ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ED. COMBESCURE

Les formes algébriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 1 (1864), p. 269-283
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1864_1_1__269_0>

APERÇU ÉLÉMENTAIRE

SUR

LES FORMES ALGÉBRIQUES,

PAR M. ED. COMBESCURE,

PROFESSEUR AU LYCÉE DE SAINT-ÉTIENNE.

§ I. — *Conditions générales de l'invariabilité des fonctions.*

Soient $a, b, c, \ldots, k, l$ un nombre quelconque de variables indépendantes, et $a', b', c', \ldots, k', l'$ un nombre égal de variables qui en dépendent par les équations du premier degré

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} a' = \alpha a + \beta b + \gamma c + \ldots + \lambda l, \\ b' = \alpha' a + \beta' b + \gamma' c + \ldots + \lambda' l, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ l' = \alpha^{(i)} a + \beta^{(i)} b + \gamma^{(i)} c + \ldots + \lambda^{(i)} l. \end{array}\right.$$

Soit, en même temps, $f(a, b, c, \ldots, k, l)$ une fonction quelconque des variables $a, b, c, \ldots$, et $f(a', b', c', \ldots, k', l')$ ce que devient cette fonction quand on y remplace $a, b, c, \ldots$ respectivement par les seconds membres des égalités (1). Si l'on pose

$$(2)\qquad f(a', b', c', \ldots) = \mathrm{R} f(a, b, c, \ldots),$$

où R ne dépend que des éléments $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, de la substitution (1), on peut se proposer : 1° de trouver comment il faut prendre ces éléments pour que la fonction f, supposée donnée, se transforme en elle-même, au facteur R près, conformément à la condition (2) ; 2° les éléments $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant supposés des fonctions connues d'un certain nombre de paramètres indépendants, on peut chercher quelles sont les fonctions f qui jouissent de la propriété de se transformer en elles-mêmes, conformément à la condition (2). Ces fonctions sont alors des *invariants* relativement à la substitution adoptée.

Au lieu de la seule fonction f, on peut en prendre plusieurs $f, g, h, \ldots$, et, ayant déterminé un nombre égal de fonctions $f', g', h', \ldots$, par les équations linéaires

$$(3)\qquad \begin{cases} f' = \mathrm{A}f + \mathrm{B}g + \mathrm{C}h + \ldots, \\ g' = \mathrm{A}'f + \mathrm{B}'g + \mathrm{C}'h + \ldots, \\ h' = \mathrm{A}''f + \mathrm{B}''g + \mathrm{C}''h + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où A, B, C,... dépendent uniquement des mêmes paramètres arbitraires que les éléments de la substitution (1), on peut exiger que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned} \mathrm{R}f' &= f(a', b', c', \ldots), \\ \mathrm{S}g' &= g(a', b', c', \ldots), \\ \mathrm{T}h' &= h(a', b', c', \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad \begin{cases} f(a', b', c', \ldots) = \mathrm{R}(\mathrm{A}f + \mathrm{B}g + \mathrm{C}h + \ldots), \\ g(a', b', c', \ldots) = \mathrm{S}(\mathrm{A}'f + \mathrm{B}'g + \mathrm{C}'h + \ldots), \\ h(a', b', c', \ldots) = \mathrm{T}(\mathrm{A}''f + \mathrm{B}''g + \mathrm{C}''h + \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

R, S, T, ... dépendant uniquement des paramètres indépendants.

Si les fonctions f, g, h, ... sont données, on peut se proposer de trouver la loi des substitutions (1) et (3), de telle façon que les équations (4) soient satisfaites pour toutes les valeurs des variables a, b, c, ...; et l'on rentre alors dans une extension de la transformation des formes données en elles-mêmes.

Si, au contraire, les substitutions (1) et (3) sont réglées d'avance, de sorte que les éléments α, β, γ, ..., A, B, C, ... dépendent, d'une manière déterminée, de certains paramètres indépendants, les conditions (4) correspondent aux formes que l'on nomme *covariants*, *formes adjointes* ou *contrevariants*, *etc.*, ainsi que cela sera spécifié plus loin. Dans tous les cas il est utile de connaître la variation que subit chaque fonction $f(a', b', c', \ldots)$, $g(a', b', c', \ldots)$, lorsque les paramètres indépendants reçoivent des accroissements infiniment petits arbitraires.

Je vais considérer d'abord le cas d'une seule fonction. En désignant par δ les différentielles prises par rapport aux paramètres arbitraires et à tout ce qui en dépend, on a généralement

$$\delta \cdot f(a', b', c', \ldots) = \frac{df}{da'}\,\delta a' + \frac{df}{db'}\,\delta b' + \frac{df}{dc'}\,\delta c' + \ldots.$$

Mais en substituant les variables a, b, c, ... aux variables a', b', c', ... d'après les relations (1), on a

$$\frac{df}{da} = \frac{df}{da'}\frac{da'}{da} + \frac{df}{db'}\frac{db'}{da} + \frac{df}{dc'}\frac{dc'}{da} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\frac{df}{da}=\frac{df}{da'}\alpha+\frac{df}{db'}\alpha'+\frac{df}{dc'}\alpha''+\ldots,$$

et aussi

$$\frac{df}{db}=\frac{df}{da'}\beta+\frac{df}{db'}\beta'+\frac{df}{dc'}\beta''+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on désigne par $\mathfrak{R}$ le déterminant de la substitution (1), de façon que

$$\mathfrak{R}=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \ldots\\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\end{vmatrix},$$

et qu'on ait égard aux identités connues

$$\alpha\frac{d\mathfrak{R}}{d\alpha}+\beta\frac{d\mathfrak{R}}{d\beta}+\gamma\frac{d\mathfrak{R}}{d\gamma}+\ldots=\mathfrak{R},$$
$$\alpha'\frac{d\mathfrak{R}}{d\alpha}+\beta'\frac{d\mathfrak{R}}{d\beta}+\gamma'\frac{d\mathfrak{R}}{d\gamma}+\ldots=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on déduit des équations précédentes

$$\mathfrak{R}\frac{df}{da'}=\frac{d\mathfrak{R}}{d\alpha}\frac{df}{da}+\frac{d\mathfrak{R}}{d\beta}\frac{df}{db}+\frac{d\mathfrak{R}}{d\gamma}\frac{df}{dc}+\ldots,$$
$$\mathfrak{R}\frac{df}{db'}=\frac{d\mathfrak{R}}{d\alpha'}\frac{df}{da}+\frac{d\mathfrak{R}}{d\beta'}\frac{df}{db}+\frac{d\mathfrak{R}}{d\gamma'}\frac{df}{dc}+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a donc pour la variation cherchée

$$\delta.f(a',b',c',\ldots)=\frac{1}{\mathfrak{R}}\left(\frac{d\mathfrak{R}}{d\alpha}\frac{df}{da}+\frac{d\mathfrak{R}}{d\beta}\frac{df}{db}+\ldots\right)\delta a'+\frac{1}{\mathfrak{R}}\left(\frac{d\mathfrak{R}}{d\alpha'}\frac{df}{da}+\frac{d\mathfrak{R}}{d\beta'}\frac{df}{db}+\ldots\right)\delta b'+\ldots;$$

et comme, d'après (1),

$$\delta a'=a\delta\alpha+b\delta\beta+\ldots,$$
$$\delta b'=a\delta\alpha'+b\delta\beta'+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on aura la variation de $f(a',b',c',\ldots)$ exprimée par les variables primitives a, b, c, ... et les éléments de la substitution (1). Maintenant, par la condition (2) on a

$$\delta.f(a',b',c',\ldots)=f(a,b,c,\ldots)\delta\mathrm{R},$$

et en égalant cette nouvelle expression de la variation à la précédente, l'équation qu'on obtiendra sera précisément la condition nécessaire et suffisante pour l'invariabilité de la fonction f. Mais cette équation devant subsister pour toutes les valeurs des paramètres indépendants et des variables, aussi indépendantes, $a, b, c, \ldots$, se partagera en plusieurs autres qu'il sera facile de former quand le but qu'on se propose sera bien défini.

Dans le cas de plusieurs fonctions $f(a, b, c, \ldots)$, on formera comme ci-dessus une première expression de leur variation, et, comme les conditions (4) fournissent tout de suite une autre expression de ces mêmes variations, en les égalant respectivement on aura autant d'équations qu'il y a de conditions ou de fonctions $f, g, h, \ldots$; chacune d'elles se partagera en autant d'autres qu'il restera de variations arbitraires, etc.

§ II. — *Des lois qui régissent habituellement les substitutions employées.*

Les variables désignées précédemment par $a, b, c, \ldots$ sont ordinairement les *coefficients* d'une ou plusieurs formes algébriques données $F(x, y, z, \ldots)$, $F_1(x, y, z, \ldots)$, aux variables principales $x, y, z, \ldots$. On fait subir à ces variables une substitution linéaire dont les éléments sont ici les paramètres indépendants dont il a été question dans le précédent paragraphe. Par là les coefficients $a, b, c, \ldots$ se transforment en d'autres $a', b', c', \ldots$, liés aux premiers par les relations (1) où il faut maintenant entendre que les éléments $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont déterminés en fonctions des *paramètres indépendants* par le fait de la substitution qui a affecté $x, y, z, \ldots$. Une chose à peu près semblable a lieu pour les quantités $A, B, C, \ldots, R$.

A la substitution primitive qui reste toujours indépendante, on associe ordinairement une substitution spéciale que Gauss a nommée *adjointe* à la première, et dont les éléments dépendent, d'une manière qui sera spécifiée, de ceux de la première. Ces deux genres de substitutions, affectant les $x, y, z, \ldots$, donnent naissance à plusieurs espèces de formes, suivant qu'on les applique, séparément ou conjointement, d'une manière qui sera indiquée plus loin. Ce sont ces substitutions primitives qui régissent alors les substitutions (1) et (3) du précédent paragraphe, en faisant connaître le mode de formation des éléments $\alpha, \beta, \ldots, A, B, \ldots, R$, en fonctions des paramètres arbitraires.

Lorsqu'une fonction $F(x, y, z, \ldots)$ de variables indépendantes, que je supposerai au nombre de trois pour fixer les idées, est soumise à la substitution linéaire

$$\text{(I)} \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \xi\, x' + \eta\, y' + \zeta\, z', \\ y &= \xi'\, x' + \eta'\, y' + \zeta'\, z', \\ z &= \xi''\, x' + \eta''\, y' + \zeta''\, z', \end{aligned} \right.$$

dont les éléments $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sont des paramètres tout à fait indépendants, il existe pour la transformée $F'(x', y', z', \ldots)$ certaines relations différentielles qui sont identiques et fournissent un nouveau moyen d'arriver plus symétriquement à la détermination des covariants, des formes adjointes, etc., qui vont faire bientôt l'objet unique du présent écrit.

On a

$$\frac{dF'}{d\xi} = \frac{dF}{dx}x', \quad \frac{dF'}{d\xi'} = \frac{dF}{dy}x', \quad \frac{dF'}{d\xi''} = \frac{dF}{dz}x';$$

d'où

$$\xi\frac{dF'}{d\xi} + \xi'\frac{dF'}{d\xi'} + \xi''\frac{dF'}{d\xi''} = x'\left(\xi\frac{dF}{dx} + \xi'\frac{dF}{dy} + \xi''\frac{dF}{dz}\right),$$
$$\eta\frac{dF'}{d\xi} + \eta'\frac{dF'}{d\xi'} + \eta''\frac{dF'}{d\xi''} = x'\left(\eta\frac{dF}{dx} + \eta'\frac{dF}{dy} + \eta''\frac{dF}{dz}\right);$$

mais si l'on considère F comme dépendant de x', y', z' d'après les relations (I), la première parenthèse revient à $\frac{dF'}{dx'}$ et la seconde à $\frac{dF'}{dy'}$. Donc, en posant, pour abréger,

$$\begin{pmatrix}\xi\\\xi\end{pmatrix} = \xi\frac{d}{d\xi} + \xi'\frac{d}{d\xi'} + \xi''\frac{d}{d\xi''},$$
$$\begin{pmatrix}\eta\\\xi\end{pmatrix} = \eta\frac{d}{d\xi} + \eta'\frac{d}{d\xi'} + \eta''\frac{d}{d\xi''},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on aura, pour toute transformée par la substitution (I), les relations identiques

$$(a)\quad\left\{\begin{array}{lll}
\begin{pmatrix}\xi\\\xi\end{pmatrix} = x'\dfrac{d}{dx'}, & \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = y'\dfrac{d}{dx'}, & \begin{pmatrix}\xi\\\zeta\end{pmatrix} = z'\dfrac{d}{dx'},\\
\begin{pmatrix}\eta\\\xi\end{pmatrix} = x'\dfrac{d}{dy'}, & \begin{pmatrix}\eta\\\eta\end{pmatrix} = y'\dfrac{d}{dy'}, & \begin{pmatrix}\eta\\\zeta\end{pmatrix} = z'\dfrac{d}{dy'},\\
\begin{pmatrix}\zeta\\\xi\end{pmatrix} = x'\dfrac{d}{dz'}, & \begin{pmatrix}\zeta\\\eta\end{pmatrix} = y'\dfrac{d}{dz'}, & \begin{pmatrix}\zeta\\\zeta\end{pmatrix} = z'\dfrac{d}{dz'}.
\end{array}\right.$$

Considérons maintenant la substitution *adjointe* à (I), savoir

$$(\mathrm{II})\quad\left\{\begin{array}{l}
x = \dfrac{d\Delta}{d\xi}x' + \dfrac{d\Delta}{d\eta}y' + \dfrac{d\Delta}{d\zeta}z',\\
y = \dfrac{d\Delta}{d\xi'}x' + \dfrac{d\Delta}{d\eta'}y' + \dfrac{d\Delta}{d\zeta'}z',\\
z = \dfrac{d\Delta}{d\xi''}x' + \dfrac{d\Delta}{d\eta''}y' + \dfrac{d\Delta}{d\zeta''}z',
\end{array}\right.$$

où

$$\Delta = \begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi' & \eta' & \zeta'\\ \xi'' & \eta'' & \zeta''\end{vmatrix}.$$

On en déduit

$$\xi \frac{dx}{d\xi} + \xi' \frac{dx}{d\xi'} + \xi'' \frac{dx}{d\xi''} = \left\{ \begin{aligned} &+ x' \left(\xi \frac{d^2\Delta}{d\xi^2} + \xi' \frac{d^2\Delta}{d\xi\, d\xi'} + \xi'' \frac{d^2\Delta}{d\xi\, d\xi''} \right) \\ &+ y' \left(\xi \frac{d^2\Delta}{d\xi\, d\eta} + \xi' \frac{d^2\Delta}{d\xi'\, d\eta} + \xi'' \frac{d^2\Delta}{d\xi''\, d\eta} \right) \\ &+ z' \left(\xi \frac{d^2\Delta}{d\xi\, d\zeta} + \xi' \frac{d^2\Delta}{d\xi'\, d\zeta} + \xi'' \frac{d^2\Delta}{d\xi''\, d\zeta} \right). \end{aligned} \right.$$

Mais en différentiant, par rapport à ξ, η, ζ séparément, la relation identique

$$\xi \frac{d\Delta}{d\xi} + \xi' \frac{d\Delta}{d\xi'} + \xi'' \frac{d\Delta}{d\xi''} = \Delta,$$

on voit que les parenthèses se réduisent respectivement à

$$o, \quad \frac{d\Delta}{d\eta}, \quad \frac{d\Delta}{d\zeta}.$$

Ainsi,

$$(\alpha) \quad \left\{ \begin{aligned} &\xi \frac{dx}{d\xi} + \xi' \frac{dx}{d\xi'} + \xi'' \frac{dx}{d\xi''} = y' \frac{d\Delta}{d\eta} + z' \frac{d\Delta}{d\zeta}; \\ &\text{et de même,} \\ &\xi \frac{dy}{d\xi} + \xi' \frac{dy}{d\xi'} + \xi'' \frac{dy}{d\xi''} = y' \frac{d\Delta}{d\xi'} + z' \frac{d\Delta}{d\zeta'}, \\ &\xi \frac{dz}{d\xi} + \xi' \frac{dz}{d\xi'} + \xi'' \frac{dz}{d\xi''} = y' \frac{d\Delta}{d\eta''} + z' \frac{d\Delta}{d\zeta''}. \end{aligned} \right.$$

Ensuite

$$\eta \frac{dx}{d\xi} + \eta' \frac{dx}{d\xi'} + \eta'' \frac{dx}{d\xi''} = \left\{ \begin{aligned} &+ x' \left(\eta \frac{d^2\Delta}{d\xi^2} + \eta' \frac{d^2\Delta}{d\xi\, d\xi'} + \eta'' \frac{d^2\Delta}{d\xi\, d\xi''} \right) \\ &+ y' \left(\eta \frac{d^2\Delta}{d\xi\, d\eta} + \eta' \frac{d^2\Delta}{d\xi'\, d\eta} + \eta'' \frac{d^2\Delta}{d\xi''\, d\eta} \right) \\ &+ z' \left(\eta \frac{d^2\Delta}{d\xi\, d\zeta} + \eta' \frac{d^2\Delta}{d\xi'\, d\zeta} + \eta'' \frac{d^2\Delta}{d\xi''\, d\zeta} \right). \end{aligned} \right.$$

Or, en différentiant successivement par rapport à ξ, η, ζ la relation

$$\eta \frac{d\Delta}{d\xi} + \eta' \frac{d\Delta}{d\xi'} + \eta'' \frac{d\Delta}{d\xi''} = o,$$

on voit que les parenthèses se réduisent respectivement à

$$o, \quad -\frac{d\Delta}{d\zeta}, \quad o.$$

Ainsi,

$$(\beta)\quad \begin{cases} \eta\dfrac{dx}{d\xi}+\eta'\dfrac{dx}{d\xi'}+\eta''\dfrac{dx}{d\xi''}=-y'\dfrac{d\Delta}{d\xi}; \\ \text{de même,} \\ \eta\dfrac{dy}{d\xi}+\eta'\dfrac{dy}{d\xi'}+\eta''\dfrac{dy}{d\xi''}=-y'\dfrac{d\Delta}{d\xi'}, \\ \eta\dfrac{dz}{d\xi}+\eta'\dfrac{dz}{d\xi'}+\eta''\dfrac{dz}{d\xi''}=-y'\dfrac{d\Delta}{d\xi''}. \end{cases}$$

Maintenant, si l'on désigne par $F''(x', y', z')$ la transformée de F par la substitution (II), on aura

$$\xi\frac{dF''}{d\xi}+\xi'\frac{dF''}{d\xi'}+\xi''\frac{dF''}{d\xi''}=\begin{cases} +\dfrac{dF}{dx}\left(\xi\dfrac{dx}{d\xi}+\xi'\dfrac{dx}{d\xi'}+\xi''\dfrac{dx}{d\xi''}\right) \\ +\dfrac{dF}{dy}\left(\xi\dfrac{dy}{d\xi}+\xi'\dfrac{dy}{d\xi'}+\xi''\dfrac{dy}{d\xi''}\right) \\ +\dfrac{dF}{dz}\left(\xi\dfrac{dz}{d\xi}+\xi'\dfrac{dz}{d\xi'}+\xi''\dfrac{dz}{d\xi''}\right). \end{cases}$$

Le second membre, en vertu de (α), peut s'écrire

$$y'\left(\frac{dF}{dx}\frac{d\Delta}{d\eta}+\frac{dF}{dy}\frac{d\Delta}{d\eta'}+\frac{dF}{dz}\frac{d\Delta}{d\eta''}\right)+z'\left(\frac{dF}{dx}\frac{d\Delta}{d\zeta}+\frac{dF}{dy}\frac{d\Delta}{d\zeta'}+\frac{dF}{dz}\frac{d\Delta}{d\zeta''}\right);$$

or les deux parenthèses sont précisément les dérivées $\frac{dF''}{dy'}$, $\frac{dF''}{dz'}$, qu'on tirerait des relations (II) en considérant F comme dépendant médiatement de x', y', z'. Donc

$$(\alpha')\qquad \xi\frac{dF''}{d\xi}+\xi'\frac{dF''}{d\xi'}+\xi''\frac{dF''}{d\xi''}=y'\frac{dF''}{dy'}+z'\frac{dF''}{dz'}.$$

Puis

$$\eta\frac{dF''}{d\xi}+\eta'\frac{dF''}{d\xi'}+\eta''\frac{dF''}{d\xi''}=\begin{cases} +\dfrac{dF}{dx}\left(\eta\dfrac{dx}{d\xi}+\eta'\dfrac{dx}{d\xi'}+\eta''\dfrac{dx}{d\xi''}\right) \\ +\dfrac{dF}{dy}\left(\eta\dfrac{dy}{d\xi}+\eta'\dfrac{dy}{d\xi'}+\eta''\dfrac{dy}{d\xi''}\right) \\ +\dfrac{dF}{dz}\left(\eta\dfrac{dz}{d\xi}+\eta'\dfrac{dz}{d\xi'}+\eta''\dfrac{dz}{d\xi''}\right). \end{cases}$$

Le second membre, en vertu de (β), revient à

$$-y'\left(\frac{dF}{dx}\frac{d\Delta}{d\xi}+\frac{dF}{dy}\frac{d\Delta}{d\xi'}+\frac{dF}{dz}\frac{d\Delta}{d\xi''}\right);$$

mais, comme précédemment, les relations (II) fournissent

$$\frac{dF''}{dx'}=\frac{dF}{dx}\frac{dx}{dx'}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx'}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dx'},$$

c'est-à-dire la parenthèse ci-dessus. Ainsi,

$$(\beta') \qquad \eta \frac{dF''}{d\xi} + \eta' \frac{dF''}{d\xi'} + \eta'' \frac{dF''}{d\xi''} = -y' \frac{dF''}{dx'}.$$

Si l'on suppose F homogène et de degré n par rapport à x, y, z, on aura

$$x' \frac{dF''}{dx'} + y' \frac{dF''}{dy'} + z' \frac{dF''}{dz'} = nF'',$$

ce qui permettra d'écrire $nF'' - x' \frac{dF''}{dx'}$ au second membre de l'égalité (α'). Dans cette même hypothèse de l'homogénéité, on aura donc le tableau suivant relatif à toute transformée $F''(x', y', z')$ par la substitution adjointe (II) :

$$(b) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \binom{\xi}{\xi} F'' = nF'' - x' \frac{dF''}{dx'}, & \binom{\xi}{\eta} F'' = -x' \frac{dF''}{dy'}, & \binom{\xi}{\zeta} F'' = -x' \frac{dF''}{dz'}, \\ \binom{\eta}{\xi} F'' = -y' \frac{dF''}{dx'}, & \binom{\eta}{\eta} F'' = nF'' - y' \frac{dF''}{dy'}, & \binom{\eta}{\zeta} F'' = -y' \frac{dF''}{dz'}. \\ \binom{\zeta}{\xi} F'' = -z' \frac{dF''}{dx'}, & \binom{\zeta}{\eta} F'' = -z' \frac{dF''}{dy'}, & \binom{\zeta}{\zeta} = nF'' - z' \frac{dF''}{dz'}. \end{array} \right.$$

On peut remarquer les relations symboliques provenant du groupe (a)

$$\binom{\eta}{\xi}\binom{\xi}{\eta} = \binom{\xi}{\xi} + x'y' \frac{d^2}{dx'\,dy'}, \ldots,$$

et par suite

$$\binom{\eta}{\xi}\binom{\xi}{\eta} - \binom{\xi}{\eta}\binom{\eta}{\xi} = \binom{\xi}{\xi} - \binom{\eta}{\eta},$$

et les analogues.

Si F′ est homogène, on a d'ailleurs

$$\binom{\xi}{\xi} + \binom{\eta}{\eta} + \binom{\zeta}{\zeta} = n;$$

d'où l'on conclut

$$3\binom{\xi}{\xi} = n + \binom{\eta}{\xi}\binom{\xi}{\eta} - \binom{\xi}{\eta}\binom{\eta}{\xi} + \binom{\zeta}{\xi}\binom{\xi}{\zeta} - \binom{\xi}{\zeta}\binom{\zeta}{\xi}.$$

Ainsi, pour une forme homogène, les opérations $\binom{\xi}{\xi}$ peuvent s'exprimer par les $\binom{\xi}{\eta}$, $\binom{\eta}{\xi}$, ...

On déduirait semblablement du groupe (b) relatif à une substitution adjointe :

$$\binom{\eta}{\xi}\binom{\xi}{\eta}-\binom{\xi}{\eta}\binom{\eta}{\xi}=\binom{\xi}{\xi}-\binom{\eta}{\eta},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$
$$3\binom{\xi}{\xi}=2n+\binom{\eta}{\xi}\binom{\xi}{\eta}-\binom{\xi}{\eta}\binom{\eta}{\xi}+\binom{\zeta}{\xi}\binom{\xi}{\zeta}-\binom{\xi}{\zeta}\binom{\zeta}{\xi}.$$

Au lieu de 3 il faudrait écrire $\varkappa$, au lieu de 2, $\varkappa-1$, si $\varkappa$ désigne généralement le nombre des variables $x, y, z, \ldots$.

Les groupes (a) et (b) conduisent tout de suite à des conditions caractéristiques pour les *invariants*, les *covariants*, les *contrevariants* et les formes *intermédiaires* ou *mixtes*. Cette méthode, si je ne me trompe, a été indiquée par Brioschi pour le cas de la substitution *directe* (I).

§ III. — *Covariants, contrevariants ou formes adjointes. — Théorèmes.*

Soient

$$\varphi=\Sigma\,\frac{1.2\ldots n}{1\ldots\lambda.1\ldots\mu.1\ldots\nu}\,a_{\lambda\mu\nu}\,x^\lambda y^\mu z^\nu,$$
$$\Phi=\Sigma\,\frac{1.2\ldots m}{1\ldots p.1\ldots q.1\ldots r}\,A_{pqr}\,x^p y^q z^r,$$
$$\Psi=\Sigma\,\frac{1.2\ldots \mathrm{m}}{1\ldots \mathrm{p}.1\ldots \mathrm{q}.1\ldots \mathrm{r}}\,\mathrm{A}_{\mathrm{pqr}}\,x^{\mathrm{p}} y^{\mathrm{q}} z^{\mathrm{r}},$$

trois formes homogènes dont la première est donnée. Soient, en outre, $a'_{\lambda\mu\nu}$, A'_{pqr}, $\mathrm{A}'_{\mathrm{pqr}}$ les *coefficients* généraux des transformées φ', Φ', Ψ'' de ces formes, les deux premières par la substitution (I), la dernière par la substitution (II). Si les coefficients de Φ et Ψ sont des fonctions $A_{pqr}(a_{\lambda\mu\nu}, a_{\lambda_1\mu_1\nu_1}, \ldots)$, $\mathrm{A}_{\mathrm{pqr}}(a_{\lambda\mu\nu}, a_{\lambda_1\mu_1\nu_1}, \ldots)$ de ceux de φ, tellement composées, que l'on ait identiquement

$$(c)\qquad\left\{\begin{array}{l}\Delta^k A'_{pqr}=A_{pqr}(a'_{\lambda\mu\nu}, a'_{\lambda_1\mu_1\nu_1}, \ldots),\\ \Delta^{\mathrm{k}}\mathrm{A}'_{\mathrm{pqr}}=\mathrm{A}_{\mathrm{pqr}}(a'_{\lambda\mu\nu}, a'_{\lambda_1\mu_1\nu_1}, \ldots).\end{array}\right.$$

k et k désignant des nombres constants : alors Φ est appelé un *covariant* et Ψ un *contrevariant* de φ.

Covariants. — Pour une forme quelconque φ', transformée par (I), on conclut tout de suite de (a)

$$\binom{\xi}{\xi}a'_{\lambda\mu\nu}=\lambda a'_{\lambda\mu\nu},\qquad\binom{\eta}{\xi}a'_{\lambda\mu\nu}=\lambda a'_{\lambda-1,\,\mu+1,\,\nu},$$

et les analogues.

Pareillement

$$\binom{\xi}{\xi} A'_{pqr} = p A'_{pqr}, \quad \binom{\eta}{\xi} A'_{pqr} = p A'_{p-1,\, q+1,\, r}, \quad \ldots.$$

Mais, à cause de la première (c),

$$\binom{\xi}{\xi} \Delta^k A'_{pqr} = \Sigma \frac{d \,.\, A_{pqr}(a'_{\lambda\mu\nu},\ a'_{\lambda_1\mu_1\nu_1},\ \ldots)}{d a'_{\lambda\mu\nu}} \binom{\xi}{\xi} a'_{\lambda\mu\nu},$$

$$\binom{\eta}{\xi} \Delta^k A'_{pqr} = \Sigma \frac{d \,.\, A_{pqr}(a'_{\lambda\mu\nu},\ a'_{\lambda_1\mu_1\nu_1},\ \ldots)}{d a'_{\lambda\mu\nu}} \binom{\xi}{\eta} a'_{\lambda\mu\nu};$$

donc, en observant que $\binom{\xi}{\xi} \Delta^k = k\Delta^k$, $\binom{\eta}{\xi} \Delta^k = 0$, éliminant les $\binom{\xi}{\xi}$, $\binom{\eta}{\xi}$ par ce qui précède immédiatement, et puis les $\Delta^k A'_{pqr}$ par la première (c), on aura

$$(d) \quad \left\{ \begin{aligned} (p+k) A_{pqr} &= \Sigma \lambda a_{\mu\lambda\nu} \frac{d \,.\, A_{pqr}}{d a_{\lambda\mu\nu}}, \\ p A_{p-1,\, q+1,\, r} &= \Sigma \lambda a_{\lambda-1,\, \mu+1,\, \nu} \frac{d \,.\, A_{pqr}}{d a_{\lambda\mu\nu}}, \end{aligned} \right.$$

où l'on a mis partout $A_{pqr}(a_{\lambda\mu\nu},\ a_{\lambda_1\mu_1\nu_1},\ \ldots)$ ou simplement A_{pqr} au lieu de $A_{pqr}(a'_{\lambda\mu\nu},\ a'_{\lambda_1\mu_1\nu_1},\ \ldots)$, et $a_{\lambda\mu\nu}$ au lieu de $a'_{\lambda\mu\nu}$, ce qui est évidemment permis.

De l'addition des trois analogues à la première (d) on tire

$$(m+3k) A_{pqr} = n \Sigma a_{\lambda\mu\nu} \frac{d A_{pqr}}{d a_{\lambda\mu\nu}} = n\theta A_{pqr},$$

en supposant A_{pqr} homogène et de degré θ. De là $k = \frac{n\theta - m}{3}$. Si de plus on suppose

$$A_{pqr} = \Sigma M a^{\alpha}_{\lambda\mu\nu} a^{\alpha_1}_{\lambda_1\mu_1\nu_1} \ldots a^{\alpha_i}_{\lambda_i\mu_i\nu_i},$$

on devra avoir, d'après la dernière (d),

$$\Sigma \alpha\lambda = k + p,$$

et les analogues. Dans ce cas le nombre k devra être entier.

De la seconde (d), en posant, pour abréger,

$$\mathrm{D}_{\lambda\mu} = \Sigma \lambda a_{\lambda-1,\, \mu+1,\, \nu} \frac{d}{d a_{\lambda\mu\nu}}, \quad \mathrm{D}_{\mu\lambda} = \Sigma \mu a_{\lambda+1,\, \mu-1,\, \nu} \frac{d}{d a_{\lambda\mu\nu}}, \quad \ldots,$$

on tire

$$A_{pqr} = \frac{\mathrm{D}^q_{\lambda\mu} \mathrm{D}^r_{\lambda\nu} A_{moo}}{m(m-1)\ldots(p+1)},$$

les exposants marquant la répétition des opérations. Le coefficient *principal* A_{moo}, d'où les autres peuvent ainsi se déduire, doit s'annuler par les opérations $D_{\mu\nu}$, $D_{\nu\mu}$, $D_{\mu\lambda}$, $D_{\nu\lambda}$, ce qui fournit un moyen de le déterminer complétement.

Contrevariants. — Pour une forme Ψ'', transformée de Ψ par la substitution (II), on conclut de (b)

$$\left(\begin{matrix}\xi\\ \xi\end{matrix}\right) A'_{pqr} = (m-p)\,A'_{pqr}, \qquad \left(\begin{matrix}\eta\\ \xi\end{matrix}\right) A'_{pqr} = -\,q\,A'_{p+1,\,q-1,\,r}.$$

On en déduit, comme précédemment,

$$(m-p+k)\,A_{pqr} = \Sigma\lambda a_{\lambda\mu\nu}\frac{dA_{pqr}}{da_{\lambda\mu\nu}}, \qquad -\,q\,A_{p+1,\,q-1,\,r} = \Sigma\lambda a_{\lambda-1,\,\mu+1,\,\nu}\frac{dA_{pqr}}{da_{\lambda\mu\nu}}.$$

De là, en appelant ω le degré de A_{pqr}, en $a_{\lambda\mu\nu}$, ..., résulte

$$m+k = \frac{n\omega+m}{3} \quad \text{et} \quad \Sigma\beta\lambda = m+k-p, \quad \text{si} \quad A_{pqr} = \Sigma M\, a_{\lambda\mu\nu}^{\beta}\, a_{\lambda_1\mu_1\nu_1}^{\beta_1}\cdots a_{\lambda_j\mu_j\nu_j}^{\beta_j};$$

enfin,

$$A_{pqr} = (-1)^{q+r}\frac{D_{\mu\lambda}^{q}D_{\nu\lambda}^{r}A_{moo}}{m(m-1)\ldots(p+1)},$$

le coefficient principal A_{moo} devant s'annuler par $D_{\mu\nu}$, $D_{\nu\mu}$, $D_{\lambda\mu}$, $D_{\lambda\nu}$: ce qui le détermine complétement.

Cas de plusieurs formes données. — Lorsque les coefficients du covariant ou du contrevariant dépendent, sous forme à groupes homogènes, de ceux de plusieurs fonctions données φ, φ_1, φ_2, ..., tout ce qu'on vient de dire subsiste évidemment en écrivant partout

$$\Sigma D_{\lambda\mu} = D_{\lambda\mu} + D_{\lambda_1\mu_1} + \ldots \quad \text{au lieu de} \quad D_{\lambda\mu},$$

et prenant

$$k = \frac{n\theta + n_1\theta_1 + \ldots - m}{\varkappa}, \qquad m+k = \frac{n\omega + n_1\omega_1 + \ldots + m}{\varkappa},$$

$\varkappa$ désignant généralement le nombre des variables x, y, z, ... Si l'on admet de plus que A_{pqr}, A_{pqr} contiennent les $a_{\lambda\mu\nu}$, $a^{(1)}_{\lambda_1\mu_1\nu_1}$, ... sous forme entière, on devra avoir

$$\Sigma\alpha\lambda + \Sigma\alpha_1\lambda_1 + \ldots = k+p, \qquad \Sigma\beta\lambda + \Sigma\beta_1\lambda_1 + \ldots = m+k-p.$$

Exemple. — Les formes ternaires d'ordre pair n admettent un contrevariant unique du second degré et d'ordre n, dont le coefficient principal a pour expression

$$A_{noo} = a_{ono}\,a_{oon} - n\,a_{o,\,n-1,\,1}\,a_{o,\,1,\,n-1} + \ldots,$$

en sorte que, abstraction faite des premiers indices, le second membre représente l'invariant quadratique binaire de M. Cayley. Il existe pareillement, pour les formes quaternaires paires d'ordre n, un contrevariant du troisième degré et d'ordre n qui peut être censé déduit d'un invariant cubique ternaire, et ainsi de suite.

Théorèmes. — En faisant attention à la modification indiciale que produit sur une forme homogène l'opération D_{ij} ou ΣD_{ij}, de sorte que, pour un covariant $D_{pq}A_{pqr} = D_{\lambda\mu}A_{pqr}$, et, pour un contrevariant, $-D_{qp}A_{pqr} = D_{\lambda\mu}A_{pqr}$, on se rend compte tout de suite des propositions qui suivent et qui se rattachent au tableau :

Systèmes partiels primitifs.	Covariants respectivement correspondants.	Contrevariants respectivement correspondants.
$\left\{\begin{array}{llll} \varphi & \varphi_1 & \ldots & \varphi_h, \\ \varphi^{(1)} & \varphi_1^{(1)} & \ldots & \varphi_{h_1}^{(1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{llll} \Phi & \Phi_1 & \ldots & \Phi_i \\ \Phi^{(1)} & \Phi_1^{(1)} & \ldots & \Phi_{i_1}^{(1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{llll} \Psi & \Psi_1 & \ldots & \Psi_j, \\ \Psi^{(1)} & \Psi_1^{(1)} & \ldots & \Psi_j^{(1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right.$

Système total primitif.

$$(\varphi)\{\varphi \quad \varphi_1 \ \ldots \ \varphi_h \quad \varphi^{(1)} \quad \varphi_1^{(1)} \ \ldots\},$$

Système covariant total regardé comme primitif.

$$(\Phi)\{\Phi \quad \Phi_1 \ \ldots \ \Phi_i \quad \Phi^{(1)} \quad \Phi_1^{(1)} \ \ldots\},$$

Système contrevariant total regardé comme primitif.

$$(\Psi)\{\Psi \quad \Psi_i \quad \Psi_j \quad \Psi^{(1)} \quad \Psi_1^{(1)} \ \ldots\},$$

où toutes les formes renferment toujours les mêmes variables $x, y, z, \ldots$, et où Φ, par exemple, est un covariant pour toutes les formes du système partiel correspondant $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_h$.

1. Tout covariant du système (Φ) est un covariant du système (φ).
2. Tout covariant du système (Ψ) est un contrevariant du système (φ).
3. Tout contrevariant du système (Φ) est un contrevariant du système (φ).
4. Tout contrevariant du système (Ψ) est un covariant du système (φ).

On ne peut manquer d'être frappé d'une certaine analogie avec la règle algébrique des signes, dans la multiplication; ce qui porterait à attribuer aux covariants un caractère en quelque sorte *positif*, aux contrevariants un caractère *négatif*, et cela avec d'autant plus de raison que, sous certaines conditions faciles à voir, les équations caractéristiques pour les contrevariants se déduisent de celles relatives aux covariants en prenant, dans celles-ci, les indices négativement.

§ IV. — *Formes mixtes.*

Soient deux groupes de formes données

$$\left\{\begin{matrix}\varphi, & \varphi_1, & \ldots, & \varphi_h, \\ (\text{coeff. } a_{\lambda\mu\nu}, & a_{\lambda_1\mu_1\nu_1}, & \ldots),\end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix}\psi, & \psi_1, & \ldots, & \psi_i, \\ (\text{coeff. } \mathrm{a}_{\mathrm{uvw}}, & \mathrm{a}_{\mathrm{u}_1\mathrm{v}_1\mathrm{w}_1}, & \ldots),\end{matrix}\right.$$

transformés en

$$\left\{\begin{matrix}\varphi', & \varphi'_1, & \ldots, & \varphi'_h, \\ \text{coeff. } (a'_{\lambda\mu\nu}, & \ldots),\end{matrix}\right. \qquad \left\{\begin{matrix}\psi', & \psi'_1, & \ldots, & \psi'_i, \\ \text{coeff. } (\mathrm{a}'_{\mathrm{uvw}}, & \ldots),\end{matrix}\right.$$

le premier par la substitution (I), le second par la substitution adjointe (II). Soit d'autre part $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{F} \\ (\text{coeff. } \mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}})\end{matrix}\right.$, transformée en $\left\{\begin{matrix}\mathfrak{F}' \\ (\text{coeff. } \mathfrak{A}'_{\mathfrak{pqr}})\end{matrix}\right.$ par la substitution (I); si la fonction $\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}}(a_{\lambda\mu\nu}, \ldots, \mathrm{a}_{\mathrm{uvw}}, \ldots)$ est tellement composée, que

$$\Delta^{\mathrm{K}} \mathfrak{A}'_{\mathfrak{pqr}} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}}(a'_{\lambda\mu\nu}, \ldots, \mathrm{a}'_{\mathrm{uvw}}, \ldots) :$$

alors $\mathfrak{F}$ est une forme *mixte*, covariant pour le système (φ) et contrevariant en même temps pour le système (ψ).

En désignant par $\mathfrak{m}$: $n, n_1, \ldots$; $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_1, \ldots$ l'ordre des formes $\mathfrak{F}$; $\varphi, \varphi_1, \ldots$; $\psi, \psi_1, \ldots$ en x, y, z; par $\theta, \theta_1, \ldots$; $\omega, \omega_1, \ldots$ le degré d'un quelconque des coefficients $\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}}$ relativement aux coefficients respectifs des formes données, on aura, en suivant une marche tout à fait pareille à celle du commencement du précédent paragraphe,

$$(\mathrm{K} + \mathfrak{p} - \Sigma \mathfrak{n}\omega)\,\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}} = \Sigma\left(\Sigma \lambda a_{\lambda\mu\nu} \frac{d\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}}}{da_{\lambda\mu\nu}}\right) - \Sigma\left(\Sigma \mathrm{u}\mathrm{a}_{\mathrm{uvw}} \frac{d\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}}}{d\mathrm{a}_{\mathrm{uvw}}}\right),$$

$$\mathfrak{p}\,\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}-1,\,\mathfrak{q}+1,\,\mathfrak{r}} = \Sigma\left(\Sigma \lambda a_{\lambda-1,\,\mu+1,\,\nu} \frac{d\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}}}{da_{\lambda\mu\nu}}\right) - \Sigma\left(\Sigma \mathrm{v}\mathrm{a}_{\mathrm{u}+1,\,\mathrm{v}-1,\,\mathrm{w}} \frac{d\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}}}{d\mathrm{a}_{\mathrm{uvw}}}\right),$$

ou

$$\mathrm{D}_{\mathfrak{pq}}\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}} = (\Sigma \mathrm{D}_{\lambda\mu} - \Sigma \mathrm{D}_{\mathrm{vu}})\,\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}} = [\lambda\mu - \mathrm{vu}]\,\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}}.$$

De la dernière on conclut

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}} = \frac{[\lambda\mu - \mathrm{vu}]^{\mathfrak{q}}\,[\lambda\nu - \mathrm{wu}]^{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}00}}{\mathfrak{m}(\mathfrak{m}-1)\ldots(\mathfrak{p}+1)},$$

le coefficient principal $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}00}$ étant soumis aux conditions déterminatrices de s'annuler par les opérations $[\mu\nu - \mathrm{wv}]$, $[\nu\mu - \mathrm{vw}]$, $[\mu\lambda - \mathrm{uv}]$, $[\nu\lambda - \mathrm{uw}]$.

Si l'on suppose

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{pqr}} = \Sigma\Sigma \mathrm{M}\, a^{\alpha}_{\lambda\mu\nu} \ldots a^{\alpha_1}_{\lambda_1\mu_1\nu_1} \ldots \mathrm{a}^{\beta}_{\mathrm{uvw}} \ldots,$$

on devra avoir

$$\Sigma\alpha\lambda + \Sigma\alpha_1\lambda_1 + \ldots - \Sigma\beta\mathfrak{u} - \Sigma\beta_1\mathfrak{u}_1 - \ldots = (\mathrm{K} - \Sigma\mathfrak{n}\omega) + \mathfrak{p},$$

et les analogues;

$$(\mathrm{K} - \Sigma\mathfrak{n}\omega) = \frac{\Sigma n\theta - \Sigma\mathfrak{n}\omega - \mathfrak{m}}{3}.$$

Exemple. — Deux formes $\varkappa^{res}$ de même ordre n admettent un invariant mixte quadratique, le seul du second degré, et qui est représenté par

$$\Sigma \frac{1.2\ldots n}{1\ldots\lambda.1\ldots\mu.1\ldots\nu\ldots} a_{\lambda\mu\nu\ldots}\mathfrak{a}_{\lambda\mu\nu\ldots}.$$

Théorèmes. — Si l'on considère les deux systèmes φ, φ_1, ..., ψ, ψ_1, ... du commencement du paragraphe, et plusieurs formes mixtes correspondantes $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, ..., il est facile de voir que tout covariant de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$,..., considérées comme des formes primitives ou données, est une forme mixte pour le système proposé, covariant pour (φ), contrevariant pour (ψ). Tout contrevariant de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_1$, ... est aussi une forme mixte pour le système proposé, covariant pour (ψ) et contrevariant pour (φ).

En se reportant au tableau du paragraphe précédent, on verra aussi que toute forme mixte relative aux deux groupes (Φ) et (Ψ) est un covariant ou un contrevariant du système (φ), suivant que cette forme mixte covarie avec (Φ) et contrevarie avec (Ψ), ou *vice versâ.*

Il serait aisé d'établir quelques autres théorèmes analogues et que je passe.

Cas de plusieurs groupes de variables. — Soient

$$F = \Sigma\Sigma \frac{1.2\ldots n}{1\ldots\lambda.1\ldots\mu.1\ldots\nu}\cdot\frac{1.2\ldots n'}{1\ldots\lambda'.1\ldots\mu'.1\ldots\nu'} a_{\lambda\mu\nu,\,\lambda'\mu'\nu'} x^\lambda y^\mu z^\nu \mathrm{X}^{\lambda'}\mathrm{Y}^{\mu'}\mathrm{Z}^{\nu'},$$

$$\mathrm{F} = \Sigma\Sigma \frac{1.2\ldots m}{1\ldots p.1\ldots q.1\ldots r}\cdot\frac{1.2\ldots m'}{1\ldots p'.1\ldots q'.1\ldots r'} \mathrm{A}_{pqr,\,p'q'r'} x^p y^q z^r \mathrm{X}^{p'}\mathrm{Y}^{q'}\mathrm{Z}^{r'},$$

deux formes à groupes indépendants de variables $(x, y, z, \ldots)$, $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \ldots)$ dont le nombre peut changer arbitrairement d'un groupe à l'autre : chaque groupe pouvant être affecté à volonté d'une substitution directe ou d'une substitution adjointe, indépendante d'un groupe à l'autre, on peut admettre, sans nuire à la généralité, que F est affectée dans tous les cas d'une substitution directe. Alors F sera covariant pour les groupes *directs* $(x, y, z, \ldots)$ et contrevariant pour les groupes *inverses* $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \ldots)$. Par des considérations suffisamment développées on reconnaîtra que l'on doit avoir des équations telles que les suivantes, où

$$\mathrm{D}_{\lambda\mu} = \Sigma_{\lambda\mu}\lambda a_{\lambda-1,\,\mu+1,\,\nu,\,\lambda'\mu'\nu'}\frac{d}{da_{\lambda\mu\nu,\,\lambda'\mu'\nu'}},\quad \mathrm{D}_{\lambda'\mu'} = \Sigma_{\lambda'\mu'}\lambda' a_{\lambda\mu\nu,\,\lambda'-1,\,\mu'+1,\,\nu'}\frac{d}{da_{\lambda\mu\nu,\,\lambda'\mu'\nu'}},\ \ldots,$$

savoir :

$$D_{pq} A_{pqr,\,p'q'r'} = D_{\lambda\mu} A_{pqr,\,p'q'r'},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

$$D_{p'q'} A_{pqr,\,p'q'r'} = -D_{\mu'\lambda'} A_{pqr,\,p'q'r'},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On en conclura facilement une expression de $A_{pqr,p'q'r'}$ en $A_{moo,m'oo}$. Puis on trouvera une expression indiciale, analogue à ce qu'on a vu tout à l'heure pour les coefficients A. Enfin on passera sans difficulté au cas de plusieurs formes primitives analogues à F.