) + g(\Xi)\Sigma_\alpha\varphi_{\alpha,1}(X)\psi_{\alpha,1}(\Xi),$$

identité où ne figure évidemment dans le premier membre aucun entier α pour lequel on ait $p(\alpha) = 1$.

De même l'équation

$$(87) \qquad \int \varphi(A)G(A, \Xi)\,d\sigma_A = 0$$

a $s+t$ et seulement $s+t$ solutions linéairement indépendantes : les $\psi_q(\Xi; \infty)$ et les $\psi_{\alpha,p(\alpha)}$.

Ainsi les nombres des solutions linéairement indépendantes des équations (14 *bis*) et (87) sont respectivement r et s si le point $\lambda = \infty$ n'est pas un pôle de $\lambda^2 N(X, \Xi; \lambda)$. Dans le cas contraire, les nombres respectifs des solutions linéairement indépendantes deviennent $r+t$ et $s+t$, où t est positif. Mais la fonction g n'intervient nullement dans les équations (14 *bis*) et (87); nous retrouvons donc les mêmes solutions en partant de l'opération

$$\pi\Omega(X)c(X)u(X) - \lambda\int G(X, A)u(A)\,d\sigma_A.$$

Mais pour celle-ci l'ensemble C du paragraphe 7 se réduit aux deux points $\lambda = \pm i$; l'ensemble E forme donc un seul domaine qui comprend le point *zéro;* donc les nombres r et s relatifs à cette opération et à ce domaine sont nuls; donc l'*équation* (14 *bis*) *a le même nombre de solutions linéairement indépendantes que l'équation* (87). Par suite, *pour le domaine* D *relatif à l'équation* (12) *et qui contient le point à l'infini, on a* $r = s$.

Ce qui précède nous permet de former des exemples effectifs d'équations pour lesquelles $\lambda^2 N(X, \Xi; \lambda)$ a un pôle d'ordre donné au point $\lambda = \infty$. Ainsi, sur la variété $\mathcal{V}$ du paragraphe 19, prenons $g(X) = 1$ et

$$G(X, \Xi) = \frac{1}{2\pi} \cot \frac{x - \xi}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=p-1} \{ \cos[(n-1)x] - \sin(nx) \} \cos(n\xi);$$

alors le point $\lambda = \infty$ est un pôle d'ordre p pour le produit du noyau résolvant par λ^2, et l'on a $t = 1$ et $\varphi_n(X) = \cos[(n-1)x]$; on le voit en utilisant l'identité

$$\int \cot \frac{x - \xi}{2} e^{ni\xi} d\xi = -2i\pi e^{nix} \qquad (n \text{ entier positif}),$$

qui entraîne

$$\int \cot \frac{x - \xi}{2} \cos(n\xi) \, d\xi = 2\pi \sin(nx) \qquad (n \text{ entier positif}).$$

22. **Résumé de la discussion.** — L'énoncé suivant convient, que le point λ soit à distance finie ou infinie :

A tout domaine D *sans point commun avec l'ensemble* C *du paragraphe* 7, *correspondent deux nombres entiers* r *et* s *positifs ou nuls, tels que, en tout point* λ *de* D *qui n'est pas un pôle de* λ^2N, *où* N *est un noyau résolvant* (au sens du paragraphe 16), *l'équation* (12 *bis*) *si* λ *est fini, ou* (14 *bis*) *si* λ *est infini, a* r *et seulement* r *solutions linéairement indépendantes, et l'équation homogène associée en a* s *et seulement* s. *Si* λ *est un pôle de* λ^2N, *les nombres des solutions linéairement indépendantes sont respectivement* $r + t$ *et* $s + t$, *où* t *est positif et non nul, en sorte que la différence des deux nombres est constante dans tout* D.

Pour que l'équation (12) *ou* (14) *soit compatible, il faut et il suffit que* f *soit orthogonal à toute solution de l'équation homogène associée;*

en particulier, si celle-ci n'a que la solution zéro, (12) *ou* (14) *est toujours compatible.*

Dans le cas plus particulier où D contient le point zéro, on a $r = s = 0$. Si D contient le point à l'infini, on a $r = s$, mais la valeur commune de ces nombres peut différer de zéro (§ 19).

23. **Exemples et applications.** — Il est utile de prouver, par un exemple précis, que les nombres r et s peuvent différer l'un de l'autre. Nous y parviendrons par un détour.

Dans un plan où x et y sont des coordonnées cartésiennes rectangulaires, proposons-nous de trouver une fonction $u(x, y)$, harmonique dans le domaine

$$x^2 + y^2 < 1,$$

continue dans la région $x^2 + y^2 \leqq 1$, et telle qu'on ait, en tout point $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ de la frontière,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(\varphi),$$

où f est une fonction continue donnée.

Le problème se traite sans peine en suivant une méthode de Bouligand [24]. La fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$ est harmonique dans l'intérieur de notre cercle et, comme ses valeurs sur le contour sont connues, nous savons la trouver; soit $v(x, y)$ cette fonction harmonique. Nous devons avoir

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = v(x, y),$$

d'où

$$u(x, y) = \int_0^x v(t, y)\, dt + v_1(y);$$

pour que u soit harmonique, nous trouvons la condition nécessaire et suffisante

$$\frac{d^2 v_1}{dy^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}(0, y),$$

---

[24] Georges Bouligand, Georges Giraud et Paul Delens, *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel*, 78 pages, Paris, 1935, spécialement 1re Partie, § 4.

qui détermine v_1 à une fonction linéaire près. Ainsi le problème est toujours compatible, et sa solution générale dépend de deux constantes arbitraires, qui sont les coefficients a et b de la fonction linéaire $ay+b$, qu'on peut ajouter à v_1.

Mais si la dérivée de f existe et remplit une condition de Lipschitz, on trouve que $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ en remplissent aussi une. Donc la dérivée de u suivant la normale existe et est continue sur toute la frontière. En désignant par X un point courant de la région $x^2+y^2 \leqq 1$, et par A un point courant de la frontière, celui-ci ayant pour coordonnées $\cos\theta$ et $\sin\theta$, nous pouvons mettre u sous la forme

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int \log \frac{2}{L(X, A)}\,\sigma(\theta)\,d\theta,$$

car σ se détermine comme pour un problème de Neumann [nous faisons porter le logarithme sur $2L^{-1}(X, A)$ et non sur $L^{-1}(X, A)$, de façon à n'avoir pas à ajouter de constante à l'intégrale]. Mais si nous écrivons directement que u est solution du problème énoncé, nous parvenons à l'équation à intégrale principale

$$\sigma(\varphi)\cos\varphi - \frac{1}{\pi}\int \frac{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}\,\sigma(\theta)\,d\theta = f(\varphi).$$

Pour l'opération

$$\sigma(\varphi)\cos\varphi - \frac{\lambda}{\pi}\int \frac{\sin\frac{\theta+\varphi}{2}}{\sin\frac{\theta-\varphi}{2}}\,\sigma(\theta)\,d\theta,$$

la fonction c du cas général se réduit à $-\frac{2\sin\varphi}{\pi}$; par suite l'ensemble C est l'axe purement imaginaire, pris dans sa totalité. Donc notre théorie s'applique à cette équation : or, d'après la discussion qui précède, si nous remplaçons f par zéro, nous avons *deux* solutions linéairement indépendantes, et l'équation homogène associée n'a que la solution *zéro*, puisque notre équation non homogène est toujours compatible. Cela entraîne que les noyaux résolvants (au sens du paragraphe 16) n'ont pas de pôle pour $\lambda = 1$, car autrement l'équation homogène associée aurait d'autres solutions que *zéro*. Ainsi donc, ici, pour le demi-plan où la partie réelle de λ est positive, on a $r = 2$ et $s = 0$. Pour le demi-plan où la partie réelle de λ est négative, on a $r = 0$ et $s = 2$, car si l'on change λ en $-\lambda$, cela revient à prendre l'opération que nous avons nommée *associée*. Donc nous avons du même coup un cas où le système des nombres r et s n'est pas le même pour deux domaines D relatifs à une même opération.

Beaucoup d'exemples analogues, où r et s ont d'autres valeurs, peuvent être formés en utilisant les recherches de Liénard, citées dans l'introduction.

D'une façon plus générale, étant donnée une opération du type elliptique

$$A \frac{\partial^2 u}{dx^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x\, dy} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + F u,$$

où A, B, ..., F sont des fonctions données de x et de y qui remplissent les conditions

$$AC - B^2 > 0, \qquad A > 0,$$

on peut, en chaque point de la frontière, simple ou multiple, d'un domaine borné, imposer la condition

$$a(s) \frac{\partial u}{\partial x} + b(s) \frac{\partial u}{\partial y} + c(s) u = \text{fonction donnée},$$

où les fonctions a, b et c, liées par la relation $a^2 + b^2 = 1$, sont données; s est l'arc de la frontière; on imposera en outre la condition que le résultat de l'opération du type elliptique, dans le domaine, soit une fonction donnée. Des équations du type ici étudié s'appliquent dans le cas où les coordonnées d'un point de la frontière s'expriment au moyen d'un paramètre par des fonctions dont les dérivées remplissent des conditions de Lipschitz et ne s'annulent nulle part ensemble, et où toutes les fonctions données remplissent des conditions de Lipschitz (ces hypothèses peuvent être élargies). Mais la discussion est plus difficile que dans les cas antérieurement traités. Il faudrait examiner si notre méthode fournit toutes les solutions u; elle fournit certainement toutes les solutions dont les deux dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont continues dans le domaine et sur sa frontière.

24. **Systèmes de plusieurs équations.** — Supposons que toutes les fonctions $g_{\alpha,\beta}(\alpha, \beta = 1, \ldots, p)$ remplissent des conditions de Lipschitz sur la variété $\mathcal{V}$ (§ 1), et que toutes les fonctions $G_{\alpha,\beta}$ soient du type considéré au paragraphe 2; nous désignons par $c_{\alpha,\beta}$ la fonction analogue à c pour $G_{\alpha,\beta}$. Nous considérons le système de p équations à p fonctions inconnues $u_\alpha(X)$

$$\Sigma_\beta \left[g_{\alpha,\beta}(X)\, u_\beta(X) - \lambda \int G_{\alpha,\beta}(X, A)\, u_\beta(A)\, d\sigma_A \right] = f_\alpha(X), \tag{88}$$

que nous pouvons écrire de façon abrégée

$$J_\lambda \vec{u}(X) = \vec{f}(X), \tag{89}$$

en considérant les u_α comme les composantes d'un vecteur $\vec{u}$, et les f_α comme les composantes d'un vecteur $\vec{f}$; cela nous définit l'opération J_λ.

Pour traiter ce système d'équations, nous cherchons une opération $J_\lambda^\star$ analogue à J_λ, mais telle que l'opération $J_\lambda^\star J_\lambda \vec{u}$ portant sur le vecteur $\vec{u}$, se traduise par des opérations

$$u_\alpha(X) - \lambda \int \Sigma_\beta H_{\alpha,\beta}(X, A; \lambda)\, u_\beta(A)\, d\sigma_A,$$

qui portent sur les composantes u_α, et où les p^2 fonctions $H_{\alpha,\beta}$ remplissent les conditions du paragraphe 2 et sont sommables.

Pour y parvenir, désignons par $TJ_\lambda(X; \theta)$, la matrice à p^2 éléments

$$\| g_{\alpha,\beta}(X) - i\pi\lambda\Omega(X) c_{\alpha,\beta}(X)\theta \|,$$

où θ est un des nombres 1 et -1. D'après l'identité (7), il est évident qu'on a

$$T(J_\lambda^\star J_\lambda) = TJ_\lambda^\star \times TJ_\lambda, \tag{90}$$

où le second membre désigne un produit de matrices. Cela nous conduit à notre but, car il s'agit de trouver $J_\lambda^\star$ de façon qu'on ait, en tout point de $\mathcal{V}$ et pour chaque valeur de θ,

$$TJ_\lambda^\star \times TJ_\lambda = U,$$

où U est la matrice unitaire. $TJ_\lambda^\star$ existe et est bien déterminé toutes les fois que le déterminant de la matrice TJ_λ n'est pas nul. Si ce déterminant ne s'annule en aucun point de $\mathcal{V}$ et pour aucune des deux valeurs de θ, nous en déduisons les valeurs de tous les

$$g^\star_{\alpha,\beta}(X;\lambda) - i\pi\lambda\Omega(X)c^\star_{\alpha,\beta}(X;\lambda)\theta,$$

et par suite les valeurs des $g^\star_{\alpha,\beta}$ et des $c^\star_{\alpha,\beta}$, qui doivent figurer dans l'opération $J^\star_\lambda$, arbitraire à tous autres égards (les astérisques distinguent ce qui se rapporte à $J^\star_\lambda$).

En égalant à zéro le déterminant de TJ_λ, nous avons ordinairement une équation de degré p en λ. Pour chaque point X de $\mathcal{V}$, nous avons ainsi ordinairement $2p$ points λ, dont p pour chaque valeur de θ. L'ensemble des points λ ainsi exclus de nos considérations, sera ce que nous appellerons maintenant l'ensemble C, analogue à celui du paragraphe 7. Si, pour un certain point X, le degré du déterminant de TJ_λ est inférieur à p (cela arrive nécessairement à la fois pour les deux valeurs de θ), nous dirons que le point à l'infini fait partie de C; si cela n'arrive pas, nos considérations s'appliquent au point à l'infini, et elles donnent la discussion du système d'équations

$$(91) \qquad -\Sigma_\beta \int G_{\alpha,\beta}(X, A)\, u_\beta(A)\, d\sigma_A = f_\alpha(X).$$

Tous les raisonnements développés pour une équation s'étendent ainsi à nos systèmes de p équations, et tous les résultats énoncés au paragraphe 22 s'étendent à ces systèmes.

En particulier si le point λ à l'infini n'appartient pas à C, *le système d'équations homogènes du type* (91) *admet autant de solutions linéairement indépendantes que le système homogène associé.* En effet, pour le système

$$(92) \qquad \Sigma_\beta\left[\pi\Omega(X)c_{\alpha,\beta}(X)u_\beta(X) - \lambda\int G_{\alpha,\beta}(X, A)\, u_\beta(A)\, d\sigma_A\right] = 0,$$

nous avons encore (91) (avec $f_\alpha = 0$) comme système-limite pour λ infini. Or pour (92) le déterminant de TJ_λ est le produit de $\pi^p\Omega^p(1 - i\lambda\theta)^p$ par le déterminant de la matrice $\|c_{\alpha,\beta}\|$, de sorte que C se réduit aux deux points $\lambda = \pm i$; notre assertion en résulte, comme au paragraphe 21.