

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON JULIA

**Remarques sur « La meilleure approximation en moyenne
» et sur le problème de Dirichlet**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 46 (1929), p. 247-258

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1929_3_46_247_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1929, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REMARQUES

SUR

« LA MEILLEURE APPROXIMATION EN MOYENNE »

ET SUR

LE PROBLÈME DE DIRICHLET

PAR M. GASTON JULIA

Introduction. — J'ai montré, dans un Mémoire inséré aux *Comptes rendus du Congrès International de Bologne* de septembre 1928, et exposant une Communication faite à ce Congrès, comment on pouvait résoudre le problème de Dirichlet relatif à l'aire bornée limitée par une *courbe de Jordan simple fermée* par le procédé d'approximation suivant : $f(m)$ étant la fonction donnée, continue sur C , vers laquelle doit tendre la fonction $F(x, y)$ cherchée, harmonique dans C quand le point (x, y) tend vers m de C , on détermine le (ou les) polynôme harmonique $P_n(x, y)$ de degré $\leq n$ dont « l'écart à $f(m)$ sur C » est minimum; lorsque n devient infini, $P_n(x, y)$ converge uniformément dans C et sur C vers la fonction $F(x, y)$ cherchée. Dans le Mémoire précédent, l'écart de $f(m)$ à $P_n(m)$ sur C a été défini comme le maximum de $|f(m) - P_n(m)|$ lorsque m décrit C . On va résoudre maintenant le même problème en donnant de l'écart une autre définition. La courbe de Jordan C étant représentée paramétriquement par $x = x(t)$, $y = y(t)$ et la donnée $f(m)$ sur C étant une fonction du paramètre t dénommée $f(t)$, nous appellerons ici écart à $f(t)$, sur C , du polynôme $P(x, y)$ l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - P[x(t), y(t)]|^p dt.$$

p étant un nombre fixe quelconque > 1 . Nous montrerons l'existence d'un polynôme harmonique d'ordre $\leq n$ dont l'écart à $f(t)$ sur C est

minimum, et nous montrerons qu'il tend dans C vers $F(x, y)$, solution du problème de Dirichlet relatif à la donnée $f(t)$.

Mais, *a priori*, la représentation paramétrique de C étant dans une large mesure indéterminée, si l'on veut que cette indétermination n'influe pas sur le polynôme $P_n(x, y)$ d'écart minimum, il faut choisir un paramètre de représentation θ qui ait un *sens géométrique*. Une courbe de Jordan simple fermée n'étant pas rectifiable en général, il n'est pas possible de songer au paramètre s , abscisse curviligne, comme l'ont fait pour le cas particulier $p = 2$, M. Serge Bernstein (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 148, 17 mai 1909), et après lui, M. Marcel Brillouin et M. Picone [V. PICONE, *Rendiconti della reale Accademia dei Lincei*, 1922, p. 357].

Nous choisirons ici pour paramètre θ , celui sur lequel la représentation conforme a attiré l'attention, et grâce auquel on peut notamment, comme l'a montré M. Fejér, représenter paramétriquement toute courbe de Jordan simple fermée par des fonctions $x(\theta)$, $y(\theta)$, continues et développables en série de Fourier. Nous utiliserons ici surtout des propriétés de la représentation conforme, les travaux précédemment cités se rattachant surtout à la théorie des séries de fonctions orthogonales.

Définition du paramètre θ . — 1. Imaginons la courbe de Jordan C du plan $z = x + iy$, représentée paramétriquement à l'aide du paramètre θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) dont le sens géométrique est le suivant :

On sait que O , origine du plan z , étant un point intérieur à C , on peut représenter l'intérieur de C d'une manière conforme sur l'intérieur du cercle Γ du plan Z ayant pour centre l'origine O du plan Z et pour rayon l'unité. La fonction de correspondance conforme $Z = g(z)$ est parfaitement définie si l'on donne l'argument de $g'(o)$; nous choisissons ici $g'(o)$ réel et positif [arg. de $g'(o)$ nul]. Alors, on sait (Carathéodory) que $g(z)$ est continue sur C et fait correspondre à chaque point m de C un point M et un seul de Γ , la correspondance entre m et M étant biunivoque et bicontinue. Appelons θ l'argument du point M de Γ qui correspond ainsi au point m d'affixe (z) de C . Les coordonnées de m seront ainsi des fonctions $x(\theta)$ et $y(\theta)$ continues et périodiques au moyen desquelles C sera représenté paramétriquement

et correspondra d'une manière biunivoque et bicontinue au cercle Γ . On remarquera que, si l'argument de $g'(o)$ est choisi $\neq o$, cela revient, comme on sait, à multiplier $g(z)$ par une constante e^{iz} (z réel), donc à augmenter tous les θ d'une même constante, et ceci n'a aucune importance pour ce qui va suivre (1).

2. La représentation de C sur Γ par $z = x(\theta) + iy(\theta)$ étant ainsi faite, une fonction continue $f(m)$ de m sur C devient une fonction continue de θ que nous désignons par $f(\theta)$. Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue de x et y dans C et sur C , nous appellerons ici *écart de φ à f*

(1) A vrai dire, le point M de Γ (et, par suite, la valeur de θ) correspondant à un point m de C , dépend du point O choisi pour origine dans le plan z . Ce que l'on dira dans la suite, par exemple, la définition du polynôme harmonique P_n de degré n , qui s'écarte le moins de $f(m)$ sur C , dépendra évidemment du choix de O . Remplacer O par un autre point O_1 , revient à faire correspondre à m (intérieur à C) successivement M et M_1 (intérieurs à Γ) et liés entre eux par une relation homographique conservant le cercle Γ

$$\left[Z_1 = \frac{aZ + b}{cZ + d} \right];$$

cette relation donne la relation qui lie θ_1 (argument de Z_1 lorsque m est sur C) à θ (argument de Z). L'intégrale définissant l'écart, avec le nouveau choix O_1 de l'origine, sera

$$\int_0^{2\pi} |f(m) - g(m)|^p d\theta_1 = \int_0^{2\pi} |f(m) - g(m)|^p \frac{d\theta_1}{d\theta} \cdot d\theta.$$

On reconnaît aisément que $\theta_1(\theta)$ est toujours croissante et que l'on a, Z étant sur Γ ,

$$\frac{d\theta_1}{d\theta} = \left| \frac{ad - bc}{(cZ + d)^2} \right|.$$

Lorsque z décrit C , Z décrit Γ , $cZ + d$ ne s'annule pas sur Γ , le point $Z = -\frac{d}{c}$ étant certainement extérieur à Γ , donc $\frac{d\theta_1}{d\theta}$ reste compris entre deux limites positives. Le changement de O et son remplacement par O_1 équivaut, par conséquent, à remplacer la moyenne qui définit l'écart par une moyenne où *chaque élément différentiel est affecté d'un poids* $\left(\frac{d\theta_1}{d\theta} \right)$.

Cette modification, bien qu'entraînant avec elle une modification des polynômes P_n de meilleure approximation, n'infirme aucune des conclusions qui suivent : existence, unicité, convergence des polynômes de meilleure approximation.

sur \mathbb{C} l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - \varphi[x(\theta), y(\theta)]|^p d\theta.$$

p étant un nombre positif > 1 .

3. *Existence.* — Parmi tous les polynomes harmoniques en (x, y) , de degré $\leq n$ (ils dépendent de $2n + 1$ paramètres réels linéairement indépendants), en existe-t-il un ou plusieurs $P_n(x, y)$ pour lesquels l'écart à f sur \mathbb{C}

$$I(P_n) = \int_0^{2\pi} |f(\theta) - P_n[x(\theta), y(\theta)]|^p d\theta$$

soit minimum ?

Observons que l'écart $I(P_n)$ est fonction continue des $2n + 1$ paramètres figurant dans P_n . De plus, x est un polynome harmonique de degré $\leq n$. Si donc on ne considère que les P_n dont l'écart à f est moindre que celui de x , ils seront tels que

$$\int_0^{2\pi} |f - P_n|^p d\theta \leq \int_0^{2\pi} |f(\theta) - x(\theta)|^p d\theta = \lambda.$$

Or, on sait que pour $p > 1$,

$$\left[\int_0^{2\pi} |P_n|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_0^{2\pi} |P_n - f|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^{2\pi} |f|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}} \leq \lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}},$$

en posant

$$\int_0^{2\pi} |f|^p d\theta = \mu.$$

Les P_n entre lesquels il faut choisir sont donc tels que

$$\int_0^{2\pi} |P_n|^p d\theta \leq \left[\lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}} \right]^p.$$

Or,

$$\int_0^{2\pi} |P_n| d\theta < \int_0^{2\pi} |P_n|^p d\theta \quad \text{puisque } p > 1.$$

Il en résulte que les $|P_n|$ sont bornés dans tout domaine intérieur à \mathbb{C} .

En effet, si l'on fait correspondre $z = x + iy$ intérieur à C et $Z = X + iY$ intérieur à Γ par $Z = g(z)$ ou la fonction inverse $z = h(Z)$, $P_n(x, y)$ devient une fonction $\mathfrak{P}_n(X, Y)$ harmonique dans Γ et continue sur Γ ; on a

$$P_n[x(\theta), y(\theta)] = \mathfrak{P}_n(\cos \theta, \sin \theta).$$

Donc,

$$\int_0^{2\pi} |\mathfrak{P}_n(\cos \theta, \sin \theta)| d\theta < \left[\lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}} \right]^p.$$

La fonction harmonique $\mathfrak{P}_n(X, Y)$ ayant son module borné en moyenne sur Γ sera elle-même bornée en module dans tout domaine intérieur à Γ . En effet (X, Y) étant un point intérieur au cercle Γ et (A, B) un point de ce cercle, la fonction de Green $G(X, Y; A, B)$ et sa dérivée normale au point (A, B) , $\frac{dG}{dn}$, restent uniformément bornées tant que (X, Y) appartient à un domaine fermé Δ intérieur à Γ ; par suite, puisque

$$\mathfrak{P}_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_n(A, B) \frac{dG}{dn} d\theta,$$

on aura, dans Δ ,

$$|\mathfrak{P}_n(X, Y)| < \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathfrak{P}_n(A, B)| d\theta < \frac{M \left(\lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}} \right)^p}{2\pi},$$

si l'on a dans Δ

$$\left| \frac{dG}{dn} \right| < M.$$

Il en résulte que les P_n envisagés sont tous en module $< M$ (M étant un nombre constant) lorsque (x, y) reste dans un domaine D intérieur à C. Les coefficients de ces P_n sont donc, eux aussi, bornés en module; dans l'espace à $(2n + 1)$ dimensions, le point ayant pour coordonnées ces $(2n + 1)$ coefficients, reste dans un domaine borné ω . $I(P_n)$ est une fonction continue positive de ce point dans ω , elle atteint son minimum en un point au moins de ω . L'existence d'un polynôme P_n au moins, dont l'écart à f sur C soit minimum, est donc établie de ce fait. [Nous appellerons ε_n l'écart minimum ainsi défini pour chaque degré n .]

4. *Unicité.* — S'il y en avait deux, P_n et Q_n , tout polynôme $aP_n + bQ_n$

(a et b réels) serait harmonique comme eux, en particulier

$$\frac{1}{2} P_n + \frac{1}{2} Q_n = R_n.$$

Puisque

$$\varepsilon_n = \int_0^{2\pi} |f - P_n|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |f - Q_n|^p d\theta,$$

et puisque

$$f - \frac{P_n + Q_n}{2} = \frac{1}{2} [(f - P_n) + (f - Q_n)],$$

$$\int_0^{2\pi} |f - R_n|^p d\theta = \int_0^{2\pi} \left| \frac{(f - P_n) + (f - Q_n)}{2} \right|^p d\theta.$$

Or, pour $p > 1$,

$$\left| \frac{\alpha + \beta}{2} \right|^p < \frac{|\alpha|^p + |\beta|^p}{2} \quad (\text{excepté si } \alpha = \beta)$$

[car, d'une part, $\left| \frac{\alpha + \beta}{2} \right| \leq \frac{|\alpha| + |\beta|}{2}$, et, d'autre part, pour $p > 1$, la courbe $y = x^p$ étant concave vers le haut, on aura

$$\left[\frac{|\alpha| + |\beta|}{2} \right]^p < \frac{|\alpha|^p + |\beta|^p}{2}].$$

Il en résulte que

$$\int_0^{2\pi} |f - R_n|^p d\theta < \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2\pi} |f - P_n|^p d\theta + \int_0^{2\pi} |f - Q_n|^p d\theta \right\}$$

ou

$$\int_0^{2\pi} |f - R_n|^p d\theta < \varepsilon_n$$

sans égalité possible, à moins que P_n ne soit égal à Q_n en tout point de C , ce qui entraînerait $P_n \equiv Q_n$. Le polynôme R_n aurait donc sur C un écart à f moindre que celui de P_n et de Q_n , moindre que ε_n , ce qui est impossible puisque ε_n est l'écart minimum pour le degré n . *Le polynôme P_n est donc unique*, on l'appelle polynôme harmonique d'écart minimum ε_n sur C .

5. En particulier supposons $p = 2$ et supposons que C soit un cercle de centre O , de rayon 1 . Alors

$$x(\theta) = \cos \theta, \quad y(\theta) = \sin \theta,$$

puisque

$$z = h(Z) \equiv Z \quad \text{et} \quad g(z) \equiv z.$$

Le polynôme harmonique général de degré n est

$$\begin{aligned} P_n(x, y) &= P_n(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + r(\alpha_1 \cos \theta + \beta_1 \sin \theta) + \dots + r^n(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned}$$

$f(\theta)$ étant continue, le polynôme d'écart minimum est celui pour lequel l'intégrale

$$I(P_n) = \int_0^{2\pi} \left| f(\theta) - \left[\frac{\alpha_0}{2} + (\alpha_1 \cos \theta + \beta_1 \sin \theta) + \dots + (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) \right] \right|^2 d\theta$$

est minimum. Ce polynôme a donc pour coefficients α_i, β_i les *coefficients de Fourier* de $f(\theta)$. Si le développement de Fourier de $f(\theta)$ est

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

le polynôme d'écart minimum sur C sera pour chaque degré n

$$P_n(r \cos \theta, r \sin \theta) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta).$$

On sait que, dans ce cas particulier, le polynôme $P_n(r \cos \theta, r \sin \theta)$ converge uniformément dans toute aire intérieure à C vers la somme de la série

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta),$$

qui n'est autre que la valeur au point $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r < 1$) de la fonction harmonique dans C prenant sur C la valeur $f(\theta)$ au point d'argument θ . On sait d'ailleurs *a priori* (Du Bois-Reymond, Fejér, Lebesgue) que, la série de Fourier d'une fonction continue $f(\theta)$

pouvant être divergente, $P_n(\cos\theta, \sin\theta)$ peut n'avoir pas de limite, c'est-à-dire que *le polynôme P_n d'écart minimum peut n'avoir aucune limite sur C*. Nous allons maintenant étudier la convergence des P_n à l'intérieur de C dans le cas général.

6. *Convergence des P_n dans le cas général.* — Prouvons d'abord que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0.$$

J'ai en effet démontré dans le Mémoire antérieurement cité [Congrès de Bologne, 1928] qu'il est possible de développer toute fonction harmonique dans C et continue sur C, en série de polynômes harmoniques convergeant uniformément dans C et sur C, c'est-à-dire que, pour tout ε positif donné, on peut trouver un polynôme harmonique $Q_n(x, y)$ de degré n assez élevé, tel que

$$|f(\theta) - Q_n[x(\theta), y(\theta)]| < \varepsilon,$$

quel que soit θ . L'écart de ce Q_n à f sur C sera donc $< 2\pi\varepsilon^n$. L'écart minimum ε_n correspondant au degré n sera donc *a fortiori* $< 2\pi\varepsilon^n$, c'est-à-dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - P_n[x(\theta), y(\theta)]|^p d\theta = 0,$$

et en appelant $\mathfrak{E}_n(X, Y)$ la fonction harmonique dans Γ issue de $P_n(x, y)$ par la représentation conforme $z = h(Z)$, on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - \mathfrak{E}_n(\cos\theta, \sin\theta)|^p d\theta = 0.$$

Par l'exemple de $p = 2$ et C cercle unité, nous savons qu'il ne faut pas chercher à prouver la convergence de \mathfrak{E}_n vers $f(\theta)$ sur Γ . Mais que la convergence de $\mathfrak{E}_n(r \cos\theta, r \sin\theta)$ vers la fonction harmonique dans Γ , prenant sur Γ les valeurs $f(\theta)$, est plausible.

Démontrons en effet cette convergence.

7. Désignons par $F(x, y)$ la fonction harmonique dans C continue

sur C prenant sur C les valeurs données $f(\theta)$, c'est-à-dire telle que

$$F[x(\theta), y(\theta)] = f(\theta).$$

Par la transformation

$$z = x + iy = h(X + iY),$$

elle devient la fonction $\mathfrak{F}(X, Y)$ harmonique dans Γ , continue sur Γ , et l'on a

$$\mathfrak{F}(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta).$$

Envisageons l'intégrale

$$\varepsilon_n(r) = \int_0^{2\pi} |\mathfrak{F}(r \cos\theta, r \sin\theta) - \mathfrak{E}_n(r \cos\theta, r \sin\theta)|^p d\theta.$$

Puisque \mathfrak{F} et \mathfrak{E}_n sont uniformément continues, dans et sur Γ on a

$$\lim_{r \rightarrow 1} \varepsilon_n(r) = \varepsilon_n.$$

Admettons, *ce que nous démontrerons plus loin*, que $U(X, Y)$ étant harmonique dans C et continue sur C , l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |U(r \cos\theta, r \sin\theta)|^p d\theta$$

est une fonction croissante de r pour $r < 1$, lorsque $p > 1$.

Ce point étant admis, on aura

$$\varepsilon_n(r) < \varepsilon_n,$$

et, par conséquent, quel que soit r

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(r) = 0,$$

uniformément dans tout Γ .

Il va en résulter que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{E}_n(X, Y) = \mathfrak{F}(X, Y),$$

uniformément dans tout domaine Δ intérieur à Γ .

En effet, de la relation

$$\varepsilon_n = \int_0^{2\pi} |f(\theta) - \mathfrak{E}_n(\cos\theta, \sin\theta)|^p d\theta,$$

on a vu qu'il résulte que

$$\left[\int_0^{2\pi} |\mathfrak{X}_n|^\nu d\theta \right]^{\frac{1}{\nu}} < \varepsilon_n^{\frac{1}{\nu}} + \left[\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^\nu d\theta \right]^{\frac{1}{\nu}}.$$

Les $\int_0^{2\pi} |\mathfrak{X}_n|^\nu d\theta$ et par suite les $\int_0^{2\pi} |\mathfrak{X}_n| d\theta$ sont donc bornés supérieurement quel que soit n par un même nombre μ . Le raisonnement fait au n° 3, prouve d'autre part que, dans un domaine quelconque Δ intérieur à Γ , toutes les fonctions harmoniques \mathfrak{X}_n auront leur module $|\mathfrak{X}_n|$ limité supérieurement par un même nombre M .

Ces fonctions harmoniques \mathfrak{X}_n forment donc dans Δ une famille également continue dont il est possible d'extraire une suite partielle $\mathfrak{X}_{n_1}, \mathfrak{X}_{n_2}, \dots$, convergeant uniformément dans Δ vers une limite $\Phi(X, Y)$ qui est nécessairement *harmonique* [cela se voit aisément par la formule classique] :

$$\mathfrak{X}_n(X, Y) = \frac{1}{2n} \left[\int_0^{2\pi} \mathfrak{X}_n(A, B) \frac{dG}{dn} d\theta \right].$$

On aura évidemment

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} |\mathfrak{F}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \Phi(r \cos \theta, r \sin \theta)|^\nu d\theta \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |\mathfrak{F}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \mathfrak{X}_{n_i}(r \cos \theta, r \sin \theta)|^\nu d\theta = \lim \varepsilon_{n_i}(r) = 0, \end{aligned}$$

pour toute valeur de r donnant un cercle intérieur à Δ , c'est-à-dire, en définitive, puisque Δ est arbitrairement voisin de Γ , pour tout $r < 1$.

Mais

$$\int_0^{2\pi} |\mathfrak{F}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \Phi(r \cos \theta, r \sin \theta)|^\nu d\theta = 0$$

n'est possible pour deux fonctions continues de θ que si

$$\mathfrak{F}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \Phi(r \cos \theta, r \sin \theta),$$

pour toute valeur de θ et pour toute valeur $r < 1$.

Donc

$$\Phi(X, Y) \equiv \mathfrak{F}(X, Y)$$

dans Γ , ce qui démontre que la suite des $\mathfrak{E}_n(X, Y)$ a pour limite $\mathfrak{F}(X, Y)$, et uniformément, dans tout domaine intérieur à Γ .

Il en résulte que, pour $p > 1$, les polynômes harmoniques $P_n(x, y)$ d'écart minimum à $f(\theta)$ sur C ont pour limite dans C la fonction harmonique $F(x, y)$ solution du problème de Dirichlet relatif à la donnée $f(\theta)$ sur C , la convergence ayant lieu dans tout C et uniformément dans tout domaine intérieur à C . L'exemple de $p = 2$, C cercle unité, nous avertit que la convergence peut ne pas se produire sur C et dépend des propriétés différentielles de $f(\theta)$.

8. Il reste, pour terminer, à prouver le lemme invoqué au n° 7. Pour toute fonction $U(r, \theta)$ harmonique dans Γ la fonction de r

$$I(r) = \int_0^{2\pi} |U(r, \theta)|^p d\theta$$

est croissante lorsque $p > 1$.

On reconnaît aussitôt que la fonction

$$V(r, \theta) = |U(r, \theta)|^p$$

est dérivable et l'on a

$$I'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial r} d\theta = \frac{1}{r} \int_{\gamma} \frac{dV}{dn_e} ds,$$

γ étant le cercle de centre O de rayon r et $\frac{dV}{dn_e}$ la dérivée normale extérieure de V . On a d'ailleurs

$$\int_{\gamma} \frac{dV}{dn_e} ds = \int \int_{\gamma} \Delta V d\sigma.$$

Nous montrerons que $I(r)$ croît avec r , si nous prouvons que $\int \int_{\gamma} \Delta V d\sigma > 0$, pour tout cercle γ de centre O de rayon $r < 1$.

Or ceci résulte de l'inégalité $\Delta V > 0$, vérifiée dans tout Γ comme on le reconnaît aussitôt.

En effet, un calcul simple donne

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = (2p - 2)|U|^{p-2}(U_X^2 + U_Y^2),$$

en tenant compte de la relation $\Delta U = 0$. Du fait que $p > 1$ on a $\Delta V > 0$ et, d'autre part, $(p - 2)$ étant > 1 il n'y a pas de difficulté réelle dans l'intégrale $\int \int_{\gamma} \Delta V d\sigma$ le long des lignes éventuelles où U peut s'annuler.

Le lemme invoqué au n° 7 est donc démontré. Il résulte d'ailleurs immédiatement des travaux bien connus de M. F. Riesz sur les fonctions *subharmoniques*.