BERTRAND GAMBIER

Couples de tétraèdres de Möbius

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 56 (1939), p. 71-118

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1939_3_56__71_0>

COUPLES DE TÉTRAÈDRES DE MÖBIUS

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. **Introduction.** — Dans un travail précédent (*Bull. des Sc. math.*, 1938, t. 62, p. 72-83), j'ai rappelé diverses propriétés des tétraèdres de Möbius. *Un tel couple* ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ *dépend de* 17 *paramètres,* bien qu'en apparence il y ait huit conditions *a priori* pour que A, B, C, D soient respectivement dans les faces $B_1C_1D_1$, $C_1D_1A_1$, $D_1A_1B_1$, $A_1B_1C_1$, et réciproquement A_1, ... dans les faces BCD, ... Le premier tétraèdre ABCD étant donné, on peut donner arbitrairement la trace sur le plan BCD du plan $AB_1C_1D_1$; cette trace coupe CD, DB, BC en b, c, d; on donne ensuite arbitrairement B_1 sur Ab, C_1 sur Ac, D_1 sur Ad, et des constructions géométriques simples fournissent A_1 dans le plan BCD.

Une proposition qui est due à R. Sturm (*Liniengeometrie,* Bd. 1, p. 69), et que l'auteur n'a pas développée, sera la clé de notre théorie :

Les segments AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *sont partagés harmoniquement par le couple* (*unique, formé de deux droites distinctes*), Δ, Δ' *des sécantes communes aux droites supports de ces segments.*

Cela prouve que le couple général T, T_1 de Möbius s'obtient à partir d'un tétraèdre T quelconque, d'une quadrique q conjuguée par rapport à T, de deux génératrices Δ, Δ' de même système de q; on applique à T l'involution biaxiale (Δ, Δ') et l'on a ainsi T_1.

On remarque que $[ABCD, A_1B_1C_1D_1]$, $[ABC_1D_1, A_1B_1CD]$, $[AB_1CD_1, A_1BC_1D]$, $[AB_1C_1D, A_1BCD_1]$ forment quatre couples de Möbius.

Les huit sommets d'un couple (T, T_1) *définissent ponctuellement* ∞^2 *quadriques* Q, ∞^2 *biquadratiques* $\mathcal{B}$; *en raison du caractère dualistique de la configuration, les huit faces définissent, tangentiellement,* ∞^2 *quadriques* Q_1, ∞^2 *développables* $\mathcal{D}$ *de classe* 4 *et genre* 1. *Toutes les quadriques* Q *ou* Q_1 *admettent* Δ, Δ' *comme couple de droites conjuguées.*

Les tétraèdres ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ sont, chacun, leur propre réciproque par rapport à une quadrique q contenant Δ, Δ'; le couple ABC_1D_1, B_1A_1DC, *où l'on fait correspondre les sommets de même rang*, est réciproque vis-à-vis de q; par suite, AB_1, BA_1, CD_1, DC_1 sont génératrices d'une même semi-quadrique, dont le support est une *quadrique* Σ_1 *circonscrite aux huit sommets, tangente aux huit faces.* Permutant circulairement B, C, D sans toucher à A ni aux indices (0 ou 1), on a *trois quadriques* Σ_1, Σ_2, Σ_3 *appartenant chacune au système ponctuel* Q, *au système tangentiel* Q_1 *définis à l'instant; chacune de ces quadriques est harmoniquement inscrite et circonscrite à chacune des deux autres.*

De là résulte aussitôt que : *Deux quadriques arbitraires n'admettent aucun couple de Möbius inscrit dans la première et circonscrit à la seconde;* appelons Q la première, Q_1 la seconde, et soient λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 les valeurs de λ telles que $Q - \lambda Q_1 = 0$ représente un cône; *si l'on a* $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$, Q *et* Q_1 *admettent* ∞^4 *couples de Möbius, inscrits dans* Q, *circonscrits à* Q_1; Δ étant la droite portant les sommets des cônes λ_1, λ_2 et Δ' la droite analogue pour λ_3, λ_4, nous dirons que Q *est Möbius-ment circonscrite à* Q_1, *et* Q_1 *Möbius-ment inscrite dans* Q, *relativement au couple conjugué* Δ, Δ'. *Si deux quadriques* Q, Q' *sont chacune Möbius-ment circonscrites à* Q_1 *pour le même couple* Δ, Δ', *il existe* ∞^2 *couples de Möbius inscrits dans la biquadratique* $\mathcal{B}(Q, Q')$ *et circonscrits à* Q_1; *si* Q'_1 *est une autre quadrique Möbius-ment inscrite dans* Q *et* Q' *pour* Δ *et* Δ', *il existe* ∞^1 *couples de Möbius inscrits dans* (Q, Q') *et circonscrits à la développable* (Q_1, Q'_1).

Les trois nouveaux couples $[ABC_1D_1, A_1B_1CD]$, ..., signalés plus haut, fournissent *chacun une quadrique* q_1, q_2, q_3 *analogue à* q; *chaque* q_i *est harmoniquement circonscrite et inscrite à chaque* Σ_j $(i = 0, 1, 2, 3)$,

($j = 1, 2, 3$); *la polarité* q_i *échange* Σ_j *avec elle-même, la polarité* Σ_j *échange* q_i *avec elle-même; chaque* q_i *coupe chaque* Σ_j *suivant quatre droites. Deux quadriques* q_i, q_j *se coupent, en dehors de* Δ, Δ', *suivant deux droites; on trouve ainsi six couples* (q_i, q_j) *: l'involution biaxiale correspondant à un tel couple change chacun des huit sommets en un autre sommet :* A, *par exemple, devient* B, C, D, B_1, C_1 *ou* D_1 *et l'involution biaxiale* (Δ, Δ') *change* A *en* A_1.

Avant d'étudier les résultats relatifs aux couples de Möbius inscrits ou circonscrits à une quadrique, une biquadratique ou une développable de classe 4, je montrerai que *le nombre maximum de tétraèdres pouvant deux à deux se trouver en situation de Möbius est* 4; il suffit de choisir une quadrique q, trois couples de génératrices de même système sur q, se divisant harmoniquement deux à deux, puis un tétraèdre T conjugué vis-à-vis de q; les transformés de T dans les involutions biaxiales relatives aux trois couples de génératrices choisis donnent, avec T, la configuration annoncée.

Ce travail actuel emprunte beaucoup de résultats au Mémoire que j'ai rédigé en collaboration avec M. Rowe (*Ann. de l'École Norm.*, t. 51, 1934, p. 153-191), sur les tétraèdres inscrits dans une première quadrique, circonscrits à une seconde; un échange de lettres entre M. Rowe et moi, au début de l'année 1938, nous a fait découvrir que notre Mémoire de 1934 contenait, sans que cela nous eût frappés, les couples de Möbius qui vont être étudiés en détail. M. Rowe a, de son côté, étudié le problème actuel par des méthodes assez différentes, de sorte qu'il nous a paru préférable de publier nos résultats séparément; j'ajouterai enfin que ce travail actuel se trouve, d'une façon bien inattendue, en relation étroite avec un autre Mémoire, rédigé encore en collaboration avec M. Rowe (*Ann. de l'École Norm.*, t. 53, 1936, p. 329-386), sur les biquadratiques et les cubiques gauches, lieux des points dont les rapports des distances à trois droites fixes restent constants.

2. **Sécantes communes à** AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. — En prenant le tétraèdre T (ABCD) pour tétraèdre de référence et un point unité convenablement choisi sur AA_1, les coordonnées des huit sommets ont les valeurs suivantes, indiquées dans le Mémoire cité du *Bulletin*

des Sciences mathématiques :

$$
(1)\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
\mathrm{A} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\mathrm{B} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\mathrm{C} & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\mathrm{D} & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
\mathrm{A}_1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
\mathrm{B}_1 & 1 & 0 & -1 & -\alpha_1 \\
\mathrm{C}_1 & 1 & 1 & 0 & \beta_1 \\
\mathrm{D}_1 & 1 & \alpha_1 & -\beta_1 & 0
\end{array}
$$

Le déterminant formé par $A_1B_1C_1D_1$ *est symétrique gauche;* il est égal à $(\alpha_1+\beta_1-1)^2$; le cas où $\alpha_1+\beta_1-1$ est nul est relatif à la dégénérescence, que nous écartons, où les quatre points A_1, B_1, C_1, D_1 sont à l'intersection d'une même droite avec les faces BCD, CDA, DAB, ABC.

Nous cherchons quatre points (a, b, c, d) alignés, situés respectivement sur AA_1, BB_1, CC, DD_1; nous pouvons prendre pour coordonnées respectives de ces points :

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
a & p & -1 & -1 & -1 \\
b & 1 & q & -1 & -\alpha_1 \\
c & 1 & 1 & r & \beta_1 \\
d & 1 & \alpha_1 & -\beta_1 & s
\end{array}
$$

et, si $pq+1$ n'est pas nul, on trouve, comme conditions *nécessaires et suffisantes* (*nécessaires même si* $pq+1$ *est nul*),

$$
\begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ 1 & q & -1 \\ 1 & 1 & r \end{vmatrix}=0, \qquad
\begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ 1 & q & -\alpha_1 \\ 1 & 1 & \beta_1 \end{vmatrix}=0,
$$
$$
\begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ 1 & q & -1 \\ 1 & \alpha_1 & -\beta_1 \end{vmatrix}=0, \qquad
\begin{vmatrix} p & -1 & -1 \\ 1 & q & -\alpha_1 \\ 1 & \alpha_1 & s \end{vmatrix}=0.
$$

Les premier et dernier déterminants sont impairs en p, q, r, s; on combine le second et le troisième par addition et soustraction; on a ainsi

$$(2)\qquad \begin{cases} pqr+p+q+r=0, & s(pq+1)+q=0, \\ p\alpha_1+q=0, & \beta_1(pq+1)+\alpha_1-1=0. \end{cases}$$

Les deux équations de la seconde ligne donnent, en éliminant q,

$$(3)\qquad p^2\alpha_1\beta_1-\alpha_1-\beta_1+1=0.$$

On a écarté les dégénérescences $\alpha_1\beta_1=0$ (1), $\alpha_1+\beta_1-1=0$, de sorte qu'il y a *deux sécantes communes distinctes* [$pq+1$ n'est pas nul, sinon on aurait des équations incompatibles $p+q=0$, $q=0$, $pq+1=0$; les équations (2) sont donc *nécessaires et suffisantes*]; les deux solutions (p, q, r, s), $(-p, -q, -r, -s)$ prouvent bien que AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *sont partagés harmoniquement par les deux sécantes communes;* d'autre part, comme il n'y a que deux sécantes communes, distinctes, les quatre droites AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ne sont pas génératrices d'une même semi-quadrique (et même, aucune n'est tangente à la quadrique déterminée par les trois autres).

Ce résultat peut s'obtenir aussi, sans calcul, par un *décompte fait avec précaution.* Le tableau (1) des coordonnées des sommets de T et T_1 prouve clairement qu'il n'y a qu'une famille de couples de Möbius, cette famille dépend de 17 paramètres (12 pour T, 3 pour le point unité, puis α_1 et β_1). Donc, si, par un procédé quelconque, nous réalisons un couple de Möbius dépendant de 17 paramètres, c'est le *couple général* (et même l'unique couple général), de sorte que tout couple de Möbius pourra être obtenu par ce procédé.

Choisissons donc une quadrique q (9 paramètres), un tétraèdre T conjugué à q (6 paramètres), un couple de génératrices Δ, Δ' de même système sur q (2 paramètres). L'involution biaxiale d'axes Δ, Δ' change q en elle-même et remplace T par un tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ conjugué aussi par rapport à q; A et A_1 sont conjugués par rapport à q, donc le plan polaire de A par rapport à q contient B, C, D, A_1 (et de même, celui de A_1 contient B_1, C_1, D_1, A) : les deux tétraèdres T, T_1 sont en position de Möbius; le système (T, T_1, q) dépend de 17 para-

(1) $\alpha_1=0$ indique que B_1 et D_1 sont sur l'arête AC qui est alors sécante commune.

mètres; d'autre part, T et T_1 n'ont aucune des configurations caractéristiques du cas où deux quadriques *distinctes* q, q' admettent au moins deux tétraèdres conjugués communs; donc, T et T_1 n'admettent qu'une seule quadrique q conjuguée vis-à-vis de chacun d'eux, et le couple (T, T_1) dépend de 17 paramètres, tout comme (T, T_1, q); notre proposition est établie : *à tout couple* T, T_1 *correspond nécessairement une quadrique* q *et deux génératrices* Δ, Δ' *de même système de* q, *coupant harmoniquement* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1.

On remarque que la polarité q transforme AA_1 en la droite d'intersection des faces BCD, $B_1C_1D_1$: *les quatre droites d'intersection des faces homologues admettent les droites* Δ, Δ' *déjà obtenues comme sécantes communes; les deux plans* BCD, $B_1C_1D_1$ *sont conjugués harmoniques par rapport aux deux plans issus de leur droite commune et contenant* Δ *ou* Δ'.

Nous avons remarqué que le couple $(ABCD, A_1B_1C_1D_1)$ est accompagné automatiquement de trois autres couples de Möbius (ABC_1D_1, A_1B_1CD), (AB_1CD_1, A_1BC_1D), (AB_1C_1D, A_1BCD_1). Le couple (ABC_1D_1, A_1B_1CD) définit une nouvelle quadrique q' conjuguée par rapport à chaque tétraèdre de ce couple; q' est distincte de q, car A a pour plans polaires : BCD relativement à q, BC_1D_1 pour q'. Si donc, dans ce nouveau couple, nous associons les sommets dans l'ordre (ABC_1D_1, B_1A_1DC), nous voyons que ces deux tétraèdres sont réciproques l'un de l'autre vis-à-vis de q, car deux lettres de même indice donnent deux sommets conjugués par rapport à q, et la même lettre, avec des indices différents, donne aussi deux sommets conjugués par rapport à q; donc A est pôle de A_1DC (d'ailleurs, A_1DC et BDC sont deux plans identiques); donc, les deux tétraèdres T, T_1 admettent trois situations hyperboloïdales, d'après le schéma

A	B	C	D
B_1	A_1	D_1	C_1

A	B	C	D
C_1	D_1	A_1	B_1

A	B	C	D
D_1	C_1	B_1	A_1

(les droites joignant deux points placés sur la même verticale du schéma forment quatre génératrices d'une même semi-quadrique). Or, *si deux tétraèdres* (ABCD) *et* $(A_1B_1C_1D_1)$, *qui ne forment pas un couple de Möbius, admettent les trois situations en jeu, ils admettent* *automatiquement la quatrième*

A	B	C	D
A_1	B_1	C_1	D_1

Les couples de Möbius forment exception : ils admettent les trois premières, mais non la quatrième. (On pourra consulter à ce sujet mon Mémoire du *Bull. de la Soc. math. de France,* t. 66, 1938, p. 8-47.) *Les trois quadriques qui viennent d'être signalées*

Σ_1, support de AB_1, BA_1, CD_1, DC_1;
Σ_2, » AC_1, BD_1, CA_1, DB_1;
Σ_3, » AD_1, BC_1, CB_1, DA_1,

joueront plus tard un rôle important.

On remarquera que la polarité q remplace A par le plan BCD; ensuite, l'involution biaxiale (Δ, Δ') remplace le plan BCD par le plan $B_1C_1D_1$ (qui passe en A) : *donc, la composition des opérations* $[q, (\Delta, \Delta')]$ *dans cet ordre est une dualité qui est relative à un complexe linéaire* C; on vérifie immédiatement que la composition en ordre inverse $[(\Delta, \Delta'), q]$ remplace A par A_1, puis par le plan $B_1C_1D_1$, de sorte que *les deux opérations sont permutables.* Nous avons retrouvé le moyen de construire un couple de Möbius en prenant un tétraèdre T arbitraire (12 paramètres), un complexe linéaire C arbitraire (5 paramètres) et prenant le réciproque T_1 de T par rapport à C; le complexe C contient Δ, Δ', et les génératrices de q de système opposé à Δ et Δ'; quand un point M décrit Δ, son plan polaire par rapport à C coupe Δ' en un point M' et la droite MM' engendre la quadrique q. On peut donc encore, pour construire T et T_1, partir d'un complexe linéaire C (5 paramètres), puis de deux droites Δ, Δ' non sécantes de C (3 + 3 paramètres); la quadrique q est obtenue par le procédé qui vient d'être indiqué (lieu de la droite MM'); on prend ensuite un tétraèdre T conjugué par rapport à q (6 paramètres) et le transformé T_1 de T par l'involution biaxiale (Δ, Δ') : on retrouve 17 comme total $(5 + 3 + 3 + 6)$ (1).

(1) On remarquera, tout du long de ce travail, l'intérêt de ne pas seulement indiquer le

3. **Système de quatre tétraèdres deux à deux en position de Möbius.** — Imaginons une semi-quadrique q, trois couples de génératrices de q, à savoir $(\Delta_{01}, \Delta'_{01})$, $(\Delta_{02}, \Delta'_{02})$, $(\Delta_{03}, \Delta'_{03})$ se divisant deux à deux harmoniquement, puis un tétraèdre T conjugué par rapport à q; on engage ainsi un total de paramètres : 9 pour q, 2 pour $(\Delta_{01}, \Delta'_{01})$, 1 pour Δ_{02}, 6 pour T, soit $9+2+1+6=18$. On sait que deux quelconques des involutions biaxiales $(\Delta_{01}, \Delta'_{01})$, $(\Delta_{02}, \Delta'_{02})$, $(\Delta_{03}, \Delta'_{03})$ sont *permutables, que le produit de deux d'entre elles est équivalent à la troisième.* Les transformés T_1, T_2, T_3 de T par chaque involution $(\Delta_{01}, \Delta'_{01})$, $(\Delta_{02}, \Delta'_{02})$, $(\Delta_{03}, \Delta'_{03})$ sont chacun en position de Möbius avec T; *deux quelconques des trois tétraèdres* T_1, T_2, T_3 *sont aussi en position de Möbius,* car on peut passer de T_2 à T_3, par exemple, en transformant T_2 en T par $(\Delta_{02}, \Delta'_{02})$, puis T en T_3 par $(\Delta_{03}, \Delta'_{03})$, de sorte que T_2 et T_3 se correspondent par l'involution $(\Delta_{01}, \Delta'_{01})$ et, d'autre part, T_2 et T_3 sont conjugués par rapport à q. Nous voyons que le symbole $(\Delta_{01}, \Delta'_{01})$ employé pour rappeler le passage de T à T_1 peut être remplacé par le symbole $(\Delta_{23}, \Delta'_{23})$; d'une façon générale, $(\Delta_{ij}, \Delta'_{ij}) \equiv (\Delta_{kl}, \Delta'_{kl})$, i, j, k, l désignant les nombres 0, 1, 2, 3 dans un ordre quelconque.

De même, le couple T_i, T_j donne lieu au complexe C_{ij} et $C_{ij} \equiv C_{kl}$, car on a $C_{ij} = (q)(\Delta_{ij}, \Delta'_{ij}) = (q)(\Delta_{kl}, \Delta'_{kl}) = C_{kl}$. *Nous obtenons donc trois complexes et non six : ces trois complexes sont conjugués deux à deux;* en effet, considérons le plan $B_2C_2D_2$: il a pour pôle, vis-à-vis de C_{02}, le point A, et de C_{12}, le point A_1, de sorte que la droite AA_1, contenue dans le plan $B_2C_2D_2$, appartient à C_{02} et C_{12}; même résultat pour BB_1, CC_1, DD_1; il en résulte que *les droites communes à* C_{02} *et* C_{12} *forment la congruence linéaire d'axes* Δ_{01}, Δ'_{01}; *les quatre complexes suivants :* C_{02}, C_{12}, *complexe spécial* Δ_{01}, *complexe spécial* Δ'_{01}, *appartiennent à un même faisceau; puisque les pôles de* $B_2C_2D_2$ *par rapport à ces complexes sont :* A, A_1 *et les points où* AA_1 *rencontre* Δ_{01}, Δ'_{01}, *les complexes* C_{02} *et* C_{12} *sont conjugués.*

---

total des paramètres intervenant pour construire une certaine figure, mais encore une *hiérarchie* entre ces paramètres. Ainsi, pour (T, T_1), le total est 17, mais nous avons indiqué plusieurs décompositions de ce total : $9+2+6$, si l'on choisit une quadrique q pour commencer, ou $5+3+3+6$ si l'on choisit d'abord un complexe C.

Les axes $\Delta_{01} \equiv \Delta_{23}$, $\Delta'_{01} \equiv \Delta'_{23}$ appartiennent à $C_{01} \equiv C_{23}$ et sont conjugués par rapport à $C_{02} \equiv C_{13}$ et $C_{12} \equiv C_{03}$.

Inversement, si trois complexes C_{01}, C_{02}, C_{03} sont en involution deux à deux (ce qui fait un total de 12 paramètres pour fixer C_{01}, C_{02}, C_{03}), la congruence des droites communes à C_{02} et C_{03} a pour directrice, deux droites Δ_{01}, Δ'_{01} de C_{01} qui sont conjuguées par rapport à C_{02} et C_{03}; les deux couples analogues $(\Delta_{02}, \Delta'_{02})$, $(\Delta_{03}, \Delta'_{03})$ forment avec $(\Delta_{01}, \Delta'_{01})$ six génératrices d'une même semi-quadrique q, se divisant harmoniquement deux à deux; un tétraèdre T, conjugué par rapport à q engage six nouveaux paramètres et conduit à la configuration qui vient d'être étudiée. On remarque aussi que les droites communes à C_{01}, C_{02}, C_{03} engendrent la semi-quadrique q' complémentaire de q.

Il est facile de voir que les constructions *synthétiques*, qui ont été données depuis le début de ce paragraphe, fournissent *la solution générale du problème consistant à déterminer h tétraèdres deux à deux en position de Möbius; h* ne peut avoir que les valeurs 2, 3, 4; inutile de parler de $h = 2$; si trois tétraèdres T, T_1, T_2 sont deux à deux en position de Möbius, la droite AA_1 qui joint les pôles de $B_2C_2D_2$ par rapport à C_{02} et C_{12} appartient à la congruence commune à C_{02} et C_{12}; puisqu'elle est coupée harmoniquement par Δ_{01}, Δ'_{01} (axes de cette congruence, sécantes communes à AA_1, BB_1, CC_1, DD_1), les complexes C_{02}, C_{12} sont conjugués; par raison de symétrie, les trois complexes sont conjugués deux à deux et nous retrouvons la figure étudiée, avec l'unique tétraèdre complémentaire T_3 qui porte le nombre h à son maximum 4. Remarquons encore à ce propos que, le couple (T, T_1) de Möbius étant supposé connu, si nous cherchons les sommets A_2, A_3 encore inconnus de T_2 et T_3, le lieu de ces sommets est la droite δ_a commune aux deux plans BCD et $B_1C_1D_1$; dans le plan A_1BCD, les ∞^1 coniques passant par A_1, B, C, D coupent δ_a en ∞^1 couples de points formant une involution; A_2, A_3 est l'un de ces couples, et le choix de ce couple correspond au 18^e paramètre qu'il faut ajouter aux 17 paramètres de T, T_1 pour obtenir le total T, T_1, T_2, T_3; le choix de A_2 permet d'obtenir T_2, car $A_2B_2C_2DD_1$ sont dans un même plan et sur une même conique; or, le plan A_2DD_1 est connu (par le choix de A_2) et perce δ_b en B_2; on a ensuite C_2 par intersection de ce même plan

A_2DD_1 et δ_c; D_2 s'obtient de façon analogue. Sur δ_a, les points doubles de l'involution, dont A_2, A_3 sont un couple, sont les points où Δ_{01}, Δ'_{01} rencontrent δ_a : si A_2 venait en l'un de ces deux points, A_3 se confondrait avec lui, et les deux tétraèdres T_1, T_3 confondus, se réduiraient à quatre points en ligne droite.

Nous ne nous sommes pas, jusqu'ici, préoccupés de la *réalité;* pour obtenir des tétraèdres tous réels, on doit rester dans l'un ou l'autre des deux cas suivants :

1° *q réelle, à génératrices réelles;* deux des couples de génératrices sont réels, le troisième est formé de deux droites imaginaires conjuguées ; les trois involutions biaxiales sont réelles.

2° *q imaginaire, mais d'équation réelle;* on prend pour premier couple $(\Delta_{01}, \Delta'_{01})$ deux génératrices imaginaires conjuguées de q ; il existe ∞^1 couples formés de droites imaginaires conjuguées, divisant harmoniquement $(\Delta_{01}, \Delta'_{01})$ sur q ; on a encore trois involutions réelles. Par une homographie réelle de l'espace tout entier, on peut réduire la figure à

$$\left\{\begin{array}{llll} & & q \equiv x^2+y^2+z^2+1=0, & \\ \Delta_{01} & (x=i,\ y=iz), & \Delta'_{01} & (x=-i,\ y=-iz); \\ \Delta_{02} & (y=i,\ z=ix), & \Delta'_{02} & (y=-i,\ z=-ix); \\ \Delta_{03} & (z=i,\ x=iy), & \Delta'_{03} & (z=-i,\ x=-iy). \end{array}\right.$$

Les équations des involutions biaxiales sont

$$\begin{array}{llll} (\Delta_{01}, \Delta'_{01}) & X=\dfrac{-1}{x}, & Y=\dfrac{-z}{x}, & Z=\dfrac{y}{x}; \\ (\Delta_{02}, \Delta'_{02}) & X=\dfrac{z}{y}, & Y=\dfrac{-1}{y}, & Z=\dfrac{-x}{y}; \\ (\Delta_{03}, \Delta'_{03}) & X=\dfrac{-y}{z}, & Y=\dfrac{x}{z}, & Z=\dfrac{-1}{z}. \end{array}$$

Les tétraèdres T, après cette réduction, sont orthocentriques (un échantillon simple correspond à un tétraèdre régulier inscrit dans la sphère de centre O et rayon $\sqrt{3}$).

Pour abréger, nous ne donnerons pas la solution analytique ; les tableaux (1) du paragraphe 2 donnent les coordonnées des sommets de T et T_1 ; les coordonnées de T_2, T_3 sont fournies par les tableaux

A_2	o	$-\lambda_2$	$-\rho_2$	$-\sigma_2$
B_2	1	o	$-\rho_2$	$-\sigma_2\alpha_2$
C_2	1	λ_2	o	$\sigma_2\beta_2$
D_2	1	$\lambda_2\alpha_2$	$\rho_2\beta_2$	o

A_3	o	$-\lambda_3$	$-\rho_3$	$-\sigma_3$
B_3	1	o	$-\rho_3$	$-\sigma_3\alpha_3$
C_3	1	λ_3	o	$\sigma_3\beta_3$
D_3	1	$\lambda_3\alpha_3$	$\rho_3\beta_3$	o

Quand on ne considère que T et T_1, les nombres α_1 et β_1 sont les deux invariants homographiques de la figure. Quand on étudie le système T, T_1, T_2, T_3, on peut écrire avec trois arbitraires t_1, t_2, t_3, qui, sur la conique $BCDA_1A_2A_3$, représentent précisément les birapports $(DCBA_1)$, $(DCBA_2)$, $(DCBA_3)$ et sont les trois invariants homographiques de la figure

$$\alpha_1 = \frac{t_2 t_3}{t_1}, \qquad \alpha_2 = \frac{t_3 t_1}{t_2}, \qquad \alpha_3 = \frac{t_1 t_2}{t_3},$$

$$\beta_1 = \frac{(1-t_2)(1-t_3)}{1-t_1}, \qquad \beta_2 = \frac{(1-t_3)(1-t_1)}{1-t_2}, \qquad \beta_3 = \frac{(1-t_1)(1-t_2)}{1-t_3},$$

$$\lambda_2 = \frac{t_2}{t_1}, \qquad \rho_2 = \frac{1-t_2}{1-t_1}, \qquad \sigma_2 = \lambda_2\rho_2,$$

$$\lambda_3 = \frac{t_3}{t_1}, \qquad \rho_3 = \frac{1-t_3}{1-t_1}, \qquad \sigma_3 = \lambda_3\rho_3.$$

4. **Rappel de propriétés relatives aux transformations homographiques d'une biquadratique en elle-même. Quadriques harmoniquement inscrites et circonscrites l'une à l'autre.** — Soient deux quadriques Q, Q_1 *quelconques* (ayant par conséquent un *unique* tétraèdre conjugué commun Θ), dont nous écrivons les équations réduites

$$Q \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

$$Q_1 \quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0.$$

L'équation $Q - \lambda Q_1 = 0$ donne un cône pour λ égal à l'une des valeurs a, b, c, d. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse trouver des quadriques q coupant* Q *et* Q_1 *suivant quatre droites est*

$$R = (ab - cd)(ac - bd)(ad - bc) = 0.$$

Le système (Q, Q_1) *dépend alors de* 17 *paramètres, et q de* 2.

Une quadrique Q étant donnée, un quadrilatère gauche tracé sur Q dépend de quatre paramètres; une quadrique q coupant Q suivant quatre droites dépend de cinq paramètres, autrement dit, n'est astreinte qu'à quatre conditions; une quadrique q coupant séparément Q et Q_1 suivant quatre droites, est astreinte à huit conditions; on devrait donc pouvoir compter sur ∞^1 quadriques q (1). Un raisonnement simple nous fait apercevoir *qu'il y a nécessairement ∞^2 quadriques q, dès qu'il en existe une, et, par suite, que le problème est impossible si* Q *et* Q_1 *sont choisies arbitrairement, et que, si une certaine condition est remplie, on obtient ∞^2 solutions.* Appelons α, β les deux systèmes de génératrices de Q et α_1, β_1 les deux systèmes de Q_1. La quadrique q est supposée contenir deux génératrices α de Q, soit g et g'; parmi les génératrices de q, de l'autre système que g, g', il y en a deux qui appartiennent à Q_1; supposons qu'elles soient du système α_1 de Q_1, et nommons-les g_1, g'_1; la figure (g, g_1, g', g'_1) forme un quadrilatère gauche que nous appellerons r; q donne sur Q deux génératrices γ, γ' du système β et sur Q_1 deux autres γ_1, γ'_1 du système β_1 et $(\gamma, \gamma_1, \gamma', \gamma'_1)$ est un nouveau quadrilatère gauche r_1; il est clair que les sommets de r et r_1 sont sur la biquadratique $\mathcal{B}$ commune à (Q, Q_1); si nous faisons passer par r les ∞^1 quadriques $\overline{q}$ qui le contiennent, à chaque $\overline{q}$ correspond un nouveau quadrilatère $\overline{r}_1$ et chaque quadrilatère $\overline{r}_1$ fournit ∞^1 quadriques q' coupant encore Q et Q_1 suivant quatre droites; comme on a ∞^1 quadrilatères $\overline{r}_1$, et, pour chacun d'eux, ∞^1 quadriques q', on a finalement ∞^2 quadriques du type cherché, s'il en existe une.

Conclusion : Pour reconnaître si, oui ou non, les quadriques q existent, nous prenons une génératrice *quelconque* de Q, du système α par exemple; elle perce Q_1 en m, n; choisissons *un* système sur Q_1

(1) Le système (q, Q, Q_1) dépend de 19 paramètres : 9 pour q, 5 pour Q, 5 pour Q_1. Le système (Q, Q_1) dépend de 17 paramètres et ensuite q de 2.

soit α_1, et traçons les génératrices α_1 issues de m, n; elles recoupent Q en m', n'; si $m'n'$ n'est pas génératrice de Q, il n'existe aucune quadrique q formée avec (α, β) ou (α_1, β_1); si $m'n'$ est génératrice de Q, il suffit de cette expérience *unique* pour affirmer que l'on trouve ∞^2 quadriques q formées avec (α, β) et (α_1, β_1). Si le système (α, β) a échoué, on mène par les mêmes points m, n les génératrices β_1 de Q, ce qui donnera un point μ' au lieu de m', un point ν' au lieu de n, et l'on trace μ', ν'; comme plus haut, il suffit de cette unique expérience pour savoir si la combinaison (α, β_1) ou (α_1, β) donne zéro ou ∞^2 quadriques q.

En cas de succès, R est nul; cette condition a été obtenue depuis longtemps et je n'insiste pas; mais il est essentiel de garder les *trois* facteurs de R et non *un seul. Quand* R *est nul, en général, un seul facteur est nul,* et alors il y a une seule des deux combinaisons (α, β) ou (α, β_1) qui réussit pour trouver q (on a une seule série ∞^2); si l'on suppose $ab - cd = 0$, cela signifie que le *quadrilatère gauche* $mnn'm'$ *obtenu a ses sommets opposés* (m, n') *ou* (n, m') *qui se correspondent dans l'involution biaxiale d'axes* δ, δ' *où* δ *porte les sommets des cônes relatifs à* $\lambda = a$ *ou* b *et* δ' *les sommets analogues relatifs à* $\lambda = c$ *ou* d. *De plus,* δ, δ' *sont conjuguées par rapport à* q *:* cela résulte d'une proposition qui est démontrée au paragraphe suivant : la biquadratique Q, Q_1 possède quatre cordes, à savoir mn', nm' diagonales de r, puis $m_1 n'_1$, $n_1 m'_1$ diagonales de r_1, divisées harmoniquement par δ et δ'; les quatre cordes ne sont pas génératrices sur une même quadrique, donc δ et δ' sont conjuguées par rapport à la quadrique q qui passe par les huit points m, n, m', n', m_1, n_1, m'_1, n'_1 sans appartenir au faisceau Q, Q_1.

Le cas important pour notre étude présente est celui où *deux* facteurs de R sont nuls; supposons que l'on ait $ac - bd = 0$, $ad - bc = 0$. On en déduit (puisque $abcd \neq 0$), $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{d}{c}$, et la valeur commune de ces rapports est 1 ou -1; le premier cas réduit la biquadratique à quatre droites ($x^2 + y^2 = 0$, $z^2 + t^2 = 0$), et en ce moment, nous raisonnons sur une biquadratique *quelconque;* nous envisageons donc seulement $a + b = 0$, $c + d = 0$, d'où nous déduisons que les deux quadriques Q, Q_1 sont chacune *harmoniquemens inscrite-circons-*

crite à l'autre ; d'autre part, cette fois, les combinaisons (α, β), (α, β_1) réussissent *toutes deux* et non plus l'une à l'exclusion de l'autre ; nous avons *deux* séries ∞^2 de quadriques q; une première série fournit des quadrilatères dont les sommets opposés se correspondent dans l'involution biaxiale relative aux arêtes joignant les sommets des cônes (a, c) ou (b, d); pour l'autre série, c'est (a, d) et (b, c); il sera utile de préciser que les quadriques Q, Q_1 sont ***harmoniquement inscrites-circonscrites pour le couple*** (Δ, Δ') où Δ porte les sommets des cônes (a, b) et Δ' les sommets des cônes (c, d). Nous pouvons maintenant indiquer des critériums simples pour une figure de cette espèce ; Q possède, dans chaque système α ou β, un couple et un seul conjugué par rapport à Q_1 [on ne trouve ∞^1 couples que si Q et Q_1 se coupent suivant quatre droites et sont chacune sa réciproque par polarité vis-à-vis de l'autre (¹)]; en prenant sur l'une des génératrices d'un tel couple deux points conjugués par rapport à Q_1, et faisant de même sur l'autre génératrice du couple, on obtient un tétraèdre conjugué par rapport à Q_1, qui peut être regardé comme *inscrit dans* Q *ou circonscrit à* Q, ce qui explique pourquoi Q est à la fois *inscrite ou circonscrite, harmoniquement à* Q_1. D'autre part, les points où Δ coupe Q ou Q_1 forment deux couples harmoniques; de même pour Δ'; en prenant les points communs à Q et au couple Δ, Δ', on obtient un tétraèdre inscrit dans Q, conjugué par rapport à Q_1. Par polarité relative à Q_1, les deux génératrices d'un même système de Q qui sont conjuguées par rapport à Q_1 s'échangent, de sorte que Q et sa réciproque se coupent suivant quatre droites.

Chacun de ces critériums est nécessaire et suffisant.

Si l'on prend Δ pour axe $x = y = 0$, Δ' pour axe $z = t = 0$, les équations de Q et Q_1 sont : ponctuellement pour Q et tangentiellement pour Q_1,

$$\begin{array}{ll} Q & Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 + 2Exy + 2Fxy = 0, \\ Q_1 & au^2 + bv^2 + cw^2 + dh^2 + 2euv + 2fwh = 0, \end{array}$$

(¹) Dans ce cas spécial, dont nous verrons l'importance au paragraphe suivant, Q et Q_1 ont deux génératrices communes G, G_1 de même système, et deux autres γ, γ_1 du système opposé à G ; dans le système G, Q_1 possède ∞^1 couples de génératrices conjuguées par rapport à Q, et les deux génératrices d'un même couple sont conjuguées par rapport à G et G_1 ; même propriété pour le système γ.

et les équations : tangentielle de Q, ponctuelle de Q_1, sont

$$\overline{Q} \quad \frac{Bu^2 + Av^2 - 2Euv}{AB - E^2} + \frac{Dw^2 + Ch^2 - 2Fwh}{CD - E^2} = 0,$$

$$\overline{Q}_1 \quad \frac{bx^2 + ay^2 - 2exy}{ab - e^2} + \frac{dz^2 + ct^2 - 2fzt}{cd - f^2} = 0.$$

Les conditions pour que Q et Q_1 soient harmoniquement inscrites-circonscrites (pour Δ, Δ'), sont

$$(1) \qquad Aa + Bb + 2Ee = 0, \qquad Cc + Dd + 2Ff = 0.$$

Comme, en quelque sorte, les points d'intersection avec Δ d'une part, avec Δ' de l'autre, sont seuls à intervenir, on peut songer à trois couples de points se divisant harmoniquement d'un couple à l'autre sur Δ, et aussi sur Δ' : on arrive ainsi intuitivement au système *général* de trois quadriques deux à deux harmoniquement inscrites-circonscrites (relativement au couple conjugué Δ, Δ')

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \qquad x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2), \qquad xy + nzt = 0.$$

Et nous verrons plus bas que les ***huit points communs à ces trois quadriques fournissent effectivement le couple de Möbius général*** (naturellement, on a *quatre* couples simultanés de Möbius) : on a bien les 17 paramètres prévus, à savoir les 15 paramètres de l'homographie générale de l'espace, puis deux invariants homographiques *m*, *n*.

Dans les 16 transformations homographiques d'une biquadratique $\mathcal{B}$ en elle-même, les quadriques harmoniquement inscrites-circonscrites jouent un grand rôle ; chaque couple d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun aux quadriques du faisceau ponctuel issu de $\mathcal{B}$ fournit deux de ces quadriques ; somme toute, on rencontre ici le problème : *réduire une équation algébrique de degré 4 à la forme bicarrée*. Dans quelques-unes des 16 homographies, non seulement $\mathcal{B}$, mais chacune des quadriques spéciales relatives à un couple déterminé d'arêtes opposées reste inchangée (au lieu de s'échanger avec une quadrique spéciale obtenue par le même couple d'arêtes ou un autre couple).

Quand nous voudrons définir une biquadratique *générale* par 16 paramètres stricts, il sera imposé de choisir un couple spécial de cette nature : les deux premières équations (2), par exemple, donnent cette représentation avec l'invariant homographique m (le cas $m=\pm 1$ est très spécial et conduit à deux quadriques ayant quatre droites communes et se transformant chacune en elle-même par polarité relative à l'autre).

On sait aussi que, si l'on a posé

$$Q \equiv x^2+y^2+z^2+t^2, \qquad Q_1 \equiv x^2-y^2+m(z^2-t^2),$$

les deux quadriques $Q-hQ_1=0$, $Q+hQ_1=0$, *où* h *est quelconque, admettent* ∞^2 *quadriques les coupant chacune suivant quatre droites.*

5. **Étude détaillée d'un couple de Möbius.** — Les huit sommets d'un couple T, T_1 de Möbius sont communs *à* ∞^2 *biquadratiques et* ∞^2 *quadriques :* en effet, nous connaissons quatre quadriques, dégénérées en deux plans, n'appartenant pas à un même faisceau contenant ces points ; les deux plans $AB_1C_1D_1$ et A_1BCD et les couples analogues contiennent les huit points. Dualistiquement, les huit faces du couple (T, T_1) définissent tangentiellement ∞^2 *quadriques,* ∞^2 *développables de classe* 4 *et genre* 1.

Les deux droites (Δ, Δ') *relatives à* AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 *sont conjuguées par rapport à toutes les quadriques des deux systèmes* ∞^2 *tangentiel ou ponctuel que nous venons de définir.*

Cette proposition est importante et nous allons en donner deux démonstrations différentes. La première est de nature transcendante et donne un résultat plus précis : *toute biquadratique* $\mathcal{B}$ *est circonscrite à* ∞^3 *couples de Möbius, pour chaque couple d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun aux quadriques issues de* $\mathcal{B}$. En effet, sur $\mathcal{B}$, choisissons un paramètre elliptique u, tel que la condition

$$u_1+u_2+u_3+u_4=0$$

soit la condition nécessaire et suffisante pour que quatre points de la courbe soient coplanaires. Appelant a, b, ..., d_1 les paramètres de A, B, ..., D_1, on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a_1+b+c+d=0, & a+b_1+c_1+d_1=0; \\ a+b_1+c+d=0, & a_1+b+c_1+d_1=0; \\ a+b+c_1+d=0, & a_1+b_1+c+d_1=0; \\ a+b+c+d_1=0, & a_1+b_1+c_1+d=0. \end{array}\right.$$

Additionner deux équations de la même ligne donne $\Sigma a + \Sigma a_1 = 0$; donc les équations se réduisent à 5, par exemple, les équations de gauche et la première équation de droite; l'addition des équations de gauche donne $3\Sigma a + \Sigma a_1 = 0$, d'où $2\Sigma a = 0$; si l'on prend $\Sigma a = 0$, les deux tétraèdres coïncident et sont même aplatis; on doit donc prendre $\Sigma a = \omega$, ω' ou $\omega + \omega'$ en appelant, suivant l'usage 2ω, $2\omega'$, les périodes de la fonction elliptique employée. Si l'on prend $\Sigma a = \omega$, on voit que l'on peut prendre b, c, d arbitraires; on a ensuite $a = \omega - (b + c + d)$, puis $a_1 = a - \omega$, $b_1 = b - \omega$, $c_1 = c - \omega$, $d_1 = d - \omega$, et cela prouve que chaque couple (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), (D, D_1) se correspond dans une involution biaxiale dont les axes sont un couple d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun; on peut choisir chaque couple d'arêtes opposées [1], puisque Σa peut avoir, au choix, l'une des trois valeurs ω, ω', $\omega + \omega'$.

Soit maintenant la seconde méthode; choisissons Δ pour axe $x = y = 0$, Δ' pour axe $z = t = 0$; la quadrique Q a pour équation

$$\mathrm{AX}^2 + \mathrm{A'Y}^2 + \mathrm{A''Z}^2 + 2\mathrm{BYZ} + 2\mathrm{B'ZX} + 2\mathrm{B''XY} \\ + 2\mathrm{CXT} + 2\mathrm{C'YT} + 2\mathrm{C''ZT} + \mathrm{DT}^2 = 0.$$

La droite AA_1 perce Δ en $a(0, 0, z_0, 1)$ et Δ' en $a_1(1, m_0, 0, 0)$; les points analogues b, b_1, c, c_1, d, d_1 sont désignés par les mêmes lettres z, m avec les indices 1, 2, 3 au lieu de zéro; puisque a et a_1 sont conju-

---

(1) L'emploi du paramètre u est commode pour les résultats du paragraphe précédent; $u_1 + u_2 = \alpha$, où α est constant, définit ∞^1 cordes de $\mathcal{B}$ engendrant une semi-quadrique; $u_1 + u_2 = -\alpha$ définit la semi-quadrique complémentaire. Si l'on a un quadrilatère gauche dont deux côtés opposés (u_1, u_2), (u_3, u_4) appartiennent à la semi-quadrique α, pendant que les deux autres (u_1, u_3), (u_2, u_4) appartiennent à α_1, on a

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 2\alpha = 2\alpha_1;$$

α_1 est distinct de α, donc on a $\alpha - \alpha_1 = \omega$, ω' ou $\omega + \omega'$. On voit donc qu'à chaque semi-quadrique contenant $\mathcal{B}$, on peut associer trois autres semi-quadriques. Si l'on a pris $\alpha = \alpha_1 + \omega$, on a $u_3 = u_2 - \omega$, ce qui prouve que les sommets opposés (u_2, u_3) ou (u_1, u_4) se correspondent dans l'une des involutions biaxiales étudiées. Enfin, si α et α_1 sont associées, en même temps que α et $(-\alpha_1)$, on a $2\alpha = 2\alpha_1 = -2\alpha_1$, et 4α est nul. On arrive ainsi aux quadriques spéciales annoncées.

gués par rapport à Q, on a

$$(2)\qquad B m_i z_i + B' z_i + C' m_i + C = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Si B, B', C', C ne sont pas nulles toutes quatre, cette relation exprime que (a, a_1), (b, b_1), (c, c_1), (d, d_1) se correspondent dans une homographie entre les points de Δ et ceux de Δ'; dans ce cas, les droites (aa), (bb_1), (cc_1), (dd_1) ou, ce qui revient au même, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 seraient génératrices d'une même semi-quadrique; or nous avons démontré, au début de ce travail, que ceci ne peut arriver pour un couple de Möbius, non dégénéré; donc c'est l'hypothèse $B = B' = C' = C = 0$ qui est réalisée, et cela exprime que Δ et Δ' sont conjuguées par rapport à Q.

En passant, nous avons démontré un théorème intéressant : soit une quadrique q et deux génératrices Δ, Δ' de même système de q; appelons *segments de q relatifs à* Δ, Δ' les segments découpés par Δ, Δ' sur les génératrices de système opposé; *toute quadrique* Q *qui divise harmoniquement trois segments les divise tous harmoniquement.* Si Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 sont six quadriques linéairement distinctes du système ∞^5 des quadriques admettant Δ et Δ' pour couple conjugué, les quadriques Q qui divisent harmoniquement *tous* les segments en jeu décrivent le système linéaire ∞^6,

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 + \lambda_4 Q_4 + \lambda_5 Q_5 + \lambda_6 Q_6 + \mu q = 0;$$

la proposition, qui vient d'être élucidée, revient à interpréter $\mu \neq 0$ et $\mu = 0$: *si quatre segments, dont les supports n'appartiennent pas à une même semi-quadrique sont partagés harmoniquement par deux droites* Δ, Δ', *ces deux droites sont conjuguées par rapport à toutes les quadriques contenant les extrémités de ces segments, les quadriques en jeu pouvant former soit un faisceau, soit un réseau.*

Nous avons vu que AB_1, BA_1, CD_1, DC_1 appartiennent à une même quadrique Σ_1 ; en permutant circulairement B, C, D sans toucher à A ni aux indices, nous avons ainsi trois quadriques

$$(3)\qquad \begin{cases} \Sigma_1 & (AB_1,\ BA_1,\ CD_1,\ DC_1), \\ \Sigma_2 & (AC_1,\ CA_1,\ BD_1,\ DC_1), \\ \Sigma_3 & (AD_1,\ DA_1,\ BC_1,\ CB_1) \end{cases}$$

La proposition fondamentale (¹) est que :

Σ_1, Σ_2, Σ_3 *appartiennent simultanément au système des quadriques circonscrites à* T, T_1 *et au système des quadriques inscrites dans les faces de* T, T_1 *; les trois quadriques en jeu sont deux à deux harmoniquement inscrites-circonscrites.*

La première partie est à peu près évidente (quand on a constaté que AB_1, BA_1, CD_1, DC_1 sont sur une même quadrique Σ_1), car nous formons sans peine le tableau des droites communes à chacun des plans du couple T, T_1 et aux quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3.

	$AB_1C_1D_1$	$A_1BC_1D_1$	$A_1B_1CD_1$	$A_1B_1C_1D$
Σ_1	AB_1; C_1D_1	BA_1; C_1D_1	CD_1; A_1B_1	DC_1; A_1B_1
Σ_2	AC_1; D_1B_1	CA_1; D_1B_1	DB_1; A_1C_1	BD_1; A_1C_1
Σ_3	AD_1; B_1C_1	DA_1; B_1C_1	BC_1; A_1D_1	CB_1; A_1D_1

	A_1BCD	AB_1CD	ABC_1D	$ABCD_1$
Σ_1	A_1B; CD	B_1A; CD	C_1D; AB	D_1C; AB
Σ_2	A_1C; DB	C_1A; DB	D_1B; AC	B_1D; AC
Σ_3	A_1D; BC	D_1A; BC	B_1C; AD	C_1B; AD

Le premier tableau exige seulement la détermination des droites relatives à Σ_1 ; on permute ensuite circulairement B, C, D sans toucher à A, ni aux indices ; le second tableau se déduit du premier en échangeant les indices o et 1 relatifs aux lettres A, B, C, D.

Pour démontrer que Σ_1 *et* Σ_2 *sont harmoniquement inscrites-circonscrites*, il suffit d'appliquer le critérium indiqué au paragraphe précédent : on part de la génératrice AB_1 de Σ_1, et l'on forme les deux

(¹) J'avais trouvé, par les remarques du paragraphe 2, les quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3, mais c'est M. Rowe qui, indépendamment de moi, les avait imaginées comme communes aux deux systèmes, ponctuel ou tangentiel, déterminés par T, T_1. Je suis ensuite arrivé, grâce aux propriétés rappelées au paragraphe 4, à montrer que Σ_1, Σ_2, Σ_3 sont deux à deux harmoniquement circonscrites-inscrites.

quadrilatères gauches

$\boxed{AB_1;\ B_1D;\ DC_1;\ C_1A}$ $\boxed{AB_1;\ B_1D_1;\ D_1C;\ CA}$

dont les côtés appartiennent alternativement à Σ_1 et Σ_2 (un moyen mnémonique simple est de former le quadrilatère PLAN $AB_1D_1C_1$ dont les côtés sont alternativement sur Σ_1 et Σ_2 ; on change l'indice I de D_1 *ou* C_1 en l'indice zéro, et l'on obtient les deux quadrilatères *gauches* annoncés); comme les diagonales AD, AD_1 ne rencontrent ni Δ, ni Δ', *le couple de droites, conjuguées simultanément par rapport à* Σ_1 *et* Σ_2 *qui doit être utilisé pour compléter l'indication « harmoniquement inscrites-circonscrites » est précisément* Δ, Δ' ; (l'unique droite issue de A, rencontrant Δ et Δ', est en effet AA_1).

Σ_1, Σ_2 ont un tétraèdre conjugué commun (t_{12}), dont deux arêtes opposées, sont Δ, Δ'; A, D *se correspondent dans une involution biaxiale dont les directrices sont deux arêtes opposées* (d_{12}, d'_{12}) *de* t_{12} *autres que* Δ, Δ' *et* A, D_1 *dans l'involution biaxiale relative au dernier couple d'arêtes opposées* $(\delta_{12}, \delta'_{12})$. La permutation circulaire déjà utilisée donne de même les involutions biaxiales (d_{23}, d'_{23}) où A, B se correspondent, de même $(\delta_{23}, \delta'_{23})$ avec A, B_1, puis (d_{31}, d'_{31}) avec A, C et $(\delta_{31}, \delta'_{31})$ avec A, C_1. On a ainsi obtenu *sept involutions biaxiales échangeant un quelconque des huit sommets successivement avec chacun des sept autres*.

Nous formons le tableau complet de ces échanges :

	A	B	C	D	A_1	B_1	C_1	D_1
$(\Delta\,\Delta')$	A_1	B_1	C_1	D_1	A	B	C	D
$(d_{23};\ d'_{23})$	B	A	D	C	B_1	A_1	D_1	C_1
$(d_{31};\ d'_{31})$	C	D	A	B	C_1	D_1	A_1	B_1
$(d_{12};\ d'_{12})$	D	C	B	A	D_1	C_1	B_1	A_1
$(\delta_{23};\ \delta'_{23})$	B_1	A_1	D_1	C_1	B	A	D	C
$(\delta_{31};\ \delta'_{31})$	C_1	D_1	A_1	B_1	C	D	A	B
$(\delta_{12};\ \delta'_{12})$	D_1	C_1	B_1	A_1	D	C	B	A

Il suffit d'un peu de patience pour former ce tableau; abstraction faite de la colonne portant les noms des directrices des involutions, la partie de droite du tableau (à partir du trait qui sépare D et A_1) se déduit de la partie de gauche en remplaçant chaque lettre par la même lettre, mais avec l'indice différent. De même, si l'on néglige les deux premières lignes, les trois premières lignes restantes donnent les trois dernières par échange des indices.

En vertu des théorèmes bien connus sur la *composition des involutions biaxiales*, la composition de deux quelconques des involutions biaxiales

$$(\Delta\Delta'),\quad (d_{23}, d'_{23}),\quad (\delta_{23}, \delta'_{23})$$

équivaut à celle qui a été laissée de côté, puisque les directrices forment le tétraèdre conjugué commun à Σ_2 et Σ_3; même résultat pour

$$(\Delta\Delta'),\quad (d_{31}, d'_{31}),\quad (\delta_{31}, \delta'_{31})$$

ou

$$(\Delta\Delta'),\quad (d_{12}, d'_{12}),\quad (\delta_{12}, \delta'_{12}).$$

Nous avons ainsi indiqué le résultat de la composition de (Δ, Δ') avec l'une des six autres.

Composons maintenant (d_{31}, d'_{31}) avec (d_{12}, d'_{12}); nous avons les échanges successifs suivants (inutile, en vertu de la remarque sur les indices de compléter par les échanges sur A_1, B_1, C_1, D_1)

$$\left\{\begin{matrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \\ B & A & D & C \end{matrix}\right.$$

Nous constatons que

$$(d_{31}, d'_{31})(d_{12}, d'_{12}) = (d_{23}, d'_{23}).$$

Les directrices d_{ij} en jeu ne forment pas un tétraèdre, puisque toutes rencontrent Δ et Δ'.

Donc, les directrices de ces trois involutions sont génératrices d'une même semi-quadrique, les trois couples de directrices se divisant deux à deux harmoniquement et (Δ, Δ') *appartiennent à la semi-quadrique complémentaire.*

De même, si nous composons $(\delta_{31}, \delta'_{31})$ et $(\delta_{12}, \delta'_{12})$, nous obtenons

(d_{23}, d'_{23}) et la même conclusion sur les directrices : on a obtenu cette fois les échanges

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ C_1 & D_1 & A_1 & B_1 \\ B & A & D & C \end{matrix}$$

De la sorte, dans l'identité symbolique

$$(d_{23}, d'_{23})(d_{31}, d'_{31})(d_{12}, d'_{12}) = 1,$$

qui exprime que la composition des trois transformations équivaut à la transformation identique, on peut *laisser un facteur inchangé, et, dans les deux autres, introduire les lettres grecques; nous avons ainsi indiqué le résultat de la composition de deux quelconques des six dernières involutions : c'est encore une involution de cet ensemble.* Nous avons ainsi obtenu *quatre semi-quadriques, appartenant à la congruence linéaire d'axes* Δ, Δ'

$$(q_0) \qquad (d_{23}, d'_{23})(d_{31}, d'_{31})(d_{12}, d'_{12});$$
$$(q_1) \qquad (d_{23}, d'_{23})(\delta_{31}, \delta'_{31})(\delta_{12}, \delta'_{12});$$
$$(q_2) \qquad (\delta_{23}, \delta'_{23})(d_{31}, d'_{31})(\delta_{12}, \delta'_{12});$$
$$(q_3) \qquad (\delta_{23}, \delta'_{23})(\delta_{31}, \delta'_{31})(d_{12}, d'_{12}).$$

Deux à deux les quatre quadriques supports ont quatre droites communes; les six génératrices situées sur une même ligne se divisent harmoniquement par couples; le couple (Δ, Δ') *est commun aux quadriques supports.*

On voit aussitôt que le tétraèdre ABCD est conjugué par rapport à (q_0), et $A_1B_1C_1D_1$ aussi; il suffit de remarquer que, par les involutions biaxiales (d_{23}, d'_{23}), (d_{31}, d'_{31}), (d_{12}, d'_{12}), A devient B ou C ou D; même raison pour $A_1B_1C_1D_1$; de même, ABC_1D_1 et A_1B_1CD sont conjugués chacun par rapport à (q_1), puis AB_1CD_1, A_1BC_1D par rapport à (q_2), et AB_1C_1D et A_1BCD_1 par rapport à (q_3) : *nous avons ainsi retrouvé nos quatre couples simultanés de Möbius et les quadriques par rapport auxquelles les deux tétraèdres de chaque couple sont, chacun, conjugués.* On peut remarquer qu'au point de vue du *problème des quatre tétraèdres deux à deux en position de Möbius,* le tétraèdre ABCD est bien conjugué par rapport à q_0, et ensuite que les couples (d_{23}, d'_{23}), (d_{31}, d'_{31}), (d_{12}, d'_{12}) offrent sur q_0 la configuration exigée, mais que transformés de ABCD sont BADC, CDAB, DCBA, de sorte que nous avons ainsi une *solution dégénérée de ce problème*.

On remarquera que Σ_1 est sa propre polaire réciproque par rapport à q_0, car les génératrices AB et CD de Σ_1 s'échangent, ainsi que A_1B_1 et C_1D_1; d'autre part, AB_1 considérée comme joignant A et B_1 est remplacée par la droite commune aux deux plans (A_1BCD) et ($BA_1C_1D_1$), c'est-à-dire par A_1B; de même C_1D et CD_1 s'échangent. On constate de même que Σ_2, Σ_3 s'échangent chacune en elle-même dans la polarité q_0; par raison de symétrie, *chaque quadrique* Σ_i *s'échange en elle-même dans la polarité* q_j; il était évident *a priori* que la polarité q_j, échangeant chaque sommet du couple T, T_1 avec une face du même couple, les trois quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3 se retrouvaient *dans leur ensemble*, mais il était nécessaire de vérifier que chacune se retrouve *isolément*. Nous savions déjà, puisque Δ, Δ' sont génératrices de q_j et conjuguées par rapport à Σ_i, que q_j, Σ_j *sont harmoniquement inscrites-circonscrites, relativement au couple* Δ, Δ; la transformation de Σ_i en elle-même par la polarité q_j exige que Σ_i *et* q_j *aient quatre génératrices communes;* d'ailleurs, une autre raison est que q_0, par exemple, contient deux couples de même système (d_{31}, d'_{31}), (d_{12}, d'_{12}), tous deux conjugués par rapport à Σ_1 : or, les couples de q_0 conjugués (dans un système) par rapport à Σ_1 forment une involution, les génératrices de chaque couple étant conjuguées par rapport aux génératrices de ce système communes à Σ_1 et q_0 : *ces génératrices communes, ici, sont donc* d_{23}, d'_{23}. Nous formons, par le même procédé, les génératrices (de système opposé à Δ, Δ' sur les q_j) communes aux Σ_i et aux q_j

	q_0	q_1	q_2	q_3
Σ_1	d_{23}, d'_{23}	d_{23}, d'_{23}	δ_{23}, δ'_{23}	δ_{23}, δ'_{23}
Σ_2	d_{31}, d'_{31}	δ_{31}, δ'_{31}	d_{31}, d'_{31}	δ_{31}, δ'_{31}
Σ_3	d_{12}, d'_{12}	δ_{12}, δ'_{12}	δ_{12}, δ'_{12}	d_{12}, d'_{12}

Nous pouvons maintenant donner la forme réduite des équations de Σ_1, Σ_2, Σ_3 quand on prend un tétraèdre de référence, tel que Δ soit

$(x = y = 0)$, et Δ' $(z = t = 0)$. L'équation de Σ_i est de la forme

$$A_i x^2 + B_i y^2 + C_i z^2 + D_i t^2 + 2E_i xy + 2F_i zt = 0,$$

et les équations de conditions sont

$$(i \neq j;\ i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2, 3),$$
$$A_i B_j + A_j B_i - 2E_i E_j = 0, \qquad C_i D_j + C_j D_i - 2F_i F_j = 0.$$

Elles concernent *séparément* (A_i, B_i) et les (C_i, D_i), de sorte que les substitutions $x = \lambda X + \mu Y$, $y = \lambda' X + \mu' Y$, $z = \rho Z + \sigma T$, $t = \rho' Z + \sigma' T$ qui concernent aussi *séparément* les (x, y) et les (z, t) permettent de ramener les trinomes $A_i x^2 + B_i y^2 + 2E_i xy$ et $C_i z^2 + D_i t^2 + 2F_i zt$ *séparément* à leurs formes réduites ; on peut donc prendre *dans un ordre quelconque* $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, xy (à un facteur numérique près), et de même $z^2 + t^2 = 0$, $z^2 - t^2$, zt. On peut donc supposer, en mettant en évidence les équations : ponctuelles et tangentielles

$$(4) \quad \begin{cases} \Sigma_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2, & \overline{\Sigma}_1 \equiv u^2 + v^2 + w^2 + h^2; \\ \Sigma_2 \equiv x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2), & \overline{\Sigma}_2 \equiv m(u^2 - v^2) + (w^2 - h^2); \\ \Sigma_3 \equiv xy + nzt, & \overline{\Sigma}_3 \equiv nuv + wh. \end{cases}$$

(Ce qui a été dit sur l'*ordre* des trinomes $x^2 + y^2$, $x^2 - y^2$, xy prouve que l'on pourrait prendre pour équations réduites, par exemple,

$$x^2 + y^2 + zt, \qquad x^2 - y^2 + m(z^2 + t^2), \qquad xy + n(z^2 - t^2).$$

mais ce serait manifestement une mauvaise réduction.)

Les quadriques q_0, q_1, q_2, q_3 sont définies par les équations

$$(5) \qquad xz + yt = 0, \qquad xz - yt = 0, \qquad xt + yz = 0, \qquad xt - yz = 0,$$

qu'on obtient sans peine, ces quadriques devant contenir Δ, Δ' et les axes, convenablement associés des involutions annoncées; Σ_1, Σ_2 donnent $(x = z = 0)$, $(y = t = 0)$ et $(x = t = 0)$, $(y = z) = 0$, et en écrivant

$$\Sigma_1 \equiv (x + iy) \quad (x - iy) \ + (z + it) \quad (z - it),$$
$$i\Sigma_3 \equiv (x + iy)^2 - (x - iy)^2 + (z + it)^2 - (z - it)^2,$$

on a aisément les arêtes du tétraèdre conjugué commun à Σ_1 et Σ_3 ; on vérifie sans peine que Σ_i se reproduit par polarité relativement à q_j; les deux invariants homographiques de nos quatre couples de Möbius simultanés sont m, n (le total des 17 paramètres se retrouve en ajoutant les 15 paramètres de l'homographie générale). On remarquera que les quatre quadriques q_0, q_1, q_2, q_3 forment un système qui ne possède aucun invariant, ce qui est assez évident *a priori* si l'on remarque que l'on a formé sur Δ trois couples de points se divisant deux à deux harmoniquement (système sans invariant), de même sur Δ'; ensuite, on joint trois points prélevés, un sur chaque couple de Δ, respectivement à un point de chaque couple de Δ' convenablement choisi, et l'on obtient ainsi une quadrique q_j. *A chaque système q_0, q_1, q_2, q_3, correspondent ∞^2 systèmes Σ_1, Σ_2, Σ_3 non réductibles entre eux par homographie.*

6. **Couples de Möbius inscrits dans une biquadratique; couples de Möbius inscrits dans une quadrique, circonscrits à une autre.** — Nous avons vu que le couple de Möbius général (T, T_1) dépend de 17 paramètres; un dénombrement d'équations et d'inconnues effectué *a priori* nous eût donné 24 inconnues et 8 conditions; or, il reste 17 paramètres, donc les équations de condition se réduisent à 7 distinctes.

Au lieu de placer un couple de Möbius dans un espace à trois dimensions, cherchons à le placer de sorte que ses sommets soient sur une quadrique Q donnée : il y a 16 inconnues et 8 équations; or, il y a 10 arbitraires, de sorte que les équations de condition se réduisent à 6. En effet, prenons A, B, C, D arbitrairement (8 paramètres) sur Q; traçons dans le plan BCD la droite arbitraire, dont il a été question au paragraphe 1, qui coupe CD, DB, BC en b, c, d; les droites Ab, Ac, Ad recoupent Q en B_1, C_1, D_1, et la connaissance de A, B, C, D, B_1, C_1, D_1 permet, comme nous avons dit, de trouver A_1, qui est d'ailleurs le huitième point commun à toutes les quadriques passant par A, B, C, D, B_1, C_1, D_1; les deux paramètres employés pour tracer bcd, complètent les 10 paramètres annoncés. On aurait d'ailleurs pu dire : un système (T, T_1, Q) dépend de 19 paramètres (17 pour le couple T, T_1, puis 2 pour Q); on peut compter autrement : il y a 9 paramètres pour Q, donc il reste 10 paramètres pour les couples inscrits dans Q.

Nous allons maintenant passer aux deux problèmes énoncés en titre de ce paragraphe : le premier consiste à trouver un couple de Möbius dont les sommets soient à la fois sur Q et Q′ (c'est-à-dire sur la biquadratique $\mathcal{B}$ commune à Q, Q′); le second à trouver un couple de Möbius dont les sommets soient sur une quadrique Q donnée, et les faces soient tangentes à une quadrique Q_1 donnée. Pour les deux problèmes, le début est le même : un système (T, T_1, Q, Q') ou (T, T_1, Q, Q_1) dépend de 21 paramètres; si nous arrivons à (Q, Q') ou (Q, Q_1) par l'intermédiaire de T, T_1, nous ne savons si ce système (Q, Q') ou (Q, Q_1) dépend de 18 paramètres ou d'un nombre moindre; supposons que (Q, Q') dépende de $18-p'$ paramètres, et (Q, Q_1) de $18-p_1$ paramètres; p', p_1 sont des entiers positifs ou nuls provisoirement inconnus; en tous cas, une fois un tel système (Q, Q') ou (Q, Q_1) donné, satisfaisant aux p' ou p_1 conditions éventuelles, le système (T, T_1) dépend de $(3+p')$ ou $(3+p_1)$ paramètres. Il est nécessaire de fair une discussion directe pour trouver la valeur de l'entier p' ou p_1; c'est cette détermination de l'entier analogue à p' ou p_1 qui, pour beaucoup de problèmes de géométrie (polygones de Poncelet, etc.), constitue une grosse difficulté; et si l'entier n'est pas nul, il faut encore expliciter les conditions correspondantes. Or, *pour le premier problème, nous avons vu par une discussion directe que p' est nul,* puisque toute biquadratique possède trois séries, à trois paramètres chacune, de couples de Möbius inscrits.

Pour le second problème, nous allons constater que l'entier p_1 est égal à l'unité. Il était nécessaire d'attirer l'attention sur cette différence,

Nous avons dit qu'un couple de Möbius est accompagné de trois autres couples; il est clair que les quatre couples sont simultanément solutions des problèmes posés ici, dès que l'un des couples est solution, puisque les sommets sont les mêmes et les faces aussi.

Je rappelle maintenant divers résultats que M. Rowe et moi avons obtenus en collaboration, à propos des tétraèdres inscrits dans une quadrique Q, circonscrits à une quadrique Q_1 (*Ann. de l'École Norm.*, 1934, t. 51, p. 153-191) : *deux quadriques* Q, Q_1 *quelconques admettent* ∞^4 *tétraèdres de cette espèce;* on peut choisir A arbitrairement sur Q (2 paramètres); le plan BCD passe alors obligatoirement par un certain point A_1, homologue de A dans une homographie particulière H conservant les sommets du tétraèdre Θ conjugué commun à Q et Q_1; ce plan est donc tangent au cône de sommet A_1 circonscrit à Q_1; si nous choisissons ce plan P (1 paramètre), le cône δ qui a pour sommet A et pour directrice la conique (Q, P) est capable de ∞^1 trièdres dont les faces touchent le cône δ_1 de sommet A circonscrit à Q_1; le choix de ce trièdre représente le quatrième et dernier paramètre propre à trouver T.

Il existe un seul cas où l'homographie (A, A_1) est *involutive :* rapportons Q, Q_1 à leur tétraèdre conjugué commun (qui est *unique*, si Q et Q_1 ne sont tangentes en aucun point); les équations, ponctuelle de Q et tangentielle de Q_1, sont

$$\begin{aligned} &Q \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0;\\ &Q_1 \quad au^2 + bv^2 + cw^2 + dt^2 = 0. \end{aligned}$$

Si l'on a la relation (E)

$$(E) \qquad Aa + Bb = Cc + Dd,$$

le point A_1 est l'homologue de A dans l'involution biaxiale qui a pour axes les arêtes opposées $\Delta(x = y = 0)$, $\Delta'(z = t = 0)$ du tétraèdre conjugué commun; *ce point* A_1 *est encore sur* Q; l'involution (Δ, Δ') change ABCD en $A_1B_1C_1D_1$; le plan BCD contient A_1 et inversement le plan $B_1C_1D_1$ contient A; *donc, le couple* (ABCD, $A_1B_1C_1D_1$) *est un couple de Möbius inscrit dans* Q, *circonscrit à* Q_1 [car l'involution biaxiale (Δ, Δ') change aussi Q_1 en elle-même]. *Cette configuration* (Q, Q_1, T, T_1) *dépend de* 21 *paramètres* [1] : 17 pour Q, Q_1, puis 4 pour T, T_1.

Nous allons maintenant montrer par un raisonnement très simple, mais un peu subtil, que nous avons ainsi trouvé *la solution générale des couples de Möbius inscrits dans une quadrique* Q, *circonscrits à une autre quadrique* Q_1.

Si l'on considère l'équation ponctuelle de Q_1

$$\overline{Q}_1 \equiv \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} + \frac{t^2}{d} = 0,$$

[1] Tous ces résultats sont dans le Mémoire cité, sauf la remarque que T et T_1 sont en relation de Möbius : à ce moment, M. Rowe ni moi ne songions aux couples de Möbius ! Même remarque pour les couples inscrits dans une biquadratique et circonscrits à une quadrique (ou une développable de classe 4 et de genre 1).

on voit que l'équation $Q - \lambda \overline{Q}_1 = 0$ représente un cône pour λ égal à aA, bB, cC, dD. Nous voulons démontrer le résultat suivant :

Si la somme de deux racines convenablement choisies de l'équation en λ relative au faisceau ponctuel $Q - \lambda \overline{Q}_1 = 0$ n'est pas égale à la somme des deux autres, les quadriques Q, Q_1 n'admettent aucun couple de Möbius de l'espèce indiquée. Si la relation en jeu a lieu, Q, Q_1 admettent ∞^4 couples de Möbius.

En effet, les solutions (Q, Q_1, T, T_1), que nous venons d'obtenir en partant de deux quadriques vérifiant la condition (E), dépendent de 21 paramètres; or le système (T, T_1, Q, Q_1) *général*, que l'on obtient en partant d'un couple T, T_1 de Möbius, et menant une quadrique Q par les huit sommets et une quadrique Q_1 tangente aux huit faces, dépend de 21 paramètres; si les quadriques Q, Q_1, auxquelles on arrive ainsi, ne satisfaisaient pas à la relation E *identiquement*, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs des 21 paramètres, *tous* les systèmes (Q, Q_1, T, T_1), pour lesquels on aurait $E = 0$, dépendraient de 20 paramètres au plus : or, nous savons en fabriquer à 21 paramètres, *donc la relation est vérifiée*.

L'entier p_1 qui a été introduit plus haut se trouve donc égal à l'unité.

Je donne, au paragraphe suivant, une démonstration *directe* de l'existence de la relation E.

7. Étude de deux quadriques l'une circonscrite à un couple de Möbius, l'autre inscrite. — J'ai démontré dans le travail actuel (indépendamment du Mémoire en collaboration avec M. Rowe), que la quadrique Q, *générale*, circonscrite au couple de Möbius *général*, et la quadrique Q_1, *générale*, tangente aux faces de ce couple, ont leurs équations ponctuelle et tangentielle réductibles à la forme

$$Q \quad \lambda_1(x^2+y^2+z^2+t^2) + \lambda_2[x^2-y^2+m(z^2-t^2)] + \lambda_3[xy+nzt] = 0;$$
$$Q_1 \quad \mu_1(u^2+v^2+w^2+h^2) + \mu_2[m(u^2-v^2)+w^2-h^2] + \mu_3[nuv+wh] = 0.$$

Ces équations sont de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} Q \equiv Ax^2+By^2+Cz^2+Dt^2+2Exy+2Fzt = 0; \\ Q_1 \equiv au^2+bv^2+cw^2+dh^2+2euv+2fwh = 0. \end{cases}$$

Il s'agit de montrer que l'on a la relation

$$(2) \qquad \mathrm{A}a + \mathrm{B}b + 2\mathrm{E}e = \mathrm{C}c + \mathrm{D}d + 2\mathrm{F}f.$$

La vérification ne présente aucune difficulté ; mais, pour la rendre encore plus aisée, remarquons que si l'on a diverses quadriques Q, Q', ..., $Q^{(i)}$, ... en nombre quelconque, définies ponctuellement, admettant $\Delta(x=y=0)$, $\Delta'(z=t=0)$ comme couple conjugué, puis d'autres quadriques Q_1, Q'_1, ..., $Q_1^{(j)}$, ..., définies tangentiellement, en nombre quelconque, admettent aussi Δ, Δ' pour couple conjugué, et si, quels que soient *i*, *j*, la relation (24) appliquée à $Q^{(i)}$ et $Q_1^{(j)}$ est vérifiée, cette relation le sera encore pour les quadriques

$$\begin{cases} \lambda Q + \lambda_1 Q' + \ldots + \lambda_i Q^{(i)} + \ldots, \\ \mu Q_1 + \mu_1 Q'_1 + \ldots \qquad\qquad + \mu_j Q_1^{(j)} + \ldots, \end{cases}$$

en raison de ce fait, que (2) est linéaire par rapport aux coefficients ponctuels de $Q^{(i)}$ et tangentiels des $Q_1^{(j)}$. Cette remarque permet d'établir pour les quadriques qui admettent Δ, Δ' pour couple conjugué, et par suite, dépendent de 5 paramètres, une théorie analogue à celle des quadriques harmoniquement circonscrites à d'autres quadriques, ces quadriques dépendant alors de 9 paramètres et non plus de 5 seulement. Plus haut, nous avons écrit

$$Q = \lambda_1 \Sigma_1 + \lambda_2 \Sigma_2 + \lambda_3 \Sigma_3, \qquad Q_1 = \mu_1 \overline{\Sigma}_1 + \mu_2 \overline{\Sigma}_2 + \mu_3 \overline{\Sigma}_3,$$

or Σ_i et $\overline{\Sigma}_j$ pour $i \neq j$ donnent la relation (2), avec cette particularité que les deux membres sont nuls (quadriques harmoniquement inscrites-circonscrites) ; il reste donc à vérifier [1] que Σ_i et $\overline{\Sigma}_i$ donnent cette relation (2) ; le calcul est aisé, car Σ_1 donne $2=2$, Σ_2 donne $2m = 2m$ et Σ_3, $2n = 2n$. L'interprétation de (2) est facile à donner ;

---

(1) Cela revient à vérifier qu'une quadrique est Möbius-ment inscrite ou circonscrite à elle-même. C'est évident si l'on songe qu'un couple (T, T_1) de Möbius définit 3 quadriques Σ_1, Σ_2, Σ_3 qui lui sont inscrites ou circonscrites ; le système (T, T_1, Σ) dépend de 17 paramètres ; or Σ dépend de 9 paramètres ; donc à toute quadrique Σ sont attachés ∞^8 couples de Möbius inscrits et circonscrits à Σ ; on peut départager ces 8 paramètres ainsi : 4 pour obtenir le couple Δ, Δ' et ensuite ∞^4 couples, comme dans le cas de deux quadriques Q, Q_1 distinctes, dont la première est Möbius-ment circonscrite à la seconde, relativement au couple conjugué Δ, Δ'.

l'équation ponctuelle de la seconde quadrique (1) est

$$\overline{\mathrm{Q}}_1 \quad \frac{bx^2 - 2exy + ay^2}{ab - e^2} + \frac{dz^2 - 2fzt + ct^2}{cd - f^2} = 0,$$

et l'équation $\mathrm{Q} - \lambda \overline{\mathrm{Q}}_1 = 0$ représente un cône si λ satisfait à l'une des équations

$$(3) \quad \begin{cases} (\mathrm{AB} - \mathrm{E}^2)(ab - e^2) - \lambda(\mathrm{A}a + \mathrm{B}b + 2\mathrm{E}e) + \lambda^2 = 0; \\ (\mathrm{CD} - \mathrm{F}^2)(cd - f^2) - \lambda(\mathrm{C}c + \mathrm{D}d + 2\mathrm{F}f) + \lambda^2 = 0. \end{cases}$$

On retrouve l'interprétation : *la somme de deux racines* (*relatives aux cônes dont les sommets sont sur* Δ) *est égale à la somme des deux racines restantes* (*cônes dont les sommets sont sur* Δ').

Cette condition est *nécessaire;* elle est *suffisante :* si l'on admet les résultats du Mémoire en collaboration, déjà cité, c'est immédiat, puisque chaque tétraèdre ABCD, inscrit dans Q et circonscrit à Q_1, donne le tétraèdre $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$ qui s'en déduit par l'involution biaxiale (Δ, Δ') et qui est en situation de Möbius avec le tétraèdre de départ.

Il est naturel de dire que Q *est Möbius-ment circonscrite à* Q_1 (ou que Q_1 *est Möbius-ment inscrite dans* Q), *pour le couple* Δ, Δ'.

Il résulte des explications qui ont été données, que *deux quadriques* Q, Q_1 *harmoniquement inscrites-circonscrites sont aussi Möbius-ment inscrites et circonscrites l'une à l'autre* (relativement au couple d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué dont chaque arête donne deux racines opposées de l'équation en λ).

Il est intéressant de scruter un peu plus cette configuration ($\mathrm{Q}, \mathrm{Q}_1, \mathrm{T}, \mathrm{T}_1$) *à* 21 *paramètres* : nous pouvons supposer

$$\begin{cases} \mathrm{Q} \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ \overline{\mathrm{Q}}_1 \quad \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} + \dfrac{z^2}{c} + \dfrac{t^2}{d} = 0, \end{cases} \qquad a + b = c + d.$$

Nous supposons $ab \neq cd$, de façon que Q et Q_1 n'aient pas quatre droites communes. Pour un couple (T, T_1), nous avons d'une façon *unique*, le couple $\Delta(x = y = 0)$, $\Delta'(z = t = 0)$, le complexe C qui échange T en T_1 (face pour sommet et vice versa), puis la quadrique q étudiée au paragraphe 2 : chaque point M de Δ est joint au point M' où le plan polaire de M par rapport à C coupe Δ'; MM' engendre la quadrique q. Remarquons que Q et Q_1 nous fournissent ∞^4 couples (T, T_1), que chaque couple (T, T_1) nous fournit une quadrique q (et une seule), contenant Δ, Δ'. L'ensemble des quadriques contenant Δ et Δ' est un système ∞^3; donc, que le total des quadriques q, obtenues par l'intermédiaire des couples (T, T_1), épuise l'ensemble ∞^3 des quadriques contenant Δ, Δ' ou n'en soit qu'une fraction, il y a nécessairement une infinité de couples (T, T_1) qui donnent la même quadrique q; étudions l'une de ces quadriques q : les tétraèdres T correspondants sont chacun conjugués par rapport à q et, comme leurs faces sont tangentes à Q_1, leurs sommets sont sur la quadrique Q′ polaire réciproque de Q_1 vis-à-vis de q; Q′ coupe Q_1 suivant quatre droites (puisque q et Q_1 sont harmoniquement circonscrites et inscrites l'une à l'autre), *de sorte que* Q′ *est distincte de* Q; mais alors *les sommets de* T *sont sur la biquadratique*(Q, Q′); *pour la même raison, les faces de* T *sont tangentes à la développable* (Q_1, Q'_1) *en appelant* Q'_1 *la transformée de* Q *dans la polarité* (q). Or, nous verrons plus bas qu'une biquadratique et une développable de classe 4 et genre 1, qui admettent des couples de Möbius, en admettent ∞^1 *exactement; donc chacune des* ∞^3 *quadriques contenant* Δ, Δ' *fournit* ∞^1 *couples de Möbius relatifs à* Q, Q_1 (et, parmi ces ∞^3 quadriques, il n'y en a aucune qui joue un rôle exceptionnel).

Nous avons ainsi une meilleure spécialisation des 21 paramètres du système (Q, Q_1, T, T_1) : 17 paramètres pour le couple Q, Q_1, puis trois paramètres pour le choix de q (simplement assujettie à contenir Δ et Δ'), puis un paramètre pour le choix de (T, T_1).

Nous remarquerons que les ∞^1 *tétraèdres* T *ou* T_1 *ainsi associés entre eux sont inscrits dans la biquadratique* (Q, Q′), *circonscrits à la développable* (Q_1, Q'_1) *et conjugués par rapport à* q. [Cette configuration formée de la biquadratique (Q, Q′) et de la développable $(Q_1\, Q'_1)$ dépend de 18 paramètres et sera étudiée au paragraphe 10.]

8. **Couples de quadriques Q, Q_1 ayant en commun quatre génératrices.** — Deux quadriques Q, Q_1 ayant quatre génératrices communes admettent ∞^2 tétraèdres conjugués communs; les équations réduites sont

$$Q \quad x^2+y^2+z^2+t^2=0; \qquad Q_1 \quad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{a}+\frac{t^2}{b}=0,$$

Les racines de l'équation en λ du faisceau $Q - \lambda Q_1 = 0$ sont a, b, a, b; on peut donc dire que l'on a un cas particulier de celui qui a été traité au paragraphe précédent $(a+b=c+d)$; on a pris $c=a$, $d=b$ dans l'équation $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+\frac{t^2}{d}=0$. *Mais les raisonnements faits pour montrer qu'il y a une infinité de couples de Möbius ne peuvent s'appliquer sans précaution.* M. Rowe, dans le Mémoire déjà cité des *Annales de l'École Normale Supérieure,* a donné cette proposition, importante pour cette théorie, que, *si deux quadriques* Q, Q_1 *ont en commun quatre droites, il existe* ∞^5 (*et nonplus* ∞^4) *tétraèdres* T *inscrits dans* Q *circonscrits à* Q_1 : on peut prendre arbitrairement le point A sur Q, puis le plan tangent à Q_1 qui doit porter le triangle BCD; on a engagé déjà 4 paramètres, et il reste un paramètre complémentaire pour le choix du triangle BCD. On peut encore dire que l'on choisit arbitrairement un plan tangent à Q_1, puis, sur la section de Q par ce plan, les trois sommets B, C, D.

Dans le cas actuel, si A_1 est le conjugué de A dans l'involution biaxiale d'axes $\Delta(x=y=0)$, $\Delta'(z=t=0)$, le plan BCD n'est plus astreint (quand on cherche simplement un tétraèdre T) à passer par A; *mais* (*afin d'obtenir un couple* T, T_1), *imposons-lui l'obligation de passer en* A_1, ce qui ramène le nombre de paramètres à 4; ce plan coupe Q suivant une conique γ, et le cône de sommet A et directrice γ est capable de ∞^1 trièdres circonscrits au cône de même sommet A, circonscrit à Q_1 : il s'agit de montrer que les faces ADC, ACD, ABC passent par les points B_1, C_1, D_1 respectivement (DC, CD, DB sont les traces sur le plan de γ des faces du trièdre, et B_1, C_1, D_1 les homologues de B, C, D dans l'involution biaxiale Δ, Δ'). Supposons que nous ayons remplacé Q_1 par la quadrique

$$\overline{Q}_1 \quad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{a+\varepsilon}+\frac{t^2}{b-\varepsilon}=0,$$

sans toucher à Q : on prend A sur Q, un plan BCD tangent à $\overline{Q}_1$ et passant par A_1; on construit le triangle BCD comme plus haut, et l'on vérifie par des calculs rationnels, indépendants de la valeur précise de ε, que ADC, ACD, ABC passent respectivement par B_1, C_1, D_1; la quantité ε ne se trouve jamais en dénominateur, et *le résultat subsiste même pour* $\varepsilon = 0$. Donc, nous obtenons bien ∞^4 tétraèdres T inscrits dans Q, circonscrits à Q_1; l'involution biaxiale (Δ, Δ') change T en un tétraèdre T_1 $(A_1B_1C_1D_1)$ encore inscrit dans Q, circonscrit à Q_1; A_1 est dans le plan BCD (et de même $B_1, C_1, D_1, \ldots$); par l'involution (Δ, Δ'), on voit que A (transformé de A_1) est dans le plan $B_1C_1D_1$ (transformé de BCD); donc les deux tétraèdres T, T_1 sont en situation de Möbius; *le tétraèdre conjugué adopté ici donne* ∞^4 *couples de cette espèce*. Or la transformation de coordonnées $(\varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1)$

$$(1) \qquad \begin{cases} x = X\cos\alpha - Z\sin\alpha, & \varepsilon z = X\sin\alpha + Z\cos\alpha, \\ y = Y\cos\beta - T\sin\beta, & \eta t = Y\sin\beta + T\cos\beta \end{cases}$$

ne change pas les formes d'équations de Q, Q_1, mais remplace (Δ, Δ') par les droites $\Delta_1 (X = Y = 0)$, $\Delta'_1 (Z = T = 0)$ distinctes de Δ, Δ', de sorte que nous pouvons recommencer ∞^2 fois l'opération indiquée, *et nous obtenons* ∞^6 *couples de Möbius*. [Remarquons que $a + b = c + d$ a été obtenue en prenant $a = c$, $b = d$; on aurait pu dire que l'on a aussi $a + d = b + c$ et raisonner sur les axes $x = t = 0$, $y = z = 0$; or, pour $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, les formules (1) donnent précisément ces nouveaux axes, de sorte qu'il suffit bien des formules (1) pour épuiser tous les cas.]

Nous pouvons maintenant, comme au paragraphe précédent, envisager pour chaque couple (T, T_1) de Möbius la quadrique q, contenant Δ_1, Δ'_1, par rapport à laquelle T est conjugué et T_1 aussi; il n'existe que ∞^5 quadriques de cette espèce (∞^2 droites Δ_1, Δ'_1 et ∞^3 quadriques pour chaque système Δ_1, Δ'_1); *en général*, la quadrique Q'_1, transformée par polarité de Q relativement à q, est *distincte* de Q_1, et de même Q', transformée de Q_1, *distincte* de Q, *de sorte que* ∞^1 *couples* T, T′ *donnent une même quadrique* q : *ces couples ont leurs sommets sur la biquadratique* (Q, Q') *et leurs faces tangentes à la développable* (Q_1, Q'_1). Cette biquadratique et cette développable offrent la configuration déjà signalée une première fois, qui sera étudiée au paragraphe 10.

Si l'on écrit l'équation ponctuelle de la quadrique q,

$$q \qquad Byz + B'zx + Cxt + C'yt = 0,$$

on trouve pour équation tangentielle de Q'_1,

$$(27) \qquad Q'_1 \begin{cases} u^2(B^2 + C'^2) + v^2(B'^2 + C^2) - 2uv(BB' + CC') \\ + w^2(C^2 + C'^2) + h^2(B'^2 + B^2) - 2hw(BC' + B'C) = 0 \end{cases}$$

et cette quadrique Q'_1 ne coïncide avec Q_1 [définie tangentiellement par $a(u^2 + w^2) + b(h^2 + v^2) = 0$] que si l'on a $B = C = 0$, $B' = \sqrt{b}$, $C' = \sqrt{a}$, les déterminations des radicaux étant arbitraires. Considérons donc cette quadrique *particulière* d'équations ponctuelle ou tangentielle

$$\bar{q} \qquad zx\sqrt{\frac{b}{a}} + yt = 0, \qquad uw\sqrt{\frac{a}{b}} + vh = 0.$$

Il s'agit de montrer ici que, contrairement aux résultats du paragraphe précédent, cette quadrique joue un rôle exceptionnel; la substitution (1) déduit de $\bar{q}$ une double infinité de quadriques, elles aussi exceptionnelles.

La quadrique Q est harmoniquement circonscrite et circonscrite à $(\bar{q})$; (puisque $\bar{q}$ contient le couple Δ, Δ' conjugué par rapport à Q); *il existe* ∞^3 *tétraèdres* T *inscrits dans* Q, *conjugués par rapport à* $\bar{q}$ *: les transformés* T_1 *de ces tétraèdres dans l'involution biaxiale* (Δ, Δ') *sont inscrits aussi dans* Q, *conjugués par rapport à* $\bar{q}$ *et en position de Möbius avec* T; *les faces de ces couples* T, T_1 *sont tangentes à* Q_1; le changement de coordonnées (1) déduit de ces ∞^3 couples *un ensemble* ∞^5 *de couples de Möbius qui se séparent de l'ensemble total* ∞^6, *de même que l'ensemble des* ∞^2 *quadriques* $\bar{q}$ *se sépare de l'ensemble des* ∞^5 *quadriques* q. La quadrique explicitée $\bar{q}$ donne, avec Q ou Q_1, une courbe d'intersection ou une développable commune indécomposable : les faces du tétraèdre conjugué aux trois quadriques Q, Q_1, $\bar{q}$ ont pour équation $x \pm z = 0$, $y \pm t = 0$.

En changeant le signe de $\sqrt{\frac{a}{b}}$, nous avons une autre quadrique $\bar{q}$, et par suite, nous avons en réalité deux familles ∞^5 de couples de Möbius se séparant de l'ensemble ∞^6 relatif à Q et Q_1. Naturellement, nous aurions pu expliciter une quadrique $\bar{q}$ pour laquelle le tétraèdre conjugué commun est le tétraèdre $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$: on a ainsi la quadrique

$$(x^2 - z^2)\sqrt{\frac{b}{a}} + y^2 - t^2 = 0.$$

Cette fois, la droite $x = \varepsilon z$, $y = \eta t$ ($\varepsilon = \pm 1$, $\eta = \pm 1$) a pour conjuguée relativement à Q ou Q_1 la droite $x+\varepsilon z=0$, $y+\eta t=0$, de sorte que le couple (Δ, Δ') est alors, soit

$$\Delta \quad (x=z,\ y=t), \qquad \Delta' \quad (x=-z,\ y=-t),$$

soit

$$\Delta \quad (x=z,\ y=-t), \qquad \Delta' \quad (x=-z,\ y=t).$$

Mais, comme on doit ensuite employer le changement de coordonnées (1), peu importe l'échantillon type adopté pour $\overline{q}$.

9. **Couples de Möbius inscrits dans une biquadratique $\mathcal{B}$ et circonscrits à une quadrique Q_1.** — D'après ce qui précède, *une condition nécessaire pour l'existence de pareils couples est qu'un couple d'arêtes opposées Δ, Δ' du tétraèdre conjugué Θ commun au faisceau de quadriques issues de $\mathcal{B}$ soit conjugué aussi par rapport à Q_1 et que, relativement à ce couple Δ, Δ', la quadrique Q_1 soit Möbius-ment inscrite à toutes ces quadriques issues de $\mathcal{B}$.*

Si donc nous définissons $\mathcal{B}$ par deux quadriques

$$\begin{aligned} &Q \quad Ax^2+By^2+Cz^2+Dt^2=0,\\ &Q' \quad A'x^2+B'y^2+C'z^2+D't^2=0, \end{aligned}$$

et Q_1 par l'équation

$$Q_1 \quad au^2+bv^2+2euv+cw^2+dh^2+2fwh=0,$$

on a les relations *nécessaires*

$$(1) \qquad Aa+Bb=Cc+Dd, \qquad A'a+B'b=C'c+D'd.$$

Nous allons voir que ces conditions sont *suffisantes*. Nous allons d'abord opérer quelques simplifications : nous pouvons supposer que les quadriques Q et Q' sont précisément les deux quadriques harmoniquement inscrites-circonscrites entre elles, relatives au couple Δ, Δ', qui sont issues de $\mathcal{B}$.

On a donc

$$(2) \qquad \begin{cases} Q \quad x^2+y^2+z^2+t^2=0, \qquad Q' \quad x^2-y^2+m(z^2-t^2)=0,\\ Q_1 \quad au^2+bv^2+2euv+cw^2+dh^2+2fwh=0, \end{cases}$$

$$(3) \qquad a+b=c+d, \qquad a-b=m(c-d).$$

D'autre part, nous avons déjà fait remarquer que l'équation en λ, relative à Q_1 (que l'on définira ponctuellement), et à la quadrique $\overline{Q}$

$$\overline{Q} \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 + 2Exy + 2Fzt = 0,$$

se décompose en deux équations [formules (3) du paragraphe 7]

$$\left\{ \begin{array}{l} (AB - E^2)(ab - e^2) - \lambda(Aa + Bb + 2Ee) + \lambda^2 = 0; \\ (CD - F^2)(cd - f^2) - \lambda(Cc + Dd + 2Ff) + \lambda^2 = 0. \end{array} \right.$$

Par suite, si l'on désire que $\overline{Q}$ et Q_1 aient quatre droites communes formant un quadrilatère gauche dont les côtés rencontrent les arêtes du tétraèdre de référence autres que Δ et Δ', nous devons avoir coïncidence des deux trinomes précédents en λ, d'où

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} Aa + Bb + 2Ee = Cc + Dd + 2Ff; \\ (AB - E^2)(ab - e^2) = (CD - F^2)(cd - f^2). \end{array} \right.$$

Prenons pour $\overline{Q}$ la quadrique $Q - \rho Q'$; la première équation (4) est satisfaite automatiquement, en vertu de (3), et la seconde devient

$$(5) \qquad (1 - \rho^2)(ab - e^2) = (1 - m^2\rho^2)(cd - f^2).$$

Il existe donc deux quadriques, en général distinctes, $Q - \rho Q' = 0$, $Q + \rho Q' = 0$ *du faisceau ponctuel issu de* $\mathcal{B}$, *coupées chacune suivant quatre droites par la quadrique* Q_1, *dès que* Q_1 *est Möbius-ment inscrite dans les quadriques issues de* $\mathcal{B}$. Nous appliquons maintenant de nouveau la proposition fondamentale de M. Rowe (énoncée dans notre Mémoire commun déjà cité) : *un plan tangent* π *quelconque de* Q_1 *coupe* $Q - \rho Q' = 0$ *suivant une conique* γ; *on inscrit dans* γ *un triangle quelconque* BCD *et les plans tangents à* Q_1, *autres que* π, *issus de* CD, DB, BC *se recoupent en un point* A *situé sur* $Q - \rho Q'$. Or, ce plan π coupe $Q + \rho Q' = 0$ suivant une conique γ'; les deux coniques γ, γ' se coupent en quatre points que nous appelons B, C, D, A_1. Le lemme de M. Rowe s'applique aussi bien à $Q + \rho Q'$ qu'à $Q - \rho Q'$, et en éliminant un des quatre points A_1, B, C, D, nous formons des tétraèdres ABCD, A_1B_1CD, A_1BC_1D, A_1BCD_1 dont le quatrième sommet A, B_1, C_1, D_1 est sur $Q - \rho Q$, et $Q + \rho Q'$, donc sur $\mathcal{B}$; ces quatre tétraèdres sont inscrits dans $\mathcal{B}$, circonscrits à Q_1; les faces BCD, ACD, ABD, ABC du premier passent par les homologues de A, B, C, D dans l'involution biaxiale (Δ, Δ') [en vertu des relations (3)]; comme cette involution change $\mathcal{B}$ en elle-même, l'homologue de A est sur $\mathcal{B}$ et dans le plan BCD : c'est le point A_1 déjà nommé; pour chacun des ∞^2 plans tangents à Q_1, nous avons ainsi trouvé quatre couples de Möbius simultanés

$$\begin{array}{cccc} ABCD & ABC_1D_1 & AB_1CD_1 & AB_1C_1D \\ A_1B_1C_1D_1 & A_1B_1CD & A_1BC_1D & A_1BCD_1 \end{array}$$

inscrits dans $\mathcal{B}$, circonscrits à Q_1; *il existe* ∞^2 *couples de Möbius.*

Une façon synthétique de présenter le résultat est la suivante (¹) : *on choisit une quadrique* Q_1 (9 *paramètres*), *puis deux quadriques* $\overline{Q}$, $\overline{Q}'$ *coupant chacune* Q_1 *suivant quatre droites;* $\overline{Q}$ et $\overline{Q}'$ *dépendent chacune de* 5 *paramètres; ensuite, le couple de Möbius* (T, T_1) *dépend de* 2 *paramètres; on a retrouvé le total des* 21 *paramètres pour* $(\mathcal{B}, Q_1, T, T_1)$: $9+5+5+2=21$.

Nous pouvons maintenant envisager encore la quadrique q par rapport à laquelle chaque tétraèdre T, T_1 est conjugué ; il y a ∞^2 couples (T, T_1); les faces du couple T, T_1 sont tangentes aux quadriques σ_1, σ'_1 réciproques de Q, Q′ vis-à-vis de q, et en *général* Q_1, σ_1, σ'_1 n'appartiennent pas à un même faisceau tangentiel, de sorte qu'il n'y a que huit plans tangents simultanés à Q_1, σ_1, σ'_1, et ce sont les faces de T, T_1; il revient au même de prendre la réciproque σ de Q_1 par rapport à q; cette quadrique σ n'appartient pas au faisceau linéaire issu de $\mathcal{B}$; *on trouve donc* ∞^2 *quadriques* q *différentes, correspondant chacune à un couple de Möbius, comprises dans le système* ∞^3 *issu de* Δ, Δ'. Voici comment on les détermine; nous écrirons

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} & q \equiv Byz + B'zx + Cxt + C'yt; \\ & \sigma_1 \equiv (B^2+C'^2)u^2 + (B'^2+C^2)v^2 + (C^2+C'^2)w^2 + (B^2+B'^2)h^2 \\ & \qquad\qquad - 2(BB'+CC')uv - 2(BC'+B'C)wh = 0, \\ & \sigma'_1 \equiv m(C'^2-B^2)u^2 + m(C^2-B'^2)v^2 + 2m(BB'-CC')uv \\ & \qquad\qquad + (C'^2-C^2)w^2 + (B^2-B'^2)h^2 + 2(B'C-BC')wh = 0. \end{aligned}\right.$$

(¹) Si une quadrique Q_1 coupe deux quadriques $\overline{Q}$, $\overline{Q}'$ chacune suivant quatre droites, il résulte des propriétés énoncées au paragraphe 4, qu'il existe un couple de deux droites Δ, Δ' conjuguées simultanément par rapport à Q_1, $\overline{Q}$, $\overline{Q}'$, et les résultats qui viennent d'être établis dans le paragraphe 9 actuel, montrent que Q_1 est Möbius-ment inscrite dans toutes les quadriques du faisceau $(\overline{Q}, \overline{Q}')$.

On constate sans peine que l'*équation de condition*

$$(7)\qquad B^2+C'^2-B'^2-C^2=m\,(C^2+C'^2-B^2-B'^2)$$

exprime que σ_1 *est Möbius-ment inscrite dans* Q' *et aussi que* σ'_1 *est Möbius-ment inscrite dans* Q : cette relation (7) définit donc les ∞^2 quadriques q annoncées (le point B, B', C, C' d'un espace auxiliaire à trois dimensions décrit une quadrique); nous pouvons remarquer que, jusqu'ici la quadrique Q_1 n'a joué aucun rôle dans la détermination des quadriques q (la quadrique q est harmoniquement inscrite-circonscrite à Q ou Q', de sorte que σ_1 coupe Q suivant quatre droites, σ'_1 coupe Q' suivant quatre droites). Nous n'avons fait qu'expliciter ce théorème : *une biquadratique* $\mathcal{B}$ *contient, pour un couple* Δ, Δ' *d'arêtes opposées du tétraèdre* Θ *conjugué aux quadriques issues de* $\mathcal{B}$, ∞^3 *couples de Möbius inscrits dans* $\mathcal{B}$*; cet ensemble* ∞^3 *se décompose en* ∞^2 *familles; chaque famille comprend* ∞^1 *couples, tous conjugués par rapport à une même quadrique q, inscrits dans* $\mathcal{B}$ *et circonscrits à la développable* $\mathcal{D}$ *réciproque de* $\mathcal{B}$ *par rapport à q*. Cet ensemble ($\mathcal{B}$, q, $\mathcal{D}$) avec les ∞^1 couples de Möbius a été signalé aux paragraphes 7 et 8, et nous le retrouverons au paragraphe 10.

Voici maintenant où va intervenir Q_1 : nous allons exprimer que Q_1, σ_1, σ'_1 appartiennent à un même faisceau tangentiel, ou ce qui revient au même, que Q, Q', σ appartiennent à un même faisceau ponctuel; Q_1 et σ se coupent suivant quatre droites, puisque q est harmoniquement inscrite-circonscrite à Q_1 ; mais alors σ est l'une des deux quadriques $Q-\rho Q'=0$, $Q+\rho Q'=0$ trouvées plus haut : nous avons supposé

$$ab-e^2-(cd-f^2),\quad ab-e^2-m^2(cd-f^2),$$

tous deux non nuls, de sorte que $Q-\rho Q'$, $Q+\rho Q'$ soient distinctes; prenons $\overline{Q}=Q-\rho Q'$; nous avons vu, au paragraphe 9, qu'il existe deux quadriques, contenant Δ, Δ', transformant par polarité $\overline{Q}$ en Q_1 ; $\overline{q}$ étant l'une d'elles, il existe ∞^1 couples de Möbius inscrits dans la développable $\mathcal{B}$ et conjugués par rapport à $\overline{q}$; leurs sommets sont sur $Q-\rho Q'$, donc leurs faces sont tangentes à Q_1 (et même d'une façon plus précise à la développable réciproque de $\mathcal{B}$ par rapport à cette quadrique $\bar{q}$). *L'ensemble de ces ∞^1 couples de Möbius se sépare ainsi du total des ∞^2 couples relatifs à $\mathcal{B}$ et* Q_1; $Q - \rho Q'$ donne deux déterminations de $\bar{q}$; $Q + \rho Q'$ donne de même deux quadriques de même définition, de sorte que nous avons isolé *quatre familles de ∞^1 couples de Möbius exceptionnels, tous les couples de la famille correspondant à une même quadrique q exceptionnelle.*

Nous avons donc obtenu une configuration ($\mathcal{B}$, Q_1) dépendant de 19 paramètres : $\mathcal{B}$ dépend de 16 paramètres (15 pour l'homographie générale, ensuite m); puis Q_1 admet Δ, Δ' pour couple conjugué et est harmoniquement inscrite aux quadriques du faisceau issu de $\mathcal{B}$; elle dépend de 3 paramètres [six quantités homogènes, a, b, c, d, e, f liées par les deux équations (3) qui permettraient de tout expliciter au moyen de c, d, e, f]. Mais nous devons signaler une dégénérescence à 18 paramètres correspondant au cas où $Q - \rho Q'$, $Q + \rho Q'$ se confondent en une seule quadrique, qui est $Q(\rho = 0)$ ou $Q'(\rho = \infty)$. Nous pouvons, en raison de la symétrie entre Q et Q', supposer $\rho = 0$ et

$$ab - e^2 = cd - f^2. \tag{7}$$

Notre raisonnement, pour établir l'existence des ∞^2 couples, est en défaut si on l'applique brutalement, puisque les deux quadriques $Q - \rho Q' = 0$, $Q + \rho Q' = 0$ sont cette fois confondues. Mais il subsiste évidemment à la limite; nous pouvons imaginer une quadrique Q_1 fixe contenant ∞^1 quadrilatères gauches dépendant d'un paramètre λ, variant d'une façon continue avec λ; à chaque quadrilatère λ, on peut associer une quadrique $Q(\lambda)$ contenant ce quadrilatère; dans ces conditions, la biquadratique $\mathcal{B}(\lambda, \lambda')$, intersection de $Q(\lambda)$, $Q(\lambda')$ admet, avec Q_1, ∞^2 couples de Möbius; cela est vrai pour λ, λ' *quelconques;* si λ reste fixe, et si λ' tend vers λ, la biquadratique en jeu tend vers la caractéristique de $Q(\lambda)$, et la série des ∞^2 couples fournis par $Q(\lambda)$ et $Q(\lambda')$ tend vers une série ∞^2 de couples inscrits dans la caractéristique de $Q(\lambda)$ et circonscrits à Q_1. La relation $ab - e^2 = cd - f^2$ abaisse d'une unité le nombre de paramètres pour ($\mathcal{B}$, Q_1); ce nombre devient 18 au lieu de 19. Chacun des ∞^2 couples (T, T_1) fournit une quadrique q distincte de celle relative aux autres couples, exception faite pour *deux* familles de ∞^1 couples chacune, correspondant à l'une ou l'autre des deux quadriques qui échangent Q en Q_1 par polarité.

Le cas $m = \pm 1$ est un cas de dégénérescence : en échangeant au besoin z avec t, on peut se borner à $m = 1$; la biquadratique Q, Q' dégénère en quatre droites; les relations $a + b = c + d$, $a - b = c - d$ montrent que l'on a $a = c$, $b = d$; Q_1 a pour équation tangentielle

$$Q_1 \qquad a(u^2 + w^2) + b(v^2 + h^2) + 2euv + 2fwh = 0.$$

L'équation en ρ est $(1 - \rho^2)(e^2 - f^2) = 0$.

Si donc $e^2 - f^2$ n'est pas nul, ρ est égal à ± 1; on a alors

$$\overline{Q} = Q - Q' = 2(y^2 + t^2), \qquad \overline{Q}' = Q + Q' = 2(x^2 + z^2);$$

la quadrique Q_1 est tangente aux plans de deux côtés consécutifs quelconques du quadrilatère commun à Q et Q'; si donc nous appelons G, γ, G_1, γ_1 les côtés de ce quadrilatère, nous devons le couper par un plan tangent quelconque de Q_1, soit π; appelons A_1, B, C, D les points ainsi donnés par π sur G, γ, G_1, γ_1 respectivement; nous menons par BC le plan tangent à Q_1 autre que π, c'est le plan (γG_1); de même CD donne $(G_1 \gamma_1)$; le plan autre que π, tangent à Q_1, issu de BD, recoupe G_1 en un point A, qui est le correspondant de A_1 dans l'involution biaxiale (Δ, Δ') : dans cette involution, G s'échange avec G_1 et γ avec γ_1; on voit que les faces ABC ou $(G_1\gamma)$ et ACD ou $(G_1\gamma_1)$ sont fixes; le tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ complétant le couple de Möbius s'obtient immédiatement par l'involution (Δ, Δ') et a comme faces fixes $(G\gamma_1)$ et $(G\gamma)$; on peut dire qu'il y a deux séries ∞^2 de couples : ceux que nous venons de former, caractérisés par la propriété que G_1 ou G soit le support d'une arête, et ceux pour lesquels γ ou γ_1 est le support d'une arête. Ici chaque couple (T, T_1) donne une quadrique q différente; les quatre familles ∞^1 de couples (T, T_1) disparaissent, puisque Q_1 ne peut, par polarité, devenir l'une des quadriques $\overline{Q}$ ou $\overline{Q}'$ dégénérée en deux plans; la relation (6) se simplifie : nous avons supposé $m = 1$, on trouve donc $B^2 = C^2$ tout simplement, de sorte qu'il y a deux séries ∞^2 de quadriques q

$$B(yz - \varepsilon xt) + B'zx + C'yt = 0,$$

ce qui se conçoit, puisque les ∞^2 couples (T, T_1) se sont eux-mêmes séparés en deux familles ∞^2.

Le cas $e = \pm f$ est encore un cas de dégénérescence plus particulier : si l'on prend $e = f$, la quadrique Q_1 a pour équation ponctuelle (on a $a = b$, $c = d$, comme on l'a vu)

$$b(x^2 + z^2) + a(y^2 + t^2) - 2e(xy + zt) = 0,$$

elle contient les deux côtés opposés $x = \varepsilon iz$, $y = \varepsilon it$ du quadrilatère gauche commun à Q et Q'; l'une des familles de ∞^2 couples de Möbius donne des tétraèdres ayant chacun une arête sur une droite commune à Q, Q' et Q_1; mais ces dégénérescences n'ont rien de fondamental, ce sont de simples objets de curiosité.

On remarquera enfin que, par dualité, les résultats de ce paragraphe s'appliqueraient aux *couples de Möbius qui sont inscrits dans une quadrique et dont les faces enveloppent une développable de classe* 4 *et genre* 1.

10. Couples de Möbius inscrits dans une biquadratique $\mathcal{B}$ et circonscrits à une développable de genre 1 et classe 4, $\mathcal{D}$. — Nous définissons la biquadratique $\mathcal{B}$ par les deux quadriques remarquables Q, Q' harmoniquement circonscrites et inscrites l'une à l'autre, relatives au couple $\Delta(x = y = 0)$, $\Delta'(z = t = 0)$ du tétraèdre Θ conjugué commun aux quadriques du faisceau issu de $\mathcal{B}$; Θ est adopté comme tétraèdre de référence.

Toutes les quadriques du faisceau tangentiel issu de $\mathcal{D}$ sont Möbiusment inscrites dans les quadriques du faisceau ponctuel qui précède, relativement au couple Δ, Δ'; nous définissons aussi $\mathcal{D}$ par les deux quadriques Q_1 et Q'_1 harmoniquement circonscrites et inscrites l'une à l'autre, relativement au couple Δ, Δ', contenues dans le faisceau tangentiel déterminé par $\mathcal{D}$.

Nous écrivons

$$\begin{array}{ll} Q & x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0; \\ Q' & x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2) = 0; \\ Q_1 & au^2 + bv^2 + cw^2 + dh^2 + 2euv + 2fwh = 0; \\ Q'_1 & a'u^2 + b'v^2 + c'w^2 + d'h^2 + 2e'uv + 2f'wh = 0. \end{array}$$

L'équation exprimant que la quadrique $Q_1 - \mu Q'_1 = 0$ se réduit à une conique, doit être bicarrée; cette équation est

$$[(a-\mu a')(b-\mu b')-(e-\mu e')^2][c-\mu c')(d-\mu d')-(f-\mu f')^2]=0.$$

Comme c'est le couple Δ, Δ' qui doit intervenir, chacun des deux trinomes du second degré en μ doit être pair. On a ainsi les deux conditions

$$(1) \qquad ab'+ba'-2ee'=0, \qquad dc'+cd'-2ff'=0.$$

Nous exprimons ensuite que Q_1, Q'_1 sont Möbius-ment inscrites dans Q et Q, et nous avons

$$(2) \qquad \begin{cases} a+b=c+d, & a-b=m(c-d); \\ a'+b'=c'+d', & a'-b'=m(c'-d'). \end{cases}$$

Les paramètres sont ainsi au nombre de 20 : d'abord 15 pour la transformation homographique générale de l'espace; ensuite m, puis les 10 rapports $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \frac{e}{a}, \frac{f}{a}, \frac{b'}{a'}, \ldots, \frac{f'}{a'}$ sont liés par les six équations indépendantes (1) et (2) et introduisent quatre arbitraires; on a bien $15+1+4=20$. Il s'agit maintenant de prouver que ces conditions assurent l'existence de ∞^1 couples de Möbius inscrits dans $\mathcal{B}$ et circonscrits à $\mathcal{O}$: or, nous avons montré au paragraphe précédent, que si l'on coupe $\mathcal{B}$ par un plan π tangent à Q_1 (*ou* à Q'_1), et si l'on appelle A_1, B, C, D les points d'intersection, et A le transformé de A_1 par l'involution biaxiale (Δ, Δ'), les faces du tétraèdre ABCD sont tangentes à Q_1 (*ou* à Q'_1) : mais alors si π est l'un des plans tangents à $\mathcal{O}$, il est tangent à Q_1 *et* Q'_1 (*et* ayant remplacé *ou*), et par suite, ABCD est circonscrit à Q_1 *et* Q'_1 : la proposition est établie, car il suffit d'introduire comme plus haut le tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ transformé de ABCD par l'involution (Δ, Δ'). Comme vérification, nous avons retrouvé le total de 21 paramètres déterminant l'ensemble $(\mathcal{B}, \mathcal{O}, T, T_1)$.

Cherchons maintenant une quadrique $Q-\rho Q'=0$ (équation ponctuelle) et une quadrique $Q_1-\rho_1 Q'_1=0$ (équation tangentielle), se coupant suivant quatre droites : nous avons à appliquer les équations (4) du paragraphe précédent; la première est réalisée automatiquement; la seconde, en tenant compte des notations ($A=1-\rho$, $B=1+\rho$, $C=1-\rho$, $D=1+\rho$, $E=F=0$; a, b, c, d, e, f sont remplacés par $a-\rho_1 a'$, $b-\rho_1 b'$, $c-\rho_1 c'$, $d-\rho_1 d'$, $e-\rho_1 e'$,

$f-\rho_1 f')$ donne le résultat

$$(1-\rho^2)[(a-\rho_1 a')(b-\rho_1 b')-(e-\rho_1 e')^2]$$
$$=(1-m^2\rho^2)[(c-\rho_1 c')(d-\rho_1 d')-(f-\rho_1 f')^2].$$

En tenant compte de (1), on trouve l'équation

$$(3)\quad (ab-e^2)-(cd-f^2)+\rho^2[m^2(cd-f^2)-(ab-e^2)]$$
$$+\rho_1^2[(c'd'-f'^2)-(a'b'-e'^2)]$$
$$+\rho^2\rho_1^2[(a'b'-e'^2)-m^2(c'd'-f'^2)]=0.$$

Cette équation ne contient ρ et ρ_1 que *par leurs carrés*. Elle fournit, d'autre part, *une configuration curieuse constituée par les quatre quadriques*

$$(4)\qquad Q-\rho Q'=0,\qquad Q+\rho Q'=0;$$
$$(5)\qquad Q_1-\rho_1 Q'_1=0,\qquad Q_1+\rho_1 Q'_1=0.$$

Chacune des deux premières quadriques coupe chacune des deux dernières suivant quatre droites : cette configuration est de nature dualistique. La configuration dépend de 21 paramètres (nous avons expliqué que les deux premières quadriques dépendent de 17 paramètres seulement, et chacune des deux dernières fait intervenir 2 paramètres) : *il existe* ∞^1 *couples de Möbius inscrits dans la biquadratique déterminée par l'un des couples et circonscrits à la développable déterminée par l'autre couple.*

Une telle configuration, dès qu'elle est connue, en fournit aussitôt ∞^1 autres, car il suffit de choisir un couple quelconque de deux nombres ρ, ρ_1 liés par la relation (3); le fait remarquable est que *les deux quadriques d'un même couple livrent à la fois une biquadratique et une développable associées respectivement à la développable et à la biquadratique relatives à l'autre couple;* il faut bien faire attention de ne pas prendre dans le faisceau ponctuel issu de $\mathcal{B}$ deux quadriques *quelconques,* mais un de ces couples $Q-\rho Q'=0$, $Q+\rho Q'=0$ sur lesquels nous avons déjà attiré l'attention.

Considérons maintenant notre système $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ *le plus général* (20 paramètres), un couple (T, T_1) de Möbius correspondant, et la quadrique q, déjà définie, relative à ce couple T, T_1; les coefficients B, B', C, C' de cette quadrique

$$q\equiv Byz+B'zx+Cxt+C'yt=0$$

satisfont à l'équation (7) du paragraphe précédent qui exprime que les réciproques σ_1, σ'_1 de Q et Q' par rapport à q sont Möbius-ment inscrites dans la biquadratique $\mathcal{B}$; la dualité fournirait une nouvelle équation analogue exprimant que les réciproques Q_1 et Q'_1, soit σ et σ', sont Möbius-ment circonscrites à Q_1 et Q'_1, de sorte que les quadriques q dépendent d'un paramètre ; on peut se demander si les deux relations quadratiques en B, B', C, C' sont distinctes : ce point va être élucidé.

On peut raisonner ainsi : les huit faces du couple T, T_1 sont tangentes simultanément à Q_1, Q'_1, σ_1, σ'_1, de sorte que nous savons déjà que ces quatre quadriques, définies tangentiellement, appartiennent à un même réseau (accidentellement à un même faisceau tangentiel, mais alors $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ offrent la configuration spéciale qui sera indiquée plus bas); pour un réseau tangentiel, il n'y a que huit plans tangents communs, donc il n'y a que les quatre couples

$$\begin{array}{cccc} ABCD & ABC_1D_1 & AB_1CD_1 & AB_1C_1D \\ A_1B_1C_1D_1 & A_1B_1CD & A_1BC_1D & A_1BCD_1 \end{array}$$

qui fournissent cette quadrique q; il y a ∞^1 couples (T, T), donc il y a bien ∞^1 quadriques q.

D'ailleurs, si nous prenons les quadriques $Q - \rho Q' = 0$ et $Q_1 - \rho_1 Q'_1 = 0$ (définies, l'une ponctuellement, l'autre tangentiellement), si ρ et ρ_1 sont liées par (3), il existe *deux* quadriques q transformant $Q - \rho Q'$ en $Q_1 - \rho_1 Q'_1$; on peut dire que la polarité q change la biquadratique $(Q - \rho Q', Q)$ en la développable $(Q_1 - \rho_1 Q'_1, \sigma_1)$, et l'on voit bien pourquoi les quadriques Q_1, Q'_1, $Q_1 - \rho_1 Q'_1$, σ_1 auxquelles les faces de T, T' sont tangentes appartiennent à un même réseau tangentiel.

Le seul cas possible d'exception est celui où les réciproques σ_1, σ'_1 *de* Q *et* Q' *définissent le même faisceau tangentiel que* Q_1 *et* Q'_1 : mais alors comme Q et Q' sont harmoniquement inscrites et circonscrites l'une à l'autre, il en est de même de leurs réciproques σ_1 et σ'_1, de sorte que σ_1 et σ'_1 coïncident (dans leur ensemble) avec Q_1 et Q'_1; on peut choisir les notations de façon que σ_1 coïncide avec Q_1 (et non Q'_1), et par suite σ'_1 avec Q'_1; autrement dit, l'équation (3) en ρ et ρ_1 est vérifiée pour $\rho = \rho_1 = 0$, et pour $\rho = \rho_1 = \infty$. On a donc les équations nouvelles

$$(6)\qquad \begin{cases} ab - e^2 = cd - f^2, \\ a'b' - e'^2 = m^2(c'd' - f'^2), \end{cases}$$

qui sont indépendantes des équations de condition déjà obtenues et réduisent à 18 le nombre de paramètres dont dépend le total $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$; on retrouve ce nombre ainsi : $\mathcal{B}$ dépend de 16 paramètres ; la quadrique q dépend de deux paramètres, puisque les coefficients B, B', C, C' satisfont à l'équation (7) du paragraphe précédent; dans ces conditions $\mathcal{B}$ *admet* ∞^1 *couples de Möbius* (T, T_1), *inscrits dans* $\mathcal{B}$, *où chaque tétraèdre* T *ou* T_1 *est conjugué par rapport à* q, *et les faces de ces tétraèdres enveloppent la développable réciproque de* $\mathcal{B}$ *par rapport à* q. Cette configuration spéciale à 18 paramètres (au lieu de 20), s'est présentée naturellement aux paragraphes 7, 8, 9. Dans ce cas de dégénérescence, les ∞^1 couples relatifs à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ sont fournis par la même quadrique q; les ∞^2 quadriques satisfaisant à l'équation (7) du paragraphe précédent, mais distinctes de q, ne correspondent à aucun couple relatif à $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$. D'ailleurs, puisque le pôle du plan (u, v, w, h), par rapport à q, est

$$Bh - C'w, \quad Cw - B'h, \quad Cv - C'u, \quad Bu - B'v,$$

on peut supposer, dans ce cas actuel,

$$(7)\qquad \begin{cases} Q \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \qquad Q' \equiv x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2); \\ Q_1 \equiv (Bh - C'w)^2 + (Cw - B'h)^2 + (Cv - C'u)^2 + (Bu - B'v)^2; \\ Q'_1 \equiv (Bh - C'w)^2 - (Cw - B'h)^2 + m(Cv - C'u)^2 - m(Bu - B'v)^2; \\ \qquad B^2 + C'^2 - B'^2 - C^2 = m(C^2 + C'^2 - B^2 - B'^2). \end{cases}$$

On a ainsi explicité *rationnellement* 18 paramètres : 15 pour l'homographie générale, 3 pour les rapports B : B' : C : C', la quantité m étant fournie par la dernière équation (7)[1]. C'est cette configuration spéciale à 18 paramètres que la nature même des résultats a introduite aux paragraphes précédents avant que nous fussions arrivés à l'étudier spécialement.

---

[1] Le cas particulier $C = \varepsilon B$, $C' = \varepsilon' B'$ avec $\varepsilon = \pm 0$, $\varepsilon' = \pm 1$ n'introduit plus que le rapport B : B' au lieu de trois rapports arbitraires; par contre m est indéterminé. Il ne présente pas un intérêt primordial; la configuration dépend alors de 17 paramètres au lieu de 18.

Dans ce paragraphe, nous avons donc vu que la configuration formée par une biquadratique $\mathcal{B}$ et une développable $\mathcal{D}$ de genre 1 et classe 4, admettant ∞^1 couples de Möbius inscrits dans la première et circonscrits à la seconde, comprend deux types distincts, donnant chacun lieu à ∞^1 couples ; le premier type, où $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ dépend de 20 paramètres, donne ∞^1 quadriques q, une pour chaque couple T, T_1, *et il n'y a aucune quadrique q exceptionnelle, aucun couple exceptionnel ;* le second type, où $\mathcal{B}$, $\mathcal{D}$ dépend de 18 paramètres, donne la même quadrique q pour les ∞^1 couples T, T_1.

11. **Quelques théorèmes complémentaires.** — Pour ne pas allonger, j'indique, sans démonstration, quelques résultats.

1° (ABCD), $(A_1B_1C_1D_1)$ formant un couple de Möbius non dégénéré, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 ne sont pas génératrices d'une même quadrique, comme nous l'avons montré plus haut. Mais si nous considérons une biquadratique $\mathcal{B}$ circonscrite, le tétraèdre Θ conjugué par rapport aux quadriques issues de $\mathcal{B}$, admet Δ, Δ' (sécantes communes de AA_1, BB_1, CC_1, DD_1) comme arêtes opposées; appelons (Δ_1, Δ'_1), (Δ_2, Δ'_2); les deux autres couples d'arêtes opposées de ce tétraèdre conjugué commun, et α_1, α_2 les transformés de A dans les involutions (Δ_1, Δ'_1), (Δ_2, Δ'_2); *les quatre droites $\alpha_1\alpha_2$, BB_1, CC_1, DD_1 sont génératrices d'une même semi-quadrique ;* il y a ∞^2 biquadratiques $\mathcal{B}$, la droite $\alpha_1\alpha_2$ dépend d'un unique paramètre au lieu de deux.

2° Soient deux quadriques Q, Q_1 tangentes en un point S_1 ; soient S_3, S_4 les sommets des deux autres cônes contenant la biquadratique (Q, Q_1), le cône de sommet S_1 comptant, comme on sait, pour deux. Si la racine double de l'équation en λ relative au faisceau $Q - \lambda Q_1 = 0$ est égale à la demi-somme des racines correspondant à S_3 et S_4, la quadrique Q est Möbius-ment circonscrite à Q_1 pour le couple Δ, Δ', où Δ' est la droite S_3S_4 et Δ la conjuguée de S_3S_4 par rapport à toutes les quadriques issues de $\mathcal{B}$.

3° De la même façon, une biquadratique $\mathcal{B}(Q, Q')$, qui a un point double, peut être Möbius-ment circonscrite à une quadrique Q_1 ou à une développable $\mathcal{D}$ de genre 1 et classe 4.

4° De même, le cas de deux quadriques ayant quatre droites communes, dégénère en le cas d'un cône et d'une conique, deux tangentes de la conique étant génératrices du cône.

5° Les biquadratiques étudiées peuvent dégénérer en une cubique et une sécante double de la conique ou en deux coniques. Ces diverses dégénérescences ont été étudiées par M. Rowe qui a su en tirer parti.

6° L'équation λ relative à un faisceau $Q - \lambda Q' = 0$ de quadriques est, avec les notations classiques,

$$H - \Theta\lambda + J\lambda^2 - \Theta'\lambda^3 + H'\lambda^4 = 0.$$

La condition pour que la somme de deux racines soit égale à la somme des deux autres est

$$\Theta'^3 + 8\Theta H'^2 - 4J\Theta' H' = 0, \tag{1}$$

et elle n'est pas linéaire entre les coefficients ponctuels de Q *d'une part, entre les coefficients tangentiels de* Q' *de l'autre;* il n'y a aucune contradiction avec ce qui a été systématiquement considéré au cours de ce Mémoire, où nous avons, *de plus,* spécifié qu'un couple de deux droites *fixes* Δ, Δ' reste conjugué par rapport à Q, Q' simultanément, de sorte que le premier membre de (1) se décompose en plusieurs facteurs, *dont l'un est justement linéaire*.

7° Au paragraphe 5, nous avons vu que le couple (ABCD), $(A_1B_1C_1D_1)$ donne lieu à trois quadriques Σ_i $(i = 1, 2, 3)$ appartenant à la fois au système ponctuel Q circonscrit à T, T_1, au système tangentiel Q_1 inscrit dans T, T_1, de sorte que chaque quadrique Σ_j est Möbius-ment circonscrite ou inscrite relativement à elle-même, ce qui tient à ce que T a deux arêtes opposées formées de génératrices d'un même système de Σ_j.

Il y a ici un lien intéressant entre les couples de Möbius inscrits dans une quadrique, circonscrits à une autre, et la configuration de quatre tétraèdres deux à deux en situation de Möbius.

Voyons-le *synthétiquement* et sans démonstration; nous choisissons une quadrique quelconque Σ (9 paramètres), puis quatre génératrices de Σ formant un quadrilatère gauche (4 paramètres), G et G' étant deux côtés opposés et Γ, Γ' les deux autres. Il existe une seule quadrique q contenant $G\Gamma G'\Gamma'$, telle que Σ et q soient chacune sa polaire réciproque vis-à-vis de l'autre. *Sur* Σ *prenons deux génératrices* G_1, G'_1, *conjuguées par rapport à* G, G′ : *elles sont conjuguées par rapport à* q; sur G_1, prenons deux points A, B conjugués par rapport aux points où G_1 coupe Γ et Γ', et de même sur G'_1 deux points C, D de même définition; nous avons ainsi engagé trois nouveaux paramètres, un pour G_1, un pour A, un pour C, et l'on a $9+4+3=16$ paramètres pour définir cette configuration. Le tétraèdre ABCD est conjugué par rapport à q et à la fois inscrit et circonscrit à Σ; sur q, choisissons un couple de génératrices (g_1, g'_1) conjuguées par rapport à (G, G′), donc par rapport à Σ; cela engage un dix-septième paramètre; il existe un couple (g_2, g'_2) et un seul sur q divisant harmoniquement GG′ et $g_1 g'_1$. Le tétraèdre ABCD, transformé par les involutions biaxiales (g_1, g'_1), (g_2, g'_2), (G, G′) fournit $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ et $A_3B_3C_3D_3$; les quatre tétraèdres obtenus au total sont tous inscrits et circonscrits à Σ, conjugués par rapport à q et deux à deux en situation de Möbius; mais A_3, B_3 sont sur G'_1 qui contient C, D; de même, C_3, D_3 sont sur G_1 qui contient A, B; de même, $A_1B_1C_2D_2$ sont alignés et $A_2B_2C_1D_1$; quant au couple ABCD, $A_1B_1C_1D_1$, c'est le couple général (de même, ABCD, $A_2B_2C_2D_2$ formant un couple général).

On peut sur q choisir, au contraire, deux couples (γ_1, γ'_1), (γ_2, γ'_2) de même système que Γ, Γ', harmoniques entre eux et avec Γ, Γ' : cela introduit toujours un dix-septième paramètre après le choix de Σ, q, ABCD. Le tétraèdre ABCD est transformé par les involutions biaxiales (γ_1, γ'_1), (γ_2, γ'_2), (Γ, Γ') en $A'_1B'_1C'_1D'_1$, $A'_2B'_2C'_2D'_2$ et $A'_3B'_3C'_3D'_3$; on a encore quatre tétraèdres inscrits ou circonscrits à Σ, conjugués par rapport à q, deux à deux en situation de Möbius; on a $A'_3=B$, $B'_3=A$, $C'_3=D$, $D'_3=C$; $A'_1=B'_2$, $B'_1=A'_2$, $C'_1=D'_2$, $D'_1=C'_2$. Il est facile de voir que A'_1 et B'_1 sont alignés avec C, D et que C'_1, D'_1 sont alignés avec A, B.

Sur Σ, on a ∞^4 quadrilatères $G\Gamma G'\Gamma'$; chacun donne une seule quadrique q (et q varie quand le quadrilatère varie), il y a ∞^3 tétraèdres ABCD inscrits-circonscrits à Σ et conjugués par rapport à q; chaque tétraèdre ABCD donne ∞^1 tétraèdres $A_1B_1C_1D$; on a ainsi le détail des ∞^8 couples de Möbius *généraux* relatifs à une quadrique Σ considérée comme Möbius-ment inscrite ou circonscrite à elle-même.