

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE MERLIN

Étude du mouvement d'un fluide parfait dépourvu d'accélération

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 55 (1938), p. 223-255

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1938_3_55_223_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE
DU
MOUVEMENT D'UN FLUIDE PARFAIT

DÉPOURVU D'ACCÉLÉRATION

PAR M. ÉMILE MERLIN.



Introduction.

1. C'est un cas banal que celui d'un fluide se mouvant à la manière d'un solide, d'un mouvement rectiligne uniforme. Mais on peut se demander si, en dehors de ce cas, il existe des mouvements de fluides, que nous supposerons parfaits, pour lesquels chaque particule conserve sa densité et soit animée d'un mouvement rectiligne uniforme, c'est-à-dire se meuve comme si elle était entièrement libre. Ceci ne signifie pas qu'aucune force n'agisse sur le fluide. En effet, désignons, suivant l'usage, par ρ et p respectivement la densité et la pression et par X, Y, Z les composantes, suivant trois axes de coordonnées rectangulaires, de la force agissant sur l'unité de masse, au point de coordonnées x, y, z . Les équations du mouvement exigent que l'on ait

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z.$$

Les composantes de la force par unité de volume seront les dérivées partielles d'une même fonction de x, y, z . L'effet de la force sera simplement d'assurer en chaque point du fluide la pression représentée

par cette fonction, pression qui pourrait d'ailleurs varier avec le temps.

2. Appelons a, b, c les coordonnées d'une particule à l'instant initial et $f_1(a, b, c), f_2(a, b, c), f_3(a, b, c)$, les composantes de la vitesse constante qui l'anime. Les coordonnées x, y, z , de la particule à l'instant t , s'écrivent

$$(1) \quad x = a + t f_1(a, b, c), \quad y = b + t f_2(a, b, c), \quad z = c + t f_3(a, b, c).$$

Les trois fonctions f_1, f_2, f_3 devront satisfaire, quel que soit t , à l'équation de continuité

$$\frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = 1.$$

En vertu des équations (1), l'équation de continuité deviendra

$$t \left(\frac{\partial f_1}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial b} + \frac{\partial f_3}{\partial c} \right) + t^2 \left[\frac{D(f_2, f_3)}{D(b, c)} + \frac{D(f_3, f_1)}{D(c, a)} + \frac{D(f_1, f_2)}{D(a, b)} \right] + t^3 \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(a, b, c)} = 0.$$

Comme elle doit avoir lieu pour toute valeur de t , on devra satisfaire aux équations

$$(2) \quad \frac{\partial f_1}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial b} + \frac{\partial f_3}{\partial c} = 0,$$

$$(3) \quad \frac{D(f_2, f_3)}{D(b, c)} + \frac{D(f_3, f_1)}{D(b, a)} + \frac{D(f_1, f_2)}{D(a, b)} = 0,$$

$$(4) \quad \frac{D(f_1, f_2, f_3)}{D(a, b, c)} = 0.$$

La dernière exprime que l'indicatrice I des vitesses, obtenue en menant par l'origine des vecteurs équipollents aux vitesses des diverses particules du fluide, est un point, une ligne ou une surface. Si I est un point, toutes les particules sont animées du même mouvement rectiligne uniforme, nous retrouvons le cas banal.

3. Si I est une ligne, on écrira

$$f_1 = \varphi_1(\lambda), \quad f_2 = \varphi_2(\lambda), \quad f_3 = \varphi_3(\lambda),$$

où λ est une certaine fonction de a, b, c .

La seule équation à satisfaire sera l'équation (2), qui devient

$$\frac{d\varphi_1}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial a} + \frac{d\varphi_2}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial b} + \frac{d\varphi_3}{d\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial c} = 0.$$

Elle exprime que la tangente à I au point pour lequel le paramètre λ a une valeur déterminée λ_1 , est parallèle au plan tangent à la surface Σ qui a pour équation

$$\lambda(a, b, c) = \lambda_1.$$

La surface Σ est donc un cylindre. Or les lieux des points pour lesquels la vitesse est la même sont précisément les surfaces $\lambda = \text{const.}$ et la vitesse qui anime les points d'une telle surface est le rayon vecteur du point de l'indicatrice I défini par la valeur de λ qui détermine la surface. Donc, *pour obtenir le mouvement du fluide, on tracera dans celui-ci une famille de cylindres, à un paramètre, on considérera un cône dont le sommet est un point fixe O et les génératrices des droites parallèles aux génératrices rectilignes des cylindres, et l'on déterminera l'arête de rebroussement I d'une surface développable dont les plans tangents sont parallèles aux plans tangents au cône. A tout cylindre de la famille on fera correspondre ainsi un point de I. Cela étant, à l'instant initial, on communiquera aux particules de chacune des traces cylindriques du fluide, une vitesse égale au rayon vecteur du point de I qui correspond à cette trace.* A la condition de définir la force et la pression ainsi que nous l'avons indiqué plus haut, le mouvement du fluide se continuera sans accélération.

Dans le cas particulier où les génératrices des cylindres sont parallèles à une direction fixe Δ , le fluide sera animé d'une translation rectiligne uniforme dans une direction perpendiculaire à Δ , tandis que chaque trace cylindrique glissera sur elle-même parallèlement à ses génératrices rectilignes avec une vitesse constante, variant arbitrairement d'une trace à l'autre. Si les cylindres se réduisent à des plans parallèles, ceux-ci glisseront arbitrairement les uns sur les autres, avec une vitesse constante.

4. Envisageons l'hypothèse où l'indicatrice I est une surface et, tout d'abord, supposons la surface plane. On ne nuira pas à la généralité du résultat, en prenant le plan des a, b parallèle au plan I, c'est-

à-dire en faisant f_3 constante. Les équations (2) et (3) à satisfaire s'écrivent

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial a} + \frac{\partial f_2}{\partial b} &= 0, \\ \frac{D(f_1, f_2)}{D(a, b)} &= 0. \end{aligned}$$

La première permet de poser

$$(6) \quad f_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial b}, \quad f_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial a},$$

φ étant une fonction de a, b, c , qui devra satisfaire l'équation (5), dans laquelle f_1 et f_2 auront été remplacées par leurs valeurs (6); φ devra donc être solution de l'équation

$$(7) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial b} \right)^2 = 0.$$

L'équation (7) n'est autre que l'équation des surfaces développables, en coordonnées a, b, φ .

Pour communiquer au fluide un mouvement de l'espèce, on considérera une famille simplement infinie de surfaces développables, dépendant d'un paramètre c , à savoir

$$z = \varphi(a, b, c).$$

On projettera les génératrices de chaque développable sur le plan parallèle au plan des ab , ayant pour cote la valeur du paramètre c qui définit la développable envisagée. On obtiendra de la sorte une congruence rectiligne G ; que nous supposerons plongée dans le fluide. Les droites Δ de G sont les lieux des particules animées d'une même vitesse. Pour une de ces droites Δ , la vitesse s'obtiendra de la manière suivante. On mènera par l'origine O , un segment OE parallèle à la normale à la surface développable de la famille qui contient la génératrice rectiligne dont Δ est la projection, en un point quelconque de cette génératrice; l'extrémité E du segment se trouvant dans le plan $c = -1$. On projettera OE en OE' sur le plan des ab et l'on fera tourner dans ce plan OE' autour de O de 90° dans le sens de l'axe des b vers l'axe des a , pour amener OE' en OE'' ; OE'' n'est autre que la composante parallèle au plan des ab de la vitesse

commune à tous les points de Δ . La composante suivant l'axe des c est évidemment la constante f_3 .

5. Étudions à présent l'hypothèse où l'indicatrice I est une surface quelconque. Désignons par α, β, γ les coordonnées d'un point M de I, par λ, μ deux fonctions de a, b, c et par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ trois fonctions de λ et de μ ; les équations de I s'écriront

$$(8) \quad \alpha = \varphi_1(\lambda, \mu), \quad \beta = \varphi_2(\lambda, \mu), \quad \gamma = \varphi_3(\lambda, \mu).$$

L'équation de condition (3) s'écrira, puisque f_1, f_2, f_3 ne sont autres que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ où λ et μ sont remplacées par leurs expressions en fonction de a, b, c ,

$$(9) \quad \frac{D(\varphi_2, \varphi_3)}{D(\lambda, \mu)} \frac{D(\lambda, \mu)}{D(b, c)} + \frac{D(\varphi_3, \varphi_1)}{D(\lambda, \mu)} \frac{D(\lambda, \mu)}{D(c, a)} + \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\lambda, \mu)} \frac{D(\lambda, \mu)}{D(a, b)} = 0.$$

Appelons l la ligne qui a pour équations

$$(10) \quad \lambda(a, b, c) = C_1, \quad \mu(a, b, c) = C_2,$$

C_1 et C_2 étant des constantes. Les lignes l sont les lieux des particules du fluide qui sont animées d'une même vitesse, qui se déplacent donc comme des fils rigides. Elles forment une congruence G. Les équations (8) et (10) établissent entre la surface I et la congruence G une correspondance dans laquelle à chaque point M(λ, μ) de I correspond une ligne l de G pour laquelle C_1 et C_2 ont respectivement pour valeurs les coordonnées curvilignes λ et μ de M.

L'équation (9) exprime que la tangente en un point quelconque de l est parallèle au plan tangent à I au point M correspondant à l . *Toute ligne l du fluide qui se comporte comme un fil rigide est donc plane et située dans un plan parallèle au plan tangent à l'indicatrice au point qui fixe l'extrémité du vecteur définissant la vitesse commune à tous les points de l.*

Cherchons ensuite à interpréter l'équation de condition (2), qui s'écrit ici

$$(11) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial a} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial b} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial c} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial a} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial b} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial c} = 0.$$

Posons

$$(12) \quad S\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\lambda}\right)^2 = E, \quad S\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\mu}\right)^2 = G.$$

Sur la surface I choisissons pour sens croissant des arcs des lignes coordonnées, celui suivant lequel croît le paramètre variable. Appelons s_1 l'arc de la ligne coordonnée le long de laquelle λ varie seul et s_2 l'arc de la ligne le long de laquelle μ varie seul, on aura

$$(13) \quad ds_1 = \sqrt{E} d\lambda, \quad ds_2 = \sqrt{G} d\mu,$$

les radicaux étant pris positivement.

Appelons N_1 la demi-normale à la surface $\lambda = C_1$, dirigée dans le sens des C_1 croissant, N_2 la demi-normale à la surface $\mu = C_2$, dirigée dans le sens des C_2 croissant, on a, dn_1 désignant un déplacement dans le sens N_1 et dn_2 un déplacement dans le sens N_2 ,

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d\lambda}{dn_1} = \sqrt{\left(\frac{\partial\lambda}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial c}\right)^2}, \\ \frac{d\mu}{dn_2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\right)^2}, \end{cases}$$

les radicaux étant pris positivement.

Désignons par T_1 et T_2 respectivement, les demi-tangentes positives aux lignes coordonnées de I le long desquelles λ ou μ varient seuls. En vertu des équations (12) et (14), l'équation de condition (11) s'écrira

$$\sqrt{E} \frac{d\lambda}{dn_1} \cos(N_1, T_1) + \sqrt{G} \frac{d\mu}{dn_2} \cos(N_2, T_2) = 0,$$

ou, en vertu des équations (13),

$$(15) \quad \frac{ds_1}{dn_1} \cos(N_1, T_1) + \frac{ds_2}{dn_2} \cos(N_2, T_2) = 0.$$

On peut se donner arbitrairement dn_1 et dn_2 sur les demi-normales N_1 et N_2 , on en déduira $d\lambda$ et $d\mu$, d'où ds_1 et ds_2 . Faisons $dn_2 = dn_1$, alors l'équation (15) devient

$$(16) \quad ds_1 \cos(N_1, T_1) + ds_2 \cos(N_2, T_2) = 0.$$

Donc, l'équation de condition (2) exprime que, *si l'on se déplace infiniment peu et de même sur les demi-normales aux surfaces $\lambda = C_1$ et $\mu = C_2$ et dans le sens des C_1 et C_2 croissant, les arcs correspondants des lignes coordonnées de I se projettent sur les demi-normales qui leur correspondent suivant des éléments égaux et de signes opposés.*

Ainsi, dans l'hypothèse où l'indicatrice I est une surface, la détermination du mouvement du fluide dépourvu d'accélération revient à la détermination d'une surface I et d'une congruence G de lignes planes l telles que l'on puisse établir une correspondance entre les points de I et les lignes de G, jouissant des propriétés suivantes :

1° la ligne l se trouve dans un plan parallèle au plan tangent à I au point M qui correspond à l ;

2° ayant tracé sur I deux familles simplement infinies de lignes $\lambda = C_1$, $\mu = C_2$, auxquelles correspondent deux familles de surfaces de la congruence G et, considérant les demi-normales aux surfaces $\lambda = C_1$, $\mu = C_2$, dans le sens des C_1 et C_2 croissant, à des éléments infinitésimaux égaux de ces demi-normales correspondent des arcs infinitésimaux sur I qui se projettent sur les demi-normales qui les définissent, suivant des éléments égaux et de signes opposés.

Si cette dernière propriété a lieu pour un système de lignes de coordonnées sur I, elle a lieu évidemment pour tout autre système et, sans nuire à la généralité du résultat, on choisira, dans chaque étude particulière, le système le plus avantageux.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DU MOUVEMENT QUAND L'INDICATRICE ÉTANT UNE SURFACE, LES FILS RIGIDES SONT DES DROITES.

6. Nous écarterons le cas où l'indicatrice est un plan, ce cas ayant été étudié précédemment. Plaçons-nous dans l'hypothèse où la congruence G est rectiligne, c'est-à-dire dans celle où les lieux des particules fluides qui se meuvent comme des fils rigides sont des droites. Nous distinguerons trois cas, suivant que le lieu des images sphériques des droites de G est une surface, une ligne ou un point.

Dans le premier cas, menons par l'origine des droites parallèles aux droites de la congruence et déterminons leurs intersections P avec le plan $a = 1$. Nous choisirons pour paramètres λ, μ , les coordonnées de P dans ce plan, de sorte que les équations de G s'écrivent

$$(17) \quad \begin{cases} b = \lambda a + \varphi(\lambda, \mu), \\ c = \mu a + \psi(\lambda, \mu). \end{cases}$$

En différentiant chacune d'elles par rapport à a, b, c , et résolvant les équations obtenues par rapport aux dérivées de λ et de μ , il vient

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda}{\partial a} = \frac{-\lambda \left(a + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{D}, & \frac{\partial \mu}{\partial a} = \frac{-\mu \left(a + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}}{D}; \\ \frac{\partial \lambda}{\partial b} = \frac{a + \frac{\partial \psi}{\partial \mu}}{D}, & \frac{\partial \mu}{\partial b} = \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}}{D}; \\ \frac{\partial \lambda}{\partial c} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{D}, & \frac{\partial \mu}{\partial c} = \frac{a + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}}{D}; \end{cases}$$

dans ces équations, on a posé

$$D = \left(a + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) \left(a + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}.$$

L'équation de condition (11) devient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \left[-\lambda \left(a + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} \left[-\mu \left(a + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right] \\ & + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} \left(a + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu} \left(a + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) = 0. \end{aligned}$$

Elle doit être satisfaite en tous les points d'une droite quelconque de G, donc quels que soient a, λ, μ . On doit donc avoir

$$(19) \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} - \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu} - \mu \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} = 0,$$

$$(20) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \left(-\lambda \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} \left(-\mu \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \\ & + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0, \end{aligned}$$

ce qui revient à exprimer que la deuxième propriété géométrique a lieu au point où la droite Δ d'équations (17) rencontre le plan des bc et au point à l'infini.

Désignons par \mathcal{E} une fonction de λ et de μ et posons

$$(21) \quad \varphi_1 = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda \partial \mu};$$

l'équation (19) s'écrira

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\varphi_2 - \lambda \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\varphi_3 - \mu \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} \right) = 0.$$

Appelons \mathcal{N} une fonction de λ et de μ , l'équation précédente sera équivalente aux suivantes

$$(22) \quad \begin{cases} \varphi_2 - \lambda \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \mu}, \\ \varphi_3 - \mu \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda \partial \mu} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} = - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \lambda}. \end{cases}$$

Rapprochons les équations (21) et (22), nous obtiendrons pour équations de I, en vertu de (8),

$$(23) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda \partial \mu}, \\ \beta = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\lambda \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \lambda} - \mathcal{E} + \mathcal{N} \right), \\ \gamma = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\mu \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \mu} - \mathcal{E} - \mathcal{N} \right). \end{cases}$$

Dans l'équation (20) substituons à $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, les expressions fournies par les équations (21) et (22), il viendra

$$(24) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \frac{\partial^2 (\mathcal{E} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 (\mathcal{E} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0.$$

Exprimons la première propriété géométrique, c'est-à-dire le parallélisme de la droite Δ et du plan tangent à I au point M de coordonnées λ, μ ; il vient

$$\frac{D(\varphi_2, \varphi_3)}{D(\lambda, \mu)} + \lambda \frac{D(\varphi_3, \varphi_1)}{D(\lambda, \mu)} + \mu \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\lambda, \mu)} = 0,$$

ou, en tenant compte des expressions (21) et (22),

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \mu^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \right)^2 - \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \mu^2} \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \mu^2} = 0.$$

Revenons à l'équation (24), que nous écrirons sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \psi + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda^2} \varphi + \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda^2} \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \mu^2} \psi - \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \mu^2} \psi - \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \varphi \right) \\ - \psi \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda \partial \mu^2} - \varphi \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} = 0; \end{aligned}$$

et posons, \mathcal{X} désignant une fonction de λ et de μ ,

$$(26) \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \varphi + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \lambda \partial \mu^2} \psi = 2 \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial \lambda \partial \mu}.$$

L'équation précédente deviendra

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\partial^2 (\mathcal{E} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} \varphi + \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \psi - \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial \lambda} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[- \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \varphi + \frac{\partial^2 (\mathcal{E} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} \psi - \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial \mu} \right] = 0. \end{aligned}$$

On aura donc, \mathcal{X} désignant une fonction de λ et de μ ,

$$(27) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 (\mathcal{N} + \mathcal{E})}{\partial \lambda^2} \varphi + \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \psi = \frac{\partial (\mathcal{X} + \mathcal{X}')}{\partial \lambda}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \varphi + \frac{\partial^2 (\mathcal{N} - \mathcal{E})}{\partial \mu^2} \psi = \frac{\partial (\mathcal{X} + \mathcal{X}')}{\partial \mu}. \end{cases}$$

Montrons que $\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu}$ ne saurait être nul. En effet, admettons un instant que cette dérivée seconde soit nulle. En vertu de l'équation (35), on en déduirait

$$(28) \quad \frac{\partial^2 (\mathcal{N} + \mathcal{E})}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 (\mathcal{E} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} = 0.$$

D'où, par exemple,

$$\frac{\partial^2 (\mathcal{N} + \mathcal{E})}{\partial \lambda^2} = 0.$$

Calculons les dérivées par rapport à λ de α , β , γ , tirées des équations

tions (23), il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial \lambda} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} = \frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2 \partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial \beta}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\lambda \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial \lambda} \right) = \lambda \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} = 0, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \lambda} &= \mu \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} - \frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} = 0. \end{aligned}$$

L'indicatrice I cesserait d'être une surface. Le cas où le second facteur de l'équation (28) serait nul, conduirait à la même conclusion.

Cela étant, le système formé par les équations (27) sera équivalent à celui que l'on obtient en conservant la première et en lui adjoignant celle-ci multipliée par $\frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2}$ augmentée de la seconde multipliée par $\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu}$, c'est-à-dire la suivante

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \right)^2 \right] \varphi \\ &= \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} \frac{\partial (\mathcal{X} + \mathcal{Y})}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial (\mathcal{X} - \mathcal{Y})}{\partial \mu}. \end{aligned}$$

Or le coefficient de φ n'est autre que le premier membre de l'équation (25). Les fonctions \mathcal{L} , \mathcal{N} , \mathcal{Y} , \mathcal{X} doivent donc satisfaire à la condition

$$(29) \quad \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} \frac{\partial (\mathcal{X} + \mathcal{Y})}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial (\mathcal{X} - \mathcal{Y})}{\partial \mu} = 0.$$

Les équations à vérifier sont donc les équations (25), (29), (26) et la première des équations (27).

Pour obtenir un fluide de l'espèce considérée, on se donnera arbitrairement deux fonctions $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ et \mathcal{L} des deux variables λ et μ , on choisira une solution \mathcal{N} de l'équation de Monge et d'Ampère (25); l'équation (29) fournira ensuite $\mathcal{X} - \mathcal{Y}$ par une quadrature, l'équation (26) et la première des équations (27) donneront les fonctions φ et ψ , et, par suite, grâce aux équations (17), les fils rigides, lesquels seront animés de la vitesse $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ déduite des équations (21) et (22).

7. Cherchons l'équation différentielle des asymptotiques de la surface I. A cet effet calculons les coefficients D, D', D'' de cette équation. Il vient, en vertu de (23),

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^4 \mathcal{L}}{\partial \lambda^3 \partial \mu} & \frac{\partial^3 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2 \partial \mu} & - \frac{\partial^3 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^3} \\ \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} & \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} & - \frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} \\ \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial \mu^2} & - \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} & - \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \end{vmatrix}, \\ D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^4 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2 \partial \mu^2} & \frac{\partial^3 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu^2} & - \frac{\partial^3 \mathcal{N}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \\ \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} & \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} & - \frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} \\ \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial \mu^2} & - \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} & - \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \end{vmatrix}, \\ D'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^4 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial \mu^3} & - \frac{\partial^3 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^3} & \frac{\partial^3 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \lambda \partial \mu^2} \\ \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} & \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} & - \frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} \\ \frac{\partial^3 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial \mu^2} & - \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} & - \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \end{vmatrix}. \end{array} \right.$$

D'autre part, de l'équation (25) on déduit par différentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^3} \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^3 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \lambda \partial \mu^2} \frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} + 2 \frac{\partial^3 \mathcal{N}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} &= 0, \\ \frac{\partial^3 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2 \partial \mu} \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^3 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^3} \frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} + 2 \frac{\partial^3 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu^2} \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} &= 0. \end{aligned}$$

Par suite, multipliant la première des équations (30) par $\frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2}$, la deuxième par $2 \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu}$, la troisième par $-\frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2}$, et ajoutant, il vient

$$(31) \quad \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} D + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} D' - \frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} D'' = 0.$$

Écrivons à présent l'équation différentielle des asymptotiques, après l'avoir multipliée par $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu}\right)^2$ et y avoir remplacé D' par sa valeur

tirée de l'équation (31), nous aurons

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \right)^2 D d\lambda^2 - \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} D d\lambda d\mu \\ & + \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} D'' d\lambda d\mu + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \right)^2 D'' d\mu^2 = 0. \end{aligned}$$

Remplaçons dans le dernier terme $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} \right)^2$ par sa valeur déduite de l'équation (25); l'équation différentielle des asymptotiques s'écrira

$$(32) \quad \left[\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} d\lambda - \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} d\mu \right] \left[\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} D d\lambda + \frac{\partial^2 (\mathcal{L} + \mathcal{N})}{\partial \lambda^2} D'' d\mu \right] = 0,$$

ou tout aussi bien

$$(33) \quad \left[\frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} d\lambda - \frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} d\mu \right] \left[\frac{\partial^2 (\mathcal{L} - \mathcal{N})}{\partial \mu^2} D d\lambda - \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial \lambda \partial \mu} D'' d\mu \right] = 0.$$

Considérons les asymptotiques que l'on obtient en égalant à zéro le premier facteur. Les paramètres directeurs des tangentes à ces asymptotiques se trouveront en différentiant les équations (23) et en tenant compte de ce facteur nul et de l'équation (25). Il vient

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} d\lambda + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial \mu^2} d\mu, \\ d\beta &= \lambda \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} d\lambda + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial \mu^2} d\mu \right), \\ d\gamma &= \mu \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} d\lambda + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial \mu^2} d\mu \right). \end{aligned}$$

Nous voyons que les paramètres directeurs des tangentes asymptotiques considérées sont λ , μ . Ainsi les fils rigides du fluide en mouvement sont parallèles aux tangentes asymptotiques d'une famille de l'indicatrice des vitesses.

Il est certain qu'il existe une autre solution pour laquelle l'indicatrice est la même et où les fils rigides sont parallèles aux tangentes asymptotiques de la seconde famille. C'est ce qui apparaîtra d'ailleurs plus loin d'une manière tout à fait évidente.

8. Donnons un exemple, en prenant pour \mathcal{L} et \mathcal{N} les fonctions

suivantes

$$(34) \quad \mathcal{E} = \frac{1}{2} \lambda^2 \mu - \int \log \mu \, d\mu, \quad \mathcal{N} = \lambda \mu.$$

Comme on s'en assure aisément, l'équation (25) est vérifiée et l'équation de condition (29) devient

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial(\mathcal{X} + \mathcal{X}')}{\partial \lambda} - \frac{\partial(\mathcal{X} - \mathcal{X}')}{\partial \mu} = 0.$$

\mathcal{Q} désignant une fonction arbitraire de λ et de μ , on y satisfera en posant

$$(35) \quad \mathcal{X} + \mathcal{X}' = \mu \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mu}, \quad \mathcal{X} - \mathcal{X}' = \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \lambda}.$$

L'équation (26) et la première des équations (27) fourniront les fonctions φ et ψ . En tenant compte de (34) et de (35), il vient

$$(36) \quad \begin{cases} \varphi = \mu \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \lambda \partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} + \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \lambda \partial \mu}, \\ \mu \varphi + \psi = \mu \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \lambda \partial \mu}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que l'indicatrice I est définie par les équations

$$(37) \quad \alpha = \lambda, \quad \beta = \frac{\lambda^2}{2} + \lambda + \log \mu, \quad \gamma = -\mu,$$

et a pour équation en coordonnées cartésiennes

$$\gamma = -e^{\beta - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha}.$$

Les équations (17) définiront les fils rigides Δ et s'écriront, en vertu de (36),

$$(38) \quad \begin{cases} b = \lambda a + \mu \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \lambda \partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \lambda^2 \partial \mu} + \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \lambda \partial \mu}, \\ c = \mu a - \mu^2 \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \lambda \partial \mu^2} + \mu \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial \lambda^2 \partial \mu}. \end{cases}$$

Calculons les déterminants D, D', D'' en partant des équations (37), l'équation différentielle des asymptotiques de I prendra la forme

$$\left(d\lambda - \frac{1}{\mu} d\mu \right) \left(d\lambda + \frac{1}{\mu} d\mu \right) = 0.$$

Appelons asymptotiques de la première famille, celles que l'on obtient en égalant à zéro le premier facteur et asymptotiques de la seconde famille, celles que l'on obtient en égalant à zéro le second facteur. Les asymptotiques de la première famille auront pour équation

$$\mu = k_1 e^\lambda,$$

celles de la seconde,

$$\mu = k_2 e^{-\lambda},$$

k_1 et k_2 désignant des constantes. En remplaçant dans les équations (37), μ par ces valeurs, on obtiendra pour équations de ces asymptotiques

$$(39) \quad \begin{cases} \alpha = \lambda & \alpha = \lambda, \\ \beta = \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda + \log k_1 & \text{et} \quad \beta = \frac{\lambda^2}{2} + \log k_2, \\ \gamma = -k_1 e^\lambda & \gamma = -k_2 e^{-\lambda}. \end{cases}$$

Ce sont des courbes tracées sur des cylindres droits du second degré, parallèles à l'axe des γ , et leurs bases paraboliques sont superposables par translation. Les tangentes aux asymptotiques de la première famille ont pour paramètres directeurs $1, \lambda + 2, -\mu$; celles de la seconde famille $1, \lambda, \mu$. On vérifie que les fils rigides sont parallèles aux tangentes aux asymptotiques de la seconde famille.

Pour obtenir la solution pour laquelle les fils rigides sont parallèles aux tangentes aux asymptotiques de la première famille, il suffira de choisir pour \mathcal{L} et \mathcal{M} , les fonctions suivantes

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda^2 \mu}{2} - 2\lambda\mu - \int \log(-\mu) d\mu, \quad \mathcal{M} = -\lambda\mu.$$

On voit sans peine que l'équation (25) est vérifiée. Les équations de I s'écrivent

$$\alpha = \lambda - 2, \quad \beta = \frac{\lambda^2}{2} - \lambda + \log(-\mu), \quad \gamma = \mu,$$

ou

$$\gamma = -e^{\beta - \frac{\alpha^2}{2} - \alpha}.$$

C'est bien la même indicatrice que celle que définissent les équations (37). L'équation différentielle des asymptotiques est toujours la même. Considérons celles qui forment la première famille. Les

paramètres directeurs de leurs tangentes sont λ, μ ; et dans la nouvelle solution les fils rigides sont parallèles aux tangentes asymptotiques de I, de la première famille.

9. Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où les droites Δ de la congruence G ne présentent qu'une infinité simple de directions, et mettons les équations de la congruence sous la forme

$$(40) \quad \begin{cases} b = l_1(\lambda) a + \varphi(\lambda, \mu), \\ c = l_2(\lambda) a + \psi(\lambda, \mu). \end{cases}$$

De ces équations, on déduit par différentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial a} &= \frac{-l_1 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + l_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{D}, & \frac{\partial \mu}{\partial a} &= \frac{-l_2 \left(al'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) + l_1 \left(al'_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)}{D}; \\ \frac{\partial \lambda}{\partial b} &= \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \mu}}{D}, & \frac{\partial \mu}{\partial b} &= \frac{- \left(al'_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)}{D}; \\ \frac{\partial \lambda}{\partial c} &= \frac{- \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{D}, & \frac{\partial \mu}{\partial c} &= \frac{al'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}}{D}; \end{aligned}$$

D étant égal à

$$\left(al'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \left(al'_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}.$$

L'équation de condition (11) prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \left(-l_1 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + l_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} \left(-al'_1 l_2 + al'_2 l_1 - l_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + l_1 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \\ + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu} \left(al'_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu} \left(al'_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) = 0. \end{aligned}$$

Comme elle doit être vérifiée quels que soient a, λ, μ , on en déduit les deux équations suivantes :

$$(41) \quad l'_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu} - l'_1 l_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} - l'_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu} + l_1 l'_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} = 0,$$

$$(42) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \left(-l_1 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} + l_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} \left(-l_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + l_1 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \\ + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = 0. \end{aligned}$$

L'équation (41) intégrée par rapport à μ , devient, en désignant par l une fonction de λ ,

$$l'_1(\varphi_3 - l_2\varphi_1) - l'_2(\varphi_2 - l_1\varphi_1) = l.$$

Remarquons que, si l'une des dérivées l'_1, l'_2 est nulle, l_1 par exemple, les droites Δ sont parallèles à un plan que l'on peut prendre pour plan des ac . On aurait alors $l_1 = 0$.

Nous étudierons à part ce cas particulier. Supposons donc tout d'abord l'_1 et l'_2 différentes de zéro et posons $l = 2l'_1 l'_2 l_3, l_3$ désignant une fonction de λ . L'équation précédente s'écrira

$$l'_1(\varphi_3 - l_2\varphi_1 - l'_2 l_3) = l'_2(\varphi_2 - l_1\varphi_1 + l'_1 l_3).$$

Appelons $l'_1 l'_2 \varphi_4$ la valeur commune des deux membres, φ_4 étant une fonction de λ et de μ . Nous aurons en résolvant par rapport à φ_2 et φ_3

$$(43) \quad \varphi_2 = l_1\varphi_1 + l'_1(\varphi_4 - l_3), \quad \varphi_3 = l_2\varphi_1 + l'_2(\varphi_4 + l_3).$$

Utilisons ces valeurs dans l'équation (42), cette dernière prendra la forme

$$(44) \quad \left(l'_1 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l'_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) \varphi_1 + \left(l''_1 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l''_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) \varphi_4 + \left(l'_1 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l'_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda} \\ + \left(l'_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - l'_1 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial \varphi_4}{\partial \mu} - (l''_1 l_3 + l'_1 l'_3) \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - (l''_2 l_3 + l'_2 l'_3) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = 0.$$

Calculons ensuite les paramètres directeurs de la normale à l'indicatrice I, il viendra, en tenant compte des équations (43)

$$\frac{D(\varphi_2, \varphi_3)}{D(\lambda, \mu)} = \left(l'_1 \varphi_1 + l''_1 \varphi_4 + l'_1 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda} - l''_1 l_3 - l'_1 l'_3 \right) l'_2 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \mu} \\ + \left(l_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} + l''_1 \varphi_4 - l''_1 l_3 - l'_1 l'_3 \right) l'_2 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \mu} \\ - \left(l'_2 \varphi_1 + l''_2 \varphi_4 + l'_2 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda} + l''_2 l_3 + l'_2 l'_3 \right) l_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} \\ - \left(l_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} + l''_2 \varphi_4 + l''_2 l_3 + l'_2 l'_3 \right) l_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu}, \\ \frac{D(\varphi_2, \varphi_1)}{D(\lambda, \mu)} = \left(l'_2 \varphi_1 + l''_2 \varphi_4 + l'_2 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda} + l''_2 l_3 + l'_2 l'_3 \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} - l'_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi_4}{\partial \mu}, \\ \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\lambda, \mu)} = l'_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda} \frac{\partial \varphi_4}{\partial \mu} - \left(l'_1 \varphi_1 + l''_1 \varphi_4 + l'_1 \frac{\partial \varphi_4}{\partial \lambda} - l''_1 l_3 - l'_1 l'_3 \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu}.$$

Exprimons le parallélisme de la droite Δ et du plan tangent au point qui lui correspond sur I, nous aurons

$$[(l_1'' l_2 - l_2'' l_1) \varphi_1 - (l_1'' l_3 + l_1' l_3') l_2 - (l_2'' l_3 + l_2' l_3') l_4] \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} = 0.$$

Si $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} = 0$, φ_1 est une fonction de la seule variable λ , fonction que nous appellerons l_4 .

Si $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu}$ est différente de zéro, on devra écrire

$$(l_1'' l_2 - l_2'' l_1) \varphi_1 = (l_1'' l_3 + l_1' l_3') l_2 + (l_2'' l_3 + l_2' l_3') l_4.$$

Remarquons que, si le coefficient de φ_1 est différent de zéro, φ_1 est une fonction de λ seulement et que nous nous trouvons dans le cas précédent. Supposons donc qu'il n'en soit pas ainsi, alors

$$l_1'' l_2 - l_2'' l_1 = 0,$$

et, par suite, en intégrant et désignant par p et q deux constantes,

$$l_2 = pl_1 + q.$$

Les droites de la congruence seraient parallèles au plan

$$c = pb + qa.$$

Ce cas étant réservé, nous pouvons admettre que φ_1 est indépendante de μ , et écrire les équations (43) sous la forme

$$(45) \quad \varphi_2 = l_1 \varphi_1 + l_5, \quad \varphi_3 = l_2 \varphi_1 + l_6,$$

en désignant par l_5 et l_6 deux fonctions de λ . Introduisons ces valeurs dans l'équation (42), celle-ci s'écrira

$$(46) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} (l_2 \varphi_1 + l_6) = \frac{\partial \psi}{\partial \mu} (l_1 \varphi_1 + l_5).$$

Reprenons l'interprétation géométrique des conditions du problème. Les droites restent parallèles à une même direction quand μ varie seul; la surface correspondante de G est un cylindre C, qui coupe le plan des bc suivant une courbe Γ , le long de laquelle μ varie seul. Soient Δ une génératrice rectiligne de C, Q son point d'intersection avec Γ . La surface C admet pour normale N_1 , suivant une notation

définie plus haut. La surface $\mu = \text{const.}$ admet pour normale N_2 . En vertu des équations (45), les lignes $\lambda = \text{const.}$ sur I sont des droites D parallèles aux droites de G. A Δ correspond sur I un point M et, lorsqu'on fait varier μ , M décrit une droite D, laquelle coïncide avec T_2 . La condition géométrique (16) exprime, N_2 étant normale à Δ et par suite à T_2 , la perpendicularité de N_1 et de T_1 . Ainsi N_1 est perpendiculaire à T_1 , à T_2 et à la tangente T en Q à Γ , tangente dont les paramètres directeurs sont $0, \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}, \frac{\partial \psi}{\partial \mu}$. T_1, T_2 et T sont donc parallèles à un même plan. C'est cette condition géométrique qu'exprime l'équation (46).

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que l'indicatrice I soit une surface développable est que l'on ait

$$(47) \quad \frac{l'_5}{l'_1} = \frac{l'_6}{l'_2}.$$

Supposons que I soit une surface développable, appelons l la valeur commune des rapports qui figurent dans l'équation (47), la condition (46) s'écrira

$$\left(l'_1 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l'_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) (\varphi_1 + l) = 0.$$

Or φ_1 ne saurait être égale à une fonction de λ seulement, sans que l'indicatrice I se réduise à une ligne. On a donc

$$(48) \quad l'_4 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l'_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = 0.$$

Réciproquement, si l'équation (48) est satisfaite, on a, en vertu de (46)

$$(49) \quad l'_5 \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l'_6 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = 0,$$

et, φ et ψ ne pouvant être indépendantes de μ , sans que G cesse d'être une congruence, on en conclut la relation (47), et la surface est développable.

Cela étant, si l'indicatrice I est une surface réglée gauche, le premier

membre de l'équation (48) est différent de zéro, et les équations de I s'écrivent

$$\alpha = - \frac{l_5' \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l_6' \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{l_1' \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l_2' \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}},$$

$$\beta = - l_1 \frac{l_5' \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l_6' \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{l_1' \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l_2' \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}} + l_3,$$

$$\gamma = - l_2 \frac{l_5' \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l_6' \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}}{l_1' \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l_2' \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}} + l_6.$$

Les fils rigides sont définis par les équations (40), dans lesquelles φ et ψ sont des fonctions arbitraires de λ et de μ .

10. Si l'indicatrice I est développable, on devra satisfaire aux équations (47) et (48). Comme les coefficients directeurs de la tangente à la trace du cône directeur sur le plan $\alpha = 1$, sont $1, l_1, l_2$ et ceux de la tangente T à Γ , $0, \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}, \frac{\partial \psi}{\partial \mu}$, il résulte de l'équation (48) que T est parallèle à la tangente à la trace du cône. Or, cette dernière tangente ne dépend pas de μ . Donc tout le long de Γ , la tangente reste parallèle à elle-même et Γ est une droite parallèle à la tangente à la trace du cône. Les surfaces C sont des plans. La normale N_1 à C étant aussi la normale au plan tangent à I le long de la génératrice D correspondant aux droites de G qui sont dans C, ce plan tangent à I est parallèle à C.

La solution du problème s'obtient ici simplement. On se donne deux surfaces développables S et S' ayant même cône directeur. On coupe S par un plan ω , dans lequel on trace une infinité simple de courbes C_μ et, sur S', on trace également une infinité de courbes C'_μ . Entre les courbes C_μ et C'_μ on établit une correspondance. Les droites rigides du fluide sont dans chaque plan tangent à S, les parallèles à la génératrice de contact. La vitesse de l'une quelconque Δ de ces parallèles s'obtient en déterminant l'intersection Q de Δ et de ω ; Q se trouve sur une courbe C_μ à laquelle correspond une courbe C'_μ , qui coupe la génératrice de S' parallèle à Δ en

un point Q' . Le segment joignant un point fixe O à Q' fournit la vitesse du fil rigide Δ .

11. Examinons l'hypothèse, réservée plus haut, où les droites rigides sont parallèles à un plan. Nous choisirons ce plan parallèle à celui des ac . Par suite $l_1 = 0$. Comme l_2 ne saurait être constante sans que les droites soient parallèles à une direction fixe, cas que nous examinerons plus loin, nous pourrions faire $l_2 = \lambda$. Les équations (40) de la congruence G s'écriront

$$(50) \quad b = \varphi(\lambda, \mu), \quad c = \lambda a + \psi(\lambda, \mu).$$

Faisons $l_1 = 0$, $l_2 = \lambda$ dans l'équation (41), il viendra $\frac{\partial \varphi_2}{\partial \mu} = 0$; φ_2 ne contient donc pas μ , mais elle contient λ , sinon elle serait constante et nous aurions affaire à un cas déjà examiné plus haut. Nous écrirons, l désignant une fonction de λ ,

$$\varphi_2 = l.$$

La condition de parallélisme de la droite (50) et du plan tangent à I , s'écrit

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial \mu} - \lambda \frac{\partial \varphi_1}{\partial \mu} = 0.$$

D'où, l_3 désignant une fonction de λ ,

$$\varphi_3 = \lambda \varphi_1 + l_3.$$

Enfin l'équation de condition (42) devient

$$(51) \quad l' \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \varphi_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} - l'_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = 0.$$

On en déduit que φ contient μ , car si φ ne contenait pas μ , en vertu de cette équation (51) même, ψ ne contiendrait pas μ non plus et les équations (50) ne définiraient pas une congruence. Faisons donc $\varphi = \mu$, l'équation de condition (51) donnera

$$(52) \quad \varphi_1 = l' \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l'_3.$$

Les équations de I et de G s'écriront

$$(I) \quad \begin{cases} \alpha = l' \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l'_3, \\ \beta = l, \\ \gamma = \lambda \left(l' \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l'_3 \right) + l_3; \end{cases}$$

$$(G) \quad \begin{cases} b = \mu, \\ c = a\lambda + \psi. \end{cases}$$

On obtiendra l'indicatrice des vitesses I, en traçant dans le plan des bc une directrice $\Gamma : \beta = l(\lambda), \gamma = l_3(\lambda)$, λ désignant le coefficient angulaire d'une droite variable, du plan des ac . I sera la surface réglée admettant pour plan directeur le plan des ac et pour directrice Γ . Les fils rigides s'obtiendront en traçant dans le plan des bc , une famille de courbes C_λ de paramètre λ , ayant μ pour abscisse et $\psi(\lambda, \mu)$ pour ordonnée. Par les divers points d'une courbe C_λ quelconque, on mènera des droites D parallèles à la génératrice Δ de I ayant pour coefficient angulaire λ , ce seront les droites rigides du fluide. Aux différents points Q d'une courbe C_λ , on fera correspondre, sur la génératrice Δ de coefficient angulaire λ , les points Q' pour lesquels $\alpha = l' \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - l'_3$; la vitesse commune à tous les points d'une droite rigide D sera déterminée par le vecteur joignant le point fixe O au point Q'.

12. Il nous reste à étudier le cas où les fils rectilignes rigides sont parallèles à une direction fixe, que nous prendrons pour axe des a . Les équations à satisfaire s'écrivent ici, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ étant trois fonctions de b et de c ,

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial b} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial c} = 0, \quad \frac{D(\varphi_2, \varphi_3)}{D(b, c)} = 0.$$

D'où

$$\beta = \frac{\partial \chi}{\partial c}, \quad \gamma = -\frac{\partial \chi}{\partial b},$$

χ désignant une fonction de b et de c vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial b^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial c^2} - \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial b \partial c} \right)^2 = 0.$$

Les fils rigides sont des droites Δ parallèles à une direction fixe. Pour obtenir la vitesse qui anime les particules d'une de ces droites, on consi-

dère une surface développable quelconque Σ . Au point d'intersection de Δ avec Σ , on mène la normale. Par un point fixe O , on trace un segment parallèle à cette normale et se projetant sur la direction fixe suivant une longueur constante. On projette ce segment sur un plan passant par O et perpendiculaire à la direction fixe et l'on fait tourner, dans ce plan, la projection de 90° autour de O . Le vecteur obtenu est la composante de la vitesse perpendiculairement au fil. Quant à la composante parallèle au fil, elle peut être choisie quelconque, variable d'un fil à l'autre.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DU MOUVEMENT DANS LE CAS GÉNÉRAL OU L'INDICATRICE EST UNE SURFACE.

13. Prenons pour indicatrice I , une surface quelconque et rapportons-la à un système de coordonnées curvilignes orthogonal, d'ailleurs quelconque, de paramètres λ et μ . Au point M de I attachons un trièdre mobile $Mxyz$, Mx étant tangent à la ligne coordonnée le long de laquelle λ varie seul dans le sens croissant, My étant tangent à la ligne coordonnée le long de laquelle μ varie seul dans le sens croissant, Mz étant normal à I .

Dans un plan parallèle à Mxy , considérons une courbe C variable avec M . Quand λ varie seul, M décrit M_λ et C engendre une surface S_2 de la congruence G formée par les courbes C . De même, si μ varie seul, M décrit M_μ et C engendre une surface S_1 . Quand λ et μ sont constants, la courbe C est décrite en faisant varier un nouveau paramètre ν ; de sorte que les équations de C s'écrivent

$$(53) \quad \begin{cases} x = \psi_1(\lambda, \mu, \nu), \\ y = \psi_2(\lambda, \mu, \nu), \\ z = \psi(\lambda, \mu). \end{cases}$$

Les translations et rotations du trièdre seront A, o, o, p_1, q_1, r_1 ; o, C, o, p_2, q_2, r_2 , et les formules de Codazzi s'écrivent

$$(54) \quad \begin{cases} Aq_2 + Cp_1 = 0, & \frac{\partial p_1}{\partial \mu} - \frac{\partial p_2}{\partial \lambda} = q_1 r_2 - r_1 q_2, \\ r_1 = -\frac{1}{C} \frac{\partial A}{\partial \mu}, & \frac{\partial q_1}{\partial \mu} - \frac{\partial q_2}{\partial \lambda} = r_1 p_2 - p_1 r_2, \\ r_2 = \frac{1}{A} \frac{\partial C}{\partial \lambda}, & \frac{\partial r_1}{\partial \mu} - \frac{\partial r_2}{\partial \lambda} = p_1 q_2 - q_1 p_2. \end{cases}$$

Appelons $D_{1,x}$, $D_{1,y}$, $D_{1,z}$ les composantes du déplacement d'un point de C quand λ varie seul; $D_{2,x}$, $D_{2,y}$, $D_{2,z}$ les composantes du déplacement quand μ varie seul; $D_{3,x}$, $D_{3,y}$, $D_{3,z}$ les composantes du déplacement quand ν varie seul, et par D_x , D_y , D_z les composantes du déplacement quand λ , μ , ν varient. On a

$$(55) \quad \begin{cases} D_{1,x} = \left(A + q_1 \psi - r_1 \psi_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial \lambda} \right) d\lambda, \\ D_{1,y} = \left(r_1 \psi_1 - p_1 \psi + \frac{\partial \psi_2}{\partial \lambda} \right) d\lambda, \\ D_{1,z} = \left(p_1 \psi_2 - q_1 \psi_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) d\lambda; \end{cases}$$

$$(56) \quad \begin{cases} D_{2,x} = \left(q_2 \psi - r_2 \psi_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial \mu} \right) d\mu, \\ D_{2,y} = \left(C + r_2 \psi_1 - p_2 \psi + \frac{\partial \psi_2}{\partial \mu} \right) d\mu, \\ D_{2,z} = \left(p_2 \psi_2 - q_2 \psi_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) d\mu; \end{cases}$$

$$(57) \quad \begin{cases} D_{3,x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} d\nu, \\ D_{3,y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu} d\nu, \\ D_{3,z} = 0; \end{cases}$$

$$(58) \quad \begin{cases} D_x = D_{1,x} + D_{2,x} + D_{3,x}, \\ D_y = D_{1,y} + D_{2,y} + D_{3,y}, \\ D_z = D_{1,z} + D_{2,z}. \end{cases}$$

Considérons un point m de C , intersection de S_1 et de S_2 . Désignons par α_1 , β_1 , γ_1 les cosinus directeurs de la demi-normale N_1 à S_1 en m , prise dans le sens des λ croissant. Les conditions d'orthogonalité, d'une part, de N_1 et de la courbe m_μ décrite par m quand μ varie seul, d'autre part, de N_1 et de la courbe C s'écrivent

$$(59) \quad \begin{cases} D_{2,x} \alpha_1 + D_{2,y} \beta_1 + D_{2,z} \gamma_1 = 0, \\ D_{3,x} \alpha_1 + D_{3,y} \beta_1 = 0. \end{cases}$$

Déplaçons-nous sur N_1 , à partir de m dans le sens positif et désignons par dn_1 ce déplacement. Les composantes de dn_1 sur les trois axes du trièdre mobile seront $\alpha_1 dn_1$, $\beta_1 dn_1$, $\gamma_1 dn_1$. Dans les

équations (58), remplaçons D_x, D_y, D_z , respectivement par ces composantes et ajoutons les équations obtenues en multipliant la première par α_1 , la seconde par β_1 et la troisième par γ_1 , il vient, en tenant compte de (59),

$$(60) \quad D_{1x}\alpha_1 + D_{1y}\beta_1 + D_{1z}\gamma_1 = dn_1.$$

Des équations (59) et (60) tirons α_1 , il viendra

$$(61) \quad \alpha_1 = - \frac{D_{2z}D_{3y}}{\Delta} dn_1,$$

en appelant Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} D_{1x} & D_{1y} & D_{1z} \\ D_{2x} & D_{2y} & D_{2z} \\ D_{3x} & D_{3y} & D_{3z} \end{vmatrix}.$$

Soit de même N_2 la demi-normale à S_2 en m , prise dans le sens des μ croissant. Désignons par $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les cosinus directeurs de cette demi-normale. Les conditions d'orthogonalité, d'une part, de N_2 et de la courbe m_λ décrite par m quand λ varie seul, d'autre part, de N_2 et de C , s'écrivent

$$(62) \quad \begin{cases} D_{1x}\alpha_2 + D_{1y}\beta_2 + D_{1z}\gamma_2 = 0, \\ D_{3x}\alpha_2 + D_{3y}\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Déplaçons-nous sur N_2 , à partir de m dans le sens positif d'une quantité dn_2 . Le déplacement dn_2 aura pour composantes sur les axes du trièdre mobile $\alpha_2 dn_2, \beta_2 dn_2, \gamma_2 dn_2$. Dans les équations (58), substituons ces valeurs à D_x, D_y, D_z , multiplions la première par α_2 , la seconde par β_2 , la troisième par γ_2 et ajoutons, il viendra, en tenant compte des conditions d'orthogonalité (62),

$$(63) \quad D_{2x}\alpha_2 + D_{2y}\beta_2 + D_{2z}\gamma_2 = dn_2.$$

Tirons β_2 des équations (62) et (63), nous écrirons

$$(64) \quad \beta_2 = - \frac{D_{1x}D_{3x}}{\Delta} dn_2.$$

Le cosinus α_1 est le cosinus de l'angle formé par N_1 avec la demi-tangente Mx à la ligne M_λ décrite dans le sens des λ croissant et β_2 est

le cosinus de l'angle formé par N_2 avec la demi-tangente My à la ligne M_μ décrite dans le sens des μ croissant. D'ailleurs, l'arc ds_1 , qui a pour demi-tangente Mx , vaut $A d\lambda$ et l'arc ds_2 , qui a pour demi-tangente My , vaut $C d\mu$. Rappelons-nous maintenant la condition géométrique traduite par l'équation (15), en tenant compte de ce qui précède et des équations (61) et (64); elle s'écrira

$$A d\lambda D_{2z} D_{3y} + C d\mu D_{1z} D_{3x} = 0.$$

Les équations (55), (56) et (57) permettent d'écrire cette relation sous la forme suivante

$$A \frac{\partial \psi_2}{\partial \nu} \left(p_2 \psi_2 - q_2 \psi_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \right) + C \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} \left(p_1 \psi_2 - q_1 \psi_1 + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right) = 0.$$

Remarquons que les rotations et translations sont indépendantes de ν , et intégrons par rapport à cette dernière variable, la condition s'écrira, en vertu de la première des équations (54),

$$(65) \quad A p_2 \psi_2^2 + 2C p_1 \psi_2 \psi_1 - C q_1 \psi_1^2 + 2A \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \psi_2 + 2C \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \psi_1 = \Omega(\lambda, \mu),$$

$\Omega(\lambda, \mu)$ désignant une fonction arbitraire des deux variables λ et μ .

Nous voyons que, si la relation (65) est vérifiée quels que soient λ , μ , ν , les deux conditions géométriques du problème sont vérifiées, à savoir la condition que les courbes C soient planes et situées dans des plans parallèles aux plans tangents à l'indicatrice, et la condition (15) liant les éléments linéaires de l'indicatrice aux éléments normaux aux surfaces $\lambda = \text{const.}$ et $\mu = \text{const.}$ de la congruence.

Donnons-nous arbitrairement l'indicatrice I , le plan variable $\varepsilon = \psi(\lambda, \mu)$ de la courbe C et la fonction $\Omega(\lambda, \mu)$, la condition nécessaire et suffisante du problème sera que les fonctions ψ_1 et ψ_2 de λ , μ , ν , lesquelles ne sont autres que les coordonnées x et y de la courbe C rapportée aux axes mobiles, vérifient l'équation (65). Ainsi la courbe C est une conique.

14. Plaçons-nous d'abord dans l'hypothèse où l'indicatrice I n'est pas développable. Cherchons le point de contact du plan $\varepsilon = \psi(\lambda, \mu)$ avec son enveloppe, lorsque λ et μ varient. A cet effet, écrivons la composante D_z suivant l'axe des z du trièdre mobile du déplacement

subi par un point de coordonnées relatives x, y, z variable avec λ et μ ,

$$D_z = \left(p_1 y - q_1 x + \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right) d\lambda + \left(p_2 y - q_2 x + \frac{\partial z}{\partial \mu} \right) d\mu.$$

Faisons-y $z = \psi$, et exprimons que le déplacement D_z est nul, quels que soient $d\lambda$ et $d\mu$, on aura deux équations qui définiront les coordonnées x et y du point de contact M, à savoir

$$p_1 y - q_1 x + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0,$$

$$p_2 y - q_2 x + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0.$$

Comme I n'est pas développable, $p_1 q_2 - q_1 p_2$ est différente de zéro et M est déterminé.

Si l'on tient compte de la première des équations (54), on voit que les équations précédentes sont celles qui déterminent les coordonnées x et y du centre de la conique (65). Ainsi, *le centre de la conique coïncide avec le point de contact du plan $z = \psi$ avec son enveloppe*, que nous appellerons Σ .

Écrivons l'équation différentielle des asymptotiques de l'indicatrice I

$$A q_1 d\lambda^2 + (A q_2 - C p_1) d\lambda d\mu - C p_2 d\mu^2 = 0.$$

Comme

$$ds \cos \omega = A d\lambda, \quad ds \sin \omega = C d\mu;$$

ω désignant l'angle que fait la tangente à une ligne tracée sur la surface avec l'axe Mx , on voit que $d\lambda$ et $d\mu$ sont proportionnelles à $\frac{\cos \omega}{A}$ et $\frac{\sin \omega}{C}$ et que les angles qui définissent les tangentes asymptotiques sont donnés par l'équation

$$A p^2 \sin^2 \omega + 2 C p_1 \sin \omega \cos \omega - C q_1 \cos^2 \omega = 0.$$

Nous trouvons l'équation qui fournit les directions asymptotiques de la conique (65). Ainsi, *les coniques que l'on obtient en faisant varier Ω ont des asymptotes parallèles aux directions asymptotiques de la surface I au point où le plan tangent est parallèle au plan de la conique*.

Concluons donc : *Dans le cas où l'indicatrice des vitesses est une surface non développable, on obtiendra un fluide sans accélération de la manière suivante. On considérera deux surfaces I et Σ entre lesquelles on*

établira une correspondance par plans tangents parallèles. A tout point M de I correspondra ainsi un point M' de Σ . Dans le plan tangent à Σ en M', on tracera une conique C, admettant pour asymptotes les parallèles menées par M' aux directions asymptotiques de I en M. Les coniques C, qui formeront ainsi une congruence G, seront les lieux des particules qui se comportent comme des lignes rigides du fluide. Les particules qui se trouvent sur la conique C définie dans le plan tangent à Σ en M' devront être animées d'une même vitesse, égale au segment ayant pour origine un point fixe O, le même pour toutes les coniques, et pour extrémité le point M de I qui correspond à M'.

Supposons que, partout, on réduise C à ses asymptotes, dans l'hypothèse où celles-ci sont réelles, c'est-à-dire, où l'indicatrice I est à courbures opposées; les fils rigides seront alors des droites. Nous aurons deux solutions distinctes, suivant que nous considérerons les tangentes en M' à Σ , parallèles aux tangentes aux asymptotiques de la première ou de la seconde famille, ainsi que nous l'avions prévu au Chapitre I. Nous retrouvons comme cas particulier une solution que nous avons examinée par la première méthode. Là, le problème dépendait de l'intégration d'équations de Monge et d'Ampère, ici, il dépend de la détermination des asymptotiques d'une surface.

Désirons-nous que les fils rigides du fluide soient partout des cercles? Les directions asymptotiques de l'indicatrice devront être des droites isotropes. Par suite, l'indicatrice sera une sphère.

Si l'on veut que les fils rigides soient partout des hyperboles équilatères, les directions asymptotiques de I devront être rectangulaires et la surface I-sera une surface minima.

Proposons encore que les fils rigides soient des ellipses ou des hyperboles semblables, les lignes asymptotiques de l'indicatrice devront se couper sous un angle constant.

D'une façon générale, si les axes des coniques rigides sont fonctions l'un de l'autre, l'indicatrice sera une surface de Weingarten.

15. Comment le fluide se comporte-t-il si l'indicatrice des vitesses est une surface développable ne se réduisant pas à un plan? Pour répondre à cette question, traçons sur la surface les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes.

Le long de ces trajectoires, nous admettrons que μ varie seul, tandis que nous prendrons pour λ , l'abscisse, comptée sur chaque génératrice rectiligne à partir d'une même trajectoire orthogonale. Les rotations p , q , r seront nulles et A sera égale à l'unité. Les formules (54) de Codazzi nous apprendront que q_2 est nulle et qu'en outre

$$p_2 = m_1, \quad r_2 = m_2, \quad C = m_2\lambda + m_3,$$

m_1 , m_2 , m_3 désignant trois fonctions de μ .

Utilisons les formules qui font connaître les composantes suivant les axes mobiles d'un déplacement résultant de la variation de μ seulement. Nous trouverons que la caractéristique du plan $y = 0$ a pour équations

$$(66) \quad y = 0, \quad m_2x - m_1z + m_2\lambda + m_3 = 0.$$

Les mêmes formules nous apprennent que la caractéristique du plan $z = \psi$ a pour équations

$$(67) \quad z = \psi, \quad m_1y + \frac{\partial\psi}{\partial\mu} = 0.$$

Ceci établi, écrivons l'équation de la projection d'un fil rigide sur le plan des xy , en introduisant dans l'équation (65) les valeurs actuelles des rotations et translations, et en appelant x et y les coordonnées courantes, il viendra

$$m_1y^2 + 2\frac{\partial\psi}{\partial\mu}y + 2(m_2\lambda + m_3)\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}x = \Omega(\lambda, \mu).$$

La surface développable ne se réduisant pas à un plan, m_1 est différente de zéro, et l'équation précédente prend la forme

$$(68) \quad \left(y + \frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right)^2 + 2\frac{m_2\lambda + m_3}{m_1}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}x = \chi(\lambda, \mu),$$

dans laquelle χ représente une fonction quelconque de λ et de μ . Nous voyons que le fil rigide est une parabole $z = \psi$, ayant pour axe la caractéristique (67) de ce plan.

Si, dans (68), nous faisons $\chi = 0$, la parabole sera tangente au plan des yz et aura pour directrice la droite $x = \frac{m_2\lambda + m_3}{2m_1}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$, $z = \psi$.

Le mouvement du fluide s'obtiendra donc de la manière suivante. Soient une surface développable I et une surface quelconque S . A tout point M de I faisons correspondre le point M' d'intersection de la normale en M à I avec S . Considérons une génératrice rectiligne g de I . Par g menons le plan ω perpendiculaire à I ; lorsque l'on passe de la génératrice g à la génératrice infiniment voisine, ω a pour caractéristique une droite g' , qui coupe MM' en N ; tandis que le plan Π mené par M' parallèlement au plan tangent a une caractéristique Δ . D'autre part, ω coupe S suivant une courbe qui admet la tangente $M'T'$. Par le milieu N' du segment MN , menons un plan perpendiculaire à $M'T'$ et coupant le plan tangent suivant une droite d' . Cela étant, considérons dans le plan Π la parabole tangente au plan normal à g en M , ayant pour axe la droite Δ et pour directrice la droite d qui se projette suivant d' , ainsi que celles qui s'en déduisent par une translation parallèlement à Δ . A chaque point de I , faisons correspondre une de ces paraboles, C par exemple. Les paraboles C ainsi choisies seront les fils rigides du fluide et la vitesse dont une de ces paraboles est animée est égale au segment ayant pour origine un point fixe O et pour extrémité le point M de l'indicatrice I auquel C est attachée.

Si $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0$, la parabole dégénère, ainsi que le montre l'équation (68), et devient une droite ayant pour équations

$$z = m, \quad y = \chi_1(\lambda, \mu),$$

m désignant une fonction quelconque de μ et χ une fonction quelconque de λ et de μ . L'indicatrice I sera encore une surface développable quelconque. A chaque génératrice rectiligne, on fait correspondre un plan parallèle au plan tangent à I le long de cette génératrice. Les droites menées dans ces plans parallèles, parallèlement aux génératrices correspondantes, sont les fils rigides du mouvement.

On dira encore, et d'une manière plus précise : *Considérons deux surfaces développables de même cône directeur. Choisissons l'une d'elles, I , pour indicatrice des vitesses. Menons dans chaque plan tangent de l'autre surface S des droites parallèles à la génératrice de contact : ce seront les fils rigides. Pour obtenir la vitesse de l'un d'eux, on détermi-*

nera la génératrice g de I qui correspond parallèlement au fil considéré, et l'on établira une correspondance entre les points de g et les droites parallèles situées dans le plan tangent à S le long de la génératrice g' parallèle à g . La vitesse cherchée est égale au segment allant d'un point fixe O au point de g qui correspond au fil en question.

Nous retrouvons la solution à laquelle nous étions parvenus au numéro 10.

16. Il nous reste, en terminant, à examiner le cas où l'indicatrice I est un plan. Nous choisirons dans I un système de deux axes de coordonnées rectangulaires $O_1\lambda$ et $O_1\mu$, et nous attacherons le trièdre au réseau formé par les droites de I parallèles à ces axes. Les rotations seront nulles et les translations A et C seront égales à l'unité. L'équation de condition (65) s'écrira, en désignant par x et y les coordonnées ψ_1 et ψ_2 ,

$$(69) \quad \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}x + \frac{\partial\psi}{\partial\mu}y = \frac{\Omega(\lambda, \mu)}{2}.$$

Les fils rigides seront des droites ayant pour équations, l'équation précédente jointe à la suivante, $z = \psi$.

Imaginons la surface Σ obtenue en portant sur Mz , à partir de M , un segment $MM' = \psi$. Le plan tangent à Σ en M' a pour équation

$$z - \psi = \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}x + \frac{\partial\psi}{\partial\mu}y.$$

L'équation (69) nous montre que les fils rigides sont les droites du plan $z = \psi$ qui sont parallèles à l'intersection de ce plan avec le plan tangent à Σ en M' .

Le mouvement du fluide s'effectue donc de la façon suivante. *Choisissons une surface quelconque Σ et un plan quelconque ϖ . A chaque point M de ϖ faisons correspondre le point M' de Σ situé sur la normale à ϖ issue de M . Traçons le plan tangent à Σ en M' et déterminons son intersection avec le plan mené par M' parallèlement à ϖ . Dans ce plan considérons une parallèle quelconque à cette intersection. Toutes les droites obtenues de la sorte, supposées plongées dans le fluide à l'instant initial constituent les lieux des particules animées de la même vitesse. La vitesse commune aux particules situées sur une même droite est égale*

au segment ayant pour origine un point fixe O et pour extrémité le point M d'où l'on est parti pour la définir. Il va de soi que les droites choisies doivent se suivre d'une manière continue.

17. Si l'on compare la solution que nous venons d'obtenir à celle que nous avons donnée au numéro 4, il semblera qu'elles soient bien différentes, particulièrement dans la manière de déterminer la vitesse. Pourtant elles sont équivalentes.

Pour bien le voir, rapportons le fil rigide à un trièdre rectangulaire fixe, dont l'origine O se trouve sur la droite menée par O_1 perpendiculairement à ϖ , et dont les axes Oa et Ob sont parallèles à $O_1\lambda$, $O_1\mu$. Appelons z_0 la cote de O_1 . Le fil rigide aura pour équations, a , b , c désignant les coordonnées courantes,

$$(70) \quad \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} (a - \lambda) + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} (b - \mu) = \frac{\Omega(\lambda, \mu)}{2}, \\ c = z_0 + \psi. \end{cases}$$

Posons

$$(71) \quad \frac{\Omega}{2} = - \left(\lambda + \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \left(\mu - \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \mu},$$

σ étant, tout comme Ω , une fonction quelconque de λ et de μ . La première des équations (70) s'écrira

$$(72) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} a + \frac{\partial \psi}{\partial \mu} b + \frac{\partial \sigma}{\partial \mu} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} - \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0.$$

Or c étant regardé comme un paramètre auquel nous donnerons une valeur constante quelconque, on déduit de la seconde équation (70) liant λ et μ pour la valeur c du paramètre

$$\frac{d\psi}{d\lambda} d\lambda + \frac{d\psi}{d\mu} d\mu = 0.$$

Dans (72) remplaçons $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$ et $\frac{\partial \psi}{\partial \mu}$ par les différentielles $d\mu$ et $-d\lambda$, qui leur sont proportionnelles, elle prendra la forme

$$(73) \quad a d\mu - b d\lambda + d\sigma = 0.$$

Cela étant, considérons l'infinité simple de plans

$$(74) \quad z = -\mu a + \lambda b - \sigma(\lambda, \mu),$$

où a, b, z sont les coordonnées courantes et où λ et μ sont liés par la seconde des équations (70), dans laquelle z_0 est une constante et c un paramètre auquel on donne une valeur constante. La caractéristique du plan (74) s'obtiendra en adjoignant à l'équation (74), l'équation (73) ou mieux (72). La surface développable, enveloppe des plans (74), aura pour équation

$$z = \varphi(a, b, c),$$

obtenue en éliminant λ, μ entre les équations (74), (72) et la deuxième des équations (70). Nous obtiendrons ainsi une famille de surfaces développables dépendant d'un paramètre. Cette famille sera d'ailleurs quelconque, puisque ψ et σ sont des fonctions quelconques de λ et de μ . La projection d'une génératrice rectiligne sur le plan de cote c aura pour équations, les équations $z = c$ et (72), où λ et μ auront des valeurs constantes liées par la seconde équation (70). Ainsi les fils rigides s'obtiennent comme au numéro 4.

D'ailleurs, on trouve, en vertu de (74) et (73)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= -\mu - \left(a + \frac{\partial \sigma}{\partial \mu}\right) \frac{\partial \mu}{\partial a} + \left(b - \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial a} = -\mu, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} &= \lambda - \left(a + \frac{\partial \sigma}{\partial \mu}\right) \frac{\partial \mu}{\partial b} + \left(b - \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial b} = \lambda. \end{aligned}$$

Nous avons vu que la vitesse du fil rigide (70) s'obtient en joignant O au point M de coordonnées λ, μ, z_0 ; ses composantes f_1, f_2, f_3 suivant les axes de coordonnées sont donc

$$\begin{aligned} f_1 &= \lambda = \frac{\partial \varphi}{\partial b}, \\ f_2 &= \mu = -\frac{\partial \varphi}{\partial a}, \\ f_3 &= z_0. \end{aligned}$$

Ce sont bien les composantes de la vitesse, que nous avons obtenues au numéro 4.