

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. TERQUEM

**Étude sur le timbre des sons, produits par des chocs discontinus
et en particulier par la sirène**

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 7 (1870), p. 269-365

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1870_1_7_269_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉTUDE
SUR
LE TIMBRE DES SONS

PRODUITS

PAR DES CHOCS DISCONTINUS ET EN PARTICULIER PAR LA SIRÈNE :

PAR M. A. TERQUEM,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG.

I. — *Introduction.*

Les sons musicaux peuvent être produits, comme chacun le sait, de deux manières différentes, soit à l'aide d'un corps vibrant, qui communique aux molécules de l'air ambiant des vibrations isochrones, soit à l'aide d'impulsions ou de chocs isolés, séparés les uns des autres par des intervalles de temps plus ou moins considérables. Le premier mode de vibrations fut longtemps le seul admis; car, dans le Traité d'acoustique de Chladni, le second mode ne se trouve pas mentionné d'une manière explicite, quoique ce savant en eût déjà constaté l'existence; le son qu'il nommait *son ronflant* des cordes (*Klirrton*) est dû, en effet, aux chocs périodiques d'une corde contre un chevalet, placé au milieu ou au tiers de sa longueur.

Le premier appareil qui permit de produire des sons musicaux par des chocs isolés fut la sirène de Cagniard de la Tour (*). Peu de temps après

(*) *Sur la sirène, nouvelle machine d'acoustique destinée à mesurer les vibrations de l'air qui constituent le son*, par le baron Cagniard de la Tour (*Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XII, p. 167).

la publication de cette importante découverte, se produisit une réclamation de priorité de la part du docteur Robison. Celui-ci, en effet, dans l'article *Tempérament* de l'*Encyclopédie Britannique*, avait décrit un appareil formé « d'un tube muni d'un robinet à taquet pouvant faire 720 oscillations par seconde; on obtenait alors un son rappelant une voix claire de femme; avec 360 oscillations seulement par seconde, le son obtenu rappelait une voix rude d'homme; quand le robinet ne ferme que partiellement, on a un son plus doux, uni et tendre. » Cagniard de la Tour (*) maintint ses droits devant la réclamation de Robison; néanmoins, quoique la sirène ait rendu de plus grands services à la science que le tube à robinet de Robison, qui serait complètement tombé dans l'oubli si M. Tyndall n'en avait dit quelques mots dans ses leçons d'acoustique; quoique, certainement, Cagniard de la Tour ait complètement ignoré l'existence de ce dernier appareil quand il a imaginé la sirène, il faut cependant reconnaître, avec M. Tyndall, que Robison le premier eut l'idée de produire des sons à l'aide d'un courant d'air intermittent; car, à cette époque, on n'avait encore qu'une idée très-vague du mouvement de l'air dans les tuyaux à anches.

Quelques années après, Chladni publia, dans les *Annales de Poggendorf*, une Note sur la production des sons par des chocs isolés, où toutes les conditions de ce genre de vibrations sont parfaitement indiquées (**). « On admet généralement, dit Chladni, que, pour entendre un son musical, il est nécessaire de se servir d'un corps sonore dont les vibrations se propagent par l'air ou tout autre milieu; c'est le cas habituel. Mais un son musical peut aussi être produit par des chocs se succédant à des instants rapprochés et provoquant dans le milieu ambiant des ondes sonores.

» L'anche ne doit pas être considérée comme un corps sonore, la hauteur ou la gravité du son dépend de l'intervalle de temps qui sépare les ouvertures et les fermetures de la fente, et par suite des chocs isolés dus aux interruptions que subit l'écoulement de l'air. La sirène de Cagniard de la Tour produit des sons de la même manière. On peut

(*) *Annales de Chimie et de Physique*, 2^e série, t. XVIII.

(**) *Sur les tons obtenus, sans corps vibrants, simplement par des chocs se succédant rapidement*, par Chladni (*Ann. Pogg.*, t. VIII, p. 453; 1826).

rapporter à la même cause le bruissement et le bourdonnement de quelques insectes volants; pour une guêpe ou une grosse mouche, cela irait à quelques centaines, pour un cousin à plusieurs milliers par seconde. Pour les corps solides, on peut citer les sons ronflants des cordes... Vraisemblablement, on pourrait produire un son très-rauque et sans pureté, mais parfaitement déterminable, par d'autres modes de chocs rapides et réguliers d'un corps solide contre un autre, par exemple par les chocs d'un ressort contre les dents d'une roue tournant rapidement et régulièrement...

» ... On doit donc donner plus d'extension à la définition du mot *son musical* qu'on ne le fait d'habitude, puisque les vibrations fixes d'un corps sonore ne sont pas toujours nécessaires pour produire ce dernier et qu'il peut être dû à des chocs assez énergiques, se succédant rapidement, et se communiquant à l'air et de celui-ci à l'oreille. »

Il est donc évident que, le premier, Chladni a nettement défini la production de sons musicaux par des chocs discontinus; que, de plus, il a indiqué la possibilité d'obtenir des sons bien caractérisés à l'aide de roues dentées, avant que Savart n'en ait réalisé l'expérience, probablement sans avoir connaissance de l'idée émise par son illustre précurseur.

L'instrument qui permet d'obtenir un grand nombre de sons dans les conditions les plus variées, à l'aide d'impulsions et de chocs discontinus, est évidemment la sirène.

Employée d'abord par Cagniard de la Tour pour mesurer la hauteur des sons, elle a reçu divers perfectionnements, et, aujourd'hui, elle sert plutôt à l'étude du timbre, des battements, des sons de combinaison, qu'à la détermination des nombres de vibrations, puisque, pour cette dernière étude, on peut employer le procédé graphique ou encore mieux le tonomètre.

Quelles sont les principales transformations qu'a subies la sirène, à quelles études a-t-elle principalement servi?

En 1834, Opelt (*) eut l'idée de substituer à la sirène de Cagniard de la Tour un simple disque de carton percé de plusieurs rangées d'ouvertures, les nombres de trous des rangées étant entre eux dans le rapport des intervalles de l'accord parfait, comme Savart l'avait déjà

(*) *Sur la nature du son*, par Opelt; Plauen, 1834.

fait avec des roues dentées (*), en 1828. Auguste Seebeck (**) adopta la même disposition pour la sirène avec laquelle il fit ses remarquables expériences; cet appareil prit le nom de *sirène de Seebeck*, quoique Opelt en soit le véritable inventeur. La sirène de Seebeck était, comme celle d'Opelt, formée d'un disque de carton, avec des rangées concentriques d'ouvertures; elle était mise en mouvement à l'aide d'un poids fixé à une corde enroulée sur un tambour; on produisait le son le plus souvent en soufflant contre les ouvertures du disque par un ou plusieurs tubes étroits, quelquefois en faisant frotter contre celui-ci une carte coupée en pointe.

Voici les principaux résultats auxquels est arrivé Seebeck :

1° Si l'on place deux tuyaux porte-vent de part et d'autre de la sirène, il y a interférence quand les tuyaux correspondent tous deux à des ouvertures; renforcement, au contraire, quand ils se trouvent à une distance égale à la moitié de l'intervalle qui sépare deux ouvertures.

2° Si, sur un même disque, se trouvent deux rangées concentriques d'ouvertures, le nombre d'ouvertures de l'une étant double de celles de l'autre, et si on les ébranle à la fois de deux côtés différents de telle sorte que les impulsions coïncident, on n'entend plus que le son le plus grave seul.

3° Si les impulsions, toutes dans le même sens, ne sont plus équidistantes, mais sont séparées par les temps t et t' , on entend les sons correspondants aux temps $t + t'$ et $\frac{t+t'}{2}$; l'un est plus ou moins intense que l'autre, suivant que t et t' diffèrent plus ou moins l'un de l'autre.

4° Si les intervalles qui séparent les impulsions sont t , t' et t'' , on entend le son $t + t' + t''$, et, en outre, si t , t' et t'' ne diffèrent pas trop l'un de l'autre, le son $\frac{t + t' + t''}{3}$.

5° Si les intervalles qui séparent les impulsions sont complètement irréguliers, sans s'écarter beaucoup de la moyenne, on entend un son

(*) *Note sur la sensibilité de l'organe de l'ouïe*, par Félix Savart (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XLIV, p. 337; 1828).

(**) SEEBECK, *Beobachtungen und Tonbildungen an der Sirene* (*Ann. Pogg.*, t. LIII, p. 417; 1841. — *Repertorium von Physik von Dove*, t. VII et VIII, *passim*).

dont la hauteur correspond à cette moyenne, et qui manque plus ou moins de pureté.

6° Si t' est un multiple de t , on entend le son $t + t'$, et, au lieu du son $\frac{t + t'}{2}$, le son t .

7° Si t' est beaucoup plus grand que t , sans en être un multiple exact, outre le son $t + t'$, on entend également le son correspondant à t , et en outre un troisième son plus élevé, correspondant à la commune mesure de t et t' ; toutefois, le résultat de l'observation a laissé encore quelque doute à ce sujet.

8° Si les intervalles qui séparent les impulsions sont t , t , et t' , on entend toujours le son t , que t soit plus grand ou plus petit que t' .

De l'ensemble de ces recherches Seebeck avait conclu : « 1° que l'organe de l'ouïe possède la propriété de décomposer un système unique d'impulsions non équidistantes en deux ou trois systèmes d'impulsions isochrones; 2° qu'il perçoit, par un isochronisme imparfait, l'impression d'un son d'une hauteur déterminée, comme par un isochronisme absolu; et qu'on peut s'écarter de cette dernière condition dans des limites beaucoup plus étendues qu'on ne pourrait le soupçonner. »

Ces conclusions étaient uniquement le résumé des observations faites par Seebeck; Ohm chercha à les déduire de la théorie, en traitant par le calcul les divers cas que Seebeck avait examinés (*); il eut l'heureuse idée d'employer dans ce but la série de Fourier :

$$F(t) = A_0 + \alpha_1 \cos 2\pi \frac{t + \theta_1}{T} + \alpha_2 \cos 2\pi \frac{2(t + \theta_2)}{T} + \dots + \alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t + \theta_m)}{T} + \dots,$$

par laquelle on peut développer une fonction quelconque en une somme de sinus et de cosinus de la variable indépendante.

Le premier, Ohm émit l'idée que, si $F(t)$ représente un mouvement vibratoire quelconque, de période T , chacun des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ représente l'amplitude d'un son perçu isolément; de telle

(*) *Definition des Tones und Theorie der Sirene* (Ann. Pogg., t. LIX, p. 497; 1843).
Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. Tome VII.

sorte que, si l'oreille est atteinte par un mouvement vibratoire, non figuré par un sinus ou un cosinus du temps, elle entendra autant de sons simultanés qu'il existe de termes dans la série de Fourier, dont les coefficients aient une valeur sensible.

Cette idée de Ohm, qu'on avait plus tard laissée tomber un peu dans l'oubli, a été reprise et développée par M. Helmholtz dans son ouvrage : *Die Lehre der Tonempfindungen*; il importe toutefois de préciser dans quelles limites cette théorie de Ohm et de Helmholtz, admise par les uns, combattue par d'autres, doit être acceptée.

M. Helmholtz distingue les sons musicaux en deux grandes classes, les sons simples ou pendulaires, et les sons complexes, pour lesquels la loi de vibration est représentée par une fonction quelconque du temps autre qu'un sinus ou un cosinus, fonction qu'on pourra développer suivant la série de Fourier. L'oreille devra, conformément à l'hypothèse de Ohm, percevoir simultanément une infinité de sons pendulaires, dont les amplitudes seront les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, des divers termes de cette série. Mais en outre, M. Helmholtz admet que le timbre du son correspondant au premier terme variable de la série (α_1), nommé le son fondamental, dépend des valeurs relatives des amplitudes $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$, des sons supérieurs ou harmoniques du premier.

Il est évident, en effet, qu'étant donné un mouvement vibratoire, quelque complexe qu'il soit, on pourra toujours le reproduire à l'aide de divers sons simples ou pendulaires simultanés, ayant entre eux les relations de hauteur des divers harmoniques, avec des amplitudes et des phases convenablement choisies. Or, comme l'oreille possède la faculté de percevoir isolément des sons simples produits au même instant par divers instruments placés dans le voisinage l'un de l'autre, il en sera de même évidemment si le mouvement complexe qui lui arrive, dû à un seul instrument, est identique au précédent. Ni au point de vue de la théorie ni au point de vue de l'expérience, il ne peut y avoir la moindre différence.

Peut-on dire, comme le prétend M. Helmholtz, que les sons correspondant aux divers termes de la série de Fourier ont une existence objective? C'est aller trop loin; on doit se contenter d'affirmer que l'oreille, étant atteinte par un mouvement non pendulaire, le perçoit comme s'il était dû à la superposition de divers sons pendulaires pro-

duits indépendamment les uns des autres. Cette décomposition par l'oreille d'un mouvement vibratoire complexe en mouvements simples pendant la perception, est en effet démontrée par de nombreuses expériences; elle n'est possible théoriquement, du reste, que d'une seule manière, les amplitudes et les phases correspondant à chaque son étant données par la série de Fourier.

L'expérience fait voir, en outre, que l'oreille perçoit difficilement les harmoniques supérieurs en présence de leur son fondamental, à moins d'une attention toute particulière et d'une grande habitude; même ces conditions se trouvant remplies, il est le plus souvent impossible de les percevoir isolément. M. Helmholtz ne rend peut-être pas compte d'une manière aussi satisfaisante que possible de cette difficulté de perception des harmoniques supérieurs; on pourrait, il me semble, compléter ainsi l'explication qu'il en donne. Il attribue cette propriété de l'organe de l'ouïe principalement au défaut de l'éducation de l'oreille pour ce genre d'exercice et à l'attention que nous portons à la partie objective de nos sensations, et au contraire au défaut d'attention à tout ce qui est subjectif. Mais cette explication est insuffisante; car, avec toute l'attention possible et sans le secours des résonateurs, il est impossible de percevoir les différents harmoniques qui caractérisent chaque voyelle. Il y a là, dans une certaine mesure, un phénomène analogue à celui que l'on constate dans l'acte de la vision, puisque l'œil, dans aucun cas, ne peut séparer les sensations dues à un mouvement complexe provenant de plusieurs vibrations simples simultanées; pour l'oreille, cette séparation ne devient très-difficile et même impossible, que lorsque les durées des mouvements vibratoires composants sont entre elles comme les nombres 1, 2, 3, 4,.... Cette fusion des harmoniques avec le son fondamental doit donc dépendre de l'organisation même de l'oreille. M. Helmholtz admet que la perception des sons de diverses hauteurs se fait par l'entremise des fibres de Corti, espèces de cordes vibrant chacune pour un son particulier, et à chacune desquelles correspond un filet nerveux. La distribution de ces filets nerveux, provenant de la division du nerf acoustique, ne pourrait-elle pas être faite de telle sorte que les fibres de Corti correspondant à un son donné et à ses harmoniques, fussent reliées à une même région de l'encéphale ou à des cellules nerveuses

communiquant entre elles? C'est aux anatomistes qu'il appartient de vérifier l'exactitude de cette hypothèse.

Pour entendre les harmoniques supérieurs dus à la décomposition d'un mouvement complexe, on a, en général, recours aux résonateurs.

Que se passe-t-il dans ce cas? Que perçoit l'oreille? Les choses se passent évidemment comme pour un faisceau de lumière blanche qui se réfléchit un certain nombre de fois entre deux lames métalliques avant d'arriver à l'œil, et devient ainsi de plus en plus coloré. Le mouvement vibratoire complexe subit, en effet, dans le résonateur des réflexions multiples, par suite desquelles le mouvement résultant qui arrive à l'oreille a changé de nature, et peut être considéré comme dû à la superposition d'un son pendulaire simple très-intense, dont la hauteur correspond aux dimensions du résonateur avec d'autres mouvements vibratoires beaucoup plus faibles; le premier son sera seul perçu.

Ohm, en appliquant le calcul aux expériences de Seebeck, était parvenu, comme je l'ai dit plus haut, à expliquer très-simplement la cause de la perception simultanée de plusieurs sons; mais il n'avait pas traité la question d'une manière générale, avait laissé échapper quelques fautes de calcul, et enfin les intensités calculées par lui pour le second harmonique étaient beaucoup plus considérables que celles que l'on pouvait déduire de la perception des sons dans les expériences de Seebeck.

Ce dernier (*), se fondant surtout sur la différence qui existe entre les intensités calculées pour les harmoniques supérieurs à l'aide de la formule de Fourier et celles que l'oreille leur attribue, n'admit pas le principe de Ohm. Il suppose au contraire que, dans la série de Fourier, à chaque terme supérieur ne correspond pas nécessairement un son perçu isolément, mais que l'ensemble de tous ces termes contribue à augmenter l'impression produite par le son fondamental; la seconde partie de cette conclusion est seule admissible, d'après ce que j'ai dit plus haut; la première doit évidemment être rejetée.

(*) Sur la sirène, par Aug. Seebeck (*Ann. Pogg.*, t. LX, p. 449, 1843).

Ohm (*) répondit avec un peu d'aigreur à Seebeck. Complètement dépourvu du sentiment musical et même de la faculté d'apprécier la justesse des sons, il fit faire, dit-il, par un de ses amis quelques expériences à l'aide d'un violon; il constata que si l'on produit un son isolé, puis qu'on y ajoute son octave grave, le premier son cesse complètement d'être entendu; en second lieu, si l'on produit un son grave, d'abord seul, puis accompagné de son octave aiguë, le premier son est notablement renforcé, et, au contraire, le second est entendu faiblement; enfin si l'octave n'est pas très-juste, le même renforcement n'a plus lieu.

Ohm constate le fait sans se charger de l'expliquer; il émet cependant l'hypothèse que cette difficulté d'audition des harmoniques pourrait tenir à la constitution même de l'oreille, et cherche ainsi à détruire les objections soulevées par Seebeck, en admettant, ce que les travaux de M. Helmholtz ont complètement justifié, que l'oreille perçoit très-difficilement les harmoniques en présence de leur son fondamental.

Seebeck (**) répondit encore à Ohm, en maintenant son point de vue, et continuant à nier qu'à chaque terme de la série de Fourier corresponde un son pouvant être perçu isolément. Il multiplia et varia les expériences qu'il avait faites avec la sirène, en changeant la forme et la distance des ouvertures, ainsi que le mode d'insufflation. Il obtint des sons de timbres très-variables, mais il n'a jamais entendu, dit-il, que de très-faibles harmoniques, et en y prêtant la plus grande attention. Ne sachant où trouver, dans la série de Fourier interprétée comme le faisait Ohm, quelque chose qui pût correspondre aux variations du timbre, il pensait que la fonction entière développée ou non en série représentait un son unique d'un timbre variable. Ohm, en effet, ne dit pas un seul mot du timbre des sons, et ne paraît nullement se douter qu'il puisse dépendre, comme l'a fait voir depuis M. Helmholtz, de l'amplitude des harmoniques qui accompagnent le son fondamental, soit réellement, soit virtuellement.

En résumé, on doit reconnaître que Ohm a eu le mérite d'appliquer la série de Fourier, admise depuis longtemps pour représenter les vi-

(*) *Encore quelques mots sur la définition du son musical*, par Ohm (*Ann. Pogg.*, t. LXII, p. 1; 1844).

(**) *Sur la définition du son musical*, par Aug. Seebeck (*Ann. Pogg.*, t. LXIII; nov. 1844).

brations des cordes, à l'étude des sons produits par des chocs discontinus; qu'il a expliqué la perception simultanée de plusieurs sons, fait constaté antérieurement par Seebeck, en admettant qu'à chaque terme de la série de Fourier correspond un son perçu isolément. Si Seebeck a combattu cette manière de voir, c'est qu'il ne pouvait se rendre compte de la difficulté de l'audition des harmoniques, et que de plus il ne pouvait trouver dans la série de Fourier, interprétée comme le faisait Ohm, l'explication du timbre des sons.

Le travail si remarquable de Ohm ne peut plus être considéré comme ayant complètement résolu la question relative aux sons produits par des chocs discontinus et en particulier par la sirène, puisqu'il ne s'est nullement occupé du timbre des sons produits, et qu'il n'a pas traité le problème dans toute sa généralité. Depuis, de nouvelles modifications ont été apportées à la construction de la sirène, de nouvelles recherches ont été faites avec cet instrument; il m'a semblé, par suite, intéressant de reprendre le travail de Ohm, en le généralisant d'abord, puis en traitant divers cas particuliers, qui puissent ensuite être comparés à l'expérience.

Avant de terminer cette introduction, j'indiquerai encore les principaux perfectionnements apportés à la construction de la sirène depuis les travaux de Seebeck.

En 1851, Dove (*) modifia la sirène primitive d'Opelt et de Seebeck, et lui donna la forme de la sirène ordinaire, en perçant le fond de la boîte et le plateau de plusieurs séries d'ouvertures, afin d'obtenir l'accord parfait; la partie la plus ingénieuse de cette sirène est la disposition employée par Dove pour permettre de faire sortir l'air séparément par chaque série d'ouvertures ou par plusieurs à la fois.

Opelt (**), en 1854, a ajouté un nouveau perfectionnement à la sirène qu'il avait imaginée auparavant. Tout en reconnaissant la supériorité de la sirène de Dove sur la sienne, il reproche à celle-ci de ne pouvoir servir à la production que d'un petit nombre de sons. La nouvelle sirène

(*) *Description d'une sirène propre à la production simultanée de plusieurs sons musicaux*, par Dove (*Ann. Pogg.*, t. LXXXII, p. 596; 1851. — *Berliner Bericht*, 1850-51, p. 311).

(**) *Opelt, Théorie générale de la musique, fondée sur le rythme des impulsions sonores, et éclaircie par de nouveaux moyens de démonstration*; Leipzig, 1852 (*Berliner Bericht für 1852*).

d'Opelt est formée comme la première d'un simple disque de carton muni de plusieurs rangées d'ouvertures, en nombres très-variables; d'abord se trouvent douze rangées circulaires avec 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36, 48, 60, 72 et 96 ouvertures, donnant par suite les sons ut_1 , sol_1 , ut_2 , mi_2 , sol_2 , ut_3 , mi_3 , sol_3 , ut_4 , mi_4 , sol_4 , ut_5 .

Dans chacune des rangées suivantes se trouvent des ouvertures dont les distances correspondent à deux progressions arithmétiques différentes, ayant le même point de départ; mais aux points communs aux deux progressions, on ne met qu'une seule ouverture. Enfin les quatre rangées les plus extérieures portent des ouvertures dont les distances forment trois progressions arithmétiques différentes partant du même point, et, comme dans les rangées précédentes, aux points communs à deux ou trois progressions on ne met qu'une seule ouverture. En comptant chaque ouverture commune à plusieurs progressions, de manière que chacune de ces dernières soit complète, les dispositions de ces diverses rangées sont les suivantes :

NUMÉRO de la rangée.	1 ^{re} PROGRESSION.	2 ^e PROGRESSION.	3 ^e PROGRESSION.	NOMBRE total.	SONS SIMULTANÉS.
1	24	30	»	48	4 : 5, ut_1 mi_1
2	24	32	»	48	3 : 4, ut_1 fa_1
3	24	36	»	48	2 : 3, ut_1 sol_1
4	24	40	»	54	3 : 5, ut_1 la_1
5	24	42	»	60	4 : 7, ut_1 si_1^b
6	32	40	48	96	4 : 5 : 6, fa_1 la_1 ut_2
7	30	36	48	96	5 : 6 : 8, mi_1 sol_1 ut_2
8	48	64	80	176	3 : 4 : 5, ut_2 fa_2 la_2
9	48	60	72	114	4 : 5 : 6, ut_2 mi_2 sol_2

Il serait facile d'obtenir un grand nombre d'autres combinaisons. M. Kœnig a construit une grande sirène d'après Seebeck et Opelt, en employant des disques de cuivre percés avec une grande régularité et mis en rotation par un mouvement d'horlogerie; de plus un sommier portant plusieurs tubes permet d'augmenter l'intensité des sons obtenus, en produisant plusieurs ébranlements simultanés, ce qu'on ne pouvait faire avec les appareils primitifs d'Opelt et de Seebeck.

Enfin, M. Helmholtz a ajouté un nouveau et notable perfectionnement à la sirène de Dove, en imaginant la sirène double; dans celle-ci, en effet, on peut produire soit simultanément, soit successivement huit sons différents et toutes leurs combinaisons; on peut obtenir le même accord par deux sons provenant soit de la même boîte, soit des deux boîtes de l'appareil, et enfin produire des battements en faisant tourner à la main la boîte supérieure, pendant que les deux disques sont eux-même en rotation. M. Kœnig a construit une très-grande sirène, d'après ce principe, dans laquelle un fort mouvement d'horlogerie fait tourner les deux disques, et où les diverses séries d'ouvertures peuvent être ouvertes et fermées à l'aide de touches et d'un mécanisme analogue à celui de l'orgue ou du piano. Nul doute que ces dernières sirènes ne reçoivent d'utiles applications pour vérifier les conclusions de l'étude que j'entreprends, celle du timbre des sons produits par les chocs interrompus et en particulier par la sirène.

II. — *Sons produits par des ébranlements isolés tous de même nature.*

Étant donnée une sirène munie d'ouvertures équidistantes, toutes de même forme, on peut calculer l'amplitude absolue ou relative des divers harmoniques qui accompagnent le son fondamental produit, si l'on connaît la fonction qui représente l'intensité de l'ébranlement dû à la sortie de l'air par les ouvertures de la sirène.

La nature de cette fonction dépend de deux éléments, d'un côté de la forme des ouvertures, de l'autre de la variation de la vitesse avec laquelle l'air s'écoule de la boîte de la sirène. Il est difficile, pour ne pas dire impossible, de tenir compte de ce second élément; mais si, comme on le fait habituellement, on prend des ouvertures très-petites par rapport à leurs distances, on peut supposer que l'écoulement de l'air se fait avec une vitesse constante. Du reste, en vue des calculs à effectuer, on est obligé de faire cette hypothèse; la comparaison des résultats obtenus par la théorie avec l'expérience, permettra de vérifier jusqu'à quel point l'hypothèse de l'écoulement uniforme de l'air est admissible.

Avant d'examiner divers cas particuliers, j'exposerai quelques considérations générales sur l'emploi de la série de Fourier.

Soit $F(t)$ une fonction quelconque, Fourier a fait voir que l'on peut toujours poser

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} F(t) &= A_0 + A_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + A_2 \cos 2\pi \frac{2t}{T} + \dots + A_m \cos 2\pi \frac{mt}{T} + \dots \\ &+ B_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + B_2 \sin 2\pi \frac{2t}{T} + \dots + B_m \sin 2\pi \frac{mt}{T} + \dots \end{aligned} \right.$$

Si $F(t)$ est une fonction périodique dont la période est T , il y a identité absolue entre les deux membres; sinon la série ne représente la première fonction qu'entre certaines limites.

On peut encore écrire

$$(2) \quad F(t) = A_0 + \alpha_1 \cos 2\pi \frac{t - p_1}{T} + \dots + \alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t - p_m)}{T} + \dots$$

avec les relations suivantes entre les coefficients de ces deux séries :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} A_m &= \alpha_m \cos 2\pi \frac{mp_m}{T}, & B_m &= \alpha_m \sin 2\pi \frac{mp_m}{T}, \\ \alpha_m^2 &= A_m^2 + B_m^2 & \text{tang } 2\pi \frac{mp_m}{T} &= \frac{B_m}{A_m}. \end{aligned} \right.$$

Enfin, A_0 , A_m , et B_m sont déterminés par les intégrales définies suivantes :

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} F(t) dt, \\ A_m &= \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} F(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt, & B_m &= \frac{2}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} F(t) \sin 2\pi \frac{mt}{T} dt. \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de A_0 , A_m et B_m , sont évidemment indépendantes de la valeur absolue de τ , puisque $F(t)$ est une fonction périodique, dont la période est T ; elles dépendent au contraire de l'origine adoptée pour mesurer le temps, mais α_m en est indépendant; en effet, si l'on change l'origine du temps en la reculant d'une quantité égale à θ ,

$F(t)$ devient $F(t - \theta)$, et l'on a alors

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} F(t - \theta) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left[A_m \cos 2\pi \frac{m(t - \theta)}{T} + B_m \sin 2\pi \frac{m(t - \theta)}{T} \right], \\ \text{ou bien} \\ F(t - \theta) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left[\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t - \theta - p_m)}{T} \right], \\ \text{et, en développant,} \\ F(t - \theta) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left[\begin{array}{l} \left(A_m \cos 2\pi \frac{m\theta}{T} - B_m \sin 2\pi \frac{m\theta}{T} \right) \cos 2\pi \frac{mt}{T} \\ + \left(A_m \sin 2\pi \frac{m\theta}{T} + B_m \cos 2\pi \frac{m\theta}{T} \right) \sin 2\pi \frac{mt}{T} \end{array} \right]. \end{array} \right.$$

Or on peut encore écrire

$$(6) \quad F(t - \theta) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left(A'_m \cos 2\pi \frac{mt}{T} + B'_m \sin 2\pi \frac{mt}{T} \right);$$

d'où, en identifiant les coefficients des relations (5) et (6), on aura

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} A'_m = A_m \cos 2\pi \frac{m\theta}{T} - B_m \sin 2\pi \frac{m\theta}{T} = \alpha_m \cos 2\pi \frac{m(p_m + \theta)}{T}, \\ B'_m = A_m \sin 2\pi \frac{m\theta}{T} + B_m \cos 2\pi \frac{m\theta}{T} = \alpha_m \sin 2\pi \frac{m(p_m + \theta)}{T}. \end{array} \right.$$

Et enfin, on en conclut

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_m^2 + B_m^2 = A'^2_m + B'^2_m = \alpha_m^2, \\ \text{tang } 2\pi \frac{m(p_m + \theta)}{T} = \frac{B'_m}{A'_m}. \end{array} \right.$$

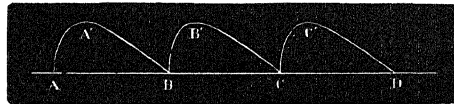
Les coefficients α_m de la série (2), ou, ce qui revient au même, les amplitudes maxima des divers harmoniques ne dépendent donc pas de l'origine adoptée pour le temps, ce qui était évident *à priori*; la phase seule de chacun de ces sons, au contraire, en dépend. Mais les différences de phases des divers sons en sont également indépendantes, ce qui est évident *à priori*; les mouvements vibratoires sont, en effet, entre eux dans des rapports qui doivent être indépendants du mode de calcul employé.

Par suite, on choisira l'origine du temps dans les divers cas examinés, de telle sorte que le calcul de A_m et de B_m soit le plus simple possible, en particulier de façon que l'un des deux coefficients A_m ou B_m soit nul; si $B_m = 0$, par exemple, on a $\alpha_m = A_m$; il n'y a pas à tenir compte du signe de A_m , puisque ce dernier peut être attribué à la phase, et que l'intensité de l'harmonique correspondant en est indépendante.

Trois cas différents peuvent se présenter dans la détermination de A_m et B_m , quant aux limites des intégrales définies. Supposons que, pour chaque impulsion isolée, l'ébranlement communiqué à l'air soit donné par la fonction $y = \varphi(t)$, et que a en soit la durée :

1° Si $a = T$, représentons $\varphi(t)$ par la courbe AA'B (fig. 1), les limites

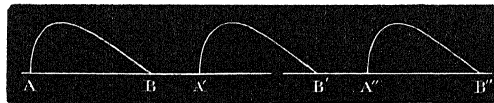
Fig. 1.



des intégrales seront 0 et T ou a , si pour le point A on pose $T = 0$;

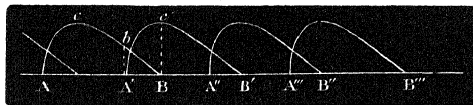
2° Si l'on suppose $a < T$ (fig. 2), les limites de l'intégrale seront naturellement 0 et a , puisque, de a jusqu'à T, $\varphi(t)$ est nul;

Fig. 2.



3° Si l'on suppose $a > T$ (fig. 3), les limites de l'intégrale sont

Fig. 3.



encore 0 et a ; en effet, prenons seulement A_m , on a

$$A_m = \int_0^T F(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt;$$

si l'origine du temps est en A',

$$A'A'' = T, \quad A'B' = a;$$

de A' jusqu'à B, il faut faire la somme des aires A'Bb et A'c'B, ce qui donnera

$$A_m = \int_0^T \varphi(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt + \int_T^a \varphi(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt,$$

et, par suite,

$$A_m = \int_0^a \varphi(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt.$$

Donc, les limites des intégrales qui déterminent A_m et B_m sont les mêmes, quelle que soit la valeur de a , ou de la durée de l'ébranlement par rapport à la période du mouvement vibratoire, ou, ce qui revient au même, quelle que soit la grandeur des ouvertures relativement à leur distance.

Si $F(t)$ est le même pour les valeurs positives et négatives de t , et si, de plus, on prend l'origine au milieu de l'intervalle pendant lequel $F(t)$ n'est pas nul, on a

$$(9) \quad \begin{cases} B_m = \frac{2}{T} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(t) \sin 2\pi \frac{mt}{T} dt = 0, \\ A_m = \frac{2}{T} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} F(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt = \frac{4}{T} \int_0^{\varepsilon} F(t) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt = \alpha_m. \end{cases}$$

Il en sera de même si $F(t)$ ayant deux formes différentes pour les valeurs positives et négatives de t , $f_1(t)$ et $f_2(t)$, on a

$$f_1(-t) = f_2(t),$$

cas qui se rencontre assez souvent.

Si les ouvertures par lesquelles l'air s'échappe sont très-éloignées relativement à leurs dimensions, quelle que soit leur forme, B_m devient très-petit par rapport à A_m ; soient, en effet, d la distance de deux points semblablement placés dans deux ouvertures voisines, et v la vitesse de déplacement du disque mobile dans la partie où se trouvent placées les ouvertures, on aura

$$t = \frac{x}{v}, \quad T = \frac{d}{v};$$

done

$$(10) \begin{cases} A_m = \frac{2}{d} \int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx, & B_m = \frac{2}{d} \int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right) \sin 2\pi \frac{mx}{d} dx, \\ A_0 = \frac{1}{d} \int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right) dx. \end{cases}$$

Si d est très-grand relativement à a , on aura, en remplaçant le cosinus et le sinus par les premiers termes de leur série,

$$A_m = \frac{2}{d} \int_0^a F\left(\frac{x}{v}\right) dx = 2A_0,$$

$$B_m = \frac{2\pi m}{d^2} \int_0^a x F\left(\frac{x}{v}\right) dx = 0.$$

B_m est donc infiniment petit par rapport à A_m , et ce dernier tend à devenir constant, indépendant de m et égal à $2A_0$.

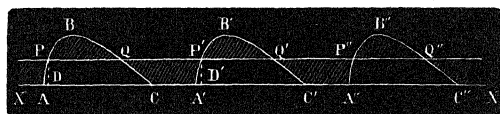
Par suite, quelle que soit la forme des ouvertures par lesquelles s'écoule l'air, quand elles sont très-éloignées par rapport à leurs dimensions, les amplitudes de tous les harmoniques tendent à devenir égales à celles du son fondamental, c'est-à-dire que le rapport $\frac{A_m}{A_1}$, toujours plus petit que 1, tend vers l'unité pour $\frac{a}{d} = 0$.

Nous nous occuperons plus tard de la limite vers laquelle tend ce rapport $\frac{A_m}{A_1}$, quand chaque ébranlement se compose de deux parties, pendant lesquelles les mouvements vibratoires et les condensations sont de sens contraires.

Comme on suppose que, pendant toute la durée de l'ébranlement, les déplacements et les condensations ont lieu dans le même sens, jamais on ne peut avoir $A_0 = 0$; or ce terme constant ne donne naissance à aucun son; il est proportionnel au volume d'air sorti de la sirène et exprime pour une vibration la condensation moyenne qui en résulte dans l'air extérieur. Or il est évident que la fonction $F(t) - A_0$ doit produire le même son musical, la même impression sur l'oreille que la fonction $F(t)$ toute seule. Soit donc construite la courbe $y = F(t)$, ABC, A'B'C', A''B''C''... (*fig. 4*), avec $AA' = CC' = A'A'' = \dots = T$;

menons une parallèle PQ'' à la droite AC'' , à une distance $y_1 = A_0 = PD$; si l'on prend cette droite comme ligne des abscisses, la courbe figurative du mouvement représenté par la fonction $F(t) - A_0$ devient

Fig. 4.



$PBQCA'P'B'Q'C' \dots$; on peut, dès lors, considérer les parties PBQ , $P'B'Q'$, $P''B''Q''$, ... comme correspondant à la condensation, et, au contraire, $QCA'P'$, $Q'C'A''P''$, ... comme représentant la dilatation.

Quelle que soit la fonction $F(t)$, il est facile de démontrer que les aires PBQ et $QCA'P'$ sont égales entre elles; en effet, on a

$$A_0 T = \int_0^T F(t) dt = \text{aire } ABC;$$

mais, comme par construction $PD = A_0$, on a également

$$A_0 T = \text{aire } PDD'P'.$$

Donc

$$\text{aire } ABC = \text{aire } PDD'P' = \text{aire } APP'A'.$$

Si, de part et d'autre, on retranche l'aire $APQC$, il restera

$$\text{aire } PBQ = \text{aire } QCA'P'.$$

C. Q. F. D.

Donc, si l'on produit un son par des chocs séparés les uns des autres et donnant naissance à des déplacements des molécules d'air dans un seul sens (ce qui a lieu dans la sirène et même, en réalité, dans la plupart des instruments à vent, puisque l'air insufflé s'écoule avec une vitesse périodique par le tuyau ébranlé), on peut séparer l'ébranlement communiqué à l'air ambiant en deux parties: la première consiste en un déplacement réel de l'air, qui se propage plus ou moins loin, ne produit aucun effet sur l'oreille, et correspond au terme A_0 ; la deuxième constitue la seule partie efficace du son perçu; elle se divise elle-même en deux périodes pendant lesquelles les molécules d'air ont des mouvements égaux et de sens inverse; la condensation et la dilatation totales sont égales entre elles, de même que

si le son était produit par un corps solide vibrant ; ces deux périodes peuvent, du reste, avoir des durées inégales, et suivre des lois différentes.

Du reste, la même conclusion ressort de l'examen de la série de Fourier; car, si l'on retranche le premier terme constant A_0 , chacun des termes variables passe par un même nombre de valeurs positives et négatives; donc il doit en être de même de leur somme.

Le timbre du son produit ou, ce qui revient au même, l'amplitude relative des harmoniques supérieurs ne peut donc dépendre que des durées relatives des deux périodes dans lesquelles se décompose tout ébranlement communiqué à l'air, quel que soit le mode employé pour le produire, et de la forme de la fonction qui représente chacune de ces périodes. Le mode de production de l'ébranlement étant déterminé, c'est-à-dire la forme des courbes ABC, A'B'C', ... (*fig. 4*) étant donnée, qui se répètent périodiquement, on peut en faire varier la distance AA' dans de grandes limites. Pour quelle distance, le son produit se rapprochera-t-il le plus possible d'un son pendulaire? Il faut, pour cela,

étudier la fonction $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$; or, comme on le verra plus tard, dans les divers cas particuliers étudiés, cette fonction, égale à 1 quand les ouvertures sont à une distance très-grande par rapport à leurs dimensions, n'atteint pas son minimum en même temps pour les divers harmoniques; mais, le plus souvent, le deuxième harmonique l'emporte sur les autres; on pourra donc chercher quelle doit être la distance AA' pour que le rapport $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ soit minimum. Or on constate que, dans la plupart des cas,

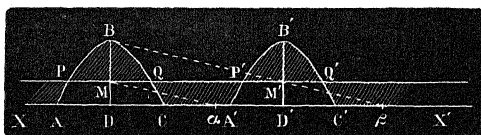
$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ est voisin de son minimum quand les deux périodes dans lesquelles l'ébranlement se décompose ont des durées égales, c'est-à-dire quand $PQ = QP' = P'Q' = Q'P'' = \dots$ (*fig. 4*). C'est dans ce cas, en effet, que le son produit doit se rapprocher autant qu'il est possible d'un son pendulaire, puisque l'égalité des deux périodes du mouvement vibratoire est une des conditions de l'existence de ce genre de sons.

Je vais passer à l'examen des divers cas particuliers qui peuvent se présenter le plus souvent dans la construction de la sirène.

I. *Ébranlements isolés formés d'une seule des deux parties d'un son pendulaire.* — Supposons une suite d'ébranlements isolés et formés uni-

quement de la partie condensée ou dilatée d'un son pendulaire : c'est le cas unique traité par Ohm; mais on peut simplifier la marche qu'il a suivie et les notations qu'il a adoptées. Il est facile de réaliser ce mode d'ébranlements, en prenant une sirène dont le fond porterait des ouvertures rectilignes étroites dirigées suivant les rayons et dont le disque mobile serait muni, sur son bord, d'entailles en forme de demi-sinusoides, telles que ABC (*fig. 5*), en admettant toutefois, comme je l'ai déjà fait

Fig. 5.



remarquer, que la pression reste constante dans la boîte pendant toute la durée de l'écoulement, et que l'ébranlement communiqué à l'air extérieur soit proportionnel à la surface de l'ouverture par laquelle l'air s'échappe.

Soit $\omega = AC$ (*fig. 5*) la durée de l'ébranlement; $AA' = T$ la période totale qui sépare le commencement de deux ébranlements successifs. Plaçons l'origine du temps en D; alors, de $t = -\frac{\omega}{2}$ à $t = +\frac{\omega}{2}$, $F(t) = ka \cos \frac{\pi t}{\omega}$, et, de $t = \frac{\omega}{2}$ à $t = T - \frac{\omega}{2}$, $F(t) = 0$. On aura donc

$$A_m = \frac{2a}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \cos \pi \frac{t}{\omega} \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt = \frac{4aT\omega}{\pi(T^2 - 4m^2\omega^2)} \cos \pi \frac{m\omega}{T},$$

$$B_m = 0,$$

$$A_0 = \frac{a}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \cos \pi \frac{t}{\omega} dt = \frac{2a\omega}{\pi T}.$$

Donc

$$(12) \quad \alpha_m = A_m = \frac{4a \frac{\omega}{T}}{\pi \left(1 - 4m^2 \frac{\omega^2}{T^2}\right)} \cos \pi \frac{m\omega}{T}.$$

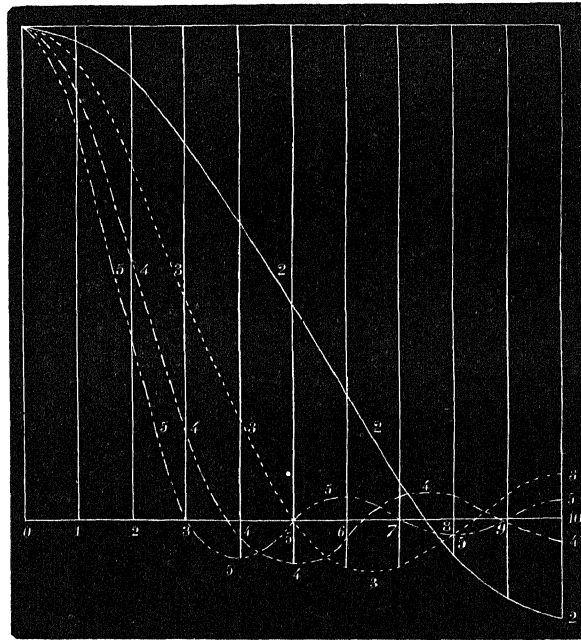
Menons la droite PQ parallèlement à XX' (*fig. 5*), et à une distance

MD égale à A_0 ; $D\alpha = \omega$, $D\beta = \frac{\pi}{2} T$. Le mouvement vibratoire produit pourra être représenté par la courbe PBQCA'P', répétée périodiquement, conformément à ce qui a été dit page 286. Pour connaître le timbre des sons produits, on étudiera la forme de la fonction $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$, qui est égale à

$$y = \frac{\cos \pi m \frac{\omega}{T} \frac{1 - 4 \frac{\omega^2}{T^2}}{\cos \pi \frac{\omega}{T} \frac{1 - 4 m^2 \frac{\omega^2}{T^2}}} = \frac{\cos \pi m x}{\cos \pi x} \frac{1 - 4 x^2}{1 - 4 m^2 x^2},$$

en posant $\frac{\omega}{T} = x$. Dans la *fig.* 6 se trouvent construites les valeurs de y ,

Fig. 6.



pour $m = 1, 2, 3, 4, 5$, et en faisant varier $\frac{\omega}{T}$ de 0 à 1; j'ai représenté de la même manière les valeurs des cinq premiers harmoniques dans la plupart des cas que j'ai examinés. On voit d'abord que :

1° Pour $\frac{\omega}{T} = 0$, $y = 1$, quel que soit m ; de plus $\frac{dy}{dx} = 0$.

2° Pour $m \frac{\omega}{T} = \frac{2k+1}{2}$, $\gamma = 0$, sauf pour $k = 0$; car alors $\gamma = \frac{0}{0}$ et n'est pas nul. Ainsi γ sera nul :

$$\text{Pour } m = 2, \text{ si } \frac{\omega}{T} = \frac{3}{4} = 0,75;$$

$$\text{Pour } m = 3, \text{ si } \frac{\omega}{T} = \frac{1}{2}, \frac{5}{6} = 0,5 - 0,833\dots;$$

$$\text{Pour } m = 4, \text{ si } \frac{\omega}{T} = \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} = 0,375 - 0,625 - 0,875;$$

$$\text{Pour } m = 5, \text{ si } \frac{\omega}{T} = \frac{3}{10}, \frac{5}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10} = 0,3 - 0,5 - 0,7 - 0,9.$$

On voit donc que les amplitudes relatives des divers harmoniques, toutes égales à 1 pour $\frac{\omega}{T} = 0$, décroissent d'autant plus vite que m est plus élevé, et ensuite s'écartent peu de zéro, quoique passant par une série de maxima successifs, positifs ou négatifs de plus en plus faibles.

3° Pour $\frac{\omega}{T} = \frac{3}{4}$, le deuxième harmonique est nul, les autres sont assez faibles; ou aura donc un son presque simple pour cette valeur.

4° Si l'on veut chercher pour quelle valeur de $\frac{\omega}{T}$, les deux périodes PQ et QP' (*fig. 5*) du mouvement vibratoire sont égales en durée, on aura à résoudre l'équation transcendante

$$\frac{2\omega}{\pi T} = \cos \frac{\pi T}{4\omega},$$

ou, en posant $\frac{\pi T}{2\omega} = x$,

$$\frac{1}{x} = \cos \frac{x}{2}.$$

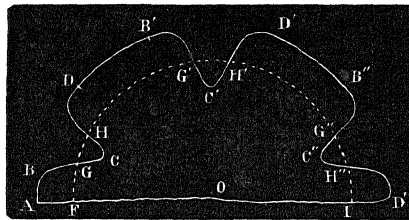
Parmi les diverses racines, une seule convient, $x = 2,198$; ce qui donne

$$\frac{T}{\omega} = 1,395 \text{ ou } \frac{\omega}{T} = 0,716 = \frac{5}{7} \text{ approximativement,}$$

valeur peu différente de $\frac{\omega}{T} = 0,75$ ou $\frac{3}{4}$ pour laquelle $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0$, c'est-à-dire pour laquelle le deuxième harmonique est nul.

II. *Ébranlements produits par une sirène dont le disque porte des entailles en forme de sinusôides, et la boîte des fentes rectilignes.* — Supposons que le fond de la boîte d'une sirène porte des fentes rectilignes étroites dirigées suivant des rayons et que le bord du disque mobile soit découpé par des entailles en forme de sinusôides entières, construites en prenant pour abscisses des arcs, et des ordonnées dirigées suivant les rayons du disque. Soit ABCDB'C'D' (*fig. 7*) une portion de

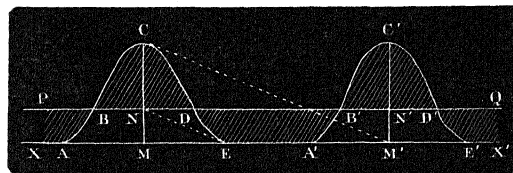
Fig. 7.



ce disque; dans le cas précédent le disque aurait dû être limité à la ligne FGHG'H'G''H''.... On pourrait encore mieux réaliser ce mode d'ébranlement, comme l'a proposé M. Kœnig, en pratiquant des fentes rectilignes suivant les génératrices de la surface latérale d'un cylindre, et entourant ce dernier d'une autre surface cylindrique mobile autour de leur axe commun, et dont le bord présenterait la forme d'une sinusôide enroulée sur un cylindre.

Soient ABCDE, A'B'C'D'E'.... (*fig. 8*) les courbes figuratives des impulsions communiquées à l'air ambiant; AE = ω en représente la durée,

Fig. 8.



et AA' = T la période totale; on aura, en posant CM = a, et prenant l'origine du temps en M,

$$F(t) = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos 2\pi \frac{t}{\omega}, \quad \text{de } t = -\frac{\omega}{2} \text{ à } t = +\frac{\omega}{2},$$

et

$$F(t) = 0, \quad \text{de } t = \frac{\omega}{2} \text{ à } t = T - \frac{\omega}{2};$$

par suite,

$$A_0 = \frac{a}{2T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{\omega}\right) dt = \frac{a\omega}{2T},$$

$$A_m = \frac{a}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{\omega}\right) \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt = \frac{aT^2}{m\pi(T^2 - m^2\omega^2)} \sin \pi \frac{m\omega}{T},$$

$$B_m = \frac{a}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \left(1 + \cos 2\pi \frac{t}{\omega}\right) \sin 2\pi \frac{mt}{T} dt = 0.$$

Donc, on aura

$$(13) \quad \alpha_m = A_m = \frac{a}{m\pi \left(1 - \frac{m^2\omega^2}{T^2}\right)} \sin \pi \frac{m\omega}{T}.$$

Comme dans le cas précédent, si l'on mène PQ parallèlement à XX' (fig. 7) à une distance $MN = A_0 = \frac{a\omega}{2T}$, ($MM' = T$, $MC = a$, $ME = \frac{\omega}{2}$) les courbes BCD, B'C'D' représenteront la période de condensation du mouvement vibratoire et DEA'B'... la période de dilatation.

Le rapport $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ est égal à

$$\frac{\sin \pi \frac{m\omega}{T}}{\sin \pi \frac{\omega}{T}} \frac{1 - \frac{\omega^2}{T^2}}{m \left(1 - \frac{m^2\omega^2}{T^2}\right)} \quad \text{ou} \quad y = \frac{\sin \pi mx}{\sin \pi x} \frac{1 - x^2}{m(1 - m^2x^2)}.$$

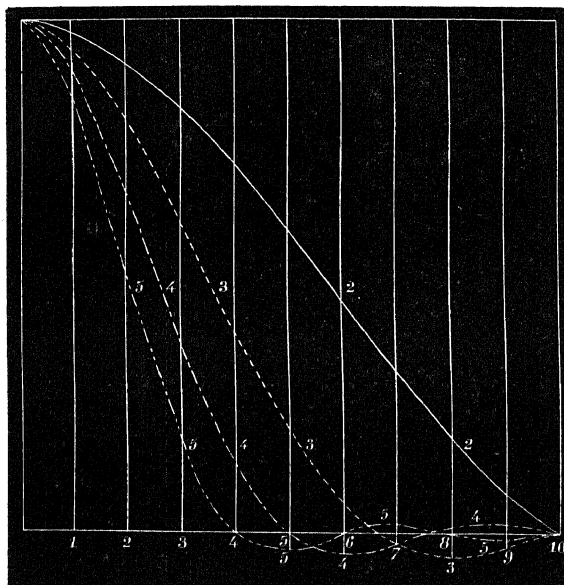
Dans la fig. 9, se trouvent construites les valeurs de $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ pour $m = 2, 3, 4, 5$; on peut remarquer que :

1° Pour $x = 0$, $y = 1$, et $\frac{dy}{dx} = 0$.

2° Pour $x = 1$, $\alpha_m = 0$, sauf pour α_1 , qui est égal à $\frac{0}{0}$ et en réalité est

égal à $\frac{\alpha}{2}$; le son est donc, dans ce cas, un son pendulaire parfaitement pur; de plus, pour $x = 1$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

Fig. 9.



3° Pour que y soit nul, il faut qu'on ait $mx = k$, k étant différent de 1, car alors $y = \frac{0}{0}$, et n'est pas nul. Donc pour les courbes construites, on aura $y = 0$:

Pour $m = 2$, si $\frac{\omega}{T} = 1$;

Pour $m = 3$, si $\frac{\omega}{T} = \frac{2}{3}, 1$;

Pour $m = 4$, si $\frac{\omega}{T} = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$;

Pour $m = 5$, si $\frac{\omega}{T} = \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$.

4° Pour que les deux périodes BD et DB' (*fig. 8*) dans lesquelles se divise l'ébranlement soient de même durée, il faut que $\frac{\omega}{T}$ soit égal à l'une

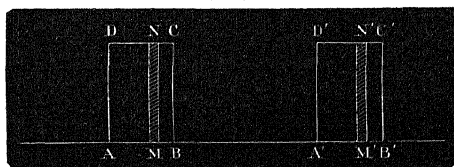
des racines de l'équation transcendante $\frac{\omega}{T} = 1 + \cos \frac{\pi T}{2\omega}$, qui est satisfaite pour $\frac{\omega}{T} = 1$; les autres racines sont étrangères à la question. Il était facile de prévoir le résultat auquel on devait arriver.

5° En examinant les courbes construites, on voit que le deuxième harmonique n'est jamais nul et l'emporte sur tous les autres; ces derniers, à partir de $x = 0$, décroissent d'autant plus rapidement que leur rang est plus élevé; on n'entendra donc, en général, que le deuxième harmonique, à moins que les entailles ne soient très-écartées, relativement à leurs dimensions.

III. *Sons produits par une sirène dont la boîte porte des fentes étroites suivant des rayons, et le disque des ouvertures rectangulaires.* — Supposons que le fond de la boîte d'une sirène porte des fentes étroites dirigées suivant des rayons, et le disque des ouvertures rectangulaires, en admettant que le disque soit d'un assez grand diamètre.

Soient ABCD, A'B'C'D',... (*fig. 10*) les ouvertures rectangulaires

Fig. 10.



du disque; MN, M'N',... les fentes étroites de la boîte. Posons

$$AB = A'B' = \dots = b, \quad AD = A'D' = \dots = a, \quad AA' = d;$$

soient ensuite v la vitesse de déplacement du disque dans la partie où sont percées les ouvertures, et h la largeur des fentes étroites; en représentant par T la durée d'une vibration, et par ω celle de l'ébranlement, on aura

$$T = \frac{d}{v}, \quad \omega = \frac{b}{v}.$$

Par suite,

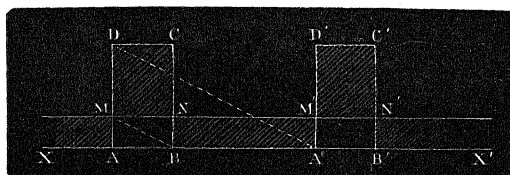
$$F(t) = kah, \quad \text{de } t = -\frac{\omega}{2} \text{ à } t = +\frac{\omega}{2},$$

en plaçant l'origine au milieu de AB, et

$$F(t) = 0, \text{ de } t = \frac{\omega}{2} \text{ à } t = T - \frac{\omega}{2}.$$

La courbe figurative du mouvement vibratoire serait donc ADCB,

Fig. 11.



A'D'C'B', ... (fig. 11). On aura donc

$$A_0 = \frac{kah}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} dt = \frac{kah\omega}{T} = \frac{kahb}{d} = \frac{hsh}{d}$$

(en représentant par $s = ab$ l'aire de chaque ouverture rectangulaire),

$$A_m = \frac{2kah}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \cos 2\pi \frac{mt}{T} dt = \frac{2kah}{\pi} \frac{\sin \pi \frac{mb}{d}}{m},$$

$$B_m = \frac{2kah}{T} \int_{-\frac{\omega}{2}}^{+\frac{\omega}{2}} \sin 2\pi \frac{mt}{T} dt = 0.$$

Donc

$$(14) \quad \alpha_m = A_m = \frac{2kah}{\pi} \frac{\sin \pi \frac{mb}{d}}{m}.$$

Si l'on mène la droite MNM'N' à une distance de XX' égale à $A_0 = \frac{hsh}{d}$ (fig. 12), (AB = b, AA' = d, AD = kah), les parties MDCN, M'D'C'N', ... représenteront la période de condensation du mouvement, et NBA'M', ... la période de dilatation.

Le rapport $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ est égal à

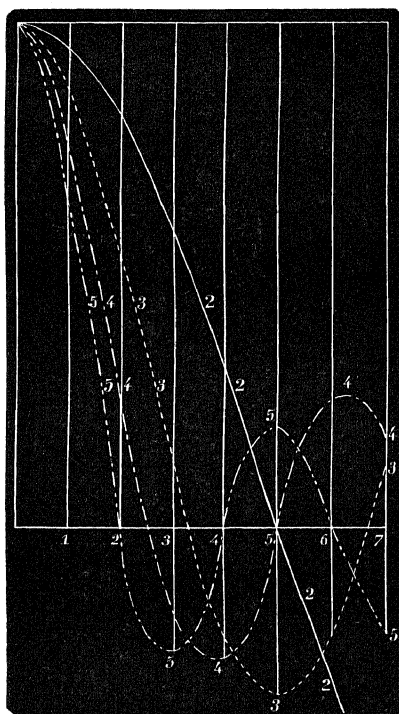
$$y = \frac{\sin \pi \frac{mb}{d}}{m \sin \pi \frac{b}{d}} = \frac{\sin \pi mx}{m \sin \pi x}.$$

La *fig. 12* représente les courbes construites d'après les valeurs de y pour $m = 2, 3, 4, 5$. On voit que :

1° Pour $x = 0, y = 1$ et $\frac{dy}{dx} = 0$.

2° Pour $x = 1$, on a également $y = \pm 1$; mais dans ce cas, si l'on cherche séparément α_m et α_1 , on les trouve également nuls comme pour

Fig. 12.



$x = 0$; en effet, si les ouvertures rectangulaires sont en contact les unes avec les autres, évidemment il n'y a plus de son produit.

3° Si m est pair, le point $x = \frac{1}{2}$ est un centre de figure; pour $x = \frac{1}{2} \pm x'$, y a des valeurs égales et de signes contraires; si au contraire m est impair, les deux valeurs correspondantes de y sont égales et de mêmes signes. Comme les signes n'ont aucune importance pour l'intensité des harmoniques, on voit que, si l'on remplace dans une sirène ainsi construite les vides par les pleins et réciproquement, le

timbre du son ne changera pas. En effet, les deux courbes qui représentent la condensation et la dilatation (*fig. 11*) ont la même forme; par conséquent, on peut remplacer l'une par l'autre, la nature du son produit doit rester exactement la même.

4° Pour qu'un harmonique fasse défaut, il faut qu'on ait

$$\sin \pi m x = 0, \text{ ou } m x = k, \text{ ou } x = \frac{k}{m},$$

ce qui donne, pour les cinq premiers harmoniques, $y = 0$:

Pour $m = 2$, si $x = \frac{1}{2}$;

Pour $m = 3$, si $x = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$;

Pour $m = 4$, si $x = \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$;

Pour $m = 5$, si $x = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$.

5° Pour que les deux périodes du mouvement vibratoire aient la même durée, il faut qu'on ait

$$a = \frac{T}{2}, \text{ ou } b = \frac{d}{2},$$

c'est-à-dire que l'écartement des ouvertures soit égal à leur largeur, ce qui est évident. Dans ce cas, le second harmonique est nul avec tous les harmoniques pairs; les harmoniques impairs, au contraire, atteignent un maximum relatif encore assez considérable, car pour $m = 3$ on trouve

$$y = \frac{1}{3},$$

pour $m = 5$

$$y = \frac{1}{5},$$

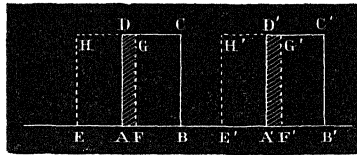
en général pour le $m^{\text{ième}}$

$$y = \frac{1}{m},$$

m étant impair.

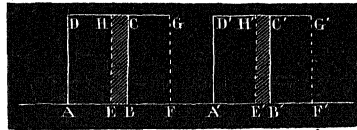
IV. Deux ouvertures rectangulaires glissant l'une devant l'autre. — Supposons que le fond de la boîte ainsi que le disque portent des ouvertures rectangulaires égales. Soient $AD = a$, $AB = b$ (*fig. 13*),

Fig. 13.



la hauteur et la largeur de chaque ouverture; $AA' = d$ la distance de deux ouvertures successives, et v la vitesse du disque mobile dans la région où se trouvent les ouvertures. Prenons l'origine du temps au moment où les ouvertures coïncident, et soit $x = AE = A'E' = vt$ la

Fig. 14.



distance d'un des bords des ouvertures mobiles au bord correspondant des ouvertures fixes.

On pourra poser (*fig. 14*)

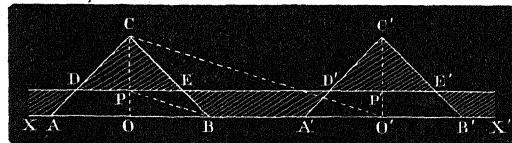
$$F(t) = h \times BCHE = ka(b - x), \text{ de } x = 0 \text{ à } x = b, \text{ ou bien de } t = 0 \text{ à } t = \frac{b}{v};$$

pour les valeurs négatives de t (*fig. 13*), on aura

$$F(t) = h \times AFGD = ka(b + x), \text{ de } x = -b \text{ à } x = 0, \text{ ou de } t = -\frac{b}{v} \text{ à } t = 0.$$

Si l'on construit les courbes représentées par $F(t)$, on obtient les

Fig. 15.



deux droites AC et BC (*fig. 15*), OA étant égal à b , et OC à kab . On

aura donc dans ce cas :

$$A_0 = \frac{ka}{vT} \left[\int_{-b}^0 (b+x) dx + \int_0^b (b-x) dx \right] = \frac{2ka}{d} \int_0^b (b-x) dx$$

$$= \frac{kab^2}{d} = \frac{ksb}{d}, \text{ en posant } ab = s;$$

$$A_m = \frac{2ka}{vT} \left[\int_{-b}^0 (b+x) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx + \int_0^b (b-x) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx \right]$$

$$= \frac{4ka}{d} \int_0^b (b-x) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx$$

$$= \frac{2kad}{\pi^2} \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{d}}{m^2};$$

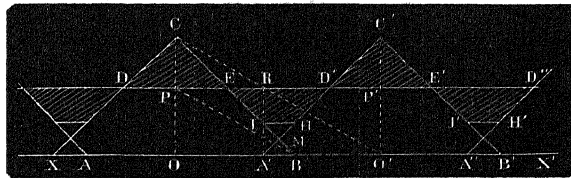
$$B_m = 0.$$

Donc, on aura

$$(15) \quad \alpha_m = A_m = \frac{2kad}{\pi^2} \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{d}}{m^2}.$$

Menons la droite DD' à une distance de XX' égale à $A_0 = \frac{kab^2}{d} = \frac{OC \times b}{d}$, en posant (*fig. 15*) $OC = kab$, $OB = b$, $OO' = d$; la courbe figurative du mouvement se ramène à une série de triangles DCE, D'C'E', ... pour la période condensée et à une série de trapèzes tels que EBA'D', ... pour la période dilatée. Cette figure est relative seulement au cas où l'on a $\frac{b}{d} < \frac{1}{2}$ ou $d > 2b$. Si, au contraire, on avait $d < 2b$, il n'y aurait aucune interruption dans la sortie de l'air. Dans ce cas, les deux

Fig. 16.



triangles ont une partie commune A'MB (*fig. 16*); dans cette partie, il faut sommer les ordonnées, ce qui donne la droite HI. La courbe figu-

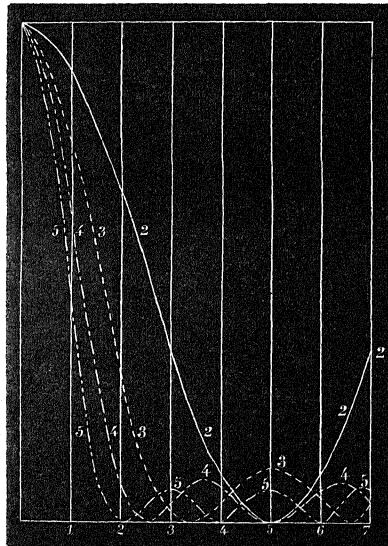
rative du mouvement devient donc la ligne brisée DCEIHD'C'E'I'H',..., en apparence très-différente de celle de la figure précédente; mais si l'on mène la droite DE' parallèle à XX' à une distance OP = A₀, on obtient comme précédemment, pour la période condensée, une série de triangles DCE, D'C'E',... et pour la période dilatée des trapèzes tels que EIHD,....

Le rapport $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ est égal à

$$j' = \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{d}}{m^2 \sin^2 \pi \frac{b}{d}} = \frac{\sin^2 \pi m x}{m^2 \sin^2 \pi x}.$$

Les valeurs de ce rapport sont donc les carrés de celles du même rapport dans le cas précédent; on pourra donc faire à peu près les mêmes remarques : les courbes construites (*fig. 17*) sont un peu différentes; elles ne font que toucher la ligne des abscisses et se relèvent

Fig. 17.



au-dessus. Par suite, la droite parallèle à l'axe des y menée par le point $x = \frac{1}{2}$ est un diamètre pour toutes les courbes. Pour une même

valeur de x , la valeur de y sera plus faible que dans le cas précédent, et, par suite, les harmoniques supérieurs sont, en général, moins intenses. Évidemment, pour $x = 1$, on a également $\alpha_m = 0$.

Il n'est pas aussi facile de se rendre compte que précédemment de la symétrie des courbes, ou, si l'on veut, de la raison pour laquelle les rapports $\frac{b}{d}$ et $1 - \frac{b}{d}$ donnent les mêmes valeurs pour $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$. Supposons d'abord le facteur $ka = 1$; car il n'influe que sur l'intensité absolue de tous les sons simultanés, et non sur la valeur relative des divers harmoniques. Cela posé, si l'on prend deux cas correspondant à deux valeurs $\frac{b}{d}$ et $\frac{b'}{d'}$, en admettant $\frac{b'}{d'} = 1 - \frac{b}{d}$, les courbes $y = A_0$ seront semblables, et, par suite, correspondront à deux sons de même timbre.

En effet, étant posé $ka = 1$ avec $\frac{b}{d} < \frac{1}{2}$ (*fig. 15*), on a

$$OC = b, \quad OB = b \quad \text{et} \quad OP = A_0 = \frac{b^2}{d};$$

dans le triangle DCE :

$$\text{Base} \dots \dots \dots DE = 2b \left(1 - \frac{b}{d}\right),$$

$$\text{Hauteur} \dots \dots \dots CP = b \left(1 - \frac{b}{d}\right);$$

dans le trapèze EBA'D' :

$$\text{Bases} \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} BA' = d \left(1 - \frac{2b}{d}\right), \\ AD' = d \left[1 - \frac{2b}{d} \left(1 - \frac{b}{d}\right)\right], \end{array} \right.$$

$$\text{Hauteur} \dots \dots \dots A_0 = \frac{b^2}{d}.$$

Si, au contraire, on suppose $\frac{b}{d} = \frac{b'}{d'} > \frac{1}{2}$, on aura (*fig. 16*), dans le triangle DCE :

$$\text{Base} \dots \dots \dots DE = 2b' \left(1 - \frac{b'}{d'}\right),$$

$$\text{Hauteur} \dots \dots \dots CP = b' \left(1 - \frac{b'}{d'}\right);$$

et, dans le trapèze EIHD' :

$$\begin{aligned} \text{Bases} \dots & \left\{ \begin{array}{l} \text{ED}' = d' \left[1 - \frac{2b'}{d'} \left(1 - \frac{b'}{d'} \right) \right], \\ \text{HI} = \text{A}'\text{B} = 2d' \left(\frac{2b'}{d'} - 1 \right), \end{array} \right. \\ \text{Hauteur} \dots \text{IR} = \text{A}_0 - \text{IA}' & = d' \left(1 - \frac{b'}{d'} \right)^2. \end{aligned}$$

Or, si l'on admet $\frac{b}{d} = 1 - \frac{b'}{d'}$, on aura pour toutes ces lignes (*fig. 13*),
avec $\frac{b}{d} < \frac{1}{2}$, pour le triangle DBE :

$$\begin{aligned} \text{Base} \dots \dots \dots \text{DE} & = \frac{2bb'}{d'}, \\ \text{Hauteur} \dots \dots \dots \text{CP} & = \frac{bb'}{d'}; \end{aligned}$$

pour le trapèze ED'A'B :

$$\begin{aligned} \text{Bases} \dots \dots \dots & \left\{ \begin{array}{l} \text{A}'\text{B} = d \left(1 - \frac{2b}{d} \right), \\ \text{ED}' = d \left(1 - \frac{2bb'}{dd'} \right), \end{array} \right. \\ \text{Hauteur} \dots \dots \dots \text{A}_0 & = \frac{b^2}{d}; \end{aligned}$$

et, dans la *fig. 16*, avec $\frac{b}{d} > \frac{1}{2}$, pour le triangle DCE :

$$\begin{aligned} \text{Base} \dots \dots \dots \text{DE} & = \frac{2bb'}{d}, \\ \text{Hauteur} \dots \dots \dots \text{CP} & = \frac{bb'}{d}; \end{aligned}$$

et, pour le trapèze ED'HI :

$$\begin{aligned} \text{Bases} \dots \dots \dots & \left\{ \begin{array}{l} \text{ED}' = d' \left(1 - \frac{2bb'}{dd'} \right), \\ \text{HI} = d' \left(1 - \frac{2b}{d} \right), \end{array} \right. \\ \text{Hauteur} \dots \dots \dots \text{IR} & = \frac{b^2 d'}{d}. \end{aligned}$$

On voit donc que l'on passera de la *fig.* 15 à la *fig.* 16, en multipliant toutes les longueurs par le rapport $\frac{d'}{d}$. Les deux courbes étant semblables, on doit obtenir, dans ces deux cas, des sons jouissant du même timbre, mais avec des intensités absolues différentes. *On pourra donc, comme dans le cas précédent, remplacer les pleins par les vides et réciproquement, sans que la nature du son obtenu change.* Les mêmes harmoniques sont nuls pour les mêmes valeurs de $\frac{b}{d}$ que dans le cas précédent.

Pour que les deux périodes du mouvement vibratoire aient la même durée, il faut que l'on ait

$$DE = ED' = \frac{d}{2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{2b(d-b)}{d} = \frac{d}{2},$$

ce qui conduit à l'équation

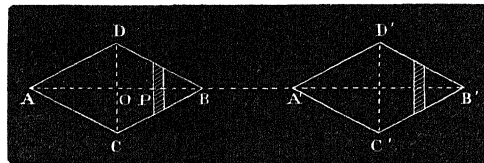
$$\left(\frac{b}{d} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{b}{d} = \frac{1}{2};$$

pour cette valeur, en effet, on a un son peu différent d'un son pendulaire, puisque le deuxième harmonique, avec tous les harmoniques pairs et tous les harmoniques impairs, quoique atteignant un minimum relatif, sont encore assez faibles.

V. *Ouvertures en forme de losange sur le disque et fentes étroites sur la boîte.* — Supposons que dans une sirène le fond de la boîte soit muni de fentes étroites, et le disque d'ouvertures en forme de losange.

Soient $AB = b$ et $CD = a$ (*fig.* 18) les deux diagonales de chaque

Fig. 18.



losange, et h la largeur de la fente étroite par laquelle l'air s'écoule, h étant supposé très-petit relativement à b ; soient encore $OP = x$, et v

la vitesse de déplacement du disque mobile dans la partie où se trouvent les ouvertures. Prenons comme précédemment l'origine du temps au moment où la fente étroite se trouve en O; alors on a

$$F(t) = kah \frac{b - 2x}{b} \text{ de } x = 0 \text{ à } x = \frac{b}{2}$$

et

$$F(t) = kah \frac{b + 2x}{b} \text{ de } x = -\frac{b}{2} \text{ à } x = 0.$$

En posant $\frac{b}{2} = b'$, on obtient

$$F(t) = \frac{kah}{b'} (b' - x) \text{ de } x = 0 \text{ à } x = b'$$

et

$$F(t) = \frac{kah}{b'} (b' + x) \text{ de } x = -b' \text{ à } x = 0.$$

Ces valeurs sont identiques à celles qu'on a obtenues dans le cas précédent multipliées par le facteur $\frac{h}{b'}$; on aura donc, comme plus haut,

$$(16) \quad \alpha_m = \frac{2 kahd}{b' \pi^2} \frac{\sin^2 \pi \frac{mb'}{d}}{m^2} = \frac{4 kahd}{\pi^2 b} \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{2d}}{m^2}.$$

La discussion de α_m se ferait exactement comme dans le cas précédent, en remplaçant la largeur de chaque ouverture rectangulaire par la demi-diagonale de chaque losange; seulement ici, nécessairement, on a $d > 2b'$ ou $d > b$. L'intensité absolue des sons sera forcément très-faible à cause de $\frac{h}{b'}$, qui se trouve en facteur dans α_m .

VI. *Deux ouvertures en losange glissant l'une devant l'autre.* — Supposons que dans une sirène la boîte et le disque portent des ouvertures en forme de losange. Soient ABCD, A'B'C'D' (*fig. 19*) deux losanges se recouvrant en partie; prenons l'origine du temps à l'instant où les deux losanges coïncident complètement. Soient AA' = x , AC = b , BD = a . La figure AMCM' (*fig. 19*) est un losange semblable à ABCD;

on a

$$MM' = \frac{a(b-x)}{b}, \text{ puisque } A'C = b-x;$$

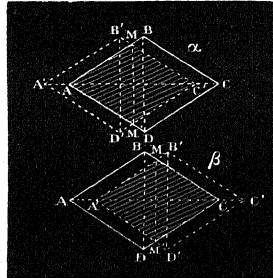
$$\text{surf } A'MCM' = \frac{a(b-x)^2}{2b};$$

$$F(t) = \frac{ka}{2b}(b-x)^2, \text{ de } x=0 \text{ à } x=b, \text{ avec } x=vt \text{ (fig. 19, } \beta);$$

$$F(t) = \frac{ka}{2b}(b+x)^2, \text{ de } x=-b \text{ à } x=0 \text{ (fig. 19, } \alpha).$$

$F(t)$ peut donc être représenté par les ordonnées de deux paraboles.

Fig. 19.



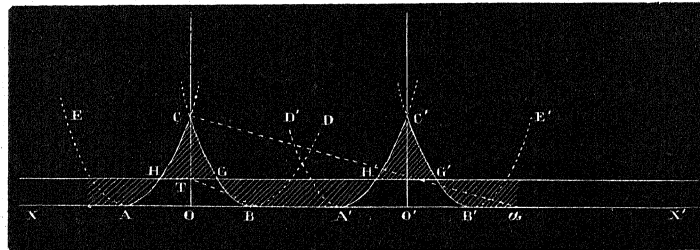
Si $OB = b$ (fig. 20), la courbe BCB'D a pour équation

$$y = \frac{h}{b^2}(b-x)^2,$$

et la courbe CAE

$$y = \frac{h}{b^2}(b+x)^2, \text{ avec } OC = h = \frac{hab}{2};$$

Fig. 20.



ces deux courbes entre les points A et C pour l'une, C et B pour l'autre,

représentent $F(t)$ de $x = -b$ à $x = +b$. On aura donc

$$A_0 = \frac{ka}{2bd} \int_{-b}^0 (b+x)^2 dx + \frac{ka}{2bd} \int_0^b (b-x)^2 dx = \frac{kab^2}{3d},$$

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{2ka}{bd} \int_{-b}^0 (b+x)^2 \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx \\ &= \frac{kad}{m^2 \pi^2} \left(1 - \frac{d}{2b\pi} \frac{\sin \frac{2\pi mb}{d}}{m} \right), \end{aligned}$$

$$B_m = 0;$$

donc

$$(17) \quad \alpha_m = A_m = \frac{kad}{\pi^2} \frac{1 - \frac{d}{2b\pi} \frac{\sin \frac{2\pi mb}{d}}{m}}{m^2}.$$

Si l'on mène la droite $G'H'$ à une distance de XX' égale à $A_0 = \frac{2hb}{3d}$ (*fig. 20*), où $OC = h$, $OB = b$, $O\alpha = \frac{3d}{2}$, HCG , $H'C'G'$ représenteront la période de condensation, et $GBA'H'$ celle de la dilatation. Quoiqu'il y ait en C discontinuité, cependant la forme générale de ces courbes peut permettre de prévoir que les harmoniques supérieurs seront peu intenses.

Le rapport $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ est égal à

$$y = \frac{1 - \frac{d}{2\pi b} \frac{\sin \frac{2\pi mb}{d}}{m}}{m^2 \left(1 - \frac{d}{2\pi b} \frac{\sin \frac{2\pi b}{d}}{d} \right)};$$

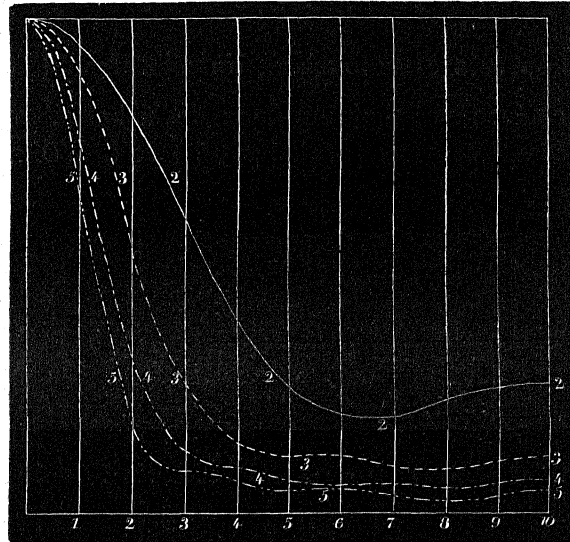
les valeurs de y pour $m = 2, 3, 4, 5$ sont construites (*fig. 21*). On voit que, si l'on pose $\frac{b}{d} = x$:

1° Pour $x = 0$, $y = 1$ et $\frac{dy}{dx} = 0$.

2° Pour $x = 1$ et $x = \frac{1}{2}$, y a les mêmes valeurs; en effet, $\sin 2\pi mx = 0$, et $y = \frac{1}{m^2}$; de plus, pour $x = 1$, on a $\frac{dy}{dx} = 0$.

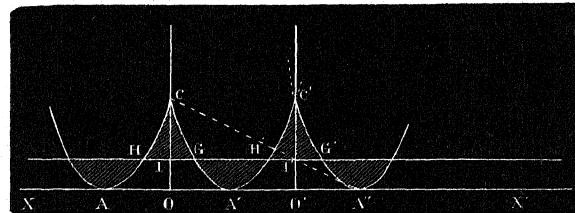
Pourquoi obtient-on les mêmes valeurs de y pour $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$ et $\frac{b}{d} = 1$, c'est-à-dire quand les ouvertures se touchent, et quand leur distance est égale à leur largeur?

Fig. 21.



Si $\frac{b}{d} = \frac{1}{2}$, les ouvertures sont à une distance égale à la diagonale dirigée dans le sens du mouvement; la demi-parabole A'C' fait suite immédiatement à CB (fig. 20), et la partie rectiligne BA' est supprimée,

Fig. 22.



comme on le reconnaît (fig. 22); la courbe figurative du mouvement vibratoire est donc la parabole

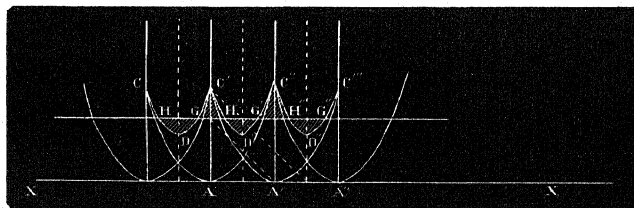
$$y = \frac{h}{b^2} x^2,$$

coupée par la droite HG' à une distance de $\frac{h}{3}$ de son sommet; l'équation de la parabole rapportée à la ligne HG' est, par suite,

$$y = \frac{h}{b^2} \left(x^2 - \frac{b^2}{3} \right) = \frac{h}{b^2} x^2 - \frac{h}{3}.$$

Si $\frac{b}{d} = 1$, les ouvertures se touchent immédiatement, et une ouverture du disque en recouvre toujours deux de la boîte, sauf quand il y a coïncidence complète. Les paraboles CBD et $C'A'D'$ se coupent, le

Fig. 23.



point A' coïncidant avec O (*fig. 20*), comme on le voit *fig. 23*; on a pour la valeur de y , par suite,

$$y = \frac{h}{b^2} (b-x)^2 + \frac{h}{b^2} x^2 = \frac{h}{b^2} (b^2 + 2x^2 - 2bx),$$

nouvelle parabole qui, rapportée à son sommet et aux axes habituels, a pour équation

$$y = \frac{2h}{b^2} x^2;$$

on a dans ce cas

$$\Lambda_0 = \frac{kab}{3} = \frac{2h}{3},$$

et, par suite, l'équation de la parabole rapportée à la ligne HG'' devient

$$y = \frac{2hx^2}{b^2} - \frac{h}{6},$$

courbe semblable à la précédente, et semblablement placée par rapport aux axes des coordonnées. Donc, les courbes figuratives du mouvement étant semblables, les sons produits auront le même timbre.

3° La *fig. 21* fait voir que le deuxième harmonique l'emporte notablement sur tous les autres, qui décroissent très-rapidement et conservent ensuite une valeur sensiblement constante, quoique très-faible. Le minimum du deuxième harmonique paraît correspondre à $\frac{b}{d} = x = 0,64$ environ.

Or, si l'on cherche la valeur de $\frac{b}{d}$, pour laquelle les deux lignes HG et GH' (*fig. 20*) ont la même longueur, on trouve qu'il n'y en a aucune. En effet, pour trouver l'abscisse du point G, on est conduit à résoudre l'équation

$$\frac{(b-x)^2}{2b} = \frac{b^2}{3d}, \quad \text{d'où} \quad x = b - \sqrt{\frac{2}{3} \frac{b^3}{d}}.$$

On doit poser cette valeur égale à $\frac{d}{4}$, ce qui conduit à l'équation

$$\frac{b}{d} - \sqrt{\frac{2}{3} \frac{b^3}{d^3}} = \frac{1}{4},$$

et, en posant $\frac{b}{d} = z^2$, on obtient l'équation du troisième degré

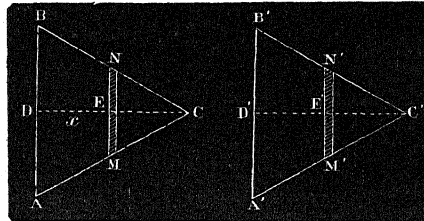
$$z^3 - \sqrt{\frac{3}{2}} z^2 + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} = 0,$$

équation qui n'a qu'une racine négative réelle; mais le premier membre est minimum et très-voisin de zéro pour $z = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $\frac{b}{d} = \frac{2}{3}$; pour cette valeur, les deux périodes dans lesquelles l'ébranlement peut être décomposé sont aussi voisines que possible de l'égalité. Or cette valeur de $\frac{b}{d} = \frac{2}{3} = 0,66$ est très-voisine de celle pour laquelle le second harmonique atteint son minimum.

VII. *Ouverture triangulaire et fente étroite.* — Seebeck a étudié par l'expérience ce cas et les trois suivants; quoiqu'il n'indique aucun résultat bien net, j'ai pensé devoir y appliquer également la théorie générale. Supposons donc le plateau de la sirène muni d'ouvertures triangulaires et la boîte de fentes étroites dirigées suivant des rayons.

Soient ABC (*fig. 24*) une des ouvertures triangulaires du disque, MN une des fentes étroites, h la largeur de cette fente, a la base AB du

Fig. 24.

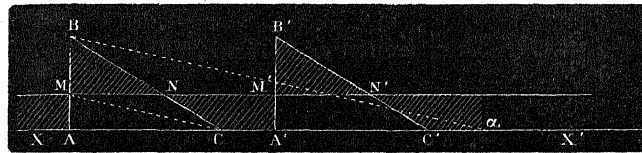


triangle, et $CD = b$ sa hauteur, enfin $x = DE$, avec $x = vt$. On aura par suite

$$F(t) = \frac{kah(b-x)}{b}, \quad \text{de } x = 0 \text{ à } x = b.$$

Dans la *fig. 25* se trouve tracée la courbe figurative du mouvement

Fig. 25.



vibratoire, en posant $AB = kah = c$, $AC = b$ et $AA' = d$. On aura ainsi

$$A_0 = \frac{kahb}{2d} = \frac{cb}{2d},$$

$$A_m = \frac{2kah}{bd} \int_0^b (b-x) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx = \frac{kahd}{\pi^2 b} \frac{\sin^2 \pi \frac{mb}{d}}{m^2},$$

$$B_m = \frac{2kah}{bd} \int_0^b (b-x) \sin 2\pi \frac{mx}{d} dx = \frac{kah}{m\pi} \left(1 - \frac{d}{2\pi mb} \sin 2\pi \frac{mb}{d} \right).$$

Donc

$$z_m^2 = A_m^2 + B_m^2,$$

$$(18) \quad z_m^2 = \frac{k^2 a^2 h^2}{\pi^2} \left[\frac{d^2}{\pi^2 b^2} \frac{\sin^4 \pi \frac{mb}{d}}{m^4} + \frac{1}{m^2} \left(1 - \frac{d}{2\pi mb} \sin 2\pi \frac{mb}{d} \right)^2 \right].$$

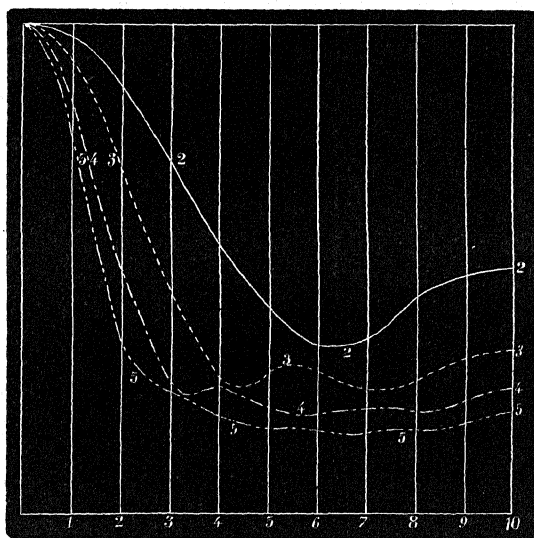
En menant la droite MN' (*fig.* 25) à la distance A_0 de XX' ($AB = c$, $AC = b$, $A\alpha = 2d$), les triangles MBN représenteront la période de condensation, et $NCA'M'$ celle de dilatation.

La *fig.* 26 représente les valeurs de $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ pour $m = 2, 3, 4, 5$.

On peut remarquer :

1° Que les harmoniques supérieurs sont en général assez intenses,

Fig. 26.



ce qui provient de la discontinuité du mode d'ébranlement; le deuxième l'emporte sur tous les autres et a son minimum pour $\frac{b}{d} = 0,63$ environ; les autres décroissent assez rapidement, quand $\frac{b}{d}$ augmente, et ne varient plus que dans de faibles limites.

2° Quand $\frac{b}{d}$ décroît, B_m devient très-petit relativement à A_m , qui devient constant et égal à $2A_0$. Par suite, si les ouvertures sont très-éloignées, on obtient les mêmes valeurs pour $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ que dans le cas de deux rectangles glissant l'un devant l'autre.

3° Si l'on cherche la condition pour que les deux périodes du mouvement vibratoire aient la même durée, on trouve que l'on doit avoir

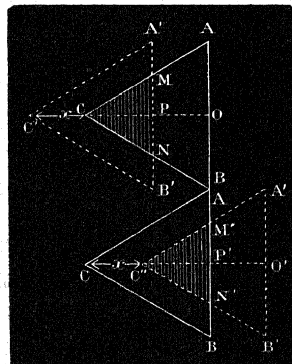
$\frac{b}{d} = 1$; or, dans la *fig.* 26, on voit que le minimum du deuxième harmonique a lieu pour $\frac{b}{d} = 0,63$ environ. On ne retrouve donc plus la coïncidence observée dans tous les autres cas; c'est la seule exception que j'ai observée. Elle pourrait peut-être s'expliquer par ce fait que, pour $\frac{b}{d} = 0$, $A_m = 0$ et $B_m = \frac{kah}{m\pi}$, et que, par suite, pour cette valeur, la fonction $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ a une tout autre forme que pour les autres valeurs de $\frac{b}{d}$. De plus, pour cette valeur $\frac{b}{d} = 1$, le trapèze NCA'M' (*fig.* 25) est remplacé par un triangle.

Si l'on suppose le triangle placé en sens inverse, de telle sorte que l'ébranlement augmente progressivement pour finir brusquement, on reconnaît que A_m conserve la même valeur, tandis que B_m change de signe; par suite, α_m ne change pas; il n'y a de différence que dans les phases des harmoniques, ce qui n'influe nullement sur le timbre du son produit.

VIII. *Deux ouvertures triangulaires glissant l'une devant l'autre.* — Supposons la boîte de la sirène et le plateau munis d'ouvertures triangulaires dirigées dans le même sens. Prenons l'origine du temps à l'instant où les ouvertures coïncident complètement.

On aura (*fig.* 27) $F(t) = k \times MCN$ pour les valeurs négatives, et

Fig. 27.



$F(t) = k \times M'N'C'$ pour t positif. Soient $AB = a$, $OC = b$, $CC' = CC'' = x$,

avec $x = vt$. On aura

$$CP = b - x, \quad MN = \frac{a(b-x)}{b}, \quad \text{Surf. MCN} = \frac{a(b-x)^2}{2b};$$

donc

$$F(t) = \frac{ka}{2b}(b-x)^2, \quad \text{de } x = 0 \text{ à } x = b,$$

et

$$F(t) = \frac{ka}{2b}(b+x)^2, \quad \text{de } x = -b \text{ à } x = 0.$$

On a donc exactement les mêmes formules que dans le cas de deux losanges glissant l'un devant l'autre; les harmoniques auront donc les mêmes intensités relatives.

IX. *Deux ouvertures triangulaires glissant en sens contraire.* — Si la boîte de la sirène et le disque mobile portent des ouvertures triangulaires disposées en sens inverse, prenons l'origine du temps à l'instant où les ouvertures sont dans la position relative ABC, A''B''C'' (fig. 28 et 29), c'est-à-dire quand les sommets et les bases se touchent.

Fig. 28.

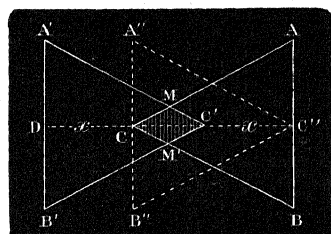
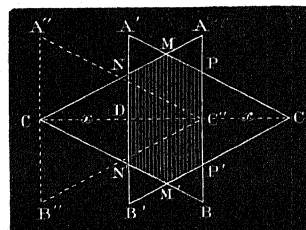


Fig. 29.



Soient $AB = a$, $CC'' = b$, $x = CD = C'C''$; de $x = -b$ à $x = 0$, l'ouverture par laquelle l'air s'écoule a la forme d'un losange CMC'M' (fig. 28); de $x = 0$ à $x = b$, elle a la forme d'un double trapèze NMPP'M'N' (fig. 29). On aura donc

$$F(t) = k \times \text{CMC'M'}, \quad \text{de } x = -b \text{ à } x = 0, \quad \text{avec } x = vt,$$

$$F(t) = \frac{ka}{4b}(b+x)^2,$$

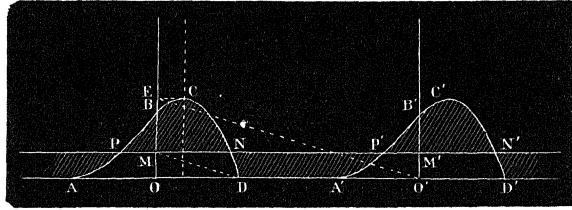
et

$$F(t) = k \times \text{NMPP'M'N'} = \frac{ka}{4b}(b+3x)(b-x) = \frac{ka}{4b}(b^2 + 2bx - 3x^2),$$

$$\text{de } x = 0 \text{ à } x = b.$$

$F(t) = \frac{ka}{4b}(b+x)^2$ représente une parabole telle que APB (fig. 30), en prenant $OB = \frac{kab}{4}$; $F(t) = \frac{ka}{4b}(b^2 + 2bx - 3x^2)$ représente une seconde parabole BCD, tangente en B à la première, et avec un para-

Fig. 30.



mètre trois fois moindre; la courbe figurative du mouvement est donc ABCD, A'B'C'D'.

Par suite, on aura

$$A_0 = \frac{1}{d} \left[\int_{-b}^0 \frac{ka}{4b}(b+x)^2 dx + \int_0^b \frac{ka}{4b}(b^2 + 2bx - 3x^2) dx \right]$$

$$= \frac{ka}{2bd} \int_0^b (b^2 - x^2) dx = \frac{kab^2}{3d},$$

$$A_m = \frac{ka}{2bd} \left[\int_{-b}^0 (b+x)^2 \cos \frac{2\pi mx}{d} dx + \int_0^b (b^2 + 2bx - 3x^2) \cos \frac{2\pi mx}{d} dx \right]$$

$$= \frac{ka}{bd} \int_0^b (b^2 - x^2) \cos \frac{2\pi mx}{d} dx$$

$$= \frac{-kad}{2m^2\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi mb}{d} - \frac{\sin \frac{2\pi mb}{d}}{\frac{2\pi mb}{d}} \right),$$

$$B_m = \frac{ka}{2bd} \left[\int_{-b}^0 (b+x)^2 \sin \frac{2\pi mx}{d} dx + \int_0^b (b^2 + 2bx - 3x^2) \sin \frac{2\pi mx}{d} dx \right]$$

$$= \frac{2ka}{bd} \int_0^b (bx - x^2) \sin \frac{2\pi mx}{d} dx$$

$$= \frac{kad}{2m^2\pi^2} \left(\frac{-d}{\pi mb} \cos \frac{2\pi mb}{d} + \frac{d}{\pi mb} - \sin \frac{2\pi mb}{d} \right),$$

$$\alpha_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}.$$

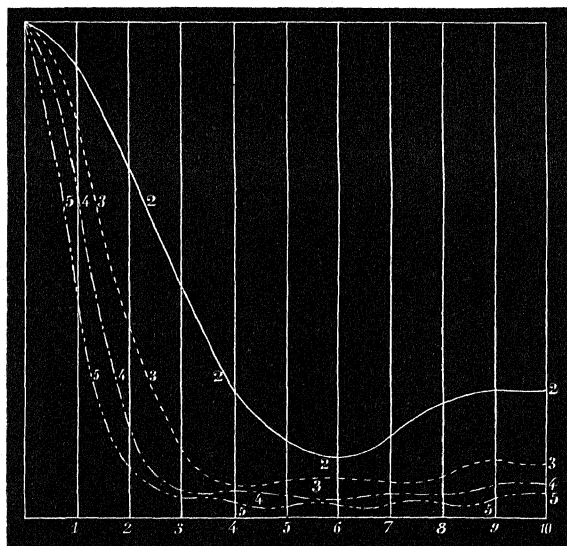
Vu la complication des valeurs de A_m et de B_m , il n'y a aucune simplification à chercher l'expression de α_m ; il vaut mieux calculer séparément A_m^2 et B_m^2 . On a ainsi

$$(19) \quad \alpha_m^2 = \left(\frac{kad}{\pi^2}\right)^2 \frac{1}{m^4} \left[\left(\cos \frac{2\pi mb}{d} - \frac{\sin \frac{2\pi mb}{d}}{\frac{2\pi mb}{d}} \right)^2 + \left(\frac{d}{\pi mb} - \frac{d}{\pi mb} \cos \frac{2\pi mb}{d} - \sin \frac{2\pi mb}{d} \right)^2 \right].$$

En menant la droite PN' parallèle à XX' (*fig.* 30) à une distance $A_0 = \frac{kab^2}{3d} = \frac{4OB \times b}{3d} = OM$, où $OE = \frac{4h}{3}$, $OD = b$, $OO' = d$, la partie $PBCN$ représentera la période de condensation, et $NDA'P'$ celle de dilatation.

Dans la *fig.* 31 se trouvent construites les courbes qui représentent

Fig. 31.



la valeur de $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$, pour les valeurs de $m = 2, 3, 4, 5$. Les harmoniques

supérieurs sont en général assez faibles, sauf le second, et décroissent à partir de $\frac{b}{d} = 0$, et d'autant plus vite que leur rang est plus élevé. Le cinquième a déjà une amplitude si faible qu'il pourrait à peine être entendu.

On reconnaît que pour $\frac{b}{d} = 0$, on a $\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = 1$ et $\frac{dy}{dx} = 0$.

Pour $\frac{b}{d} = 1$, on a $B_m = 0$; par suite, $A_m = -\frac{kad}{2m^2\pi^2}$; on obtient donc les mêmes valeurs, au signe près, que dans le cas de deux losanges ou de deux triangles dirigés dans le même sens : dans ce dernier cas, en effet, si $\frac{b}{d} = 1$, on a, à cause de la superposition des deux courbes (*fig.* 23),

$$F(t) = \frac{ka}{b} (b^2 - 2bx + 2x^2);$$

en posant $\frac{kab}{2} = h$; et en prenant pour axes des coordonnées la ligne $y = A_0 = \frac{kab}{3} = \frac{2h}{3}$ et $x = \frac{b}{2}$, comme on l'a fait précédemment, cette équation devient

$$y = \frac{2hx^2}{b^2} - \frac{h}{6}.$$

Si les triangles sont dirigés en sens contraire, pour $\frac{b}{d} = 1$ on a

$$y = \frac{ka}{4b} (b^2 + 2bx - 2x^2),$$

équation d'une parabole; en posant $\frac{kab}{4} = h'$, et prenant pour axes des coordonnées $y = A_0 = \frac{kab}{3}$, et $x = \frac{b}{2}$, cette équation devient

$$y = \frac{kab}{24} - \frac{kax^2}{2b}, \quad \text{ou bien} \quad y = \frac{h'}{6} - \frac{2h'x^2}{b^2}.$$

Or, pour deux triangles dans le même sens, on a obtenu dans ce cas

$$y = -\frac{h}{6} + \frac{2hx^2}{b^2}.$$

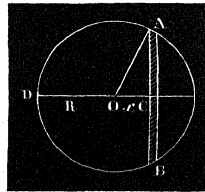
Les deux courbes sont dirigées en sens inverse; de plus, l'intensité

absolue n'est pas la même, puisque $h' = \frac{h}{2}$; mais comme dans h et h' entre le coefficient k , indéterminé, il en résulte que les sons obtenus seront les mêmes, quant au timbre, mais moins intenses, quand les triangles sont tournés en sens contraire, que quand ils sont dirigés dans le même sens.

Ces considérations sont du reste purement théoriques, puisqu'on ne peut réaliser ce cas dans la construction de la sirène, les ouvertures successives devant se toucher sans aucune interruption.

X. *Ouverture circulaire et fente étroite.* — Supposons que le fond de la boîte de la sirène porte des fentes étroites et le disque des ouvertures circulaires.

Fig. 32.



Soit AB la fente étroite (*fig. 32*); on aura

$$F(t) = k \times AB \times h,$$

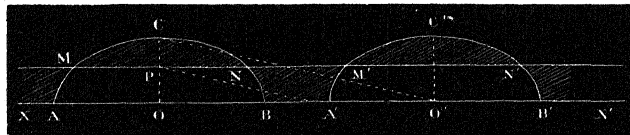
h étant la largeur de cette fente; donc,

$$F(t) = 2kh\sqrt{R^2 - x^2} = 2khR\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}},$$

en posant $OC = x$, $OD = R$, et $x = vt$.

La courbe qui caractérise dans ce cas la nature du mouvement est

Fig. 33.



une ellipse (*fig. 33*), dont l'équation est

$$F(t) = y = 2kh\sqrt{R^2 - x^2},$$

ou, en posant $2kh = \alpha$,

$$\frac{\gamma^2}{\alpha^2 R^2} + \frac{x^2}{R^2} = 1.$$

On aura par suite :

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{d} \int_{-R}^{+R} 2khR \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} dx = \frac{k\pi R^2 h}{d}, \\ \alpha_m &= A_m = \frac{4khR}{d} \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \cos \frac{2\pi mx}{d} dx, \\ B_m &= \frac{4khR}{d} \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} \sin \frac{2\pi mx}{d} dx = 0. \end{aligned}$$

Pour obtenir α_m , il faut développer en série l'expression à intégrer; le mode le plus simple de développement consiste à remplacer le cosinus par la série en fonction de l'arc. On aura, par suite,

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{4khR}{d} \left[\int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} dx - \frac{1}{1.2} \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^2 \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} x^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1.2.3.4} \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^4 \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} x^4 dx - \dots \right]. \end{aligned}$$

Chacune de ces quadratures s'effectuera facilement si l'on pose

$$\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} = \cos \varphi, \text{ d'où } x = R \sin \varphi, \quad dx = R \cos \varphi d\varphi;$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} x^{2k} dx &= R^{2k+1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin^{2k} \varphi d\varphi \\ &= R^{2k+1} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \varphi d\varphi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2} \varphi d\varphi \right). \end{aligned}$$

Or on sait que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \varphi d\varphi = \frac{1.3.5 \dots (2k-1)\pi}{2.4.6 \dots 2k} \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} \varphi d\varphi = \frac{1.3.5 \dots (2k-1)\pi}{2.4.6 \dots 2k} \pi.$$

Par suite

$$\int_{-R}^{+R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} x^{2k} dx = R^{2k+1} \pi \left[\frac{1.3.5 \dots (2k-1)}{2.4.6 \dots 2k} - \frac{1.3.5 \dots (2k+1)}{2.4.6 \dots (2k+2)} \right]$$

$$= \pi R^{2k+1} \frac{1.3.5 \dots (2k-1)}{2.4.6 \dots 2k.(2k+2)}.$$

Donc on aura

$$\alpha_m = \frac{4khR}{d} \left[\frac{\pi R}{2} - \frac{1}{1.2} \frac{1}{2.4} \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^2 \pi R^3 + \frac{1}{1.2.3.4} \frac{1.3}{2.4.6} \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^4 \pi R^5 \right. \\ \left. - \frac{1}{1.2.3.4.5.6} \frac{1.3.5}{2.4.6.8} \left(\frac{2\pi m}{d} \right)^6 \pi R^7 + \dots \right],$$

ou bien encore, mettant $\frac{\pi R}{2}$ en facteur, introduisant le diamètre Δ du cercle, et faisant diverses réductions, on arrive à

$$(20) \left\{ \begin{aligned} \alpha_m &= \frac{kh\pi\Delta^2}{2d} \left[1 - \frac{1}{1} \frac{1}{1.2} \left(\frac{\pi m \Delta}{2d} \right)^2 + \frac{1}{1.2} \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{\pi m \Delta}{2d} \right)^4 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{1.2.3} \frac{1}{1.2.3.4} \left(\frac{\pi m \Delta}{2d} \right)^6 + \dots \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{1}{1.2.3 \dots n} \frac{1}{1.2.3 \dots (n+1)} \left(\frac{\pi m \Delta}{2d} \right)^{2n} + \dots \right]. \end{aligned} \right.$$

Cette série est peu convergente, quand m devient considérable, et l'on est obligé de prendre un grand nombre de termes, et de calculer dans chacun d'eux un grand nombre de chiffres.

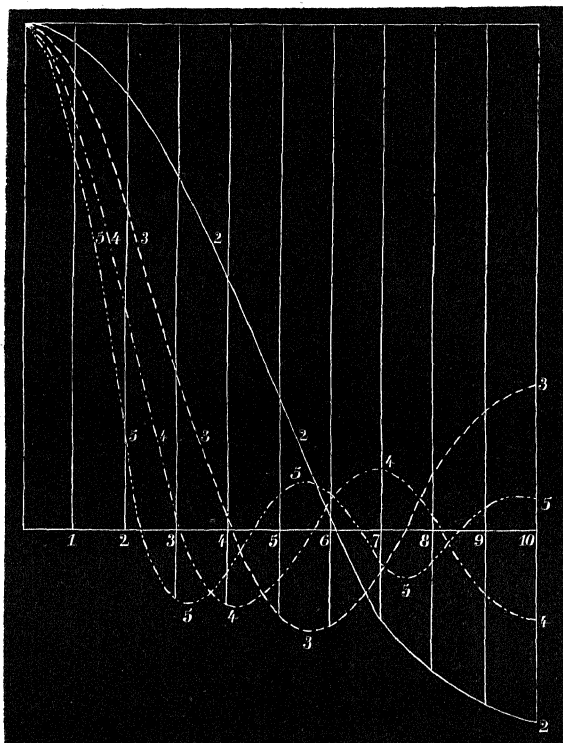
Si l'on mène une parallèle à XX' à une distance $A_0 = \frac{h\pi R^2 h}{d}$ (*fig.* 33), la partie MCN représente la période de condensation, et $NBA'M'$ celle de dilatation.

Dans la *fig.* 34 se trouvent construites les courbes qui donnent les valeurs de $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ pour $m = 2, 3, 4, 5$; leur exactitude peut laisser un peu à désirer pour les valeurs de $\frac{b}{d}$ voisines de 1. On peut remarquer que :

1° Comme dans tous les autres cas, pour $\frac{b}{d} = 0$, on a $\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = 0$ et $\frac{d\alpha}{dx} = 0$.

2° Chaque harmonique passe par 0, un nombre de fois marqué par son rang diminué d'une unité.

Fig. 3.j.



3° Le deuxième harmonique est nul pour $\frac{b}{d} = 0,61$. Pour qu'il y ait égalité entre les deux périodes de l'ébranlement, il faut résoudre l'équation

$$\frac{\pi\Delta}{d} = 4\sqrt{1 - \frac{d^2}{14\Delta^2}} \quad \text{ou} \quad \pi x = 4\sqrt{1 - \frac{1}{4x^2}},$$

ou bien

$$\pi^2 x^4 - 16x^2 + 4 = 0.$$

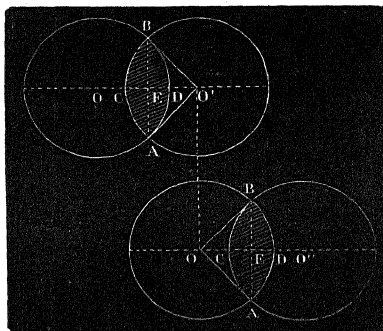
On trouve pour x la valeur 0,555, valeur peu éloignée de celle 0,61, pour laquelle le deuxième harmonique est nul.

4° On peut remarquer une certaine analogie entre les courbes obtenues dans ce cas, et celles qui correspondent à un rectangle et une

fente étroite (*fig. 12*), surtout quand les ouvertures sont assez éloignées les unes des autres. Les courbes décroissent ici un peu moins rapidement : ceci démontre qu'approximativement on pourrait remplacer les cercles par des carrés inscrits.

XI. *Deux ouvertures circulaires glissant l'une devant l'autre.* — Soient O et O' les centres de deux ouvertures circulaires placées sur le fond de la boîte et le plateau de la sirène (*fig. 35*); l'air s'écoule par la

Fig. 35.



surface commune aux deux ouvertures ACBD. On pourra donc poser

$$F(t) = k \times \text{ACBD}, \text{ de } x = -\Delta \text{ à } x = +\Delta,$$

en représentant par Δ le diamètre des ouvertures, par x la distance des centres et posant $x = \rho l$. Or la surface ACBD est égale au double de la surface AEBD, qui elle-même est la différence du secteur AOB et du triangle OAB. Or $OE = \frac{x}{2}$; donc on aura

$$\text{Secteur AOB} = R^2 \arccos \frac{x}{2R},$$

$$\text{Triangle AOB} = \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - \frac{x^2}{4}};$$

$$F(t) = \frac{k\Delta}{2} \left(\Delta \arccos \frac{x}{\Delta} - x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right), \text{ de } x = 0 \text{ à } x = \Delta.$$

Pour les x négatifs, on aurait

$$F(t) = \frac{k\Delta}{2} \left[\Delta \left(\pi - \arccos \frac{x}{\Delta} \right) + x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right], \text{ de } x = -\Delta \text{ à } x = 0.$$

Par suite, on pourra poser

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{-\Delta}^0 \frac{k\Delta}{2} \left[\Delta \left(\pi - \arccos \frac{x}{\Delta} \right) + x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{d} \int_0^{\Delta} \frac{k\Delta}{2} \left(\Delta \arccos \frac{x}{\Delta} - x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right) dx \\ &= \frac{k^2 \Delta}{d} \int_0^{\Delta} \left(\arccos \frac{x}{\Delta} - \frac{x}{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right) dx = \frac{2k\Delta^3}{3d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{k\Delta}{d} \int_{-\Delta}^0 \left[\Delta \left(\pi - \arccos \frac{x}{\Delta} \right) + x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right] \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx \\ &\quad + \frac{k\Delta}{d} \int_0^{\Delta} \left(\Delta \arccos \frac{x}{\Delta} - x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx \\ &= \frac{2k\Delta^2}{d} \int_0^{\Delta} \left(\arccos \frac{x}{\Delta} - \frac{x}{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \right) \cos 2\pi \frac{mx}{d} dx, \end{aligned}$$

$$B_m = 0.$$

Intégrant A_m par parties, on arrive à

$$A_m = \alpha_m = \frac{2k\Delta}{m\pi} \int_0^{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \sin 2\pi \frac{mx}{d} dx.$$

Développant $\sin 2\pi \frac{mx}{d}$ en série, on a

$$\alpha_m = \frac{2k\Delta}{m\pi} \int_0^{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} \left[\frac{2m\pi}{d} x - \frac{1}{1.2.3} \left(\frac{2m\pi}{d} \right)^3 x^3 + \frac{1}{1.2.3.4.5} \left(\frac{2m\pi}{d} \right)^5 x^5 - \dots \right] dx.$$

On trouve, par la méthode employée précédemment,

$$\int_0^{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} x^{2k+1} dx = \frac{2.4.6 \dots 2k}{3.5.7 \dots (2k+1)(2k+3)} \Delta^{2k+2}$$

et

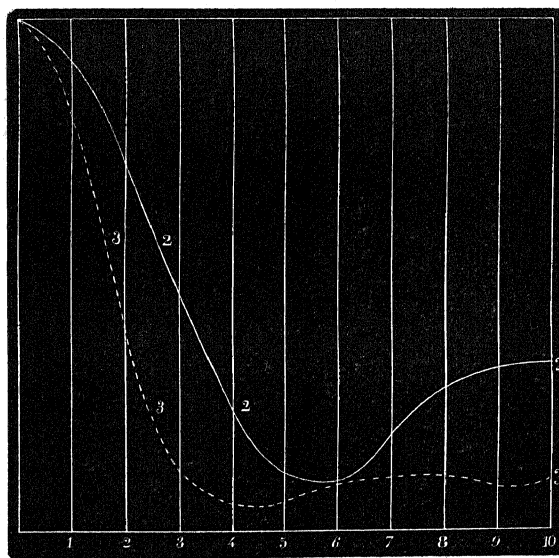
$$\int_0^{\Delta} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}} x dx = \frac{\Delta^2}{3}.$$

Donc on aura en définitive, pour α_m ,

$$\alpha_m = \frac{4k\Delta^3}{3d} \left[1 - \frac{1}{3} \frac{1}{5} \left(\frac{2m\pi\Delta}{d} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{1}{5} \frac{1}{7} \left(\frac{2m\pi\Delta}{d} \right)^4 - \frac{1}{3} \frac{1}{5} \frac{1}{7} \frac{1}{9} \left(\frac{2m\pi\Delta}{d} \right)^6 + \dots \right. \\ \left. \pm \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2k+1)} \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9 \dots (2k+3)} \left(\frac{2m\pi\Delta}{d} \right)^{2k} \mp \dots \right].$$

Cette série est moins convergente que la précédente, et, à moins de calculer chaque terme de la série avec dix à douze chiffres, on ne peut obtenir la valeur de α_m , pour des valeurs de $\frac{\Delta}{d}$ et de m un peu grandes; je n'ai pu construire, par suite, que les courbes correspondantes à $m=2$ et $m=3$ (fig. 36), n'ayant pas de machine à calculer permettant d'obtenir plus de six chiffres.

Fig. 36.



Si l'on construit la courbe représentée par $F(t)$, on obtient, en posant $\frac{k\Delta}{2} = 1$,

$$y = \Delta \arccos \frac{x}{\Delta} - x \sqrt{1 - \frac{x^2}{\Delta^2}}$$

pour $x = 0$, on a $\frac{dy}{dx} = -2$, et, pour $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$.

La courbe ainsi obtenue (*fig. 37*) diffère peu d'une ligne droite dans une grande partie de son étendue. $AB = \frac{\pi\Delta}{2}$; on a

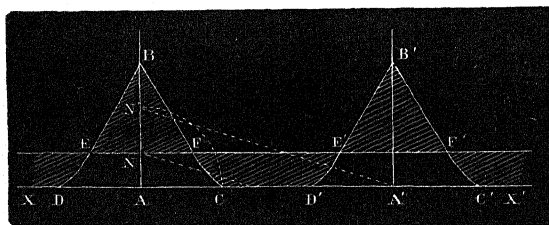
$$A_0 = \frac{2k\Delta^3}{3d},$$

et, comme $\frac{k\Delta}{2} = 1$, on aura

$$A_0 = \frac{4\Delta^3}{3d} = \Delta \frac{4}{3} \frac{\Delta}{d};$$

en menant une parallèle à XX' à cette distance, EBF représentera la période de condensation et $FCD'E'$ celle de la dilatation.

Fig. 37.



Le deuxième harmonique a son minimum vers 0,54 environ. Si l'on cherche la condition pour que les deux périodes du mouvement vibratoire aient la même durée, on est conduit à résoudre l'équation

$$\frac{4\Delta}{3d} = \arccos \frac{d}{4\Delta} - \frac{d}{4\Delta} \sqrt{1 - \frac{d^2}{16\Delta^2}},$$

ou, en posant $\frac{d}{4\Delta} = x$,

$$\frac{1}{3x} = \arccos x - x \sqrt{1 - x^2}.$$

En construisant séparément les deux courbes

$$y = \frac{1}{3x}, \quad y' = \arccos x - x \sqrt{1 - x^2},$$

on reconnaît qu'elles ne se coupent pas, mais que leur distance est minimum pour $x = 0,4249$, ce qui donne $\frac{\Delta}{d} = 0,588$, valeur peu différente de celle qui correspond au minimum du deuxième harmonique 0,54.

Si dans les deux cas précédents, on remplace les ouvertures circulaires par des ouvertures elliptiques, on arrive à des formules presque identiques, et qui ne diffèrent des précédentes que par un coefficient constant, ce qui démontre que les harmoniques suivent exactement la même marche que dans le cas d'ouvertures circulaires.

Par suite, on voit que, dans la sirène ordinairement employée, et qui est munie d'ouvertures elliptiques, on devra, pour obtenir un son aussi rapproché que possible d'un son pendulaire, placer les ouvertures à une distance telle, que leur grand diamètre soit environ un peu plus de la moitié de la distance des centres, ou bien que ce diamètre soit un peu plus grand que la partie pleine du disque qui sépare les ouvertures.

En résumé, si l'on compare entre elles les courbes qui expriment les valeurs du rapport $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$, pour les divers cas qui ont été examinés, on remarquera que :

1° Dans tous les cas, pour $\frac{b}{d} = 0$, $\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = 0$, c'est-à-dire quand les ouvertures sont très-éloignées par rapport à leurs dimensions, les amplitudes des harmoniques deviennent égales entre elles.

2° Dans cinq cas seulement, chaque harmonique devient nul pour certaines valeurs de $\frac{b}{d}$: c'est quand l'ébranlement est formé de la moitié d'un son pendulaire (*fig.* 6, p. 289); quand le fond de la boîte de la sirène porte des fentes étroites et le disque des entailles en forme de sinusoïde (*fig.* 9, p. 293), ou bien des ouvertures rectangulaires (*fig.* 12, p. 296), ou circulaires (*fig.* 34, p. 320), et enfin quand le fond de la boîte et le plateau portent tous deux des ouvertures rectangulaires (*fig.* 17, p. 300).

De plus, chaque harmonique devient nul un nombre de fois marqué par son rang diminué d'une unité.

3° Dans les autres cas, aucun harmonique ne devient nul, quel que soit l'écartement des ouvertures; mais l'amplitude de chacun passe par un certain nombre de maxima, marqué également par le rang de l'harmonique diminué d'une unité. Seulement les maxima et les minima deviennent de moins en moins différents, à mesure que le rang de l'harmonique est plus élevé.

4° Les harmoniques supérieurs ont l'intensité maxima dans le cas d'une ouverture rectangulaire et d'une fente étroite, et leur intensité minima dans le cas de deux losanges ou de deux triangles en sens inverse; quand il y a une ouverture de forme quelconque avec une fente étroite, les harmoniques sont toujours plus intenses qu'avec deux ouvertures de même forme.

5° Dans deux cas, les sons conservent le même timbre, si l'on remplace les vides par des pleins, et réciproquement : c'est quand le disque porte des ouvertures rectangulaires et le fond de la boîte des ouvertures de même forme ou des fentes étroites.

6° On remarque la plus grande analogie entre les figures dues à la moitié d'un son pendulaire et celles qui répondent au cas d'une fente étroite avec une ouverture circulaire; l'analogie est moindre pour une fente étroite et une ouverture rectangulaire. Les courbes figuratives du mouvement, demi-sinusoïde, demi-ellipse et rectangle, présentent en effet une certaine analogie générale de forme, surtout par leur mode de terminaison.

MODE D'ÉBRANLEMENT.		VALEUR DE $\frac{b}{a}$ DONNANT	
FOND DE LA BOÎTE MUNI DE	DISQUE MOBILE MUNI DE	le minimum du 2 ^e harmonique.	l'égalité de durée des deux périodes.
Fentes étroites.....	Entailles en demi-sinusoïdes.	0,75	0,716
Id.	Id. en sinusoïdes.....	1	1
Id.	Ouvertures rectangulaires..	0,5	0,5
Id.	Id. triangulaires...	0,62	1
Id.	Id. circulaires.....	0,61	0,555
Ouvertures rectangulaires..	Ouvertures rectangulaires..	0,5	0,5
Id. en losanges....	Id. en losanges....	0,65	0,666...
Id. triangulaires...	Id. triangulaires...	0,60	de 0,5 à 0,75
Id. circulaires.....	Id. circulaires.....	0,58	0,588

7° De même il y a assez d'analogie entre le cas de deux ouvertures rectangulaires (*fig.* 17, p. 300), deux ouvertures en losanges (*fig.* 21, p. 307), deux ouvertures circulaires (*fig.* 36, p. 323), un triangle et fente étroite (*fig.* 26, p. 311), et deux triangles en sens contraire

(fig. 31, p. 315). Dans les courbes figuratives du mouvement, on trouve le plus souvent deux courbes ou deux droites coupant l'axe des x sous un angle variable, parfois nul, et présentant un point où il y a discontinuité dans la courbure (intersection de deux courbes ou droites).

8° Le minimum du deuxième harmonique a lieu, le plus souvent, quand le rapport de la largeur des ouvertures à leur écartement est compris entre 0,5 et 0,7, comme le montre le tableau précédent.

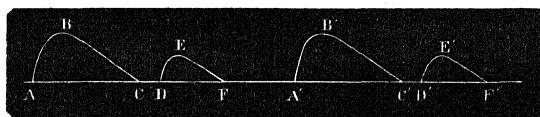
La condition pour que les deux périodes de l'ébranlement soient égales en durée, donnent pour $\frac{b}{a}$ des valeurs qui diffèrent peu des dernières, sauf dans le cas d'un triangle et d'une fente étroite. Dans le tableau : on a placé ces valeurs en regard des précédentes.

III. — Sons produits par deux ébranlements à des distances différentes.

I. *Deux ébranlements de même nature.* — Supposons que deux ébranlements différents, tous deux dans le même sens, se succèdent périodiquement; quelle sera la nature du son produit?

Soit $F(t)$ un des ébranlements représenté par la courbe ABC (fig. 38),

Fig. 38.



et $\varphi(t)$ le second, représenté par la courbe DEF, en prenant les origines des coordonnées en A et en D pour chacune de ces courbes; soient encore $\tau = AD$ l'intervalle des deux ébranlements, et $T = AA'$ la période du mouvement vibratoire. On a

$$F(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left[\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t-p_m)}{T} \right] = A_0 + \sum_1^{\infty} \left(A_m \cos 2\pi \frac{mt}{T} + B_m \sin 2\pi \frac{mt}{T} \right),$$

$$\varphi(t) = A'_0 + \sum_1^{\infty} \left[\alpha'_m \cos 2\pi \frac{m(t-p'_m)}{T} \right] = A'_0 + \sum_1^{\infty} \left(A'_m \cos 2\pi \frac{mt}{T} + B'_m \sin 2\pi \frac{mt}{T} \right),$$

$$\psi(t-\tau) = A'_0 + \sum_1^{\infty} \left[\alpha'_m \cos 2\pi \frac{m(t-p'_m-\tau)}{T} \right].$$

Soit $\psi(t)$ le mouvement résultant; on aura

$$\psi(t) = F(t) + \varphi(t - \tau) = A_0 + \sum \left[\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t - \theta_m)}{T} \right]$$

avec

$$\alpha_m^2 = A_m^2 + B_m^2, \quad \alpha'_m{}^2 = A'_m{}^2 + B'_m{}^2;$$

d'où, en développant et en posant, pour abrégier, $\frac{2\pi mt}{T} = u$,

$$\varphi(t) = A_0 + A'_0 + \sum_1^\infty \left[\begin{aligned} &\cos u \left(A_m + A'_m \cos \frac{2\pi m\tau}{T} - B'_m \sin \frac{2\pi m\tau}{T} \right) \\ &+ \sin u \left(B_m + A'_m \sin \frac{2\pi m\tau}{T} + B'_m \cos \frac{2\pi m\tau}{T} \right) \end{aligned} \right].$$

Par suite, on aura

$$(30) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 + \alpha'_m{}^2 + 2 \cos \frac{2\pi m\tau}{T} (A_m A'_m + B_m B'_m) + 2 \sin \frac{2\pi m\tau}{T} (B_m A'_m - A_m B'_m).$$

Si l'on admet que les deux ébranlements deviennent identiques (*fig.* 39), l'équation (30) donne

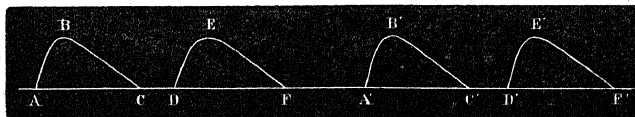
$$(31) \quad a_m^2 = 4\alpha_m^2 \cos^2 \frac{\pi m\tau}{T} \quad \text{ou} \quad a_m = 2\alpha_m \cos \frac{\pi m\tau}{T};$$

et l'on a

$$\psi(t) = 2A_0 + \sum_1^\infty 2\alpha_m \cos \frac{\pi m\tau}{T} \cos \frac{2\pi m \left(t - p_m - \frac{\tau}{2} \right)}{T}.$$

Discutons la valeur de a_m , et examinons les principaux cas qui peuvent se présenter, suivant les valeurs relatives de τ et de T . Il suffit de faire varier $\frac{\tau}{T}$ de 0 à $\frac{1}{2}$; car les valeurs $\frac{\tau}{T}$ et $1 - \frac{\tau}{T}$ donnent les mêmes valeurs absolues pour a_m , ce qu'on reconnaît, du reste, dans la *fig.* 39,

Fig. 39.



puisque ($AD = \tau$ et $DA' = T - \tau$) remplacer $\frac{\tau}{T}$ par $1 - \frac{\tau}{T}$ revient à dé-

placer l'origine de A en D, changement qui ne peut nullement influer sur la valeur des coefficients, ni sur la différence des phases.

1° Si $AD = \tau = 0$, chaque ébranlement est doublé; on obtient le même son avec une intensité quadruple.

A mesure que τ augmente, le son fondamental diminue, ainsi que les premiers harmoniques; seulement, comme ce terme, $\cos \frac{\pi m \tau}{T}$, varie d'autant plus rapidement que m est plus considérable, certains harmoniques disparaissent, puis deviennent plusieurs fois maxima.

2° Pour que l'on ait $\alpha_m = 0$, il faut que $\frac{m\tau}{T}$ soit égal à $\frac{(2k+1)}{2}$, ou $\frac{\tau}{T} = \frac{2k+1}{2m}$; ce qui donne

Pour $m = 1$, $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$;

Pour $m = 2$, $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$;

Pour $m = 3$, $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$;

Pour $m = 4$, $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{8}, \frac{3}{8}$;

Pour $m = 5$, $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}$;

et, en général,

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2m}, \frac{3}{2m}, \frac{5}{2m}, \dots$$

Si m est pair, la dernière valeur est $\frac{m-1}{2m}$, et si m est impair, on obtient $\frac{1}{2}$.

3° Le coefficient de α_m passe par sa valeur maxima si l'on a $\frac{m\tau}{T} = k$ ou $\frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}$; ce qui donne

Pour $m = 1$, $\frac{\tau}{T} = 0$;

Pour $m = 2$, $\frac{\tau}{T} = 0, \frac{1}{2}$;

Pour $m = 3$, $\frac{\tau}{T} = 0, \frac{1}{3}$;

$$\text{Pour } m = 4, \quad \frac{\tau}{T} = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2};$$

$$\text{Pour } m = 5, \quad \frac{\tau}{T} = 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5};$$

et, en général,

$$\frac{\tau}{T} = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots$$

Si m est pair, la dernière valeur est $\frac{1}{2}$; si m est impair, c'est $\frac{m-1}{2m}$.

4° Pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, on n'obtient que le son 2 avec ses harmoniques; les coefficients a_2, a_4, a_6, \dots sont exactement les mêmes que si, dans les formules fondamentales (3) qui donnent A_m et B_m , on remplaçait T par $\frac{T}{2}$; on obtient, en effet, de cette façon

$$A_m = 2A_{2m}, \quad B_m = 2B_{2m}.$$

En général si, dans les formules (3), on remplace T par $\frac{T}{p}$, on a

$$A_m = pA_{mp}, \quad B_m = pB_{mp} \quad \text{et} \quad a_m = p\alpha_{mp}.$$

Donc, si dans la série de Fourier on considère les divers coefficients $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_m$, les coefficients $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2m}$ représentent les amplitudes relatives du son fondamental et des harmoniques, si l'intervalle des ouvertures devient moitié moindre; les coefficients $a_3, a_6, a_9, \dots, a_{3m}$, ceux qui sont relatifs au son obtenu si cet intervalle est trois fois moindre, et, en général, les coefficients $a_p, a_{2p}, a_{3p}, \dots, a_{mp}$, ceux qui conviennent au cas où cet intervalle devient p fois moindre.

Comme l'a fait remarquer Seebeck, on entendra donc plus ou moins le son fondamental, ou son octave aiguë, suivant que $\frac{\tau}{T}$ sera plus ou moins voisin de 1 ou de $\frac{1}{2}$. Si $\frac{\tau}{T}$ est voisin de $\frac{1}{2}$, sans avoir exactement cette valeur, les harmoniques pairs sont très-intenses et, par leur coexistence, donnent la sensation de l'octave du son fondamental; cependant il est facile de faire voir que l'on pourra encore entendre en même temps d'autres harmoniques impairs, car le rapport de leurs amplitudes à celle

du son fondamental est multiplié par le chiffre correspondant à leur rang; prenons, en effet, le rapport $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$; on a

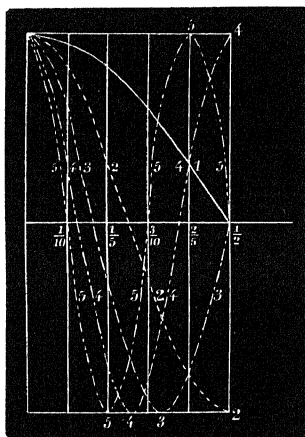
$$\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = \frac{\alpha_m}{\alpha_1} \frac{\cos \pi m \frac{\tau}{T}}{\cos \frac{\pi \tau}{T}}.$$

Pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, ce rapport est infini si m est pair, et égal à $\frac{\alpha_m}{\alpha_1}$ si m est impair.

Donc, quoique pour m impair α_m soit très-faible, on pourra entendre pour $\frac{\tau}{T}$, peu différent de $\frac{1}{2}$, avec l'octave aiguë, d'autres harmoniques impairs de préférence au son fondamental.

La *fig.* 40, où se trouvent construites les courbes $y = 2 \cos \frac{\pi \tau}{T}$,

Fig. 40.

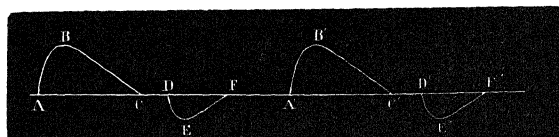


$2 \cos \frac{2\pi\tau}{T}$, $2 \cos \frac{3\pi\tau}{T}$, $2 \cos \frac{4\pi\tau}{T}$, $2 \cos \frac{5\pi\tau}{T}$, montre comment varie le coefficient de α_m pour les cinq premiers harmoniques, en faisant varier $\frac{\tau}{T}$ de 0 à $\frac{1}{2}$.

XI. *Deux ébranlements de sens contraires.* — Supposons que deux ébranlements de sens contraires se succèdent périodiquement; soient, comme précédemment, $F(t)$ et $\varphi(t)$ ces deux ébranlements (*fig.* 41);

en prenant les origines en A et D, si $\tau = AD$, l'intervalle des deux ébran-

Fig. 41.



lements, on aura, pour le mouvement résultant,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= F(t) - \varphi(t - \tau) \\ &= A_0 - A'_0 + \sum_m \left[\begin{aligned} &\cos u \left(A_m - A'_m \cos \frac{2\pi m \tau}{T} + B'_m \sin \frac{2\pi m \tau}{T} \right) \\ &+ \sin u \left(B_m - A'_m \sin \frac{2\pi m \tau}{T} - B'_m \cos \frac{2\pi m \tau}{T} \right) \end{aligned} \right], \end{aligned}$$

et

$$(32) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 + \alpha'_m{}^2 - 2 \cos \frac{2\pi m \tau}{T} (A_m A'_m + B_m B'_m) + 2 \sin \frac{2\pi m \tau}{T} (A_m B'_m - B_m A'_m).$$

Si les deux ébranlements deviennent identiques, on aura

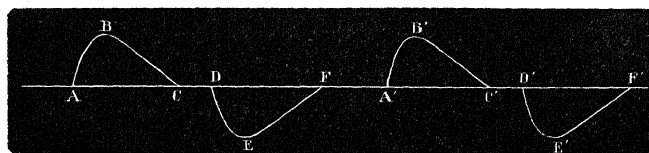
$$(33) \quad a_m^2 = 4 \alpha_m^2 \sin^2 \frac{\pi m \tau}{T} \quad \text{ou} \quad a_m = 2 \alpha_m \sin \frac{\pi m \tau}{T},$$

et

$$\psi(t) = \sum_1^\infty 2 \alpha_m \sin \frac{\pi m \tau}{T} \cos 2\pi \frac{m \left(t - p_m - \frac{\tau}{2} + \frac{T}{4m} \right)}{T}.$$

Il suffira, pour discuter les valeurs de a_m , de faire varier $\frac{\tau}{T}$ de 0 à $\frac{1}{2}$, puisque remplacer $\frac{\tau}{T}$ par $1 - \frac{\tau}{T}$ revient à changer l'origine des coordonnées, de A en D, comme on le voit dans la fig. 42

Fig. 42.



1° Si $\frac{\tau}{T} = 0$, le son fondamental et tous les harmoniques sont nuls,

puisque les deux ébranlements se détruisent; de même pour $\frac{\tau}{T} = 1$.

2° A mesure que $\frac{\tau}{T}$ augmente, l'amplitude de tous les sons croît en même temps, mais celle des harmoniques supérieurs d'autant plus rapidement que leur rang est plus élevé; en effet, l'on voit que le rapport

$$\frac{a_m}{a_1} = \frac{\alpha_m}{\alpha_1} \frac{\sin \pi m \frac{\tau}{T}}{\sin \pi \frac{\tau}{T}} = m \frac{\alpha_m}{\alpha_1} \text{ pour } \frac{\tau}{T} = 0. \text{ Donc, à moins que } \alpha_m \text{ ne}$$

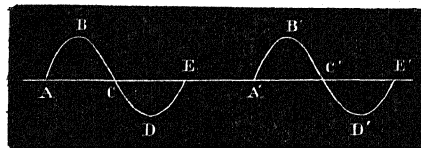
soit trop faible, on pourra entendre, si $\frac{\tau}{T}$ est peu différent de 0, les harmoniques supérieurs de préférence au son fondamental.

3° Si $\frac{\tau}{T}$ est égal à la durée même de l'ébranlement, et si, de plus, chaque son est formé de la moitié d'un son pendulaire, on obtient l'effet produit par des sons pendulaires isolés les uns des autres par des intervalles de silence plus ou moins grands. En prenant pour α_m la valeur donnée par la relation (13), on obtient

$$a_m = \frac{8a \frac{\omega}{T}}{\pi \left(1 - 4m^2 \frac{\omega^2}{T^2}\right)} \cos \pi \frac{m\omega}{T} \sin \pi \frac{m\omega}{T} = \frac{4a \frac{\omega}{T}}{\pi \left(1 - 4m^2 \frac{\omega^2}{T^2}\right)} \sin 2\pi \frac{m\omega}{T}.$$

Or si, comme on le voit dans la *fig.* 43, on pose $2\omega = \omega'$, ω' étant

Fig. 43.



la durée AE totale du son pendulaire, on a pour a_m ,

$$(34) \quad a_m = \frac{2a \frac{\omega'}{T}}{\pi \left(1 - m^2 \frac{\omega'^2}{T^2}\right)} \sin \pi \frac{m\omega'}{T}.$$

Cette formule ne diffère que par le coefficient $\frac{2\omega'}{T}$ et l'absence du

coefficient $\frac{1}{m}$ de celle (15) qui correspond au cas déjà étudié du son produit par une sirène dont le disque porte sur le bord des entailles en forme de sinusoides. Si l'on étudie la forme des courbes

$$y = \frac{a_m}{a_1} = \frac{1 - \frac{\omega'^2}{T^2}}{1 - \frac{m^2 \omega'^2}{T^2}} \frac{\sin \pi \frac{m \omega'}{T}}{\sin \pi \frac{\omega'}{T}},$$

on reconnaît qu'elle diffère de celle des courbes de la *fig. 9* en ce que, pour la même valeur de $\frac{\omega'}{T}$, l'ordonnée est ici multipliée par m . Il en résulte donc que, pour $\frac{\omega'}{T} = 0$, on a $y = m$, au lieu d'avoir $y = 1$, et que les inflexions des courbes seront plus accentuées. Il est facile de comprendre, du reste, pourquoi les harmoniques sont ici plus intenses que dans le cas cité plus haut. Dans ce dernier cas, la courbe figurative du mouvement (*fig. 8*) est moins discontinue que dans le cas de sons pendulaires isolés les uns des autres (*fig. 43*), puisque ici $A_0 = 0$, et on ne peut, d'aucune façon, relier les ébranlements les uns aux autres.

Nous avons vu, au commencement de ce travail, que, si un son est formé par des ébranlements, tous de même nature et dirigés dans un seul sens, jamais l'amplitude des harmoniques ne peut dépasser celle du son fondamental, et tend à lui devenir tout au plus égale, quand la durée de l'ébranlement est infiniment petite par rapport à la durée de la vibration. Dans le cas précédent, au contraire, pour des sons pendulaires isolés et très-écartés les uns des autres, l'amplitude des harmoniques supérieurs devient m fois plus considérable que celle du son fondamental. Il est facile de généraliser ce principe et de démontrer qu'il en est de même quand l'ébranlement est quelconque, mais formé de deux parties où les mouvements et les condensations ont lieu en sens inverse; en effet, soit AE la durée totale de l'ébranlement (*fig. 43*); plaçons l'origine en C au milieu, on aura

$$A_0 = 0, \quad A_m = 0,$$

$$B_m = \frac{4}{d} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} F\left(\frac{x}{d}\right) \sin 2\pi \frac{mx}{d} dx.$$

Si l'on suppose d très-grand par rapport à a ,

$$B_m = \frac{8\pi m}{d^2} \int_{-\frac{a}{2}}^0 F\left(\frac{x}{d}\right) x dx, \quad B_1 = \frac{8\pi}{d^2} \int_{-\frac{a}{2}}^0 F\left(\frac{x}{d}\right) x dx,$$

et, par suite,

$$\frac{B_m}{B_1} = \frac{\alpha_m}{\alpha_1} = m.$$

Donc, si un son est produit par des ébranlements discontinus identiques, dirigés dans un seul sens, jamais les harmoniques supérieurs n'ont une amplitude supérieure à celle du son fondamental; elles tendent à devenir égales à celle de ce dernier son, quand la durée de l'ébranlement est infiniment petite par rapport à celle de la période vibratoire. Si chaque ébranlement, au contraire, est formé de deux parties de même durée, pendant lesquelles les condensations et les mouvements sont de sens contraire, l'amplitude du son m devient égale à m fois celle du son fondamental, pour un écartement infini des ébranlements. Il est évident que si cette seconde partie de chaque ébranlement diminue progressivement, cette amplitude de l'harmonique de rang m , égale d'abord à m fois celle du son fondamental, décroît progressivement jusqu'à l'égalité quand cette seconde partie de chaque ébranlement aura disparu.

On comprend ainsi pourquoi, dans certaines expériences, comme celle de la barre de Savart, les harmoniques supérieurs peuvent être assez intenses pour empêcher d'entendre complètement le son fondamental.

4° Revenons à la discussion de la formule (33).

Pour qu'un harmonique de rang m fasse défaut, il faut que l'on ait $\frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}$, ce qui donne

$$\text{Pour } m = 2, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{2};$$

$$\text{Pour } m = 3, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{3};$$

$$\text{Pour } m = 4, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}, \frac{1}{2};$$

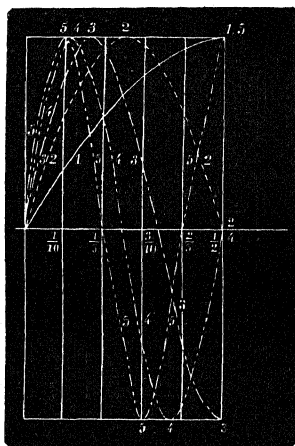
$$\text{Pour } m = 5, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{5}, \frac{2}{5};$$

et, en général, pour l'harmonique de rang m ,

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \dots$$

jusqu'à $\frac{1}{2}$ si m est pair, ou $\frac{m-1}{2m}$ si m est impair.

Fig. 44.



5° Le coefficient de α_m sera maximum, au contraire, si l'on a $\frac{\tau}{T} = \frac{2k+1}{2m}$, ce qui donne

$$\text{Pour } m=2, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{4};$$

$$\text{Pour } m=3, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{6}, \frac{1}{2};$$

$$\text{Pour } m=4, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{8}, \frac{3}{8};$$

$$\text{Pour } m=5, \quad \frac{\tau}{T} = \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2};$$

et, en général, pour l'harmonique de rang m ,

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2m}, \frac{3}{2m}, \dots$$

jusqu'à $\frac{1}{2}$ si m est impair, et $\frac{m-1}{2m}$ si m est pair.

6° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, tous les harmoniques pairs disparaissent, et il ne reste que les harmoniques impairs, avec la même intensité relative que pour un seul ébranlement. Le son devra, pour son timbre, présenter une certaine analogie avec celui que produit une sirène munie d'ouvertures rectangulaires, quand l'écartement des ouvertures est égal à leur largeur.

On peut se rendre compte des variations des coefficients de α_m pour les cinq premiers harmoniques, en consultant la *fig. 44*.

IV. — *Sous produits par trois ébranlements à des distances différentes.*

I. *Trois ébranlements dans le même sens.* — Supposons que, dans la période T , se succèdent trois ébranlements identiques dans le même sens, mais inégalement distants; prenant l'origine en un instant quelconque de l'ébranlement médian, on pourra admettre que ces trois ébranlements seront représentés par $f(t)$, $f(t + \tau)$ et $f(t - \tau')$; si l'on a, en outre,

$$f(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} \left[\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t - p_m)}{T} \right],$$

on pourra écrire

$$\psi(t) = f(t) + f(t + \tau) + f(t - \tau') = 3A_0 + \sum_1^{\infty} \left[\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t - \theta_m)}{T} \right].$$

En développant, on arrive pour α_m à l'expression

$$(35) \quad \alpha_m^2 = \alpha_m^2 \left(3 + 2 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T} + 2 \cos 2\pi \frac{m\tau'}{T} + 2 \cos 2\pi \frac{m\tau''}{T} \right)$$

en posant $\tau'' = T - (\tau + \tau')$; dans cette formule n'entrent que les dis-

Fig. 45.



tances respectives des divers ébranlements, représentés d'une façon schématique par des points dans la *fig. 45*.

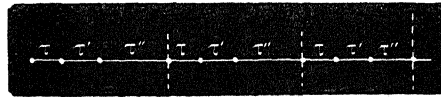
Les deux cas particuliers les plus intéressants à étudier sont ceux dans lesquels on suppose deux ébranlements équidistants, c'est-à-dire $\tau = \tau'$, et celui où l'on suppose deux ébranlements confondus, c'est-à-dire $\tau = 0$.

PREMIER CAS. *Deux ébranlements équidistants.* — La formule (35), en y faisant $\tau = \tau'$, $\tau'' = T - 2\tau$, devient

$$(36) \quad a_m = \alpha_m \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T} \right).$$

Cette disposition est indiquée *fig. 46*; nécessairement on doit avoir

Fig. 46.



$\tau < \frac{T}{2}$; si $\tau = \frac{T}{2}$, on est ramené au cas suivant. On a ainsi (*)

$$a_m = 3 \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}, \quad a'_m = 1;$$

$$a_m = 2 \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{6k \pm 1}{6m}, \quad a'_m = 0;$$

$$a_m = +1 \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{4k \pm 1}{4m}, \quad a'_m = -1;$$

$$a_m = -1 \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{2k + 1}{2m}, \quad a'_m = -3;$$

$$a_m = 0 \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{3k \pm 1}{3m}, \quad a'_m = -2.$$

D'où l'on déduit le tableau suivant, en posant $m = 1, 2, 3, 4$:

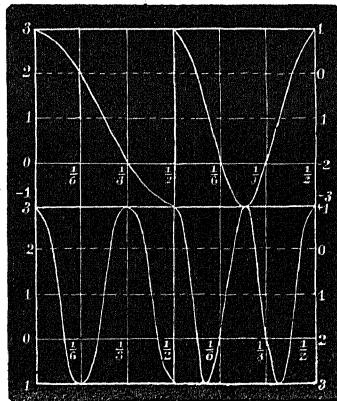
(*) On suppose que $\alpha_m = 1$.

m	VALEURS DE $\frac{\tau}{T}$ (*).				
	$a_m = 0,$ $a'_m = -2.$	$a_m = 1,$ $a'_m = -1.$	$a_m = -1,$ $a'_m = -3.$	$a_m = 2,$ $a'_m = 0.$	$a_m = 3,$ $a'_m = 1.$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0
2	$\frac{1}{6}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}, \frac{5}{12}$	0, $\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$	$\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, \frac{5}{12}$	$\frac{1}{6}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}, \frac{5}{18}, \frac{7}{18}$	0, $\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}$	$\frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}, \frac{5}{24}, \frac{7}{24}, \frac{11}{24}$	0, $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$

(*) On suppose que $a_m = 1.$

Les courbes correspondantes sont construites *fig. 47*. On peut remarquer que :

Fig. 47.



1° Si $\frac{\tau}{T} = 0$, tous les coefficients sont triplés : on entend le son correspondant à T avec une amplitude triple;

2° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{k}{m}$ (k étant plus petit que $\frac{m}{2}$), les sons $m, 2m, 3m, \dots$

sont triplés, et ce son devra être entendu séparément au milieu des harmoniques pourvu que m ne soit pas trop élevé;

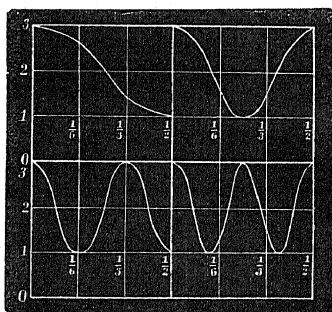
3° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, ce qui établit la coïncidence de deux ébranlements avec un ébranlement simple au milieu, tous les harmoniques pairs sont triplés; les harmoniques impairs restent avec la même valeur;

4° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{3}$, le son 3 seul et ses harmoniques sont triplés, tous les autres sont nuls; on a ici, pour a_m , les mêmes valeurs qu'en remplaçant dans les formules fondamentales qui donnent a_m , T par $\frac{T}{3}$;

5° Si, partant de $\frac{\tau}{T} = 0$, on augmente cette quantité jusqu'à ce qu'elle soit égale à $\frac{1}{3}$, on ne peut pas dire avec Seebeck, que le troisième harmonique deviendra de plus en plus intense, car pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$, il est nul, ainsi que tous les harmoniques dont les rangs sont des multiples de 3.

DEUXIÈME CAS. *Deux ébranlements confondus et un séparé.* — Si, dans

Fig. 48.



la formule (35), on fait $\tau = 0$, et que l'on remplace τ' par τ , on obtient

$$(37) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 \left(5 + 4 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T} \right).$$

1° a_m ne peut être nul, et varie seulement de 1 à 3.

2° On aura

$$a_m = 3, \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{k}{m};$$

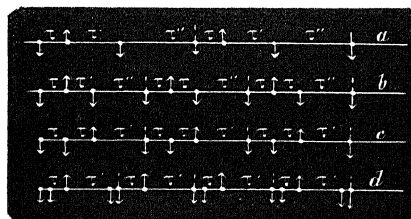
$$a_m = 1, \quad \text{pour } \frac{\tau}{T} = \frac{2k + 1}{2m}.$$

La *fig.* 48 donne les valeurs de a_m pour $m = 1, 2, 3, 4$.

3° Pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, on retombe sur un cas déjà étudié précédemment.

II. *Deux ébranlements de même sens et le troisième de sens contraire.* — Nous supposons que l'ébranlement seul de sa nature contient l'origine du temps; comme on le représente *fig.* 49*a*; les ébranlements

Fig. 49.



successifs de la période T seront donc $-f(t)$, $+f(t + \tau)$ et $+f(t - \tau')$, ce qui conduit à la formule

$$(38) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 \left(3 - 2 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T} - 2 \cos 2\pi \frac{m\tau'}{T} + 2 \cos 2\pi \frac{m\tau''}{T} \right),$$

τ, τ', τ'' étant les intervalles des divers ébranlements; on voit que l'on met le signe $-$ devant le cosinus correspondant quand il y a changement de sens par rapport à l'ébranlement précédent, et le signe $+$ quand les ébranlements qui se succèdent sont de même sens.

Il y a trois cas particuliers à distinguer :

1° Si l'on a $\tau = \tau'$, c'est-à-dire si l'ébranlement seul de son espèce est à égale distance des deux autres (*fig.* 49*b*);

2° Si l'on a $\tau'' = \tau'$ quand l'ébranlement seul de son espèce n'est plus équidistant des deux autres (*fig.* 49*c*);

3° Si l'on a $\tau'' = 0$, c'est-à-dire si les deux ébranlements de même nature sont confondus (*fig.* 49*d*).

PREMIER CAS. — On a $\tau = \tau'$, l'ébranlement de sens contraire étant situé au milieu des deux autres. En faisant cette hypothèse, la formule (3) devient

$$(39) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 \left(1 - 2 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T} \right)^2, \quad \text{d'où} \quad a_m = \alpha_m \left(2 \cos 2\pi \frac{m\tau}{T} - 1 \right).$$

On voit que si l'on construit les valeurs de a_m , on aura les mêmes courbes que celles qui correspondent à l'équation (36), en diminuant les ordonnées de 2. En représentant par a'_m les coefficients de la série de Fourier dans ce cas, le tableau donné (p. 338) conviendra également à ce cas, puisque l'on a constamment $a'_m = a_m - 2$.

La *fig. 47* lui convient également en déplaçant la ligne des abscisses d'une quantité égale à 2 du côté des ordonnées positives, comme le représente la ligne ponctuée, avec les chiffres placés à droite de la figure. On peut remarquer :

1° Que le son fondamental est nul pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{6}$; pour cette valeur, on a

$$a'_2 = 2\alpha_2, \quad a'_3 = 3\alpha_3, \quad a'_4 = 2\alpha_4, \quad a'_5 = 0, \quad a'_6 = 3\alpha_6, \quad a'_7 = 0, \quad a'_8 = 2\alpha_8, \dots;$$

il ne reste que les harmoniques dont les rangs sont des multiples de 2 ou de 3; les harmoniques pairs sont doublés, les autres triplés; on devra donc entendre la quinte formée par les sons 2 et 3;

2° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, les deux ébranlements de même nature se confondent; on a

$$a'_1 = 3, \quad a'_2 = 1, \quad a'_3 = 3, \quad a'_4 = 1, \quad a'_5 = 3, \dots;$$

les harmoniques impairs sont triplés, les autres restent avec leur valeur primitive;

3° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{3}$,

$$a'_1 = 2\alpha_1, \quad a'_2 = 2\alpha_2, \quad a'_3 = \alpha_3, \quad a'_4 = 2\alpha_4, \dots;$$

tous les harmoniques sont doublés, sauf les multiples de 3 qui conservent leur valeur primitive.

DEUXIÈME CAS. — On a $\tau = \tau'$, l'ébranlement de sens contraire n'é-

tant pas équidistant des deux autres. Si, dans la formule (38), on pose $\tau'' = \tau$, on obtient

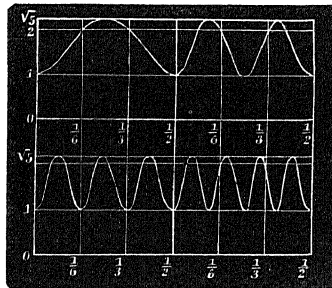
$$(40) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 \left(1 + 4 \sin^2 2\pi \frac{m\tau}{T} \right) = \alpha_m^2 \left(5 - 4 \cos^2 2\pi \frac{m\tau}{T} \right).$$

Le coefficient de α_m varie entre 1 et $\sqrt{5}$ sans jamais être nul. On remarquera seulement que :

1° Pour $\frac{\tau}{T} = 0$ et $\frac{1}{2}$, on obtient le son fondamental avec ses harmoniques, ce qui était facile à prévoir;

2° Pour $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$, les harmoniques impairs sont multipliés par $\sqrt{5}$, et les harmoniques pairs ne changent pas. La *fig. 50* donne les valeurs de a_m pour $m = 1, 2, 3, 4$.

Fig. 50.



TROISIÈME CAS. Deux ébranlements confondus, le troisième de sens contraire. — En faisant $\tau'' = 0$ dans la formule (38), et $\tau' = T - \tau$, on obtient

$$(41) \quad a_m^2 = \alpha_m^2 \left(5 - 4 \cos^2 2\pi \frac{m\tau}{T} \right).$$

Les courbes qui représentent le coefficient de α_m sont les mêmes que celles qui correspondent à la formule (39), mais prises dans une position symétrique, comme l'indique la *fig. 51*; ces coefficients varient du reste de 1 à 3, sans jamais devenir nuls.

1° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{2}$, on a

$$a_1 = 3\alpha_1, \quad a_2 = \alpha_2, \quad a_3 = 3\alpha_3, \quad a_4 = \alpha_4, \dots,$$

cas déjà examiné précédemment.

2° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{4}$, on a

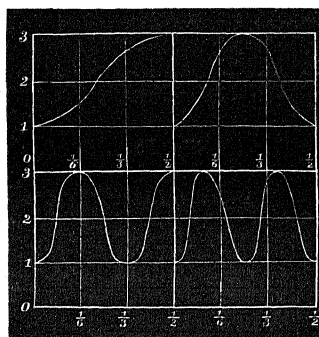
$$a_1 = \alpha_1 \sqrt{5}, \quad a_2 = 3\alpha_2, \quad a_3 = \alpha_3 \sqrt{5}, \quad a_4 = \alpha_4, \dots;$$

donc on devra entendre distinctement le second harmonique.

3° Si $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{6}$, on a

$$a_1 = \alpha_1 \sqrt{2}, \quad a_2 = \alpha_2 \sqrt{7}, \quad a_3 = 3\alpha_3, \quad a_4 = \alpha_4 \sqrt{7}, \dots$$

Fig. 51.



On devra, outre le son fondamental, distinguer les deux premiers harmoniques.

V. — *Sons produits par un nombre quelconque d'ébranlements à diverses distances.*

Supposons que, dans l'intervalle T , se trouve un nombre quelconque d'ébranlements de même nature. Représentons-les par

$$F(t - \theta_1), \quad F(t - \theta_2), \quad F(t - \theta_3), \dots, \quad F(t - \theta_q),$$

en laissant complètement arbitraire l'origine du temps; on a en outre

$$F(t) = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} \left[\alpha_m \cos 2\pi \frac{m(t - p_m)}{T} \right] = \alpha_0 + \sum_1^{\infty} (\alpha_m \cos u),$$

en posant $\frac{2\pi m(t - p_m)}{T} = u$.

Soit $\varphi(t)$ le mouvement résultant, on aura

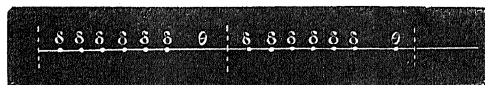
$$\varphi(t) = rA_0 + \sum_1^q F(t - \theta) = rA_0 + \sum_1^\infty \left[a_m \cos \left(u - \frac{2\pi m \varphi}{M} \right) \right].$$

Si tous les ébranlements ont lieu dans le même sens, $F(t - \theta)$ sera pris avec le signe +; s'il y en a dans les deux sens, on mettra le signe — devant $F(t - \theta)$ pour les ébranlements qui ont lieu en sens contraire. On obtient, en développant

$$(42) \left\{ \begin{aligned} a_m \cos 2\pi \frac{m\varphi}{T} &= \alpha_m \left(\cos 2\pi \frac{m\theta_1}{T} + \cos 2\pi \frac{m\theta_2}{T} + \dots + \cos 2\pi \frac{m\theta_q}{T} \right) = \alpha_m S_1, \\ a_m \sin 2\pi \frac{m\varphi}{T} &= \alpha_m \left(\sin 2\pi \frac{m\theta_1}{T} + \sin 2\pi \frac{m\theta_2}{T} + \dots + \sin 2\pi \frac{m\theta_q}{T} \right) = \alpha_m S_2, \\ a_m^2 &= \alpha_m^2 (S_1^2 + S_2^2). \end{aligned} \right.$$

La valeur de α_m est indépendante de l'ordre des ébranlements, pourvu qu'ils se succèdent assez rapidement; l'oreille, d'après les expériences de M. Helmholtz, n'entend en effet un son continu que quand il y a au moins 40 vibrations doubles par seconde, et même ne cesse complètement de percevoir les oscillations isolées que quand le nombre des vibrations atteint 100 par seconde. Le cas le plus intéressant à étudier est celui dans lequel les ébranlements sont tous de même sens et équidistants, au lieu d'être à des distances quelconques. Supposons

Fig. 52.



done qu'il y ait q ébranlements équidistants dans l'intervalle T (fig. 52). Soit δ l'intervalle de deux ébranlements successifs, on aura

$$T = (q - 1)\delta + \theta.$$

Dans la formule (42), posons $\theta_1 = 0, \theta_2 = \delta, \theta_3 = 2\delta, \dots, \theta_q = (q - 1)\delta$, on aura

$$\begin{aligned} a_m \cos 2\pi \frac{m\varphi}{T} &= \alpha_m \left(1 + \cos 2\pi \frac{m\delta}{T} + \dots + \cos 2\pi \frac{m(q-1)\delta}{T} \right), \\ a_m \sin 2\pi \frac{m\varphi}{T} &= \alpha_m \left(\sin 2\pi \frac{m\delta}{T} + \dots + \sin 2\pi \frac{m(q-1)\delta}{T} \right). \end{aligned}$$

D'après une formule connue, on obtient

$$\alpha_m \cos 2\pi \frac{m\varphi}{T} = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{mq\delta}{T} \cos \pi \frac{m(q-1)\delta}{T}}{\sin \frac{\pi m\delta}{T}},$$

$$\alpha_m \sin 2\pi \frac{m\varphi}{T} = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{mq\delta}{T} \sin \pi \frac{m(q-1)\delta}{T}}{\sin \frac{\pi m\delta}{T}};$$

d'où enfin l'on déduit

$$(43) \quad \alpha_m = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{mq\delta}{T}}{\sin \pi \frac{m\delta}{T}}.$$

1° Si $\delta = \frac{T}{q}$, on a $\alpha_m = 0$, sauf pour $m = q$, où $\alpha_m = q\alpha_m$; on obtient donc la même valeur pour α_m que si dans les formules fondamentales (3) on remplaçait T par $\frac{T}{q}$, comme on l'a déjà remarqué précédemment.

2° Supposons que l'on ait $\delta = \frac{T}{p}$, et qu'on prenne un certain nombre d'ébranlements $p - r = q$; alors on a

$$(44) \quad \alpha_m = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{mq}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} = \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{m(p-r)}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} = \pm \alpha_m \frac{\sin \pi \frac{mr}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}}.$$

On peut, à l'aide de cette formule, rendre compte des particularités de l'expérience qu'a faite Savart en enlevant successivement les dents d'une roue dentée (*). On voit que α_m a la même valeur, au signe près, si l'on remplace les dents enlevées par les dents subsistantes, sauf pour $m = p$, car alors $\alpha_m = \alpha_m \times \frac{0}{0} = \alpha_m(p - r)$.

Le son fondamental obtenu, en ne laissant qu'une seule dent sur la

(*) Note sur la sensibilité de l'organe de l'ouïe (*Annales de Chimie et de Physique*, t. XLIV, p. 337).

roue (cas auquel se rapportent les valeurs de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \dots$) et tous les harmoniques, sauf ceux d'ordre $p, 2p, 3p, \dots$, ont la même valeur pour $q = \frac{p}{2} \pm t$.

Le son p et ses harmoniques $2p, 3p, 4p, \dots$, au contraire, ont une amplitude variable, suivant le nombre de dents enlevées, et d'autant plus considérable qu'on enlèvera moins de dents.

Dans l'expérience qu'il a faite, Savart employait une roue d'un grand nombre de dents tournant assez lentement; il ne s'est inquiété que du son p et non des autres; le son fondamental correspondant à une seule dent était du reste trop grave pour être perçu, puisqu'il dit que quand on ne laisse qu'une seule dent, au lieu du son p , on n'entend plus que le choc de la dent unique contre la carte employée. Il serait intéressant de reprendre ce travail, plutôt avec une sirène dont on fermerait diverses ouvertures sur les deux plateaux avec de la cire, et dans des conditions telles, que le son fondamental pût également être perceptible.

Examinons en détail les diverses phases de l'expérience, quand on remet successivement en place les diverses dents d'une roue dentée, munie d'un petit nombre de dents, et tournant assez vite pour que le son fondamental correspondant à une seule dent soit perceptible.

a. Si l'on ne laisse qu'une dent sur la roue, on entend un son, avec un grand nombre d'harmoniques, et soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots, \alpha_{2p}, \dots$ les amplitudes des sons simultanés.

¶ Avec une roue dentée dans ces conditions, les harmoniques supérieurs ont une grande intensité, supérieure même à celle du son fondamental; car chaque ébranlement se compose de deux parties où les mouvements sont de sens contraires, et, comme ces premiers sont très-espacés, les harmoniques supérieurs peuvent être très-intenses relativement au son fondamental.

b. Supposons deux dents voisines conservées; on a $p - r = 2$, et l'on retombe sur un cas examiné dans la deuxième partie de ce travail; on trouve ainsi

$$a_m = \alpha_m \frac{\sin 2\pi \frac{m}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} = 2 \alpha_m \cos \pi \frac{m}{p}.$$

Les coefficients de la série de Fourier sont donc

$$2\alpha_1 \cos \frac{\pi}{p}, \quad 2\alpha_2 \cos \frac{2\pi}{p}, \quad 2\alpha_3 \cos \frac{3\pi}{p}, \dots,$$

$$2\alpha_{p-1} \cos \frac{\pi}{p}, \quad 2\alpha_p, \quad 2\alpha_{p+1} \cos \frac{\pi}{p}, \dots, \quad 2\alpha_{2p}, \dots$$

Les coefficients nuls sont ceux pour lesquels on a

$$m = \frac{p}{2}, \quad \frac{3p}{2}, \quad \frac{5p}{2}, \dots;$$

pour les coefficients maxima, on a

$$m = p, \quad 2p, \quad 3p, \dots$$

Le son α_p pourra donc être entendu, s'il n'est pas trop élevé, et si l'oreille est prévenue d'avance de son existence, comme dans l'expérience de Savart, qui a enlevé successivement les dents de la roue : en aurait-il été de même s'il eût suivi la marche inverse?

c. S'il y a trois dents sur la roue, on a

$$\alpha_m = \alpha_n \frac{\sin \pi \frac{3m}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} = \alpha_n \left(3 - 4 \sin^2 \pi \frac{m}{p} \right) = \alpha_n \left(1 + 2 \cos 2\pi \frac{m}{p} \right),$$

formule déjà obtenue (36).

Les termes nuls seront donnés par les valeurs de $m = \frac{(3k \pm 1)p}{3}$. Si p est un multiple de 3, les coefficients nuls seront ceux dont les rangs sont $\frac{p}{3}, \frac{2p}{3}, \frac{4p}{3}, \frac{5p}{3}, \dots$; si p n'est pas un multiple de 3, les rangs des termes ayant des coefficients minima seront égaux au quotient entier du nombre $\frac{(3k \pm 1)p}{3}$, ou à ce quotient augmenté de 1.

Les termes dont les rangs sont $p, 2p, 3p, \dots$ seront triplés.

d. Supposons q dents à la roue,

$$\alpha_m = \alpha_n \frac{\sin \pi \frac{mq}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}}.$$

Pour les termes $a_q, a_{2q}, a_{3q}, \dots$, on a

$$a_q = q \alpha_q, \quad a_{2q} = q \alpha_{2q}, \quad a_{3q} = q \alpha_{3q}, \dots$$

Ce son devra donc être entendu très-distinctement si q est assez considérable. Si p est très-grand relativement à q , on a sensiblement

$$\sin \pi \frac{q}{p} = q \sin \frac{\pi}{p}.$$

Donc, si l'on ne conserve sur la roue qu'un petit nombre de dents, le son fondamental croît à peu près dans le même rapport que l'harmonique de rang p , cependant moins rapidement, puisqu'on a toujours $\sin \pi \frac{q}{p} < q \sin \frac{\pi}{p}$.

Le son fondamental $\alpha_1 \frac{\sin \pi \frac{q}{p}}{\sin \pi \frac{1}{p}}$ est maximum pour $\frac{\pi q}{p} = \frac{\pi}{2}$, ou $q = \frac{p}{2}$,

c'est-à-dire quand la moitié des dents est enlevée, l'autre existant au contraire. On peut, en effet, considérer dans ce cas la moitié des dents subsistantes comme produisant un seul ébranlement, la partie où les dents font défaut équivalant à la deuxième moitié de l'ébranlement.

Un terme quelconque est maximum si l'on a

$$q = \frac{(2k+1)p}{2m};$$

si le quotient n'est pas entier, il faudra prendre le quotient entier en moins, ou ce dernier augmenté de 1. On trouve ainsi que le maximum aura lieu

$$\text{Pour } m = 2, \text{ si } q = \frac{p}{4} \text{ ou } \frac{3p}{4};$$

$$\text{Pour } m = 3, \text{ si } q = \frac{p}{6}, \frac{p}{2}, \frac{5p}{6};$$

$$\text{Pour } m = 4, \text{ si } q = \frac{p}{8}, \frac{3p}{8}, \frac{5p}{8}, \frac{7p}{8}.$$

Au contraire, pour que l'harmonique de rang m fasse défaut, il faut

que l'on ait $q = \frac{kp}{m}$, sauf si l'on a $m = p$, ce qui donne :

$$\text{Pour } m = 1, \quad q = p;$$

$$\text{Pour } m = 2, \quad q = \frac{p}{2};$$

$$\text{Pour } m = 3, \quad q = \frac{p}{3}, \frac{2p}{3};$$

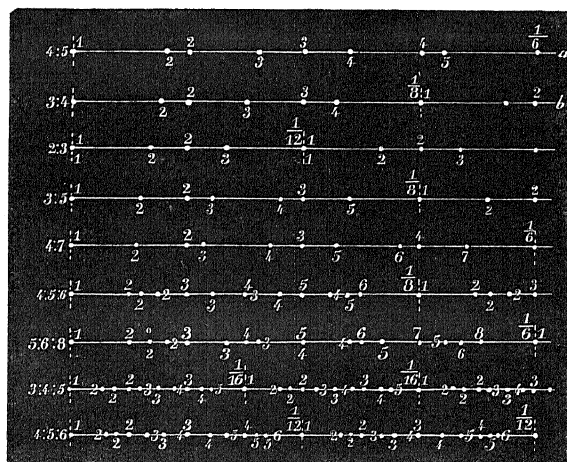
$$\text{Pour } m = 4, \quad q = \frac{p}{4}, \frac{p}{2}, \frac{3p}{4}.$$

Si donc on a $q = \frac{p}{2}$, outre les sons $p, 2p, 3p, \dots$, dont les amplitudes sont multipliées par $\frac{p}{2}$, le son fondamental et les harmoniques impairs ont leur valeur maximum; les harmoniques pairs sont nuls.

Pour une valeur déterminée de q , les termes nuls correspondent à $m = \frac{kp}{q}$, sauf $k = q, 2q, 3q, \dots$. Les maxima ont lieu pour $m = p, 2p, 3p, \dots$. Enfin il y a des maxima relatifs moins considérables pour $k = \frac{(2k+1)q}{2p}$. On reconnaît une grande analogie, pour la discussion du moins, entre ces formules et celles qui sont relatives aux réseaux. Comme cas particulier qui peuvent se présenter, on remarquera que si p et q sont premiers entre eux, il n'y a que des minima sans qu'aucun terme soit complètement nul. Si p et q ne sont pas premiers, posons $\frac{p}{q} = \frac{p's}{q's}$, a_m sera nul pour $m = \frac{kp'}{q'}$, ou $k = q', 2q', 3q', \dots$, sauf sq' ou q , ce qui donne, pour m , les valeurs $p', 2p', 3p', \dots$. Si p est un multiple de q , $p = qs$, et a_m sera nul pour $m = s, 2s, 3s, \dots$, sauf pour $qs, 2qs, \dots$. Ohm avait déjà discuté, en partie du moins, les conséquences si variées de ce cas intéressant; on voit, par les résultats auxquels conduit la discussion de cette formule, combien il serait important de reprendre et de compléter l'expérience que Savart avait faite dans un but particulier. On voit, en outre, comment cette théorie rend compte des faits que Savart avait découverts, et qu'il était difficile d'expliquer sans le secours de la série de Fourier, et l'interprétation qu'en ont donnée Ohm et M. Helmholtz.

Une autre application intéressante de ces formules que j'indiquerai, c'est celle qui est relative à la sirène d'Opelt. Dans cette sirène, formée d'un simple disque de carton ou de métal, se trouvent, ainsi que je l'ai indiqué dans l'Introduction, plusieurs séries concentriques d'ouvertures présentant chacune une autre disposition. Dans les rangées extérieures, on a percé, le long d'une même circonférence, des ouvertures dont les distances au point de départ forment deux et même trois progressions arithmétiques; aux points communs à plusieurs séries, on ne place qu'une seule ouverture. En général, on entend plus ou moins distinctement l'accord correspondant au rapport des distances des ouvertures dans chaque série; ainsi, en supposant que l'on prenne les nombres 5 et 4, ce qui donne la disposition représentée *fig. 53a*,

Fig. 53.



on entend une tierce; avec la disposition de la *fig. 53b*, une quarte, et ainsi de suite.

Admettons que l'on ait pris, suivant la même circonférence, et dans un espace d correspondant au temps T d'une vibration, p ouvertures équidistantes, puis q , puis r, \dots (p, q, r, \dots sont supposés premiers entre eux), en partant d'une ouverture commune qui fait, par suite, partie de chacune de ces diverses séries, et en ne laissant qu'une ouverture aux points communs: quel sera l'effet produit? Nous avons vu que le son résultant est indépendant de l'ordre des ébranlements; on

aura donc, en appliquant les formules (42) à ce cas,

$$\begin{aligned}
 \alpha_m \cos 2\pi \frac{m\varphi}{T} = \alpha_m & \left\{ \begin{aligned} & 1 + \cos 2\pi \frac{m}{p} + \cos 2\pi \frac{2m}{p} + \dots + \cos 2\pi \frac{(p-1)m}{p} \\ & + \cos 2\pi \frac{m}{q} + \cos 2\pi \frac{2m}{q} + \dots + \cos 2\pi \frac{(q-1)m}{q} \\ & + \cos 2\pi \frac{m}{r} + \cos 2\pi \frac{2m}{r} + \dots + \cos 2\pi \frac{(r-1)m}{r} \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}, \\
 \alpha_m \sin 2\pi \frac{m\varphi}{T} = \alpha_m & \left\{ \begin{aligned} & \sin 2\pi \frac{m}{p} + \sin 2\pi \frac{2m}{p} + \dots + \sin 2\pi \frac{(p-1)m}{p} \\ & + \sin 2\pi \frac{m}{q} + \sin 2\pi \frac{2m}{q} + \dots + \sin 2\pi \frac{(q-1)m}{q} \\ & + \sin 2\pi \frac{m}{r} + \sin 2\pi \frac{2m}{r} + \dots + \sin 2\pi \frac{(r-1)m}{r} \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right\}.
 \end{aligned}$$

Or on sait que

$$\begin{aligned}
 \cos h + \cos 2h + \dots + \cos(n-1)h &= \frac{\sin \frac{(n-1)h}{2} \cos \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}, \\
 \sin h + \sin 2h + \dots + \sin(n-1)h &= \frac{\sin \frac{(n-1)h}{2} \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}.
 \end{aligned}$$

En appliquant ces formules au cas actuel, on a

$$\begin{aligned}
 & \alpha_m \cos 2\pi \frac{m\varphi}{T} \\
 &= \alpha_m \left(1 + \frac{\sin \pi \frac{m(p-1)}{p} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{p}} + \frac{\sin \pi \frac{m(q-1)}{q} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{q}} + \frac{\sin \pi \frac{m(r-1)}{r} \cos m\pi + \dots}{\sin \pi \frac{m}{r}} \right)
 \end{aligned}$$

$\alpha_m \sin 2\pi \frac{m\varphi}{T}$ est nul, parce que chaque terme renferme $\sin m\pi$; donc $\varphi = 0$.

Si m a une valeur quelconque autre que p, q, r, \dots , on reconnaît que chaque terme tel que $\frac{\sin \pi \frac{m(p-1)}{p} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{p}}$ devient égal à -1 ; on aura donc, si m est quelconque, mais non égal à p, q, r, \dots ,

$$a_m = (1 - 1 - 1 - 1 - 1 - \dots);$$

supposons que l'on ait S séries simultanées, on arrive à

$$(43) \quad a_m = -(S - 1) \alpha_m.$$

Si $m = p$, ce rapport des sinus correspondants prend la forme $\frac{0}{0}$, et se trouve être égal à $(p - 1)$. Donc

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_p = \alpha_p [1 + (p - 1) - (S - 1)] = \alpha_p (p - S + 1), \\ \text{et de même} \\ a_q = \alpha_q (q - S + 1), \\ a_r = \alpha_r (r - S + 1). \end{array} \right.$$

Voici les diverses combinaisons que présente la sirène d'Opelt (*fig. 53*) (*). Chaque circonférence concentrique renferme une première série de 24 ouvertures équidistantes; puis, la première, une série de 30 ouvertures; la deuxième une de 32; la troisième une de 36; la quatrième une de 40; la cinquième une de 42, en comptant deux fois chaque ouverture commune aux deux séries. La durée T du son fondamental sur chaque circonférence correspond à un nombre différent d'ouvertures; il est représenté par la fraction de la circonférence ayant pour numérateur l'unité, et pour dénominateur le commun diviseur des deux séries d'ouvertures, en comptant deux fois chaque ouverture commune. Le nombre total d'ouvertures est égal à la somme des ouvertures formant chaque série diminuée de ce même diviseur commun. En appliquant les formules (43) et (44), et représentant par ut_3

(*) On suppose les circonférences rectifiées.

le son correspondant à 24 ouvertures par circonférence, on arrive, pour l'intensité des divers harmoniques, aux résultats suivants :

Première circonférence. — 24 et 30 ouvertures; rapport 5:4.

$$\begin{array}{cccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & -\alpha_3, & +3\alpha_4, & +4\alpha_5, & -\alpha_6, & -\alpha_7, \dots; \\ ut_1, & ut_2, & sol_2, & ut_3, & mi_3, & sol_3. & \end{array}$$

Deuxième circonférence. — 24 et 32 ouvertures; rapport 4:3.

$$\begin{array}{cccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & +2\alpha_3, & +3\alpha_4, & -\alpha_5, & -\alpha_6, \dots; \\ fa_1, & fa_2, & ut_3, & fa_3, & la_3, & ut_4, \dots \end{array}$$

Troisième circonférence. — 24 et 36 ouvertures; rapport 3:2.

$$\begin{array}{cccccc} -\alpha_1, & +\alpha_2, & +2\alpha_3, & -\alpha_4, & -\alpha_5, \dots; \\ ut_2, & ut_3, & sol_3, & ut_4, & mi_4, \dots \end{array}$$

Quatrième circonférence. — 24 et 40 ouvertures; rapport 3:5.

$$\begin{array}{cccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & +2\alpha_3, & -\alpha_4, & +4\alpha_5, & -\alpha_6, \dots; \\ fa_1, & fa_2, & ut_3, & fa_3, & la_3, & ut_4, \dots \end{array}$$

Cinquième circonférence. — 24 et 42 ouvertures; rapport 4:7.

$$\begin{array}{cccccc} -\alpha_1, & -\alpha_2, & -\alpha_3, & 3\alpha_4, & -\alpha_5, & -\alpha_6, & +6\alpha_7, & -\alpha_8, \dots; \\ ut_1, & ut_2, & sol_2, & ut_3, & mi_3, & sol_3, & si^b_3, & ut_4. \end{array}$$

On voit donc, en général, qu'avec la sirène d'Opelt, on devra entendre, outre le son fondamental, les deux harmoniques renforcés; dans un seul cas, que j'avais déjà eu occasion d'observer sans pouvoir m'en rendre compte, on n'entend pas l'accord correspondant au rapport des distances qui caractérisent chaque série: c'est quand ce rapport est égal à $\frac{2}{3}$, combinaison qui devrait produire une quinte. Or on voit, d'après les formules (43) et (44), que le coefficient du son α_2 est + 1 au lieu de - 1, ce qui ne constitue aucune différence pour l'audition. On peut donc entendre une douzième plus ou moins pure, mais non une quinte, ce que j'avais déjà constaté il y a longtemps, mais en attribuant la non-production de cet accord à un défaut de l'appareil employé. On peut résumer ces résultats dans le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6	7	8
1	24	30	$\frac{1}{6}$	$30 + 24 - 6 = 48$	5 : 4	ut_1	ut_3, mi_3
2	24	32	$\frac{1}{8}$	$32 + 24 - 8 = 48$	4 : 3	fa_1	ut_3, ft_3
3	24	36	$\frac{1}{12}$	$36 + 24 - 12 = 48$	3 : 2	ut_2	sol_3
4	24	40	$\frac{1}{8}$	$40 + 24 - 8 = 56$	5 : 3	fa_1	ut_3, la_3
5	24	42	$\frac{1}{6}$	$42 + 24 - 6 = 60$	7 : 4	ut_1	ut_3, si^b_3

- 1^{re} colonne. — Numéro de la circonférence.
 2^e » Nombre d'ouvertures de la première série.
 3^e » Nombre d'ouvertures de la deuxième série.
 4^e » Fraction de la circonférence donnant le son fondamental.
 5^e » Nombre total d'ouvertures.
 6^e » Rapport des distances dans les deux séries.
 7^e » Son fondamental.
 8^e » Harmoniques renforcés.

On peut remarquer que la valeur des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ n'est pas exactement la même pour chaque circonférence, puisque la distance des ouvertures est différente suivant le rayon de la circonférence à laquelle elles appartiennent.

Un résultat qui frappera, c'est que le son fondamental produit en même temps que les harmoniques n'est autre que le son appelé habituellement *son de combinaison*, ou bien ce dernier son est un des harmoniques du son fondamental. Si, dans la sirène d'Opelt, on faisait sortir l'air par une embouchure ayant la forme d'une fente étroite, et que l'on mit deux ouvertures au lieu d'une aux points communs aux deux séries, de manière à avoir un ébranlement double, les formules (49) démontrent que le son fondamental et ses harmoniques cesseraient de se produire complètement. On a en effet, dans ce cas, $\alpha_m = 0$, sauf pour les valeurs de m égales à p, q, r, \dots correspondant aux séries employées.

C'est ce qui devrait avoir lieu dans la sirène de Helmholtz, quand on laisse sortir l'air par deux rangées voisines à la fois. Mais, dans ce cas, surtout si les rangées sont prises sur le même disque, les sons de combinaison s'entendent directement; or, quand il y a coïncidence, c'est-à-dire quand les ouvertures sont ouvertes à la fois sur les deux rangées concentriques, on peut admettre que l'ébranlement produit n'est pas le double de ce qu'il serait si une rangée était ouverte toute seule, et, par conséquent, on se trouve ramené en partie au cas réalisé dans la sirène d'Opelt. Nul doute, par conséquent, que le son fondamental et ses harmoniques ne sortent plus énergiquement, en prenant la précaution de supprimer une des deux ouvertures placées sur le même rayon, et en fermant également un nombre convenable d'ouvertures sur le disque fixe. Avec des disques ainsi disposés qu'on pourrait substituer aux disques habituellement employés, on pourrait répéter dans de meilleures conditions les expériences d'Opelt. Il est difficile d'admettre que cette diminution d'intensité, au moment de l'ébranlement simultané de deux rangées, dans la sirène de Helmholtz, ne se produit pas. En effet, on sait que, si l'on monte sur un même sommier deux tuyaux d'orgue à l'unisson, l'air ne sort pas simultanément par les deux tuyaux, que les sons interfèrent, ce dont on peut s'assurer à l'aide des tuyaux à flammes de M. Koenig.

Sans vouloir ici attaquer la théorie des sons de combinaison donnée il y a quelques années par M. Helmholtz, cependant on ne peut se refuser à admettre que, dans l'emploi de sa sirène et de tuyaux montés sur un même sommier, disposition que M. Helmholtz indique lui-même comme favorable à la production des sons de combinaison différentiels, ces derniers sons qu'on entend si facilement, pourraient être produits simplement par la même cause que celle qui donne, dans la sirène d'Opelt, naissance au son fondamental et à ses harmoniques, c'est-à-dire par une diminution d'intensité de l'ébranlement, quand il y a coïncidence. Jusqu'à quel point cette même cause intervient-elle dans toutes les circonstances où se produisent les sons de combinaison, c'est là une question très-importante et que je me propose d'examiner dans un autre travail.

Si dans la sirène d'Opelt ou de Helmholtz, on supprimait complètement les ouvertures communes aux deux séries, les formules (49)

deviendraient

$$a_m = -S\alpha_m, \text{ avec } m \text{ différent de } p, q, r, \dots,$$

$$a_p = (p - S)\alpha_p.$$

On augmente ainsi le son fondamental et ses harmoniques, et l'on diminue les sons renforcés précédemment. On arrive aux résultats suivants, avec les combinaisons signalées plus haut :

Première circonférence. — 24 et 30 ouvertures; rapport, 5 : 4.

$$-2\alpha_1, \quad -2\alpha_2, \quad -2\alpha_3, \quad +2\alpha_4, \quad +3\alpha_5, \quad -2\alpha_6, \dots;$$

$$ut_1, \quad ut_2, \quad sol_2, \quad ut_3, \quad mi_3, \quad sol_3, \dots$$

Deuxième circonférence. — 24 et 32 ouvertures; rapport, 4 : 3.

$$-2\alpha_1, \quad -2\alpha_2, \quad +\alpha_3, \quad +2\alpha_4, \quad -2\alpha_5, \quad -2\alpha_6, \dots;$$

$$fa_1, \quad fa_2, \quad ut_3, \quad fa_3, \quad la_3, \quad ut_4, \dots$$

Troisième circonférence. — 24 et 36 ouvertures; rapport, 3 : 2.

$$-2\alpha_1, \quad +\alpha_3, \quad -2\alpha_4, \quad -2\alpha_6, \dots;$$

$$ut_2, \quad sol_3, \quad ut_4, \quad mi_4, \dots$$

Quatrième circonférence. — 24 et 40 ouvertures; rapport, 3 : 5.

$$-2\alpha_1, \quad -2\alpha_2, \quad +\alpha_3, \quad -\alpha_4, \quad +3\alpha_5, \quad -2\alpha_6, \dots;$$

$$fa_1, \quad fa_2, \quad ut_3, \quad fa_3, \quad la_3, \quad ut_4, \dots$$

Cinquième circonférence. — 24 et 42 ouvertures; rapport, 4 : 7.

$$-2\alpha_1, \quad -2\alpha_2, \quad -2\alpha_3, \quad +2\alpha_4, \quad -2\alpha_5, \quad -2\alpha_6, \quad +5\alpha_7, \quad -2\alpha_8, \dots;$$

$$ut_1, \quad ut_2, \quad sol_2, \quad ut_3, \quad -mi_3, \quad sol_3, \quad si^b_3, \quad ut_4, \dots$$

On voit donc que l'on produit ainsi, dans la plupart des cas, uniquement le son fondamental et ses harmoniques, que jamais dans les combinaisons adoptées par Opelt il n'y a plus d'un harmonique renforcé, que l'autre ne change pas, est diminué, ou même disparaît complètement. En résumé, si dans une sirène on suppose que le long d'une circonférence se trouvent disposées des ouvertures formant deux séries différentes, on voit que :

1° Si on laisse subsister toutes les ouvertures communes aux deux séries, de telle sorte qu'aux points communs il y ait un ébranlement

double, on n'entendra que les sons correspondant aux deux séries séparées;

2° Si on ne laisse subsister qu'une ouverture aux points communs aux deux séries, on entend les mêmes sons que dans le cas précédent, et en outre le son fondamental, dont les sons dus aux deux séries sont les harmoniques, sauf dans le cas du rapport $\frac{2}{3}$, où le son 2 n'est pas renforcé;

3° Si l'on supprime complètement les ouvertures communes aux deux séries, le son fondamental avec ses harmoniques devient plus intense, un des deux sons correspondant à l'une des séries se confond avec ces derniers, se trouve même diminué ou annulé; le deuxième son peut aussi se confondre avec les autres harmoniques.

Les conséquences si simples, si nettes de la formule de Fourier, vérifiées par l'expérience, comme je me propose de le faire quand j'aurai les appareils convenables pour réaliser les nombreuses applications indiquées dans ce travail, serviront à la démonstration complète de la théorie de Ohm et de Fourier; car on voit ici, pour ainsi dire, les harmoniques, par leur coexistence, produire leur son fondamental.

Dans les quatre rangées extérieures de la sirène d'Opelt, se trouvent trois séries d'ouvertures à des distances différentes, et aux points communs à deux et trois séries, on n'a laissé subsister qu'une seule ouverture; si on les rétablissait toutes comme précédemment, on n'entendrait que les sons correspondant aux trois séries, évidemment comme si elles se trouvaient sur trois circonférences concentriques différentes. On peut varier encore les dispositions adoptées par Opelt, en supprimant d'abord toute ouverture commune à deux séries, et laissant subsister celle qui est commune à trois, puis supprimant complètement toutes les ouvertures communes. Dans les formules générales données plus haut (43) et (44), on admet implicitement que les nombres p, q, r, \dots sont premiers entre eux, et que les séries n'ont d'autres points communs que l'origine. Il en est rarement ainsi quand on cherche à obtenir les accords employés en musique; il faut alors retrancher de la somme totale les termes relatifs aux ouvertures supprimées aux points de rencontre des diverses séries, de 2 si l'on en prend 3, de 2 et de 3 si l'on en prend 4, etc. Je me contenterai de traiter ici les diverses dispositions

adoptées par Opelt; quand j'aurai à m'occuper de la vérification expérimentale de ces formules, j'en ferai des applications plus variées.

Le tableau suivant indique les séries employées :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	48	40	32	$\frac{1}{8}$	24	32	40	4 : 5 : 6	fa_1
2	48	36	30	$\frac{1}{6}$	18	24	30	5 : 6 : 8	ut_1
3	48	64	80	$\frac{1}{16}$	32	32	48	3 : 4 : 5	fa_2
4	48	60	72	$\frac{1}{12}$	36	48	60	4 : 5 : 6	ut_2

- 1^{re} colonne. — Numéro de la circonférence.
 2^e » Nombre d'ouvertures de la première série.
 3^e » » de la deuxième série.
 4^e » » de la troisième série.
 5^e » Fraction de la circonférence donnant le son fondamental.
 6^e » Nombre total d'ouvertures supprimées en mettant une seule ouverture aux points communs à deux et à trois séries.
 7^e » *Idem* en mettant une ouverture aux points communs à trois séries et aucune aux points communs à deux.
 8^e » *Idem* en omettant complètement les ouvertures communes aux diverses séries.
 9^e » Rapport des distances dans les diverses séries.
 10^e » Son fondamental, en représentant par ut_1 le son correspondant à quarante-huit ouvertures.

Les formules à employer sont les mêmes que précédemment (43) et (44); seulement, comme il y a deux séries dont les distances sont égales à T divisé par des nombres pairs dans les circonférences 1 et 2 (la circonférence 4 donne le même résultat que la première, avec d'autres sons), il faut retrancher $\cos m\pi$ dans le cas relatif à la colonne 6, $2 \cos m\pi$ dans celui qui est relatif aux colonnes 8 et 9. Les formules à employer sont donc, dans le cas relatif à la colonne 6, réalisé par Opelt

(sauf pour le cas de la circonférence 3) :

$$(45) \quad \alpha_m = \alpha_m \left[1 + \frac{\sin \pi \frac{m(p-1)}{p} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{p}} + \frac{\sin \pi \frac{m(q-1)}{q} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{q}} + \frac{\sin \pi \frac{m(r-1)}{r} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{r}} - \cos m\pi \right];$$

dans le cas relatif à la colonne 7 :

$$(46) \quad \alpha_m = \alpha_m \left[1 + \frac{\sin \pi \frac{m(p-1)}{p} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{p}} + \frac{\sin \pi \frac{m(q-1)}{q} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{q}} + \frac{\sin \pi \frac{m(r-1)}{r} \cos m\pi}{\sin \pi \frac{m}{r}} - \cos m\pi \right];$$

et, dans le cas relatif à la colonne 8 :

$$(47) \quad \alpha_m = \alpha_m \left[\frac{\sin \pi \frac{m(p-1)}{p}}{\sin \pi \frac{m}{p}} + \frac{\sin \pi \frac{m(q-1)}{q}}{\sin \pi \frac{m}{q}} + \frac{\sin \pi \frac{m(r-1)}{r}}{\sin \pi \frac{m}{r}} - 2 \right] \cos m\pi.$$

On en déduit les résultats suivants, en représentant par ut_4 le son correspondant à 48 ouvertures.

PREMIER CAS (6^e colonne). — On ne met qu'une ouverture aux points communs à deux et à trois séries. Les valeurs de α_m sont :

Première circonférence. Rapport des distances 4 : 5 : 6.

$$- \alpha_1, \quad - 3\alpha_2, \quad - \alpha_3, \quad + \alpha_4, \quad + 4\alpha_5, \quad + 3\alpha_6, \quad - \alpha_7, \quad - 3\alpha_8, \dots;$$

$$fa_1, \quad fa_2, \quad ut_3, \quad fa_3, \quad la_3, \quad ut_4, \quad mi^b_4, \quad fa_4, \dots$$

Deuxième circonférence. Rapport 5 : 6 : 8.

$$- \alpha_1, \quad - 3\alpha_2, \quad - \alpha_3, \quad - 3\alpha_4, \quad + 4\alpha_5, \quad + 3\alpha_6, \quad - \alpha_7, \quad + 5\alpha_8, \quad - \alpha_9, \quad - 3\alpha_{10}, \dots;$$

$$ut_1, \quad ut_2, \quad sol_2, \quad ut_3, \quad mi_3, \quad sol_3, \quad si^b_3, \quad ut_4, \quad ré_4, \quad mi_4, \dots$$

Troisième circonférence. Rapport 3 : 4 : 5.

$$- 2\alpha_1, \quad - 2\alpha_2, \quad + \alpha_3, \quad + 2\alpha_4, \quad + 3\alpha_5, \quad - 2\alpha_6, \quad - 2\alpha_7, \dots;$$

$$fa_2, \quad fa_3, \quad ut_4, \quad fa_4, \quad la_4, \quad ut_5, \quad ré^b_5, \dots$$

Quatrième circonférence. Rapport 4 : 5 : 6.

$$- \alpha_1, \quad - 3\alpha_2, \quad - \alpha_3, \quad + \alpha_4, \quad + 4\alpha_5, \quad + 3\alpha_6, \quad - \alpha_7, \quad - 3\alpha_8, \dots;$$

$$ut_2, \quad ut_3, \quad sol_3, \quad ut_4, \quad mi_4, \quad sol_4, \quad si^b_4, \quad ut_5, \dots$$

On voit que c'est en employant deux séries simultanées qui ont un diviseur commun qu'on obtient le plus grand nombre d'harmoniques renforcés, puisque l'amplitude des harmoniques pairs est multipliée par 3, en général, sauf ceux dont les rangs correspondent aux distances choisies pour les séries.

DEUXIÈME CAS. — On met une ouverture au point de rencontre des trois séries, et aucune à celui de deux séries.

Première circonférence. Rapport 4 : 5 : 6.

$$\begin{array}{cccccc} -4\alpha_2, & +5\alpha_5, & +2\alpha_6, & -4\alpha_8, & -4\alpha_{10}, \\ fa_2, & la_3, & ut_4, & fa_4, & la_4. \end{array}$$

Deuxième circonférence. Rapport 5 : 6 : 8.

$$\begin{array}{cccccc} -4\alpha_2, & -4\alpha_4, & +5\alpha_5, & +2\alpha_6, & +4\alpha_8, & -4\alpha_{10}. \\ ut_2, & ut_3, & mi_3, & sol_3, & ut_4, & mi_4. \end{array}$$

Quatrième circonférence. Rapport 4 : 5 : 6 (comme la première).

$$\begin{array}{cccccc} -4\alpha_2, & +5\alpha_5, & +2\alpha_6, & -4\alpha_8, & -4\alpha_{10}, \\ ut_2, & mi_4, & sol_4, & ut_5, & mi_5. \end{array}$$

TROISIÈME CAS. — On supprime toutes les ouvertures communes.

Première circonférence. Rapport 4 : 5 : 6.

$$\begin{array}{cccccccc} -\alpha_1, & -5\alpha_2, & -\alpha_3, & -\alpha_4, & +4\alpha_5, & +\alpha_6, & -\alpha_7, & -5\alpha_8, \\ fa_1, & fa_2, & ut_3, & fa_3, & la_3, & ut_4, & mi^b_4, & fa_4. \end{array}$$

Deuxième circonférence. Rapport 5 : 6 : 8.

$$\begin{array}{cccccccccc} -\alpha_1, & -5\alpha_2, & -\alpha_3, & -5\alpha_4, & +4\alpha_5, & +\alpha_6, & -\alpha_7, & +3\alpha_8, & -\alpha_9, & -5\alpha_{10}, \\ ut_1, & ut_2, & sol_2, & ut_3, & mi_3, & sol_3, & si^b_3, & ut_4, & ré_4, & mi_4. \end{array}$$

Troisième circonférence. Rapport 3 : 4 : 5.

$$\begin{array}{cccccccc} -3\alpha_1, & -3\alpha_2, & +\alpha_4, & +2\alpha_5, & -3\alpha_6, & -3\alpha_7, & -3\alpha_8, \dots, \\ fa_2, & fa_3, & fa_4, & la_4, & ut_5, & mi^b_5, & fa_5. \end{array}$$

Quatrième circonférence. Rapport 4 : 5 : 6.

$$\begin{array}{cccccccc} -\alpha_1, & -5\alpha_2, & -\alpha_3, & -\alpha_4, & +4\alpha_5, & +\alpha_6, & -\alpha_7, & -5\alpha_8, \\ ut_2, & ut_3, & sol_3, & ut_4, & mi_4, & sol_4, & si^b_4, & ut_5. \end{array}$$

Ces résultats sont résumés dans le tableau suivant :

	1 ^{re} CIRCONF. — 4 : 5 : 6 48 40 32	2 ^e CIRCONF. — 5 : 6 : 8 48 36 30	3 ^e CIRCONF. — 3 : 4 : 5 48 64 80	4 ^e CIRCONF. — 4 : 5 : 6 48 60 72
1 ^{re} Disposition.	fa_1 fa_2, la_3, ut_4, fa_4	ut_1 $ut_2, ut_3, mi_3, sol_3, ut_4, mi_4$	fa_2 la_4	ut_2 ut_3, mi_4, sol_4, ut_5
2 ^e Disposition.	fa_2 la_3	ut_2 mi_3	fa_2 la_4	ut_3 mi_4
3 ^e Disposition.	fa_1 fa_2, la_3, fa_4	ut_1 $ut_2, ut_3, mi_3, ut_4, mi_4$	fa_2	ut_2 ut_3, mi_4, ut_5, mi_5

Le son ut_4 correspond au son produit par les quarante-huit ouvertures si elles étaient seules. La première note est le son fondamental ; celles de dessous indiquent les harmoniques renforcés. On voit encore ici qu'en ne prenant que les dispositions adoptées par Opelt, et qui pourraient être considérablement variées, surtout en choisissant des rapports plus compliqués, on obtient déjà des résultats assez nombreux pour que la vérification expérimentale puisse servir de critérium à cette théorie.

Conclusions.

Je vais tâcher de résumer, en terminant, les principaux résultats théoriques obtenus dans les diverses parties de ce travail.

1^o Quand un son est produit par une suite d'ébranlements isolés et équidistants, et que dans chacun d'eux le mouvement vibratoire n'a lieu que dans un seul sens, l'amplitude des harmoniques ne peut jamais dépasser celle du son fondamental, et ne peut lui devenir égale que si l'intervalle des ébranlements est infiniment grand par rapport à leur durée. Si les ébranlements ne sont plus équidistants, ou si chacun d'eux

est formé de deux parties pendant lesquelles les mouvements vibratoires sont de sens contraires, il n'en est plus de même. Si, en particulier, chaque ébranlement est formé de deux parties de même durée, pendant lesquelles les mouvements sont de sens contraires, et qu'ils soient infiniment éloignés, l'amplitude de l'harmonique de rang m devient égale à m fois celle du son fondamental.

2° Un son étant produit par un mouvement périodique quelconque, on peut toujours séparer l'impulsion communiquée à l'air en deux parties; d'abord en un déplacement réel, se propageant plus ou moins loin, puis un mouvement vibratoire formé de deux périodes pendant lesquelles les mouvements vibratoires sont de sens contraires, les condensations et dilatations totales étant égales, ces deux périodes pouvant du reste avoir des durées inégales.

3° Le son se rapproche, en général, autant que possible d'un son pendulaire, c'est-à-dire que le rapport de l'amplitude du deuxième harmonique à celle du son fondamental est minimum quand ces deux périodes dans lesquelles on peut diviser le mouvement vibratoire ont des durées égales. Si l'on prend, pour produire le son, une sirène munie d'ouvertures d'une forme quelconque, et que l'on fasse simplement varier la distance des ouvertures, il arrive que, dans quelques cas, chaque harmonique devient nul pour certaines distances, et l'on constate alors que chacun devient nul un nombre de fois marqué par son rang diminué d'une unité; si aucun ne passe par zéro, l'amplitude de chacun d'eux passe par un certain nombre de minima marqué par son rang diminué d'une unité,

4° Dans la série de Fourier, les coefficients des divers termes étant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$, si l'intervalle qui sépare les ébranlements devient p fois moindre, les coefficients relatifs à la nouvelle série seront

$$p\alpha_p, p\alpha_{2p}, p\alpha_{3p}, \dots, p\alpha_{mp}.$$

5° Par la théorie de Ohm, on peut expliquer tous les faits observés par Seebeck, relatifs à la production de sons par des ébranlements qui ne sont plus équidistants. Il serait nécessaire de reprendre complètement les expériences de Seebeck, en étudiant, avec des résonateurs, les sons obtenus. Les résultats qu'on déduit de la série de Fourier sont plus complets que ceux qu'avait observés Seebeck.

6° La théorie de Ohm, sur l'interprétation de la série de Fourier, rend compte de l'expérience qu'à réalisée Savart, en enlevant successivement les dents d'une roue jusqu'à ce qu'il n'en restât plus que deux, et dans laquelle il a constaté que l'on continuait à entendre le même son, quel que fût le nombre des dents; on reconnaît qu'il se produit, en même temps, d'autres sons dont l'intensité dépend du nombre des dents laissées sur la roue, et dont l'existence n'avait pas été signalée.

7° Si l'on prend une sirène et que l'on perce, sur des circonférences voisines, plusieurs rangées d'ouvertures, à des distances variables, comme l'ont fait MM. Dove et Helmholtz, on peut obtenir des accords doubles et triples. On entend facilement les sons de combinaisons subtractifs et additifs, ces derniers plus facilement (*). Si l'on supprime une des ouvertures situées sur le même rayon, d'autres sons prennent naissance, qui rentrent dans les sons de combinaisons soit de premier ordre, soit d'ordres supérieurs. En supprimant ainsi, soit partiellement, soit en totalité, les ouvertures qui se correspondent sur les circonférences concentriques, on obtient, par la théorie, des résultats très-variés relativement aux sons qui doivent se produire; certains sons, dus aux séries primitives au contraire, sont affaiblis ou annulés.

Les mêmes résultats sont obtenus avec la sirène d'Opelt, dans laquelle les diverses séries d'ouvertures sont situées sur la même circonférence, au lieu d'être placées sur des circonférences voisines, ce qui revient à peu près au même, quant aux sons accessoires produits. Enfin, en admettant que, dans la sirène de Dove et de Helmholtz (**), lorsque deux ou trois ouvertures sont ouvertes à la fois, l'ébranlement n'est pas le double ou le triple de ce qu'il serait si elles étaient ouvertes séparément, on arrive ainsi à cette conclusion que, dans la plupart des cas, les sons de combinaison si énergiques que l'on entend peuvent être attribués à la même cause que celle qui les produit dans la sirène d'Opelt, c'est-à-dire à ce que, au moment de la coïncidence, l'ébranle-

(*) Il est également nécessaire de supprimer un certain nombre d'ouvertures du plateau fixe.

(**) Dans la sirène de M. Helmholtz, les ouvertures étant très-grandes relativement à leur distance, il y a plusieurs ouvertures ouvertes, même quand la coïncidence n'existe pas, ce qui diminue l'effet indiqué.

ment total n'est pas égal à la somme des ébranlements partiels, et cela uniquement à cause de la disposition des appareils employés; c'est, en effet, en prenant deux tuyaux sonores, montés sur la même soufflerie, que l'on produit le plus énergiquement les sons de combinaison.

Ces résultats ne pourront toutefois être complètement admis que quand ils auront reçu la sanction de l'expérience, ce qui exige des appareils nombreux et convenablement disposés pour l'étude des sons produits; ce qu'il faut surtout chercher à réaliser, c'est une sirène ayant un mouvement de rotation parfaitement régulier, et produisant des sons purs et intenses; on pourrait employer utilement, dans ce but, les nouveaux régulateurs imaginés par Foucault pour obtenir des mouvements de rotation parfaitement réguliers et continus. Je me propose d'entreprendre cette étude expérimentale, complément du présent travail, quand les circonstances m'auront permis de me procurer les appareils nécessaires pour pouvoir la faire dans de bonnes conditions d'exactitude et de précision.

FIN DU TOME SEPTIÈME ET DE LA 1^{re} SÉRIE.