

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉTIENNE DELASSUS

## Mémoire sur la théorie des liaisons finies unilatérales

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 34 (1917), p. 95-179

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1917\\_3\\_34\\_\\_95\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1917_3_34__95_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES LIAISONS FINIES

UNILATÉRALES,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS.



Les liaisons unilatérales sont une de ces choses banales que l'on rencontre à chaque pas, même dans les problèmes les plus simples de Mécanique, et présentant cette singularité que, malgré qu'une théorie complète n'en soit exposée nulle part, à ma connaissance du moins, chacun traite néanmoins sans difficulté toutes les questions qui se posent à ce propos.

On se trouve là en présence de choses *si évidentes* que la théorie n'en existe même pas ! Pourquoi l'exposer ? Pourquoi la formuler ? Pourquoi même en parler ? C'est ce que l'on pourrait appeler « une théorie implicite ».

M. Appell <sup>(1)</sup> s'est occupé des liaisons unilatérales mais s'est borné à considérer l'équilibre d'un système pour condenser, en un principe analogue à celui des travaux virtuels, les conditions d'équilibre

---

(1) APPELL, *Leçons de Mécanique rationnelle*, 3<sup>e</sup> édition, t. I, p. 277.

données par la théorie implicite dont nous parlons. Ce n'est pas une théorie nouvelle, c'est une application ou un changement de forme de la théorie courante.

Essayons de formuler d'une façon précise cette théorie.

On part d'un fait expérimental incontestable : *Lorsqu'il y a un seul contact unilatéral, ce contact persiste ou cesse suivant que la réaction normale est dirigée du côté libre ou du côté opposé ou, par abréviation, suivant que la réaction normale est positive ou négative.* C'est ce que l'on peut appeler « la loi du contact unique ».

Généralisant alors sans recourir à aucun fait expérimental on considère comme « évident » que, *si la liaison finie unilatérale est réalisée par des contacts non surabondants, chacun d'eux, au point de vue de sa persistance ou de sa cessation, suit la loi du contact unique indépendamment des autres contacts, c'est-à-dire persiste ou cesse suivant que sa réaction partielle est positive ou négative.*

La théorie donne ainsi une réponse complète et précise dans tous les cas qui peuvent se présenter pour les liaisons unilatérales non surabondantes.

*Si la liaison est surabondante, on admet que la liaison totale persiste, par application de la loi du contact unique, si l'indétermination dynamique qui porte sur les réactions des contacts permet de concevoir ces réactions partielles comme étant toutes positives.*

Si cette condition n'est pas réalisée, *on admet que le contact total ne persiste pas*; mais la théorie reste muette sur la question de la détermination des contacts qui persistent et de ceux qui cessent.

La théorie courante ne donne pas alors une réponse complète dans tous les cas; elle présente là une lacune. Mais il y a plus.

On part d'un principe expérimental exact, on fait une généralisation « évidente » et cependant il n'est pas nécessaire de chercher des exemples bien compliqués pour montrer qu'on est conduit parfois à des résultats manifestement contraires à l'expérience la plus grossière.

Dans un plan vertical, considérons un angle aigu  $C_1OC_2$  réalisé matériellement et placé comme l'indique la figure 1, c'est-à-dire situé tout entier au-dessous de l'horizontale de O et d'un même côté de la

verticale de ce point. Imaginons une molécule pesante placée à l'intérieur de l'angle et tenue immobile en O.

Si nous la lâchons, nous constatons expérimentalement qu'elle va suivre le côté  $C_1$ , autrement dit, le contact  $C_1$  va persister et le contact  $C_2$  va cesser.

Or si nous cherchons les deux réactions  $N_1, N_2$ , nous constatons qu'elles sont toutes deux négatives de sorte que la théorie indique la cessation des deux contacts, c'est-à-dire la production du mouvement de la molécule ne subissant aucune liaison et, sans même invoquer le mouvement vrai constaté expérimentalement, nous voyons là un

Fig. 1.

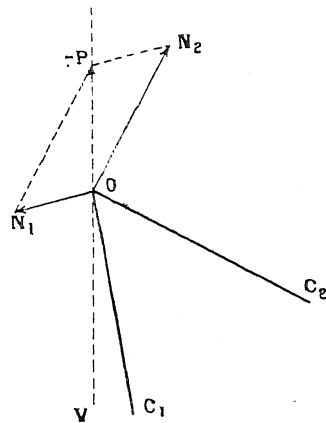
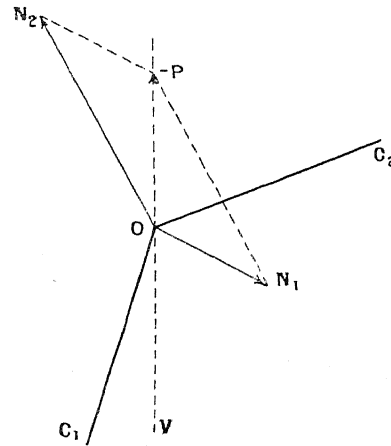


Fig. 2.



résultat faux car le mouvement libre aurait lieu suivant la verticale descendante  $OV$  c'est-à-dire en dehors de l'angle dont la molécule ne peut franchir les frontières. On peut dire que la théorie conduit à un mouvement qui n'est pas possible.

Reprenons le même exemple en supposant (fig. 2) l'angle  $C_1OC_2$  obtus et traversé simultanément par l'horizontale et la verticale descendante issues de O. Expérimentalement, on constate que la molécule, étant lâchée en O, prendra le mouvement de chute verticale, c'est-à-dire que les deux contacts vont cesser simultanément.

Si l'on applique la théorie on a la réaction  $N_1$  positive et la réaction  $N_2$  négative; donc le contact  $C_1$  doit persister et le contact  $C_2$  doit cesser; autrement dit, le point doit prendre le mouvement sur  $C_1$ . Là,

encore, la théorie donne un résultat en contradiction avec l'expérience.

Ces deux exemples élémentaires suffisent pour montrer que la loi du contact unique n'est pas applicable au cas des contacts multiples et par conséquent que la théorie « implicite » est à rejeter.

Il est toutefois curieux de faire remarquer que cette théorie fautive conduit, dans la grande généralité des cas, à des résultats exacts. Cela tient, d'une part, à ce que, dans certains cas, les résultats qu'elle fournit coïncident avec ceux que l'on déduit de la théorie exacte et, d'autre part, à ce que, par suite de la façon dont les questions se posent, on se trouve généralement dans ces cas spéciaux. C'est ainsi que la condition de persistance de la liaison totale, formulée par M. Appell, est exacte et sera retrouvée dans le cours de ce Mémoire.

Dans un livre récent (1), j'ai esquissé une théorie des liaisons finies unilatérales basée sur l'étude du mouvement que prend le système quand il quitte tout ou partie de la liaison unilatérale considérée. Cette théorie, succinctement exposée, était sujette à des critiques justifiées et appelait de nouvelles recherches pour élucider certains points.

La critique fondamentale est relative à la définition de l'irréductibilité d'une liaison unilatérale. On peut contester cette définition analytique comme ne correspondant à aucun fait physique. J'ai donc abandonné complètement ce point de vue pour en prendre un autre plus expérimental et conduisant d'ailleurs au même résultat.

Certaines théories, comme celle des mouvements avec frottement de glissement, peuvent donner naissance à des impossibilités ou à des indéterminations. La théorie des liaisons unilatérales, telle que je l'exposais, donnait des conditions de production effective des différents mouvements sur tout ou partie de la liaison, mais ne montrait pas qu'il y avait toujours un et un seul de ces groupes de conditions qui fût réalisé. On pouvait donc admettre *a priori*, puisqu'il s'agit de choisir entre un certain nombre de mouvements celui qui satisfait à certaines conditions, que l'on pouvait, là aussi, être conduit à l'impos-

---

(1) DELASSUS, *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels*, p. 228.

sibilité ou à l'indétermination. C'était une question fondamentale dont l'étude s'imposait.

La théorie que j'expose actuellement part toujours de la même idée, c'est-à-dire de l'étude des mouvements réduits ayant lieu sur une partie de la liaison totale. L'étude des *équations de discontinuité* qui s'introduisent alors conduit à une forme quadratique homogène  $W$  définie et positive, c'est-à-dire analogue à une force vive, et que, pour cette raison, j'appelle *force vive de la liaison unilatérale*. Cette force vive donne naissance à une transformation  $W$  jouant un rôle fondamental et décomposant l'espace en *régions remplissant tout l'espace sans se superposer*; ce sont ces régions qui définiront ultérieurement les divers cas de réduction et c'est leur propriété indiquée qui montrera qu'il n'y a jamais impossibilité ou indétermination.

Dans le cas d'une liaison unilatérale simple, on a à choisir entre deux mouvements dont l'un est le *mouvement réduit*. Ce dernier peut être impossible dynamiquement ou être possible et, dans ce dernier cas, il se produit effectivement, c'est un fait expérimental; on a donc la notion précise de liaison unilatérale simple irréductible.

Passant aux liaisons unilatérales doubles et étudiant les mouvements réduits, on peut leur appliquer ce qui précède puisqu'ils ont lieu sur des liaisons unilatérales simples ou nulles et l'on trouve, comme conséquence de la transformation  $W$ , qu'il y a zéro ou un mouvement réduit dynamiquement possible; s'il y en a un, c'est lui qui se produit (fait expérimental). On a alors la notion de liaison unilatérale double irréductible.

On peut continuer de proche en proche indéfiniment. La loi « zéro ou un » pour le nombre des mouvements réduits possibles se vérifiera toujours et toujours aussi on retrouvera la même définition de l'irréductibilité.

Cette marche de proche en proche fournit donc un raisonnement rigoureux, met bien en évidence les faits expérimentaux invoqués et, grâce à la transformation  $W$ , donne la définition précise des différentes régions de réduction et montre toujours qu'il ne peut y avoir ni impossibilité ni indétermination.

Pour faciliter la lecture du Mémoire, j'ai cru utile de ne pas interrompre le développement des idées par des renvois à mon Livre déjà

cité et, par conséquent, de reproduire quelques fragments non inédits. De cette façon le lecteur a une exposition d'ensemble de la théorie des liaisons finies unilatérales.

Je ferai remarquer en outre que je me suis borné au cas des liaisons simples, doubles ou triples, qui sont celles que l'on rencontre pratiquement, mais que la théorie ne s'arrête pas là et qu'en employant le langage et les notations de la géométrie à  $n$  dimensions on pourrait aisément poursuivre le raisonnement jusqu'à des liaisons  $n$ -uples. Je n'ai pas jugé nécessaire de pousser l'exposition jusque-là; il suffit de savoir que c'est possible et cela sera admis sans difficulté par le lecteur ayant suivi attentivement l'étude des liaisons simples, doubles et triples.

---

## PREMIÈRE PARTIE.

### GÉNÉRALITÉS ET NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

---

#### I. — Les liaisons unilatérales.

1. *Le côté positif d'une liaison.* — Lorsqu'un système matériel défini par des paramètres  $q$  est assujéti à suivre une liaison, les variations virtuelles  $\omega$  des  $q$  sont assujétiées à vérifier certaines équations linéaires et homogènes

$$\varphi_1(\omega) = 0, \quad \varphi_2(\omega) = 0, \quad \dots,$$

dont le nombre peut être fini ou infini. Il est infini, par exemple, dans le cas d'un solide en contact avec un plan par toute une face plane.

Ces équations peuvent ne pas être distinctes. Les fonctions  $\varphi$  sont alors des combinaisons linéaires et homogènes d'un certain nombre d'entre elles que nous désignerons par

$$X_1, X_2, \dots, X_i$$

et qui suffisent pour définir tous les déplacements virtuels sur la liaison.

S'il n'y a pas d'autres équations que les équations  $X$ , la liaison n'est pas surabondante. S'il y a d'autres équations, qui sont nécessairement de la forme

$$\sum \lambda X = 0,$$

la liaison est dite *surabondante*. Le problème de dynamique consistant en l'étude du mouvement sur la liaison n'utilise que les déplacements virtuels sur la liaison, c'est-à-dire seulement les équations  $X$ , donc ne tient pas compte du fait que la liaison est surabondante ou non.

Dans tous les cas, la liaison considérée sera dite *simple*, *double*, *triple*, ... suivant que  $i$  aura l'une des valeurs 1, 2, 3, ....

Il arrive fréquemment que la liaison est réalisée de façon à permettre non seulement les déplacements virtuels annulant toutes les fonctions  $\varphi$ , mais aussi tous ceux qui donnent aux diverses fonctions  $\varphi$  des signes déterminés. En changeant au besoin le signe de certaines fonctions  $\varphi$ , la réalisation de la liaison permet tous les déplacements virtuels satisfaisant à

$$\varphi_1(\omega) \geq 0, \quad \varphi_2(\omega) \geq 0, \quad \dots$$

La liaison sera alors dite *unilatérale* et l'ensemble des déplacements virtuels que nous venons de définir constituera le *côté positif* de la liaison.

De ce que les équations

$$\varphi_1(\omega) = 0, \quad \varphi_2(\omega) = 0, \quad \dots$$

sont des conséquences de

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad \dots, \quad X_i = 0$$

ne résulte pas que toutes les inégalités

$$\varphi(\omega) \geq 0$$



soient des conséquences des inégalités

$$X(\omega) \geq 0;$$

donc les inégalités ne pourront pas se réduire en général aux  $i$  inégalités relatives aux  $X$ , elles se réduiront à un nombre plus considérable, de sorte que le fait que la liaison est surabondante interviendra effectivement dans la définition du côté positif de la liaison.

Dans le cas de la liaison simple non surabondante, il n'y a qu'une seule équation

$$\varphi(\omega) = 0$$

et au côté positif défini par

$$\varphi(\omega) \geq 0$$

correspond, par exclusion, un côté négatif défini par

$$\varphi(\omega) \leq 0.$$

Si, comme nous le supposons toujours dans ce Mémoire, la liaison est une liaison finie, elle peut être considérée comme étant constituée par la réunion des liaisons simples dont chacune est caractérisée par une des fonctions  $\varphi$  et possède, à la fois, un côté positif et un côté négatif.

Le côté positif de la liaison totale sera alors la partie commune aux côtés positifs des liaisons simples en lesquelles elle se décompose.

2. *Représentation géométrique d'une liaison* : 1° *Cas de la liaison simple*. — On a  $i = 1$ ; les inégalités de définition du côté positif sont, au moyen de  $X$ ,

$$X \geq 0, \quad \lambda X \geq 0, \quad \mu X \geq 0, \quad \dots$$

Pour pouvoir être compatibles, c'est-à-dire pour avoir un côté positif, il faut que  $\lambda, \mu, \dots$  soient des coefficients positifs et alors elles se réduisent à l'unique inégalité

$$X \geq 0.$$

Si le déplacement  $\omega_1, \omega_2, \dots$  se représente par le point d'abscisse

$$X(\omega_1, \omega_2, \dots),$$

porté sur un axe, on peut dire que le côté positif de la liaison est représenté par une demi-droite qui est la partie positive de l'axe des X.

2° *Cas de la liaison double.* — On a  $i = 2$ , donc deux fonctions X que, pour prendre les notations des coordonnées cartésiennes, nous appellerons X, Y. Les inégalités de définition du côté positif sont

$$\begin{aligned} X &\geq 0, \\ Y &\geq 0, \\ \lambda_1 X + \mu_1 Y &\geq 0, \\ \lambda_2 X + \mu_2 Y &\geq 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Si l'on représente le déplacement  $\omega_1, \omega_2, \dots$  par le point de coordonnées

$$X(\omega_1, \omega_2, \dots), \quad Y(\omega_1, \omega_2, \dots),$$

on aura donc à considérer les droites

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad \lambda_1 X + \mu_1 Y = 0, \quad \dots$$

qui représentent les liaisons simples composantes, et à chercher la portion commune aux côtés positifs de ces droites. Ou bien cette portion commune n'existe pas et il n'y a pas de côté positif de la liaison, ou bien elle existe et est l'intérieur d'un angle au sens géométrique du mot, c'est-à-dire moindre que deux droits et que, pour cette raison et parce que nous aurons constamment à faire cette distinction dans la suite, nous appellerons « angle convexe ». Cet angle sera limité par deux des droites représentatives des fonctions  $\varphi$  et aucune des droites  $\varphi$  ne traversera son intérieur. C'est l'intérieur de cet angle convexe qui représentera le côté positif de la liaison double.

3° *Cas de la liaison triple.* — On a  $i = 3$ , donc trois fonctions X que nous désignerons par X, Y, Z. Les inégalités de définition du côté

positif sont

$$\begin{aligned} X &\geq 0, & Y &\geq 0, & Z &\geq 0, \\ \lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z &\geq 0, \\ \lambda_2 X + \mu_2 Y + \nu_2 Z &\geq 0, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

S'il y a un côté positif, elles sont compatibles et l'on est ramené à chercher la partie commune aux côtés positifs des plans qui représentent les liaisons simples composantes. Cette région est limitée par un certain nombre de ces plans et est tout entière d'un même côté par rapport à chacun d'eux; c'est donc l'intérieur d'un angle polyèdre convexe, lequel ne sera traversé par aucun des plans représentatifs des diverses fonctions  $\varphi$ .

Le côté positif de la liaison est donc représenté par l'intérieur d'un angle polyèdre convexe issu de l'origine.

Dans le cas où la liaison est surabondante et représentée par une infinité de fonctions  $\varphi$ , il peut arriver que l'angle polyèdre ait une infinité de faces, c'est-à-dire soit limité en partie par l'enveloppe d'un plan dépendant d'un paramètre. Il sera alors limité en partie par des faces planes et en partie par des faces coniques. Par exemple, si l'on prend un solide en contact avec un plan par une face plane, l'angle polyèdre figuratif sera un cône si la face est limitée par une courbe convexe, et sera un angle polyèdre à faces planes et faces coniques si la face est un polygone à côtés rectilignes et côtés curvilignes. En tous cas, d'après sa formation même, l'angle polyèdre sera tout entier d'un même côté de chaque face plane et du même côté de chaque plan tangent à toute face courbe, donc sera toujours convexe.

Nous n'irons pas plus loin dans cette représentation, la généralisation dans le cas de

$$i > 4$$

se faisant sans difficulté dans l'espace à  $i$  dimensions.

3. *Liaisons réduites.* — Soient

$$f_1(q, t) = 0, \quad f_2(q, t) = 0, \quad \dots,$$

les équations finies en nombre fini ou infini qui définissent la liaison unilatérale.

Faisons mouvoir le système sur la liaison et à un certain moment  $t_1$ , modifions le mouvement de façon qu'il n'ait plus lieu sur la liaison. Avant l'instant  $t_1$ , les fonctions  $f$  sont constamment nulles; à partir de l'instant  $t_1$ , puisque le système ne suit plus la liaison, c'est que les fonctions  $f$  ne sont plus toutes nulles et, comme la réalisation matérielle de la liaison est unilatérale, c'est-à-dire constituée par des obstacles infranchissables, aucune fonction  $f$  ne peut devenir négative de sorte que, finalement, dans le mouvement à partir de l'instant  $t_1$ , certaines fonctions  $f$  continuent à être nulles tandis que toutes les autres deviennent positives.

Pour un intervalle de temps  $dt$  suivant  $t_1$ , on aura donc

$$df_1 = 0, \quad \dots, \quad df_h = 0, \quad df_{h+1} > 0, \quad df_{h+2} > 0, \quad \dots$$

Soient  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  les valeurs de  $dq_1, \dots, dq_n$  correspondant à ce mouvement infiniment petit.

Considérons le mouvement primitif que l'on aurait continué sur la liaison au delà de l'instant  $t_1$ ; pour le même intervalle de temps  $dt$  commençant à  $t_1$  on aurait eu, dans ce mouvement,

$$df_1 = 0, \quad \dots, \quad df_h = 0, \quad df_{h+1} = 0, \quad df_{h+2} = 0, \quad \dots$$

Soient  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$  les valeurs de  $dq_1, \dots, dq_n$  dans ce mouvement infiniment petit. Considérons le déplacement virtuel

$$\omega_1 = \xi_1 - \eta_1, \quad \dots, \quad \omega_n = \xi_n - \eta_n;$$

d'après les équations précédentes on aura

$$\varphi_1(\omega) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_h(\omega) = 0, \quad \varphi_{h+1}(\omega) > 0, \quad \varphi_{h+2}(\omega) > 0, \quad \dots,$$

de sorte que le mouvement modifié se fait sur une liaison définie par une partie seulement

$$f_1(q, t) = 0, \quad \dots, \quad f_h(q, t) = 0,$$

des équations de la liaison primitive avec la condition que les équations

$$\varphi_1(\omega) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_h(\omega) = 0$$

soient compatibles avec les inégalités

$$\varphi_{h+1}(\omega) > 0, \quad \varphi_{h+2}(\omega) > 0, \quad \dots$$

Toute liaison ainsi obtenue sera, par rapport à la liaison considérée, une *liaison réduite*.

Le problème de la recherche des liaisons réduites possède toujours une solution bien simple visible dans le cas général : c'est celle qui correspond à

$$h = 0$$

il n'y a alors aucune égalité et les inégalités, qui sont celles de la liaison totale, sont compatibles par hypothèse. Le système cesse le contact avec toutes les liaisons simples composantes ; nous dirons que c'est la réduction à la liaison nulle ou encore la réduction totale.

1° *Cas de la liaison simple*. — Il ne peut y avoir que la liaison réduite nulle, laquelle existe toujours.

2° *Cas de la liaison double*. — Il y a la liaison réduite nulle et il s'agit de chercher les liaisons réduites simples.

Une telle liaison sera représentée par une des droites  $\varphi$  avec la condition qu'il y ait sur cette droite des points qui soient du côté positif de toutes les autres droites  $\varphi$ , c'est-à-dire qui ne soient pas en dehors de l'angle convexe représentant la liaison. Or toutes les droites  $\varphi$  passent à l'extérieur de cet angle sauf les deux qui en forment les côtés et ces derniers satisfont bien à la condition de sorte que : les liaisons réduites simples sont celles qui sont représentées par les côtés de l'angle figuratif de la liaison double considérée.

Dans la plupart des cas, il est inutile de passer par la considération de l'angle figuratif.

Si la liaison double n'est pas surabondante et est définie par

$$f_1(q, t) = 0, \quad f_2(q, t) = 0,$$

les deux liaisons réduites simples seront manifestement

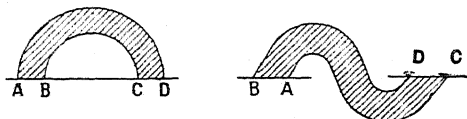
$$f_1(q, t) = 0$$

et

$$f_2(q, t) = 0.$$

Considérons encore une plaque verticale en contact avec une horizontale fixe par deux segments rectilignes qui peuvent être du même

Fig. 3.



côté ou de part et d'autre. Il s'agit de chercher des déplacements virtuels du côté positif de la liaison totale et conservant le contact d'un seul point entre A et B ou entre C et D.

On voit immédiatement qu'on ne peut satisfaire à ces conditions qu'au moyen de rotations convenables autour des deux points A et D, de sorte que les deux liaisons réduites simples sont définies : la première par l'obligation, imposée au point A, de rester sur l'horizontale ; la deuxième, par la même obligation pour le point D.

3° *Cas de la liaison triple.* — Il y a alors la liaison réduite nulle, des liaisons réduites simples et des liaisons réduites doubles.

Pour avoir une liaison réduite simple, il faut prendre un plan figuratif d'une fonction  $\varphi$  et possédant des points non extérieurs à l'angle polyèdre figuratif, ces points n'étant assujettis à aucune autre équation, sans quoi les déplacements auraient lieu sur une liaison double composée avec  $\varphi$  et une autre équation. Il résulte de la formation de l'angle polyèdre figuratif que les seuls plans  $\varphi$  répondant à la question sont ceux qui forment les faces planes de l'angle polyèdre.

On a exclu les plans  $\varphi$  qui peuvent exister et passent par une arête de l'angle polyèdre parce que les déplacements virtuels dans  $\varphi$  et non extérieurs à l'angle polyèdre sont assujettis à l'équation  $\varphi$  et à une autre équation, celle d'un autre plan passant par l'arête. Le raisonnement n'est plus valable si  $\varphi$  est un plan tangent à une face conique, car les déplacements infiniment petits en dehors de l'arête sont encore dans  $\varphi$  puisque ce plan est tangent. En réalité, on a une liaison réduite s'exprimant par le fait que les déplacements virtuels correspondants sont représentés par des points dans le plan tangent à la face conique.

En résumé, les liaisons réduites simples sont fournies par les faces, planes ou coniques, de l'angle polyèdre figuratif de la liaison.

Pour avoir une liaison réduite double, il faut prendre deux plans  $\varphi$  dont l'intersection possède des points non extérieurs à l'angle polyèdre figuratif. On voit immédiatement qu'il faut prendre les deux plans  $\varphi$  formant deux faces consécutives. Le raisonnement semble s'appliquer à l'intersection des deux faces consécutives infiniment petites, c'est-à-dire à une génératrice d'une face courbe; mais, par suite de la continuité entre les génératrices successives, on a ainsi une liaison double, mais dépendant d'un paramètre arbitraire, c'est-à-dire, par l'élimination de ce paramètre, une seule équation entre les  $\omega$ , donc, en définitive, une liaison simple.

Les liaisons réduites doubles sont donc fournies par les arêtes de l'angle polyèdre figuratif en y comprenant celles qui réunissent une face plane et une face conique ou deux faces coniques, pourvu que ce soient de véritables arêtes, c'est-à-dire que les deux faces ne se raccordent pas.

Comme dans le cas des liaisons doubles, il est souvent inutile de passer par la considération de l'angle polyèdre figuratif.

Si la liaison n'est pas surabondante et est définie par

$$f_1(q, t) = 0, \quad f_2(q, t) = 0, \quad f_3(q, t) = 0,$$

on aura immédiatement les trois liaisons réduites doubles

$$\begin{array}{|l} f_1 = 0 \\ f_2 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} f_2 = 0 \\ f_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} f_3 = 0 \\ f_1 = 0 \end{array}$$

et les trois liaisons réduites simples

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0.$$

Considérons un solide posé sur un plan horizontal H par une face plane B. Tout déplacement virtuel peut, réduit en un point convenable de H, se décomposer en une translation dans H, une rotation perpendiculaire à H et une rotation autour d'un axe  $\Delta$  situé dans H. C'est cette dernière seule qui fournit un déplacement virtuel en dehors de la liaison considérée. Il faut, pour avoir les liaisons réduites doubles,

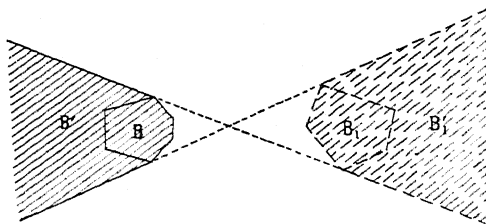
chercher les rotations  $\Delta$  conservant le contact de deux points de B et donnant à tous les autres points de B des déplacements verticaux au-dessus de H. Il faut donc chercher les droites  $\Delta$  passant par deux points de B et laissant tous les points de B d'un même côté; on est ainsi conduit à la formation de la base de sustentation  $B'$ , laquelle peut avoir des côtés courbes et les liaisons réduites doubles s'obtiennent en conservant le contact de deux sommets consécutifs de cette base de sustentation, ces deux sommets étant les extrémités d'un côté rectiligne.

Pour avoir les liaisons réduites simples, il suffit de chercher les rotations  $\Delta$  dans les mêmes conditions, mais ne conservant que le contact d'un seul point de B. Elles sont données par les droites  $\Delta$  extérieures à  $B'$  et passant par un de ses sommets ou tangentes à un de ses côtés courbes.

Si, par exemple, la face B est limitée par une courbe convexe,  $B'$  coïncidera avec B et il n'y aura pas de liaisons réduites doubles.

Si le solide est en contact avec la face supérieure de H par une face B et avec la face inférieure par une face  $B_1$ , en prolongement plan de B, il faut chercher les droites  $\Delta$  passant par deux ou un point de B et  $B_1$ , et laissant B tout entière d'un côté et  $B_1$  tout entière de l'autre côté. On est alors conduit à la notion de base de sustentation formée au moyen de B et  $B_1$ , comme l'indique la figure.

Fig. 4.



Cette base se compose d'une partie supérieure  $B'$  et d'une partie inférieure  $B_1$ , s'étendant toutes deux à l'infini et l'une étant le prolongement de l'autre au travers de la droite de l'infini.

Les liaisons réduites doubles fournies par les côtés de B qui appartiennent à  $B'$  ne conservent le contact d'aucun point de  $B_1$ ; celles qui



sont fournies par les côtés de  $B_1$  appartenant à  $B'_1$  ne conservent le contact d'aucun point de  $B$ . Enfin il y a deux liaisons réduites doubles conservant le contact d'un sommet de  $B$  et d'un sommet de  $B_1$  : ce sont celles qui sont fournies par ce que l'on pourrait appeler les deux tangentes communes intérieures à  $B$  et  $B_1$  qui forment les côtés infinis de  $B'$  et  $B'_1$ .

Quant aux liaisons réduites simples, elles seront encore fournies par les sommets de  $B'$  et  $B'_1$ .

Ces résultats étaient intuitifs en partant de la notion du début, c'est-à-dire de l'idée du solide quittant la liaison. Ce qui précède montre que la traduction analytique de cette notion permet de les retrouver par l'application d'un raisonnement d'une portée beaucoup plus générale.

## II. — Équations de discontinuité. Force vive d'une liaison.

4. *Suppression brusque d'une liaison.* — Soient  $A$  une liaison à laquelle est soumis un système matériel et  $L$  l'ensemble de toutes ses autres liaisons.

Le système se mouvant sous l'action de forces déterminées sur la liaison totale  $L + A$ , on suppose qu'à l'instant  $t_1$  la liaison  $A$  soit supprimée brusquement. Quel va être le mouvement ultérieur ?

Par définition même, ce sera un mouvement sur la liaison  $L$  et sous l'action des mêmes forces, puisque celles-ci continuent à agir sans modifications. Pour achever de le déterminer, il faut connaître ses conditions initiales à l'instant  $t_1$ , où il commence.

Considérons les conditions finales du premier mouvement, c'est-à-dire les valeurs des  $q$  et des  $q'$  à l'instant  $t_1$  dans ce mouvement, elles satisfont aux équations  $(L)$  et  $(A)$  de la liaison  $L + A$ , et, en particulier, aux équations  $(L)$  de la liaison sur laquelle a lieu le second mouvement. On peut donc concevoir un mouvement ultérieur sur la liaison  $L$  et ayant pour conditions initiales les conditions finales du mouvement sur la liaison  $L + A$ .

Mais il y a ici à faire une distinction entre les  $q$  et les  $q'$ . La position initiale dans le second mouvement est identique à la position

finale dans le premier; donc, sans faire appel à aucun postulat, nous pouvons dire : les  $q$  initiaux du second mouvement sont les  $q$  finaux du premier mouvement.

Pour les  $q'$  on ne peut rien dire d'analogue *a priori*. Du fait que, parmi tous les mouvements qui peuvent se produire sur L, il y en a un dont les  $q'$  initiaux sont les  $q'$  finaux du mouvement sur L + A, ne résulte en aucune façon que ce soit ce mouvement qui se produise réellement.

Il faut faire appel à l'expérience qui fait constater toujours que le changement dans le mouvement se fait sans discontinuité apparente, c'est-à-dire en conservant la continuité des vitesses. C'est la loi expérimentale dont un cas particulier bien connu s'exprime en disant que, si la liaison d'un point matériel est brusquement rompue, ce point s'échappe par la tangente.

Nous admettrons donc :

PRINCIPE EXPÉRIMENTAL. — *Lorsqu'un système matériel se meut sur une liaison L + A et qu'à un certain moment la liaison A se trouve brusquement supprimée, le mouvement ultérieur sur la liaison L est celui qui a pour conditions initiales les conditions finales du mouvement sur L + A.*

Pour abrégier le langage nous désignerons par M le mouvement sur L + A finissant à l'instant  $t_1$ , par M' le mouvement sur L commençant à l'instant  $t_1$  et par M<sub>1</sub> la continuation, à partir de  $t_1$ , du mouvement M sur L + A; de sorte que M' et M<sub>1</sub> sont deux mouvements, l'un sur L, l'autre sur L + A et ayant les mêmes conditions initiales à l'instant initial  $t_1$ .

5. *Équations de discontinuité.* — Les équations du mouvement M<sub>1</sub> sont, en employant la forme condensée de D'Alembert et n'employant que celles des fonctions  $\varphi$  qui sont distinctes,

$$\sum (P + Q)\omega + \sum \lambda f(\omega) + \sum \mu \varphi(\omega) \equiv 0,$$

$$f_1(q'') - a_1 = 0, \quad f_2(q'') - a_2 = 0, \quad \dots,$$

$$\varphi_1(q'') - \alpha_1 = 0, \quad \varphi_2(q'') - \alpha_2 = 0, \quad \dots,$$

la seconde ligne étant formée par les équations du second ordre de (L)

où l'on met en évidence la partie homogène aux  $q''$  et la troisième ligne par les équations analogues de  $\Lambda$ .

Les équations du mouvement  $M'$  sont

$$\begin{aligned} \sum (P + Q)\omega + \sum \lambda f(\omega) &\equiv 0, \\ f_1(q'') - a_1 &= 0, \quad f_2(q'') - a_2 = 0, \quad \dots \end{aligned}$$

Dans ces deux systèmes, faisons  $t = t_1$ , ce qui fait que les  $q'$  et les  $q''$  y prennent les mêmes valeurs. Enfin, des équations de  $M'$  retranchons les équations correspondantes de  $M_1$ . Si nous appelons  $p_1, p_2, \dots, p_n$  les variations que subissent les  $q''$  à l'instant  $t_1$  quand on passe de  $M_1$  à  $M'$  et par  $\nu$  les mêmes variations des  $\lambda$ , et si enfin nous appelons  $\varphi(p)$  la portion homogène et du second degré de la force vive où l'on a remplacé les  $q'$  par les  $p$ , nous obtiendrons

$$\begin{aligned} - \sum \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial p} \omega + \sum \nu f(\omega) - \sum \mu \varphi(\omega) &\equiv 0, \\ f_1(p) &= 0, \quad f_2(p) = 0, \quad \dots \end{aligned}$$

Ce sont les *équations de discontinuité du second ordre* qui font connaître les variations brusques que subissent les  $q''$  à l'instant  $t_1$  quand on passe du mouvement  $M$  au mouvement  $M'$  par suppression de la liaison  $\Lambda$ .

Pour que la discontinuité n'existe pas au second ordre, il faut que les équations de discontinuité qui sont linéaires soient vérifiées par un système de valeurs des  $p$  et des  $\nu$  dans lequel les  $p$  sont tous nuls. On aura alors

$$\sum \nu f(\omega) - \sum \mu \varphi(\omega) \equiv 0,$$

qui sont des relations linéaires et homogènes entre les formes linéaires  $f(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$ . Comme celles-ci sont distinctes par hypothèse, il faut que les  $\nu$  et les  $\mu$  soient nuls. Réciproquement, si les  $\mu$  sont nuls, les équations de discontinuité sont homogènes et donnent les  $p$  et les  $\nu$  tous nuls. L'expression

$$\sum \mu \varphi(\omega)$$

est le travail virtuel qui sert de définition aux forces de liaison relatives à la liaison  $\Lambda$ . Si, pour abrégér, nous appelons *réaction de  $\Lambda$*  ce système de forces de liaison, la condition que les  $\mu$  sont tous nuls signifie que la réaction de  $\Lambda$  a un travail identiquement nul, c'est-à-dire est nulle. Donc :

Pour qu'au passage de  $M$  à  $M'$  il n'y ait pas de discontinuité au second ordre, il faut et il suffit qu'au moment où la liaison  $\Lambda$  est supprimée sa réaction soit nulle.

Dans ce cas, on différencierait les équations des mouvements  $M$ , et  $M'$  de façon à passer aux équations du troisième ordre et, par le même mécanisme, on trouverait les équations de discontinuité du troisième ordre

$$-\sum \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} \omega + \sum v f(\omega) - \sum \frac{d\mu}{dt} \varphi(\omega) \equiv 0,$$

$$f_1(p) = 0, \quad f_2(p) = 0, \quad \dots,$$

qui sont analogues à celles du second ordre, les  $p$  désignant les variations des  $q''$ , les  $v$  les variations des  $\frac{d\lambda}{dt}$ , mais où figure maintenant non plus la réaction de  $\Lambda$ , réaction qui est nulle, mais la vitesse de cette réaction, cette vitesse étant prise ici au sens que j'ai attribué à l'expression « vitesse d'un système de vecteurs ». Le raisonnement précédemment fait montre : pour que la discontinuité n'apparaisse pas encore au troisième ordre, il faut et il suffit que la réaction de  $\Lambda$  soit nulle à l'instant  $t_1$ , ainsi que sa vitesse.

Et ainsi de suite.

6. *Position du mouvement  $M'$  par rapport à la liaison  $\Lambda$ .* — Soient

$$\Phi_1(q, t) = 0, \quad \Phi_2(q, t) = 0, \quad \dots$$

les équations finies de  $\Lambda$ . Il s'agit de voir le signe que prennent les fonctions  $\Phi$ , immédiatement après l'instant  $t_1$ , dans le mouvement  $M'$ , c'est-à-dire le signe à l'instant  $t_1 + dt$  de la quantité

$$\Phi_{M'}(q, t) - \Phi_{M_1}(q, t)$$

puisque le second terme est identiquement nul.

Pour  $t = t_1$ , cette quantité est nulle ainsi que sa première dérivée, puisque les  $q$  et les  $q'$  sont, à cet instant, les mêmes dans les deux mouvements. Le signe est donc celui de la dérivée seconde. On a

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \sum Aq'' + B = \varphi(q'') + B,$$

les  $A$  ne dépendant que des  $q$  et  $B$  que des  $q$  et des  $q'$ . En faisant la différence, il restera donc

$$\varphi(p).$$

On est ainsi amené à voir le signe des fonctions  $\varphi$  pour un déplacement virtuel

$$p_1\varepsilon, \quad p_2\varepsilon, \quad \dots, \quad p_n\varepsilon,$$

$\varepsilon$  étant un infiniment petit positif. C'est ce déplacement que nous appellerons, pour abrégé, le déplacement  $(p)$ .

Si la discontinuité n'apparaissait qu'au troisième ordre, on retrouverait exactement le même résultat au moyen du déplacement  $(p)$  formé avec les discontinuités des  $q'''$  et ainsi de suite.

7. *Force vive de la liaison  $\Lambda$ .* — Partons des équations de discontinuité du second ordre dans lesquelles nous considérerons les  $\mu$  comme des variables indépendantes. Elles détermineront les  $p$  et les  $\nu$  comme fonctions linéaires des  $\mu$  et, en portant dans les expressions  $\varphi(p)$ , celles-ci deviendront des fonctions

$$\Phi_1(\mu), \quad \Phi_2(\mu), \quad \dots$$

linéaires et homogènes que nous nous proposons d'étudier.

1° *Les fonctions  $\Phi(\mu)$  sont distinctes.* — Leur nombre étant égal au nombre des variables  $\mu$ , si elles n'étaient pas distinctes, il existerait des  $\mu$  non toutes nulles et satisfaisant à

$$\Phi_1(\mu) = 0, \quad \Phi_2(\mu) = 0, \quad \dots$$

Donc les valeurs correspondantes des  $p$  satisferaient à

$$\varphi_1(p) = 0, \quad \varphi_2(p) = 0, \quad \dots,$$

et, finalement, les  $p$ , les  $\nu$  et les  $\mu$  vérifieraient les équations

$$\begin{aligned}
 & - \sum \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial p} \omega + \sum \nu f(\omega) - \sum \mu \varphi(\omega) \equiv 0, \\
 & f_1(p) = 0, \quad f_2(p) = 0, \quad \dots, \\
 & \varphi_1(p) = 0, \quad \varphi_2(p) = 0, \quad \dots
 \end{aligned}$$

Or, ce sont les équations du mouvement d'un certain système matériel fictif qui serait soumis à la liaison  $L + \Lambda$  et dont la force vive serait  $\bar{\epsilon}$ , force vive homogène et du second degré où les paramètres ne figurent que par leurs dérivées premières. Ces équations déterminent sans ambiguïté, puisque  $\bar{\epsilon}$  est une vraie force vive et que les liaisons sont distinctes, toutes les dérivées secondes  $p$  et les multiplicateurs  $\nu$  et  $\mu$ . Dans le cas actuel, elles sont homogènes; donc elles donnent, pour les  $p$ , les  $\nu$  et les  $\mu$ , des valeurs toutes nulles.

Ainsi l'hypothèse que les fonctions  $\Phi$  sont toutes nulles exige que les  $\mu$  soient également tous nuls, et cela prouve que les fonctions  $\Phi$  sont distinctes.

2° Les fonctions  $\Phi(\mu)$  sont les dérivées partielles d'une même fonction. — Proposons-nous de démontrer que l'on a

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_2} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_1}.$$

Désignons par  $x_1, x_2, \dots$  les dérivées des  $p$  par rapport à  $\mu_1$ , et par  $y_1, y_2, \dots$  leurs dérivées par rapport à  $\mu_2$ .

Les équations de discontinuité dérivées par rapport à  $\mu_1$  donnent

$$(\mu_1) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \sum \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial x} \omega + \sum \frac{\partial \nu}{\partial \mu_1} f(\omega) - \varphi_1(\omega) \equiv 0, \\ & f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \quad \dots \end{aligned} \right.$$

Dérivées de même par rapport à  $\mu_2$ , elles donnent

$$(\mu_2) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \sum \frac{\partial \bar{\epsilon}}{\partial y} \omega + \sum \frac{\partial \nu}{\partial \mu_2} f(\omega) - \varphi_2(\omega) \equiv 0, \\ & f_1(y) = 0, \quad f_2(y) = 0, \quad \dots \end{aligned} \right.$$

Dans l'équation de D'Alembert du système  $(\mu_1)$  remplaçons les  $\omega$

par les  $y$  en tenant compte des équations de la seconde ligne de  $(\mu_2)$ ; nous aurons

$$-\sum \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} y - \varphi_1(y) = 0.$$

De même, dans l'équation de D'Alembert de  $(\mu_2)$ , remplaçons les  $\omega$  par les  $x$  en tenant compte des équations de la seconde ligne de  $(\mu_1)$ ; nous aurons

$$-\sum \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} x - \varphi_2(x) = 0.$$

Si nous remarquons que,  $\mathfrak{E}$  étant homogène et du second degré, on a

$$\sum y \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} \equiv \sum x \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y},$$

on en conclut

$$\varphi_1(y) = \varphi_2(x).$$

Mais on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_2} &= \frac{\partial}{\partial \mu_2} \varphi_1(p) = \varphi_1(y), \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_1} &= \frac{\partial}{\partial \mu_1} \varphi_2(p) = \varphi_2(x), \end{aligned}$$

et l'égalité précédente devient

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_2} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_1}.$$

On peut donc poser

$$\Phi_1 = -\frac{\partial W}{\partial \mu_1}, \quad \Phi_2 = -\frac{\partial W}{\partial \mu_2}, \quad \dots$$

3° *La forme quadratique W est définie et positive.* — On a, par la formule d'Euler,

$$2W = \sum \mu \frac{\partial W}{\partial \mu} = -\sum \mu \Phi(\mu) = -\sum \mu \varphi(p).$$

Revenons à l'équation de D'Alembert qui figure dans les équations de discontinuité, remplaçons-y les  $\omega$  par les  $p$  et tenons compte des équations de la seconde ligne, nous aurons

$$-\sum \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial p} p - \sum \mu \varphi(p) = 0,$$

c'est-à-dire

$$-\sum \mu \varphi(p) = {}_2\mathfrak{C}(p);$$

donc finalement

$${}_2W(\mu) = {}_2\mathfrak{C}(p).$$

La fonction  ${}_2W$  est ce que devient  ${}_2\mathfrak{C}$  quand on exprime les  $p$  au moyen des  $\mu$ ; donc elle est, comme  ${}_2\mathfrak{C}$ , définie et positive.

En résumé : la fonction  ${}_2W(\mu)$  est une forme quadratique homogène, elle est définie et positive, ses dérivées partielles sont distinctes; donc, son discriminant n'est pas nul; elle possède ainsi les propriétés essentielles de la force vive et, de plus, c'est la transformée d'une véritable force vive.

Pour ces raisons, dans toute la suite de ce Mémoire, la fonction  ${}_2W$  sera appelée « force vive de la liaison  $\Lambda$  ».

8. *Calcul pratique de la force vive  $W$ .* — Réduisons la liaison  $\Lambda$  au nombre de contacts distincts qui sont nécessaires et suffisants pour la définir complètement au point de vue dynamique et introduisons les réactions de chacun d'eux en les désignant par  $\mu_1, \mu_2, \dots$ , et les comptant positivement du côté positif.

Avec les forces fictives  $\mu$  le système peut être considéré comme débarrassé de la liaison  $\Lambda$ . C'est un système mobile sur la liaison  $L$  et son mouvement aura des équations

$$F_1(q'' \lambda, q', q, t, \mu_1, \mu_2, \dots) = 0,$$

.....

que nous formerons par un quelconque des procédés connus et dans lesquelles pourront figurer des inconnues auxiliaires  $\lambda$  provenant de la liaison  $L$ . Ces équations seront en nombre égal à celui des  $q''$  et des  $\lambda$  et les détermineront.

Formons maintenant les équations analogues du mouvement du système quand la liaison  $\Lambda$  est supprimée. On les aura immédiatement en introduisant l'hypothèse

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = 0$$



dans les équations précédentes, ce qui donnera les équations

$$F_1(q'', \lambda, q', q, t, 0, 0, \dots) = 0, \\ \dots\dots\dots$$

Pour avoir les équations de discontinuité, il faudra retrancher ces deux systèmes en y considérant les  $q''$  et les  $\lambda$  comme n'ayant pas les mêmes valeurs, tandis que les  $q$ , les  $q'$  et  $t$  seront les mêmes.

Les équations F sont de la forme

$$\mathfrak{F}(q'', \lambda) + \dots + \mathfrak{T}(\mu_1, \mu_2, \dots) = 0$$

dans laquelle  $\mathfrak{F}$  est une forme linéaire et homogène des  $q''$  et des  $\lambda$ ,  $\mathfrak{T}$  une forme linéaire et homogène des  $\mu$  et où les termes non écrits dépendent seulement des  $q$ , des  $q'$ , de  $t$  et des forces données appliquées au système.

Les équations correspondantes du mouvement sans la liaison  $\Lambda$  seront donc

$$\mathfrak{F}(q'', \lambda) + \dots + 0 = 0,$$

d'où, par soustraction, les équations de discontinuité sous la forme

$$\mathfrak{F}(p, \nu) - \mathfrak{T}(\mu_1, \mu_2, \dots) = 0.$$

Or, la fonction W que nous nous proposons de former, étant quadratique et homogène, ne se modifie pas si l'on change tous les  $\mu$  en  $-\mu$  ce qui nous permet de la calculer au moyen des équations

$$\mathfrak{F}(p, \nu) + \mathfrak{T}(\mu_1, \mu_2, \dots) = 0$$

qui sont les équations de discontinuité où l'on a fait le changement des  $\mu$  en  $-\mu$  et qui sont les équations du mouvement sur la liaison totale où l'on a supprimé tous les termes ne contenant pas les  $q''$ , les  $\lambda$  et les  $\mu$ .

D'où la règle suivante :

*Introduisant les réactions distinctes de la liaison  $\Lambda$  comptées toutes positivement du côté positif de cette liaison, on écrit les équations du mouvement du système débarrassé de cette liaison en se bornant aux termes contenant les  $q''$  et les réactions soit de la liaison  $\Lambda$  soit des autres liaisons.*

On en tire les  $q''$  qu'on substitue aux  $q'$  dans la portion  $2T_2$  de la force vive et l'on obtient ainsi la fonction  $2W$ .

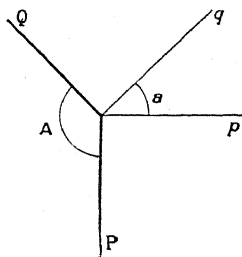
III. — La transformation  $W$ .

9. *La transformation plane  $W_0$ .* — Considérons un angle convexe  $a$  formé par deux demi-droites  $p, q$  issues du point  $O$ . Menons à  $p$  une demi-perpendiculaire  $P$  du côté opposé à  $q$ , c'est-à-dire vers l'extérieur de  $a$ ; menons de même une demi-perpendiculaire  $Q$  à  $q$  vers l'extérieur de  $a$ . Nous formons ainsi un angle convexe  $A$  et c'est la transformation de  $a$  en  $A$  que nous appelons « transformation  $W_0$  » parce qu'elle est un cas particulier de la transformation  $W$  que nous étudierons ensuite.

Rien qu'à l'inspection de la figure et sans qu'il soit nécessaire de faire aucun raisonnement, nous voyons apparaître la propriété suivante :

*L'angle convexe  $a$ , l'angle convexe transformé  $A$  et les angles convexes  $pP, qQ$  joignant les côtés correspondants de  $a$  et  $A$  n'empiètent*

Fig. 5.



*jamais les uns sur les autres et remplissent tout le plan de sorte que tout point du plan non situé sur l'une des quatre demi-droites  $p, P, q, Q$  est toujours situé à l'intérieur d'un et d'un seul de ces quatre angles convexes.*

10. *La transformation plane  $W$ .* — Commençons par faire une remarque relativement à la transformation homographique bien connue qui fait passer d'une ellipse à son cercle homographique. En

employant les axes de l'ellipse, cette transformation prend la forme

$$x' = \alpha x, \quad y' = \beta y;$$

toute demi-droite  $\delta$  issue de l'origine se transforme en demi-droite  $\delta'$  issue également de l'origine. Deux demi-droites opposées  $\delta, \delta_1$  se transforment en deux demi-droites opposées  $\delta', \delta'_1$ . Si  $\delta$  parcourt un angle convexe  $pq$  en allant de  $p$  à  $q$ ,  $\delta$  ne passe pas par la demi-droite  $p_1$  opposée à  $p$ , donc la transformée  $\delta'$  va de  $p'$  à  $q'$  sans passer par la demi-droite opposée à  $p'$ , donc  $\delta'$  parcourt l'angle convexe formé par  $p'$  et  $q'$ . Ainsi un angle convexe se transforme en un angle convexe. Enfin si deux angles convexes sont contigus et n'ont pas de portion commune, il en sera de même pour les deux angles transformés.

De là résulte que, si nous transformons la figure obtenue dans le paragraphe précédent, nous obtiendrons quatre demi-droites  $p', q', P', Q'$  dans laquelle les quatre angles convexes  $p'q', q'Q', Q'P', P'p'$  auront encore la même disposition et rempliront tout le plan sans empiéter les uns sur les autres.

La transformation W se rencontrera dans le problème des liaisons unilatérales doubles sous la forme suivante : On part d'un angle convexe  $a$  issu de l'origine, on prend son angle supplémentaire  $a'$  au sens de la théorie des trièdres supplémentaires, et enfin on applique à l'angle convexe  $a'$  la transformation  $(\Phi)$  définie par

$$x = -\frac{\partial}{\partial X} W(X, Y), \quad y = -\frac{\partial}{\partial Y} W(X, Y),$$

ce qui donne l'angle convexe A.

Soit

$$(p) \quad \alpha x + \beta y = 0$$

un côté de  $a$ , le côté correspondant de  $a'$  est

$$(p') \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$$

et le côté correspondant de A est

$$(P) \quad \frac{\frac{\partial W}{\partial x}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial W}{\partial y}}{\beta}.$$

Considérons un point  $x, y$ ; sa polaire par rapport à la conique

$$W(x, y) = 0$$

est

$$X \frac{\partial W}{\partial x} + Y \frac{\partial W}{\partial y} = 0,$$

de sorte que l'équation du côté de  $A$  exprime que la polaire d'un quelconque de ses points est le côté de  $a$ . Nous pouvons donc dire que deux côtés correspondants de  $a$  et  $A$  sont deux droites polaires conjuguées par rapport à la conique

$$W(x, y) = 0$$

qui est un système de deux droites imaginaires, c'est-à-dire une conique du genre ellipse.

Si nous faisons la transformation homographique transformant cette ellipse en cercle,

$$x^2 + y^2 = 0,$$

les angles convexes  $a$  et  $A$  se changeront en nouveaux angles convexes dont les côtés correspondants seront polaires par rapport à ce cercle-point, donc seront rectangulaires.

Soient  $p, q$  les côtés de  $a$  et  $P, Q$  ceux de  $A$ ; le côté  $p'$  de  $a'$  est perpendiculaire à  $p$  et du côté de  $a$ . D'autre part, la transformation  $\Phi$  donne

$$Xx + Yy = -X \frac{\partial W}{\partial X} - Y \frac{\partial W}{\partial Y} = -2W(XY) < 0,$$

de sorte que la demi-droite  $P$  transformée de  $p'$  fait avec elle un angle obtus et il en résulte que  $P$  est, par rapport à  $p$ , du côté opposé à  $a$ .

Cette propriété est conservée par la transformation qui ramène au cercle-point, de sorte que les deux angles convexes transformés de  $a$  et  $A$  se déduisent l'un de l'autre par la transformation particulière  $W_0$ .

Et l'on arrive à cette conclusion :

*On passe de l'angle convexe  $a$  à l'angle convexe  $A$  en remplaçant les côtés  $p, q$  de  $a$  par leurs polaires  $P, Q$  par rapport à l'ellipse-point*

$$W(x, y) = 0$$

et les angles convexes  $pq$ ,  $qQ$ ,  $QP$ ,  $Pp$  n'empiètent pas les uns sur les autres et recouvrent entièrement le plan.

11. *La transformation  $W_0$  de l'espace.* — Soit un angle solide convexe  $a$  issu de  $O$ . A chaque face plane ou à chaque plan tangent d'une face courbe, nous ferons correspondre la demi-droite perpendiculaire du côté opposé à celui où se trouve  $a$ ; par cette correspondance, à chaque arête de  $a$  correspond un plan perpendiculaire contenant les droites qui correspondaient aux deux faces aboutissant à cette arête. On détermine ainsi un angle solide  $A$ .

Soient  $\delta$  une arête de  $a$  et  $F$  la face correspondante de  $A$ . Considérons une arête quelconque  $\Delta$ , de  $A$ , elle est perpendiculaire à une face de  $a$  et du côté opposé à  $\delta$ , donc forme un angle obtus avec  $\delta$ ; toutes les arêtes de  $A$  font un angle obtus avec une certaine demi-perpendiculaire  $\delta$  au plan  $F$ , donc sont du même côté de  $F$ , côté opposé à  $\delta$  et de là résultent deux conséquences :

- 1° *L'angle solide  $A$  est convexe;*
- 2° *Les deux angles solide  $a$  et  $A$  sont réciproques.*

Si l'on prend comme cas particulier de  $a$  un trièdre trirectangle, on voit que  $A$  est simplement le trièdre symétrique et l'on en conclut que la transformation  $W_0$  renverse le sens de rotation d'un angle solide.

Considérons une demi-droite  $d$  intérieure à  $a$ . Soit  $f$  une face quelconque de  $a$  et  $\Delta$  l'arête correspondante de  $A$ ; les deux demi-droites  $d$  et  $\Delta$  sont de part et d'autre de  $f$  et  $\Delta$  est une perpendiculaire, donc  $d$  fait un angle obtus avec toutes les arêtes de  $A$  de sorte que, par rapport au plan perpendiculaire à  $d$ , l'angle solide  $A$  se trouve tout entier du côté opposé à  $D$ . D'où cette propriété : *l'angle solide  $a$  et l'angle solide  $A$  n'ont aucune partie commune*; tous les plans perpendiculaires à des demi-droites intérieures à  $a$  ou intérieures à  $A$  ne coupent ni  $a$  ni  $A$ . Il en est ainsi, en particulier, pour les plans des faces de  $A$  qui rentrent dans la première catégorie et pour les plans des faces de  $a$  qui rentrent dans la seconde.

Prenons deux cônes convexes  $a$  et  $A$ ; ils se correspondent par génératrices et par plans tangents. Soient  $\delta$ ,  $\Delta$  deux génératrices correspondantes et  $p$ ,  $P$  les deux plans tangents. Enfin, désignons par  $E$  la

région extérieure à  $a$  et  $A$ ;  $p$  et  $P$  sont, comme nous venons de le voir, entièrement contenus dans  $E$ , donc leur intersection  $I$  y est aussi entièrement contenue.

Considérons alors le dièdre convexe formé du demi-plan  $p$  issu de  $I$  et contenant  $\delta$ , et du demi-plan  $P$  issu de  $I$  et contenant  $\Delta$ . Tout point intérieur à ce dièdre est, par rapport à  $p$ , du côté de  $\Delta$ , c'est-à-dire du côté de  $A$  et, par conséquent, du côté opposé à  $a$ , puisque  $p$  laisse  $a$  d'un côté et  $A$  de l'autre; ce point est donc extérieur à  $a$ , pour la même raison il est extérieur à  $A$ , il est donc dans  $E$ . L'angle convexe formé par les deux demi-droites  $\delta$ ,  $\Delta$  tracées dans les deux faces du dièdre est forcément celui des deux angles qui est intérieur au dièdre convexe et, comme celui-ci est tout entier dans  $E$ , on en conclut : *l'angle convexe formé par deux génératrices correspondantes de deux cônes  $a$  et  $A$  est tout entier extérieur à ces deux cônes.*

Revenons maintenant à des arêtes et faces planes de deux angles solides convexes  $a$ ,  $A$  se correspondant par la transformation  $W_0$ ;  $a$  et  $A$  ne se correspondent plus par génératrices; à une arête de  $a$  correspond une face de  $A$ , c'est-à-dire une infinité de génératrices qui sont toutes les droites intérieures à cette face; de même, à une arête de  $A$  correspond une infinité de génératrices qui sont les droites intérieures à la face correspondante de  $a$ . Sauf cette indétermination, nous pourrions parler d'arêtes correspondantes.

Soient  $\delta$ ,  $\Delta$  deux génératrices correspondantes de  $a$  et  $A$ ,  $\delta$  étant une arête de  $a$  et  $\Delta$  une demi-droite intérieure à la face correspondante  $F$  de  $A$ . Imaginons, ce qui est toujours possible, un cône convexe  $C$  inscrit dans  $A$  de telle façon que sa génératrice de contact avec la face  $F$  soit précisément  $\Delta$ . La transformation  $W_0$  appliquée à  $C$  donnera un cône convexe  $c$  qui sera circonscrit à  $a$ . Les demi-droites  $\delta$ ,  $\Delta$  seront des génératrices correspondantes de  $c$  et  $C$ . L'angle convexe  $\delta$ ,  $\Delta$  sera extérieur à  $C$ , donc, *a fortiori*, extérieur à  $a$ ; il sera, par rapport au plan tangent le long de  $\Delta$ , du côté opposé à  $C$  et, comme ce plan tangent est le plan de la face  $F$  et que  $C$  et  $A$  sont du même côté de ce plan, il sera, par rapport au plan de  $F$ , du côté opposé à  $A$  donc aussi extérieur à  $A$ , c'est-à-dire, finalement, dans l'espace  $E$  extérieur à  $a$  et  $A$ .

Enfin faisons remarquer qu'étant donnée une demi-droite  $\delta$  et un

angle convexe  $F$  issu du même point, l'angle solide convexe ayant  $\delta$  pour arête et  $F$  comme face peut se définir de plusieurs façons que nous aurons à utiliser :

1° C'est la portion d'espace que décrit une demi-droite équipollente à  $\Delta$  et dont l'origine parcourt la face  $F$  ;

2° C'est la portion d'espace balayée par un angle équipollent à  $F$  et dont le sommet parcourt  $\delta$  ;

3° C'est la portion d'espace balayée par l'angle convexe de  $\delta$  avec une demi-droite issue de  $O$  et parcourant l'intérieur de  $F$ .

Pour bien voir ce qui se passe, coupons  $\alpha$  et  $A$  par une sphère de centre  $O$ . Nous aurons deux polygones sphériques convexes  $\alpha$  et  $A$  formant en quelque sorte deux calottes distinctes sur la sphère et laissant entre elles une zone irrégulière formant une route à deux bords faisant le tour de la sphère. Sur ces deux routes vont marcher simultanément deux points correspondants  $\delta$ ,  $\Delta$  dont il faudra considérer l'angle convexe représenté par l'arc de grand cercle, moindre que la demi-circonférence, qui les joint et que, pour garder le même langage, nous appellerons l'arc convexe.

De ce que  $\delta$  et  $\Delta$  parcourent  $\alpha$  et  $A$  en sens inverses, ces sens étant vus, pour  $\delta$ , par un observateur debout sur la sphère et les pieds à l'intérieur de  $\alpha$  et pour  $\Delta$ , par un observateur analogue les pieds à l'intérieur de  $A$ , résulte que, pour un observateur unique placé sur la route  $E$  et regardant les deux points, ces points sembleront tous deux avancer ou tous deux reculer, c'est-à-dire marcher dans le même sens sur leurs bords respectifs.

Si, schématiquement, nous représentons les arcs de grand cercle par des droites, nous avons pour le mouvement de l'arc convexe  $\delta\Delta$  une figure du genre suivant (*fig. 6*).

Dans ce mouvement, l'arc  $\delta\Delta$ , qui ne sort jamais de  $E$ , balaie certainement toute la route  $E$  et passe une fois et une seule par tout point situé sur cette route.

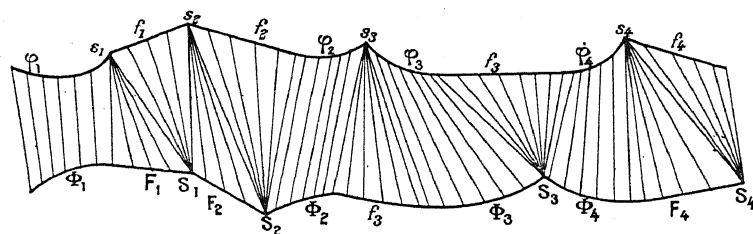
Si nous revenons à la figure de l'espace, nous voyons que, dans son mouvement, l'angle convexe  $\delta\Delta$  balaie plusieurs sortes de régions :

1° Les régions  $\delta$ ,  $F$ , angles solides (trièdres) déterminés par une arête de  $\alpha$  et la face correspondante de  $A$  ;

2° Les régions  $f$ ,  $\Delta$ , angles solides (trièdres) déterminés par une face de  $a$  et l'arête correspondante de  $A$ ;

3° Les régions  $\varphi$ ,  $\Phi$ , angles solides convexes limités par deux faces

Fig. 6.



courbes correspondantes de  $a$  et  $A$  et par les deux positions extrêmes de l'angle convexe  $\delta\Delta$ .

Ce qui précède nous montre que ces divers angles solides convexes remplissent tout l'espace  $E$  et n'empiètent jamais les uns sur les autres, donc :

*L'angle solide convexe  $a$ , son transformé  $A$  et tous les angles solides convexes joignant une arête de  $a$  à la face correspondante de  $A$ , ou une face de  $a$  à l'arête correspondante de  $A$ , ou deux faces courbes correspondantes de  $a$  et  $A$ , remplissent complètement l'espace sans empiéter les uns sur les autres de sorte que tout point qui n'est pas sur une face ou une arête de ces régions se trouve toujours dans une et une seule d'entre elles.*

12. *La transformation  $W$  de l'espace.* — On fera, sur la transformation qui fait passer de l'ellipsoïde à la sphère homographique, des remarques analogues à celles qui ont été faites au début du paragraphe 10.

La transformation  $W$  se rencontrera dans notre théorie sous la forme suivante : on part d'un angle solide convexe  $a$ , on prend l'angle solide supplémentaire  $a'$  et on lui fait subir la transformation

$$x = -\frac{\partial W}{\partial X}, \quad y = -\frac{\partial W}{\partial Y}, \quad z = -\frac{\partial W}{\partial Z},$$

ce qui donne l'angle solide  $A$ .



Si  $f$  est une face de  $a$  ayant pour équation

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

l'arête correspondante de  $a'$  sera

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

et l'arête de  $A$  aura pour équations

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial z};$$

ce qui montre qu'à chaque face de  $a$  on fait correspondre la polaire de son plan par rapport au cône imaginaire

$$W(x, y, z) = 0.$$

On montre en outre, comme conséquence de ce que  $W$  est positive, que l'on doit prendre la demi-polaire qui est, par rapport à la face considérée, du côté opposé à  $a$ .

Si l'on applique la transformation qui fait passer de l'ellipsoïde-point à la sphère-point ou est ramené à la transformation  $W_0$  et il en résulte que toutes les propriétés de convexité et de disposition des régions démontrées pour la transformation  $W_0$  s'appliquent sans aucune modification à la transformation  $W$ .

Ainsi : *On passe de l'angle solide convexe  $a$  à l'angle solide convexe  $A$  en faisant correspondre à chaque face de  $a$  sa demi-polaire par rapport au cône*

$$W(x, y, z) = 0$$

*du côté opposé à  $a$ . L'angle solide  $a$ , l'angle solide  $A$  et les angles solides convexes joignant une arête de l'un à la face plane correspondante de l'autre, ou deux faces courbes correspondantes, remplissent tout l'espace sans empiéter les uns sur les autres.*

## SECONDE PARTIE.

### ÉTUDE DYNAMIQUE DES LIAISONS FINIES UNILATÉRALES.

---

#### I. — Les liaisons unilatérales simples.

13. *Le problème à résoudre.* — Le système S soumis à des liaisons L est supposé lancé sur une liaison unilatérale simple  $\Lambda$ , ce qui revient à dire que les  $q$  de la position initiale satisfont à l'unique équation finie de  $\Lambda$  et que les  $q$  et  $q'$  initiaux vérifient l'unique équation du premier ordre de  $\Lambda$  déduite de la précédente par dérivation.

La seule liaison réduite étant la liaison nulle, ou bien le mouvement va, au début, se produire sur  $L + \Lambda$  ou bien sur L seulement et, comme c'est la liaison  $\Lambda$  seule qui nous intéresse, nous dirons dans ce dernier cas que le système se meut librement ou encore qu'il prend le mouvement libre. En résumé, partant des conditions initiales considérées, le mouvement du début peut être soit le mouvement  $\pi_{\Lambda}$  sur la liaison  $\Lambda$ , soit le mouvement libre  $M_l$ . Quel est celui de ces deux mouvements qui se produit effectivement? C'est la première question à résoudre et elle constitue ce que nous appellerons « *le problème initial* ».

Supposons que l'on soit dans les conditions voulues pour que ce soit le mouvement  $M_{\Lambda}$  qui se produise. Ce mouvement sur  $\Lambda$  va-t-il se continuer indéfiniment? A quel moment et dans quelles conditions le mouvement  $M_{\Lambda}$  se transformera-t-il en mouvement  $M_l$ ? C'est là la seconde question à résoudre et elle constitue « *le problème pendant le mouvement* ».

14. *Cas où la solution du problème initial est fournie par la dynamique.* — Considérons le mouvement  $M_l$  que prendrait le système en vertu des conditions initiales considérées si la liaison  $\Lambda$  n'existait pas et voyons comment il se produit par rapport à la liaison  $\Lambda$  considérée au point de vue géométrique.

Supposons que ce mouvement  $M_l$  se produise, au début, du côté négatif de  $\Lambda$ . Le mouvement réel du début ne peut être que  $M_\Lambda$  ou  $M_l$ ; or ce dernier mouvement n'est pas *un mouvement possible*, car, s'il se produisait, il aurait lieu du côté négatif de  $\Lambda$  et la réalisation matérielle de cette liaison s'oppose à tout mouvement de ce côté; donc :

*Si le mouvement libre débute du côté négatif de la liaison unilatérale le mouvement qui se produit réellement au début est celui sur cette liaison.*

Et cette conclusion peut s'énoncer sous la nouvelle forme :

*La condition nécessaire pour que ce soit le mouvement libre qui se produise réellement au début est que ce mouvement libre ait lieu sur la liaison  $\Lambda$  ou débute du côté positif de cette liaison.*

Sous la première forme ce résultat donne donc *une condition suffisante pour que le mouvement réel soit  $M_\Lambda$*  et, sous la seconde forme, *une condition nécessaire pour que le mouvement réel soit  $M_l$ .*

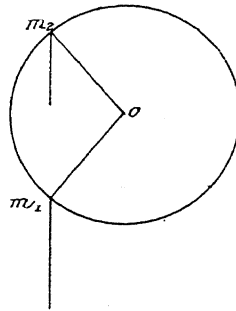
Mais de toute façon le résultat est incomplet parce que l'on n'obtient pas des *conditions nécessaires et suffisantes* de production réelle de l'un des deux mouvements entre lesquels il faut choisir.

15. *Principe expérimental du mouvement libre.* — Prenons un point pesant posé au-dessus d'un plan horizontal fixe. Il reste immobile, c'est-à-dire prend le mouvement  $M_\Lambda$ ; c'est le cas dynamique précédent car le mouvement  $M_l$ , chute verticale descendante, aurait lieu du côté négatif du plan. Au contraire, plaçons le point au-dessous du plan, le mouvement libre est possible, il a lieu du côté positif du plan et celui-ci, réalisé matériellement, ne s'y oppose pas. On constate que ce mouvement libre se produit effectivement.

Prenons encore un pendule simple partant du repos. Si la position initiale est au-dessous de l'horizontale, en  $m_1$ , le mouvement libre augmente la distance au point fixe, donc a lieu du côté négatif; c'est le cas dynamique, le point suit la liaison. Si la position initiale est au-dessus de l'horizontale, le mouvement libre raccourcit la ficelle, donc a lieu du côté positif de la liaison et l'on constate expérimentalement que c'est ce mouvement libre qui se produit effectivement.

Sans qu'il soit nécessaire de multiplier les exemples, on est ainsi

Fig. 7.



amené à poser, comme principe expérimental absolument général, la loi suivante :

*Lorsqu'un système matériel est lancé sur une liaison unilatérale simple  $\Lambda$ , chaque fois que le mouvement libre est possible au début, c'est-à-dire que la réalisation matérielle de  $\Lambda$  ne s'oppose pas à ce mouvement, c'est ce mouvement libre qui se produit effectivement au début.*

15<sup>bis</sup>. *Principe général des liaisons unilatérales simples.* — Le principe expérimental précédent, combiné avec le cas dynamique, donne la solution complète du problème initial. Celui-ci pouvait, en effet, s'énoncer sous la forme : trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce soit le mouvement  $M_l$  qui se produise au début? Par exclusion on obtient ensuite les cas de production de  $M_\Lambda$ .

Or le cas dynamique nous donnait une condition nécessaire, à savoir que  $M_l$  débute sur  $\Lambda$  ou du côté positif et le principe du mouvement libre exprime simplement le fait que cette condition est suffisante.

En les combinant on obtient donc le principe général donnant la solution complète du problème initial :

*Un système matériel étant lancé sur une liaison unilatérale simple  $\Lambda$  :*

*Si le mouvement libre a lieu, au début, du côté négatif de  $\Lambda$ , c'est le mouvement sur  $\Lambda$  qui se produit effectivement au début ;*

*Si le mouvement libre a lieu, au début, du côté positif de  $\Lambda$ , c'est ce mouvement libre qui se produit effectivement au début ;*

*Si le mouvement libre a lieu sur  $\Lambda$ , c'est ce mouvement libre, qui est en même temps un mouvement sur  $\Lambda$ , qui se produit effectivement au début.*

16. *Transformation en principe de la réaction.* — Pour chercher la position de  $M_l$  par rapport à  $\Lambda$ , utilisons la considération du mouvement  $M_\Lambda$ , mouvement que prendrait le système sur la liaison  $\Lambda$  considérée comme liaison forcée. Cette liaison, comme nous l'avons vu, se réduit à une seule équation donnant une seule fonction  $\varphi(\omega)$ .

En employant les équations de discontinuité relatives à la suppression de  $\Lambda$ , la position de  $M_l$  par rapport à  $\Lambda$  sera donnée par le signe de

$$\varphi(p),$$

c'est-à-dire de

$$\Phi(\mu),$$

et comme il n'y a ici qu'une seule variable  $\mu$ , on a

$$\mu\Phi(\mu) = -\mu \frac{\partial W}{\partial \mu} = -2W(\mu) < 0,$$

de sorte que  $\varphi(p)$  est de signe contraire à  $\mu$ .

Si  $\mu$  est positif, le travail

$$\mu\varphi(\omega)$$

de la réaction de  $\Lambda$  est positif pour tous les déplacements virtuels du côté positif de  $\Lambda$ . Cette réaction est alors dite *positive* ou du côté positif de  $\Lambda$ .

Dans le cas de  $\mu$  négatif, la réaction a un travail négatif pour tous les déplacements positifs et elle est dite *négative* ou du côté négatif de  $\Lambda$ .

$\varphi(p)$  étant de signe contraire à  $\mu$ , il en résulte :

*Le mouvement libre a toujours lieu, par rapport à  $\Lambda$ , du côté opposé à la réaction du mouvement forcé sur cette liaison.*

Il est entendu que l'on prend la réaction à l'instant initial; si cette réaction était nulle, en partant des équations de discontinuité du troisième ordre on retrouverait les mêmes résultats avec le changement

de  $\mu$  en  $\frac{d\mu}{dt}$ , ce qui reviendrait à prendre la réaction immédiatement après l'instant initial.

Notre principe se transforme donc en :

*N étant la réaction initiale ou immédiatement après l'instant initial dans le mouvement forcé sur la liaison  $\Lambda$ , le mouvement qui se produit réellement au début est  $M_\Lambda$  si  $N$  est positive et  $M$ , si  $N$  est négative.*

C'est cette forme que l'on emploie dans les applications parce qu'elle remplace la considération un peu abstraite de la position d'un mouvement par rapport à une liaison par celle, plus concrète, du sens d'un vecteur porté sur une droite.

17. *Problème pendant le mouvement.* — On suppose essentiellement que le mouvement débute sur  $\Lambda$  et, par conséquent, que la réaction  $N$  soit positive à l'instant initial ou soit nulle et devienne positive immédiatement après. Décomposons le temps en intervalles infiniment petits et considérons la succession des mouvements, chacun d'eux ayant pour conditions initiales les conditions finales du précédent.

$N$ , d'après l'hypothèse faite, restera positive dans un certain intervalle fini, allant de  $t_0$  à  $t_1$ , et alors changera de signe en s'annulant (la réaction ne peut devenir infinie sans quoi il y aurait rupture des liaisons).

Dans le second intervalle infiniment petit,  $N$  débute par être positive, donc c'est  $M_\Lambda$  qui se produit et  $N$  reste positive, donc est encore positive au début du troisième intervalle, de sorte que c'est encore  $M_\Lambda$  qui se produit et ainsi de suite; tant qu'on sera dans  $t_1 - t_0$ , on aura une succession de mouvements  $M_\Lambda$  infiniment petits, constituant le mouvement continu  $M_\Lambda$ . Il n'en sera plus de même quand on arrivera à l'instant  $t_1$ ; dans l'intervalle qui suivra,  $N$  débutera par être nulle mais pour devenir négative; donc, dans cet intervalle, ce sera  $M$  qui se produira; à la fin de cet intervalle, le système n'est même plus en contact avec  $\Lambda$ , donc  $\Lambda$  n'intervient plus et c'est le mouvement libre qui se continue et se continuera jusqu'à ce que, dans ce mouvement, le contact avec  $\Lambda$  vienne se rétablir en produisant un choc. Nous avons donc, sans faire appel à aucun nouveau principe :

*Le mouvement de début ayant lieu sur la liaison, ce mouvement se continuera jusqu'à ce que N passe pour la première fois du positif au négatif. A ce moment, le mouvement devient le mouvement libre.*

## II. — Les liaisons unilatérales doubles.

18. *Le problème à résoudre.* — Le système étant lancé sur la liaison unilatérale double  $\Lambda$ , ne peut se mouvoir que sur  $\Lambda$  ou sur une des liaisons réduites qui sont (§ 3) au nombre de trois. Nous avons donc à choisir entre quatre mouvements : le mouvement  $M_\Lambda$  sur la liaison totale, les mouvements  $M_{\Lambda_1}$  et  $M_{\Lambda_2}$  sur les deux liaisons réduites simples  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  et enfin le mouvement libre  $M_l$ .

Nous aurons encore le problème initial et le problème pendant le mouvement. Comme dans le cas précédent, nous nous attacherons surtout au problème initial qui est en général plus compliqué et qui fournit la solution du problème pendant le mouvement. Ainsi jusqu'au moment où nous dirons explicitement que nous nous occupons du problème pendant le mouvement, il sera, pour abrégé, sous-entendu que nous nous occupons exclusivement du problème initial.

19. *Mouvements réduits possibles.* — Considérons le mouvement libre  $M_l$ ; nous avons déjà vu, dans le cas de la liaison simple, apparaître pour lui la notion de possibilité ou d'impossibilité. La notion se généralise immédiatement; la liaison  $\Lambda$  a un côté positif et s'oppose, par sa réalisation matérielle, à tout mouvement quittant  $\Lambda$  et ne passant pas du côté positif; si donc le mouvement  $M_l$  ne se produit pas du côté positif de  $\Lambda$ , on est assuré que ce mouvement est *impossible*; dans le cas contraire, si  $M_l$  se produit du côté positif de  $\Lambda$ , on dit que ce mouvement est *possible*, ce qui ne veut pas dire qu'il se produise réellement mais signifie simplement qu'il n'est pas impossible. En d'autres termes, la possibilité est constituée par des conditions nécessaires mais non suffisantes pour que le mouvement  $M_l$  se produise effectivement. Ainsi :

*Pour que le mouvement libre soit possible il faut qu'il se produise du côté positif de  $\Lambda$ .*

Considérons le mouvement réduit  $M_{\Lambda_1}$  sur la liaison réduite simple  $\Lambda_1$ . Cette liaison réduite, d'après sa définition même, est telle qu'il existe des déplacements virtuels sur  $\Lambda_1$  et du côté positif de  $\Lambda_2$  sans que tous les déplacements sur  $\Lambda_1$  soient du côté positif de  $\Lambda_2$ . Un mouvement dont les conditions initiales sont sur  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  et qui se fait sur  $\Lambda_1$  seulement ne quitte donc pas forcément  $\Lambda_2$  du côté positif; mais si ce mouvement est un mouvement réduit se produisant réellement, il est du côté positif de  $\Lambda$ , donc de  $\Lambda_2$ ; s'il était de l'autre côté, la réalisation matérielle de  $\Lambda$  s'opposerait à sa production et il serait impossible. Donc :

*Pour que le mouvement réduit  $M_{\Lambda_1}$  soit possible, il faut qu'il ait lieu du côté positif de  $\Lambda_2$ .*

Jusqu'à présent nous n'avons fait appel qu'à des considérations de dynamique ordinaire.

Si le mouvement  $M_{\Lambda_1}$  se produit effectivement, c'est que, dans ce mouvement sur la liaison unilatérale simple  $\Lambda_1$ , le contact avec cette liaison ne cesse pas, autrement dit que cette liaison simple est irréductible ou, en invoquant cette fois le principe général des liaisons unilatérales simples, que la réaction de  $\Lambda_1$  dans le mouvement  $M_{\Lambda_1}$  soit positive. Donc :

*Pour que le mouvement réduit  $M_{\Lambda_1}$  soit possible, il faut que sa réaction soit positive.*

On aurait de même les conditions de possibilité du mouvement réduit  $M_{\Lambda_2}$ .

Sans faire appel à aucun principe nouveau on a donc une notion qui, en nous montrant dans chaque cas, l'impossibilité de certains mouvements réduits, nous restreindra le problème en nous faisant choisir parmi les mouvements possibles en nombre moindre que quatre et pourra même nous donner la solution cherchée dans certains cas.

Nous allons nous proposer de traduire ces conditions de possibilité sur la réaction du mouvement  $M_{\Lambda}$  c'est-à-dire au moyen des coefficients  $\mu_1, \mu_2$  qui figurent dans le travail virtuel de cette réaction. Pour



faciliter la représentation géométrique nous adopterons, pour ce travail, la notation

$$\xi X(\omega) + \eta Y(\omega),$$

nous représenterons par

$$(p') \quad \alpha X + \beta Y = 0,$$

et

$$(q') \quad \gamma X + \delta Y = 0$$

les deux liaisons réduites  $\Lambda_1, \Lambda_2$  et ces deux équations seront celles des deux côtés  $p', q'$  de l'angle convexe  $a'$  figuratif du côté positif de la liaison  $\Lambda$ , côté positif défini par

$$\alpha X + \beta Y > 0, \quad \gamma X + \delta Y > 0.$$

20. *La région de possibilité du mouvement  $M_l$ .* — Partons des équations de discontinuité de la suppression de  $\Lambda$ . On aura

$$X(\rho) = \Phi(\xi, \eta) = - \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi},$$

$$Y(\rho) = \Psi(\xi, \eta) = - \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta}.$$

Les conditions de possibilité

$$\alpha X(\rho) + \beta Y(\rho) > 0,$$

$$\gamma X(\rho) + \delta Y(\rho) > 0$$

s'écriront donc

$$\alpha \Phi(\xi, \eta) + \beta \Psi(\xi, \eta) > 0,$$

$$\gamma \Phi(\xi, \eta) + \delta \Psi(\xi, \eta) > 0,$$

de sorte que le point  $\xi, \eta$  figuratif de la réaction doit être dans l'angle positif des deux droites

$$\alpha \Phi(\xi, \eta) + \beta \Psi(\xi, \eta) = 0,$$

$$\gamma \Phi(\xi, \eta) + \delta \Psi(\xi, \eta) = 0,$$

qui sont les transformées P et Q des deux côtés  $p', q'$  de  $a'$  par la transformation  $(\Phi, \Psi)$  que nous avons déjà rencontrée dans la définition de la transformation W.

Si le point  $\xi, \eta$  se trouve dans cette région, le point X, Y dont il est

le transformé

$$X = \Phi(\xi, \eta), \quad Y = \Psi(\xi, \eta),$$

satisfait aux inégalités

$$\alpha X + \beta Y > 0, \quad \gamma X + \delta Y > 0,$$

donc se trouve dans l'angle convexe  $a'$ . Donc :

*La région de possibilité de  $M_i$  est l'angle convexe  $A$  transformé de l'angle convexe  $a'$  par la transformation*

$$X = -\frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi}, \quad Y = -\frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \eta}.$$

21. *La région de possibilité du mouvement  $M_{\Lambda_1}$ . —* Supposons écrite l'équation de d'Alembert de  $M_{\Lambda_1}$ , il y figurera le travail virtuel

$$\xi X(\omega) + \eta Y(\omega).$$

Si nous écrivons de même l'équation de d'Alembert de  $M_{\Lambda_1}$  qui a lieu sur la liaison

$$\alpha X + \beta Y = 0,$$

il y figurera le travail virtuel

$$\lambda[\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)],$$

ou

$$\lambda\alpha X(\omega) + \lambda\beta Y(\omega).$$

Si donc nous faisons la soustraction pour avoir les équations de discontinuité, on aura celles de la suppression totale mais où  $\xi$  et  $\eta$  seraient remplacés par  $\xi - \lambda\alpha$  et  $\eta - \lambda\beta$ . Avec les équations en  $p$  provenant de la liaison  $L$  on aura donc

$$\begin{aligned} X(p) &= \Phi(\xi - \lambda\alpha, \eta - \lambda\beta) = \Phi(\xi_1, \eta_1), \\ Y(p) &= \Psi(\xi - \lambda\alpha, \eta - \lambda\beta) = \Psi(\xi_1, \eta_1). \end{aligned}$$

La liaison  $\Lambda_1$  qui existe à la fois dans les deux mouvements donnera en outre, par soustraction,

$$\alpha X(p) + \beta Y(p) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha\Phi(\xi_1, \eta_1) + \beta\Psi(\xi_1, \eta_1) = 0,$$

équation linéaire qui déterminera l'inconnue  $\lambda$ .

Pour que  $M_{\Delta_1}$  ait lieu du côté positif de  $\Lambda_2$  il faut

$$\gamma X(p) + \delta Y(p) > 0.$$

Pour que la réaction de  $M_{\Delta_1}$  soit positive il faut que son travail

$$\lambda[\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega)]$$

soit positif pour tous les déplacements  $\omega$  du côté positif de  $\Lambda_1$ , c'est-à-dire satisfaisant à

$$\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) > 0;$$

donc, finalement que l'on ait

$$\lambda > 0.$$

En résumé, les conditions de possibilité de  $M_{\Delta_1}$  sont

$$\alpha\Phi(\xi_1, \eta_1) + \beta\Psi(\xi_1, \eta_1) = 0,$$

$$\gamma\Phi(\xi_1, \eta_1) + \delta\Psi(\xi_1, \eta_1) > 0,$$

$$\lambda > 0.$$

Considérons le point  $\xi_1, \eta_1$ ; d'après les expressions

$$\xi_1 = \xi - \lambda\alpha, \quad \eta_1 = \eta - \lambda\beta$$

de ses coordonnées, il est sur une perpendiculaire menée de  $\xi, \eta$  au côté  $p'$  de l'angle  $\alpha'$  et, d'après la première des trois conditions écrites, il est sur la transformée P de ce côté; c'est donc le pied sur P de la perpendiculaire à P menée par  $\xi, \eta$ . L'inégalité qui forme la seconde condition exprime que ce point doit être du côté positif de Q, c'est-à-dire ne pas être extérieur à A et, par conséquent, être sur le côté même P de cet angle.

Considérons le vecteur allant de  $\xi_1, \eta_1$  à  $\xi, \eta$ ; ses deux composantes sont  $\lambda\alpha$  et  $\lambda\beta$  et ces deux quantités sont les coordonnées de l'extrémité du vecteur équipollent mené par l'origine. Cette extrémité donne à  $\alpha x + \beta y$  le signe de

$$\lambda(\alpha^2 + \beta^2),$$

c'est-à-dire, d'après la troisième condition, le signe positif; elle est donc, par rapport à  $p'$ , du côté de  $q'$ , ce qui montre que le vecteur considéré est de même sens que le côté  $p$  de l'angle convexe supplémentaire de  $\alpha'$ .

On est ainsi amené à former l'angle convexe  $\alpha$  de côtés  $p, q$ , qui est supplémentaire de  $\alpha'$  et dont  $A$  est le transformé par la transformation  $W$ , et les conditions de possibilité de  $M_{\Lambda_1}$  sont que le point  $\xi, \eta$  soit l'extrémité d'un vecteur issu d'un point du côté  $P$  et ayant même direction et sens que  $p$ , ou encore que ce point soit dans la région balayée par une demi-droite équipollente à  $p$  et dont l'origine décrit la demi-droite  $P$ ; on définit ainsi l'angle convexe  $pP$ . Donc :

*La région de possibilité de  $M_{\Lambda_1}$  est l'intérieur de l'angle convexe  $pP$  formé par les côtés correspondants  $P$  et  $p$  de  $A$  et de l'angle transformé par la transformation  $W$ .*

22. *Nombre maximum des mouvements réduits possibles.* — Les régions de possibilité des mouvements réduits  $M_l, M_{\Lambda_1}, M_{\Lambda_2}$  sont, comme nous venons de le voir, les trois angles convexes  $PQ, Pp, Qq$  formés en appliquant la transformation  $W$  à l'angle convexe  $\alpha$  supplémentaire de  $\alpha'$ .

Or nous avons vu que ces trois régions n'empiétaient pas les unes sur les autres et que la partie restante du plan était l'angle convexe  $pq$  (§ 10).

Il en résulte immédiatement que, si le point  $\xi, \eta$  se trouve dans l'angle  $\alpha$ , il n'y a aucun mouvement réduit possible et que s'il est en dehors de cet angle il y a un et un seul mouvement réduit possible puisque le point se trouve alors dans un et un seul des trois angles  $PQ, Pp, Qq$ .

Considérons le cas où  $\xi, \eta$  est dans  $\alpha$ . Le mouvement qui se produit réellement ne peut être que  $M_{\Lambda}, M_{\Lambda_1}, M_{\Lambda_2}$  ou  $M_l$  et, comme les trois derniers sont impossibles, c'est le premier qui se produit forcément; donc :

*Le nombre des mouvements réduits possibles n'est jamais supérieur à l'unité. Quand il est nul, le mouvement réel a lieu sur la liaison totale.*

Nous conviendrons de dire que  $A$  est irréductible s'il n'y a aucun mouvement réduit qui soit possible.

*23. Principe du mouvement réduit pour les liaisons unilatérales doubles.* — La liaison  $A$  est irréductible et alors il n'y a aucun choix à faire pour avoir le mouvement réel, ou bien elle n'est pas irréductible et alors, comme il n'y a qu'un seul mouvement réduit possible, on a à choisir entre deux mouvements seulement : à savoir le mouvement  $M_A$  sur la liaison totale et le mouvement réduit possible; l'indétermination est donc du même ordre que celle qui a été rencontrée dans les liaisons unilatérales simples.

Pour lever cette indétermination il faut faire appel à l'expérience.

Prenons, dans un plan vertical, une molécule pesante pouvant se mouvoir à l'intérieur d'un angle convexe fixe et partant du repos placée au sommet.

Si l'angle est tout entier au-dessus de l'horizontale de son sommet, on voit immédiatement qu'il n'y a aucun mouvement réduit possible, c'est le cas où il n'y a pas d'indétermination et où le mouvement  $M_A$  doit se produire. Effectivement le point reste au repos au sommet.

Si la verticale descendante est à l'intérieur de l'angle, l'unique mouvement réduit possible est la chute verticale, de sorte que l'on a à choisir entre l'équilibre au sommet qui constitue le mouvement  $M_A$  et la chute suivant la verticale descendante. On constate physiquement que c'est ce mouvement réduit qui se produit effectivement.

Si, l'angle n'étant pas tout entier au-dessus de l'horizontale, cet angle ne contient pas la verticale descendante, il y a un côté inférieur et un côté supérieur et le seul mouvement réduit possible est le mouvement descendant sur le côté inférieur. On a à choisir entre ce mouvement et l'équilibre au sommet et l'expérience montre que c'est le mouvement réduit sur le côté inférieur qui se produit effectivement.

Sans nous attarder à montrer le même fait sur des exemples plus compliqués nous voyons apparaître un principe expérimental général pouvant s'énoncer ainsi :

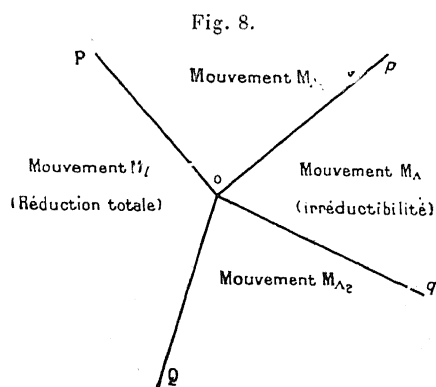
*Lorsque la liaison unilatérale double n'est pas irréductible, il y a indé-*

*termination entre le mouvement sur la liaison totale et celui des mouvements réduits qui seul est possible. Le mouvement qui se produit réellement est toujours le mouvement réduit.*

Il y a donc au plus un mouvement réduit possible et, quand il y en a un, il se produit réellement. Le principe précédent complète la notion de possibilité en montrant que *les conditions nécessaires pour qu'un mouvement réduit se produise réellement* (conditions de possibilité) *sont en même temps suffisantes*, de sorte que nous obtenons un résultat de même forme que pour les liaisons unilatérales simples.

24. *Il n'y a jamais impossibilité ou indétermination.* — Lorsque le point  $\xi, \eta$  se trouve dans l'angle  $pq$ , nous avons vu que c'était le mouvement  $M_{\Lambda}$  qui se produisait réellement; le principe précédent nous donne la réciproque; si  $\xi, \eta$  ne se trouve pas dans l'angle  $pq$ , il se trouve forcément dans l'un des trois angles  $PQ, Pp, Qq$  et alors le mouvement  $M_{\Lambda}$  ne se produit pas, le mouvement réel étant le mouvement réduit correspondant.

En résumé, nous avons une discussion représentée par la figure ci-dessous.



Comme les quatre régions n'empiètent pas les unes sur les autres et recouvrent tout le plan, le point  $\xi, \eta$  est toujours dans une et dans une seule d'entre elles, de sorte qu'il n'y a jamais impossibilité ni indétermination.

25. *Cas où le point figuratif de la réaction se trouve sur les frontières.* — Au lieu de considérer ce qui se passe à l'instant  $t_0$ , nous considérerons la figure à l'instant  $t_0 + dt$ .

Supposons  $\xi, \eta$  sur  $p$ , c'est-à-dire que l'on a, à l'instant  $t_0$ ,

$$\alpha\xi + \beta\eta = 0;$$

à l'instant  $t_0 + dt$  ( $dt > 0$ ), cette quantité ne sera plus nulle et aura le signe de sa première dérivée non nulle pour  $t_0$ . On prendra donc le signe de

$$\alpha \frac{d\xi}{dt} + \beta \frac{d\eta}{dt} + \xi \frac{d\alpha}{dt} + \eta \frac{d\beta}{dt}.$$

Si l'on a le signe  $+$ , c'est qu'à l'instant  $t_0 + dt$  le point  $\xi, \eta$  est entré dans l'angle  $pq$  tel qu'il est à cet instant; donc on est dans la région d'inductibilité.

Si l'on a le signe  $-$ , c'est que le point  $\xi, \eta$  entre dans la région  $M_{\Lambda_1}$ . L'indétermination est donc levée et il en sera ainsi tant que la fonction

$$\alpha\xi + \beta\eta$$

ne sera pas identiquement nulle. Mais alors on aurait un mouvement  $M_{\Lambda_1}$  qui se ferait sans quitter la liaison  $\Lambda_2$ , c'est-à-dire qui serait à la fois  $M_{\Lambda_1}$  et  $M_{\Lambda_2}$ . Reprenons l'exemple du n° 23, ce sera le cas où l'angle a un côté horizontal et l'autre côté dirigé vers le haut.

Si nous avons supposé le point  $\xi, \eta$  sur la frontière  $P$ , on aurait eu

$$-\alpha \frac{\partial W}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial W}{\partial \eta} = 0,$$

et il aurait fallu chercher le signe de

$$-\alpha \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right) - \beta \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \frac{d\eta}{dt} \right) - \frac{d\alpha}{dt} \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{d\beta}{dt} \frac{\partial W}{\partial \eta},$$

pour voir de quel côté de  $P$  passe le point  $\xi, \eta$  à l'instant  $t_0 + dt$ .

Si la fonction

$$-\alpha \frac{\partial W}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial W}{\partial \eta}$$

était identiquement nulle, on aurait un mouvement qui serait à la

fois  $M_{\lambda_1}$  et  $M_{\lambda_2}$ . Revenant encore à l'exemple du n° 23, ce serait le cas où l'un des deux côtés de l'angle serait vertical descendant.

Enfin si le point  $\xi, \eta$  se trouve en O, c'est-à-dire si la réaction totale est nulle, il faudra regarder les signes que prennent, à l'instant  $t_0 + dt$ , les quatre fonctions

$$\begin{aligned} & \alpha \xi + \beta \eta, \\ & \gamma \xi + \delta \eta, \\ & -\alpha \frac{\partial W}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial W}{\partial \eta}, \\ & -\gamma \frac{\partial W}{\partial \xi} - \delta \frac{\partial W}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

de façon à voir dans lequel des quatre angles va passer le point  $\xi, \eta$ .

26. *Définition mécanique de la région d'irréductibilité.* — Les quatre régions sont définies complètement par la région d'irréductibilité en lui appliquant la transformation W. Cette région est définie au moyen de la région  $\alpha'$  figurative de la liaison, mais il est indispensable pour la suite d'en avoir une définition directe.

Considérons un angle convexe  $\alpha'$  et une demi-droite  $\delta$  issue de son sommet; pour que  $\delta$  fasse un angle aigu avec toutes les demi-droites intérieures à  $\alpha'$ , il faut que  $\alpha'$  soit tout entier du même côté que  $\delta$  par rapport à la perpendiculaire à  $\delta$ . On est donc amené à mener par le sommet les droites ne coupant pas l'angle  $\alpha'$  et à prendre leurs demi-perpendiculaires du côté de  $\alpha'$ , ce qui fournit manifestement les demi-droites intérieures à l'angle supplémentaire  $\alpha$ .

Ceci posé, considérons le travail virtuel de la réaction

$$\varepsilon = \xi X + \eta Y,$$

où  $\xi, \eta$  est le point figuratif de la réaction et X, Y celui du déplacement; l'angle allant de l'origine à ces deux points est aigu ou obtus suivant que  $\varepsilon$  est positif ou négatif.

Si  $\xi, \eta$  est dans  $\alpha$ , son rayon fera un angle aigu avec tout rayon situé dans  $\alpha'$ , donc  $\varepsilon$  sera positif pour tout déplacement X, Y situé dans  $\alpha'$ ; réciproquement, si  $\varepsilon$  est positif pour tout déplacement X, Y dans  $\alpha'$ , c'est que le rayon de  $\xi, \eta$  fait un angle aigu avec tout rayon



dans  $a'$ , de sorte que  $\xi, \eta$  est forcément dans  $a$ . On est ainsi conduit à la définition suivante :

*Pour être dans la région d'irréductibilité, il faut et il suffit que la réaction de la liaison totale ait un travail positif pour tout déplacement virtuel du côté positif de cette liaison qui est celle obtenue par M. Appell par la considération du signe des réactions aux différents contacts.*

27. *Le problème pendant le mouvement.* — Supposant essentiellement que le mouvement débute sur la liaison totale et faisant le même raisonnement que pour la liaison unilatérale simple, on verra que le mouvement  $M_\Lambda$  se continuera tant que le point  $\xi, \eta$  restera dans l'angle  $pq$ .

Ce point et cet angle sont généralement tous deux variables avec le temps, mais, par suite de la continuité, le point ne pourra sortir de l'angle qu'en traversant un de ses côtés ou tous les deux.

Dans le premier cas c'est que l'une des deux quantités

$$\begin{aligned} \alpha\xi + \beta\eta, \\ \gamma\xi + \delta\eta \end{aligned}$$

s'annule en passant du positif au négatif, l'autre ne s'annulant pas et étant, par conséquent, positive. Si c'est la première qui s'annule, on passe forcément dans la région  $M_{\Lambda_1}$ , de sorte que le mouvement  $M_\Lambda$  se continue par le mouvement  $M_{\Lambda_1}$ .

Dans le second cas, les deux quantités précédentes s'annulent simultanément et, en traversant le point  $O$ , on peut entrer dans l'une des trois régions  $M_{\Lambda_1}, M_{\Lambda_2}$  et  $M_\nu$ . Le fait que les deux quantités changent de signe n'indique pas la région définitive; il faudra voir les signes que vont prendre les quantités

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{\partial W}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial W}{\partial \eta}, \\ -\gamma \frac{\partial W}{\partial \xi} - \delta \frac{\partial W}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

28. *Étude de la liaison unilatérale au moyen des deux réactions par-*

*tielles.* — La liaison double  $\Lambda$  peut, comme liaison dynamique et comme liaison unilatérale, être remplacée par l'ensemble des deux liaisons réduites simples  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  donnant séparément naissance à des réactions  $\xi$ ,  $\eta$  comptées positivement du côté positif de  $\Lambda$ . Le travail virtuel sera

$$\xi X(\omega) + \eta Y(\omega),$$

et les deux liaisons réduites étant définies par

$$X = 0$$

et

$$Y = 0,$$

l'angle  $\alpha'$  sera l'angle  $xOy$ , le demi-axe  $Oy$  étant le côté  $p'$  et le demi-axe  $Ox$  le côté  $q'$ . La région  $a$  sera le même angle,  $Ox$  étant maintenant le côté  $p$  et  $Oy$  le côté  $q$ . Soit

$$W = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

le côté P aura pour équation

$$\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial y} = bx + cy = 0,$$

et le côté Q

$$\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial x} = ax + by = 0,$$

les coefficients angulaires de ces deux droites sont

$$-\frac{b}{c}, \quad -\frac{a}{b},$$

et leur produit,

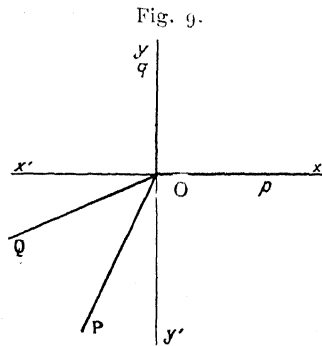
$$\frac{a}{c},$$

est positif puisque la fonction  $W$  est définie. Il en résulte que les prolongements de PQ traversent tous deux  $xOy$  ou ne le traversent ni l'un ni l'autre. On a alors deux cas de figure conduisant à des résultats distincts.

1° *Les prolongements de P et Q traversent  $xOy$ .* — Commençons par le problème initial :

$\xi > 0, \eta < 0$  entraîne la cessation du contact  $\Lambda_2$  et la conservation de  $\Lambda_1$ .

$\xi < 0, \eta > 0$  entraîne la cessation de  $\Lambda_1$  et la conservation de  $\Lambda_2$ .



$\xi < 0, \eta < 0$  n'entraîne pas forcément la cessation des deux contacts. Il y en a certainement un qui cesse; cela tient à ce que, dans cette hypothèse, le point  $\xi, \eta$  peut se trouver dans une quelconque des trois régions de réduction.

$\xi > 0$  avec  $\eta = 0$  et devenant négative entraîne cessation de  $\Lambda_2$  et conservation de  $\Lambda_1$ , mais  $\xi < 0$  avec  $\eta = 0$  et devenant négative n'entraîne pas la cessation des deux contacts; au contraire, comme on passe d'un point de  $Ox'$  à un point infiniment voisin et au-dessous, on est dans l'angle  $Qq$  et le contact  $\Lambda_1$  cesse tandis que  $\Lambda_2$  se conserve.

$\xi = 0, \eta = 0$  fournit les mêmes observations en remplaçant  $\xi$  et  $\eta$  par  $\frac{d\xi}{dt}$  et  $\frac{d\eta}{dt}$ .

Considérons maintenant le problème dans le mouvement.

$\xi, \eta$  est un point mobile situé primitivement dans l'angle  $pq$ . Il se déplace d'une façon continue et ne peut sortir de cet angle qu'en traversant  $p$  ou  $q$  ou le point  $O$ .

S'il sort par  $p$ , c'est-à-dire si la réaction  $\eta$  s'annule et change de signe tandis que  $\xi$  ne s'annule pas et est positive, on passe forcément dans la région  $Pp$  donc  $\Lambda_2$  cesse et  $\Lambda_1$  se conserve.

S'il sort par  $O$  par une tangente située forcément dans  $x'Oy'$ , les deux réactions passent toutes deux du positif au négatif mais on peut

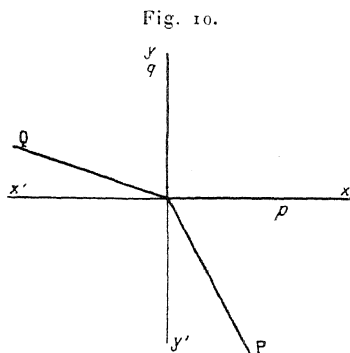
ainsi passer dans l'une quelconque des trois régions de réduction et il n'y a pas forcément cessation des deux contacts.

2° *Les prolongements de P et Q ne traversent pas  $xoy$ .* — Dans le problème initial :

$\xi > 0, \eta < 0$  n'entraîne pas forcément la conservation du contact  $\Lambda_1$  à réaction positive; il peut arriver que les deux contacts cessent parce que l'on peut être dans la région PQ.

$\xi < 0, \eta < 0$  entraîne forcément la cessation des deux contacts.

$\xi > 0$  avec  $\eta = 0$  mais devenant négative donne forcément cessation



de  $\Lambda_2$  et conservation de  $\Lambda_1$  car, passant immédiatement au-dessous de  $Ox$ , on ne peut être dans PQ, on est forcément dans  $Pp$ .

Dans le mouvement, une réaction changeant de signe, tandis que l'autre n'est pas nulle et est positive, entraîne la cessation du contact correspondant et la conservation de l'autre.

Si les deux réactions viennent s'annuler simultanément, le point sort par une tangente située dans  $x'oy'$  et l'on entre dans PQ de sorte que les deux contacts cessent, bien que dans ce déplacement le point  $\xi, \eta$  n'entre pas forcément dans  $x'oy'$  c'est-à-dire bien que les deux réactions ne deviennent pas forcément négatives; c'est ce qui a lieu, par exemple, si l'on sort de  $xoy$  avec  $Ox$  pour tangente et un contact d'ordre impair.

La discussion qui précède montre que l'idée courante et qui con-

siste à tout déduire du signe des réactions est absolument fausse. Cette idée revient, en définitive, à considérer comme indépendants l'un de l'autre les deux contacts  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  qui forment par leur réunion la liaison totale et à appliquer séparément à chacun d'eux le principe des liaisons unilatérales simples. En réalité, le principe des liaisons unilatérales doubles n'est pas constitué par la double application du principe des liaisons unilatérales simples, et ce qui se passe en l'un des contacts dépend non seulement de la réaction de ce contact, mais aussi de la réaction de l'autre.

29. *Définition analytique des différentes régions.* — Elles se définissent chacune comme étant d'un certain côté pour deux des quatre droites  $p, q, P, Q$ .

Si nous nous plaçons dans le cas où l'on part des deux réactions partielles des liaisons réduites  $\Lambda_1, \Lambda_2$ , on a immédiatement les définitions

|  |  |  |
|--|--|--|
| Région d'irréductibilité.....                        | $\xi > 0,$                             | $\eta > 0$                             |
| Région de réduction totale.....                      | $\frac{\partial W}{\partial \xi} < 0,$ | $\frac{\partial W}{\partial \eta} < 0$ |
| Région où $\Lambda_1$ persiste et $\Lambda_2$ cesse. | $\eta < 0,$                            | $\frac{\partial W}{\partial \xi} > 0$  |
| Région où $\Lambda_1$ cesse et $\Lambda_2$ persiste. | $\xi < 0,$                             | $\frac{\partial W}{\partial \eta} > 0$ |

30. *Problème.* — Barre homogène mobile dans un plan, dont les extrémités s'appuient sur les côtés d'un angle droit fixe, et qui est soumise à une force située dans le plan et issue de son milieu. On part du repos. Problème initial ?

Soient  $a, b$  les coordonnées du milieu et  $\theta$  l'angle avec la verticale. Les équations du mouvement libre sous l'action de la force donnée et des deux réactions sont, en se plaçant à l'instant initial, donc en tenant compte de la liaison,

$$\begin{aligned} M a'' &= X + \eta, \\ M b'' &= Y + \xi, \\ \frac{M l^2}{3} \theta'' &= l \xi \sin \theta - l \eta \cos \theta. \end{aligned}$$

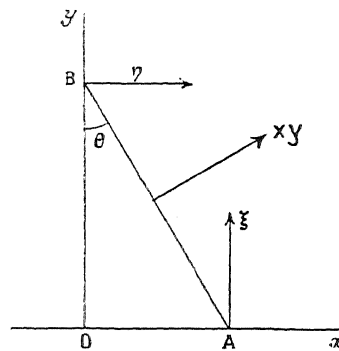
Quant aux deux équations de liaison

$$\begin{aligned} b - l \cos \theta &= 0, \\ a - l \sin \theta &= 0, \end{aligned}$$

elles donnent, par double dérivation,

$$\begin{aligned} b'' + l \sin \theta \theta'' + l \cos \theta \theta'^2 &= 0, \\ a'' + l \cos \theta \theta'' + l \sin \theta \theta'^2 &= 0. \end{aligned}$$

Fig. 11.



Les équations de discontinuité sont alors (en les formant modifiées comme il a été dit au n° 8)

$$\begin{aligned} M a'' &= \eta, \\ M b'' &= \xi, \end{aligned}$$

$$\frac{M l^2}{3} \theta'' = l \xi \sin \theta - l \eta \cos \theta.$$

La force vive étant

$$2T = M(a'^2 + b'^2) + \frac{M l^2}{3} \theta'^2,$$

on aura

$$2W = M(a''^2 + b''^2) + \frac{M l^2}{3} \theta''^2,$$

les  $a''$ ,  $b''$ ,  $c''$  étant ceux donnés par les équations de discontinuité. On obtient ainsi

$$2W(\xi, \eta) = \frac{1}{M} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{3}{M} (\xi \sin \theta - \eta \cos \theta)^2.$$

On a alors les équations des deux droites P et Q

$$(P) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \xi} = \frac{1}{M} [\xi + 3 \sin \theta (\xi \sin \theta - \eta \cos \theta)] = 0,$$

$$(Q) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial \eta} = \frac{1}{M} [\eta - 3 \cos \theta (\xi \sin \theta - \eta \cos \theta)] = 0,$$

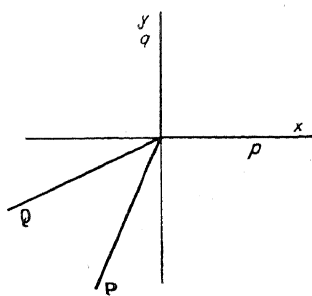
dont les coefficients angulaires sont

$$\frac{1 + 3 \sin^2 \theta}{3 \sin \theta \cos \theta}, \quad \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{1 + 3 \cos^2 \theta}.$$

Comme  $\theta$  est compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , ils sont tous deux positifs et l'on est toujours dans ce que nous avons appelé « le premier cas de figure », c'est-à-dire avec la disposition ci-contre. Cette figure nous permet de faire la discussion soit du problème initial, soit du problème de mouvement.

Mais, au lieu de faire la discussion au moyen de  $\xi$  et  $\eta$ , proposons-nous de la faire par rapport aux données X, Y, que nous considérerons

Fig. 12.



comme coordonnées d'un point. Les équations du mouvement  $M_A$  nous donnent à l'instant initial, en partant du repos,  $a''$ ,  $b''$ ,  $\theta''$ ,  $\xi$  et  $\eta$ , en fonction de X, Y. On en tire

$$\frac{X + \eta}{\cos \theta} = \frac{Y + \xi}{-\sin \theta} = 3(\sin \theta - \eta \cos \theta),$$

d'où

$$X = -\eta + 3 \cos \theta (\xi \sin \theta - \eta \cos \theta),$$

$$Y = -\xi - 3 \sin \theta (\xi \sin \theta - \eta \cos \theta).$$

On passe donc du point  $\xi, \eta$  au point  $X, Y$  par une certaine transformation homographique, et aux deux régions d'irréductibilité et de réduction totale polaires réciproques par rapport à la conique

$$W(\xi, \eta) = 0$$

correspondront deux nouvelles régions transformées qui seront polaires réciproques par rapport à la transformée de la conique précédente et ayant pour équation

$$\Theta(X, Y) = X^2 + Y^2 - \frac{3}{4}(X \cos \theta - Y \sin \theta)^2 = 0.$$

Nous remarquerons que  $Y$  et  $X$  sont précisément, au facteur  $M$  près, les dérivées partielles de  $W$  changées de signe, de sorte que la droite  $P$ , qui avait

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = 0$$

pour équation, va se transformer dans l'axe  $OX$ , et de même la droite  $Q$  va se transformer en axe  $OY$ . L'angle  $PQ$  défini par

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} < 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \eta} < 0$$

se transformera en

$$X > 0, \quad Y > 0;$$

donc la région de réduction totale sera maintenant l'angle  $XOY$  et la région d'irréductibilité sera limitée par les deux droites

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial X} &= X - \frac{3 \cos \theta}{4} (X \cos \theta - Y \sin \theta) = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial Y} &= Y + \frac{3 \sin \theta}{4} (X \cos \theta - Y \sin \theta) = 0, \end{aligned}$$

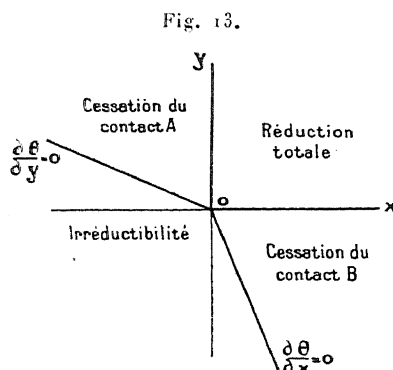
dont les coefficients angulaires

$$\frac{3 \cos^2 \theta - 4}{3 \sin \theta \cos \theta}, \quad \frac{3 \sin \theta \cos \theta}{3 \sin^2 \theta - 4}$$

sont tous deux négatifs. Nous avons donc les quatre angles ci-après



qui donnent les cas de réduction par la direction et le sens de la force X, Y.

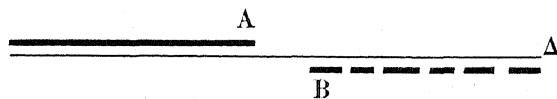


31. *Problème de la plaque matérielle mobile dans un plan et ayant un double contact avec une droite fixe de ce plan.* — Qu'il y ait deux contacts simples ou bien un nombre fini ou infini de contacts surabondants, nous avons vu que la liaison pouvait, à tous les points de vue, se réduire à deux contacts bien déterminés.

Mais, dans ce problème, au lieu de faire la discussion par rapport aux deux réactions partielles des contacts réduits, il est beaucoup plus intéressant de la faire par rapport à la réaction totale qui est normale à la droite fixe et qui est déterminée par son intensité et l'abscisse de son pied.

Pour y arriver sans reprendre tout le raisonnement, nous utiliserons certains des résultats généraux relatifs aux deux réactions partielles et nous y joindrons d'autres résultats provenant d'une étude directe avec introduction de la liaison totale.

Les contacts peuvent être tous du même côté de la droite fixe  $\Delta$  et alors on a une base de sustentation qui est un segment fini sur ce côté de  $\Delta$  et dont les extrémités sont les deux contacts réduits. Si les contacts sont de part et d'autre de  $\Delta$ , la base de sustentation se compose de deux parties s'étendant à l'infini, l'une au-dessus, l'autre au-dessous,



et telle qu'il n'existe aucun point de  $\Delta$  appartenant aux deux: les deux extrémités A et B sont encore les deux contacts réduits.

Comptons les deux réactions partielles  $\xi, \eta$  positivement du côté du contact A, nous aurons les quatre régions  $pq, PQ, pP, qQ$ . Dans le premier cas, l'angle  $pq$  sera l'angle  $xOy$  et PQ son transformé au moyen de

$$W(\xi, \eta).$$

Dans le second cas, l'angle  $pq$  sera  $xOy'$  et PQ son transformé au moyen de

$$W(\xi, -\eta).$$

Dans tous les cas, nous aurons les quatre angles convexes, c'est-à-dire tels que chacun ne contienne jamais la demi-droite opposée à l'un de ses côtés.

Prenons une origine sur la droite  $\Delta$ , soit  $\omega$  le pied de la réaction totale N et  $u$  son abscisse. On passera de  $\xi, \eta$  à N et  $u$  par les formules

$$\begin{aligned} N &= \xi + \eta, \\ Nu &= a\xi + b\eta, \end{aligned}$$

$a$  et  $b$  étant les abscisses de A et B. Nous avons ainsi une transformation du point  $\xi, \eta$  en un point  $u, N$ , qui est précisément l'extrémité de la réaction totale.

Toute demi-droite issue de l'origine se transforme en demi-perpendiculaire à  $\Delta$ ; les demi-droites du côté positif de la droite

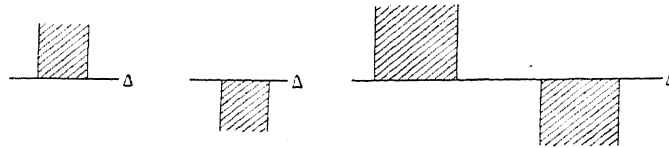
$$(D) \quad \xi + \eta = 0$$

deviendront des demi-perpendiculaires du côté positif de  $\Delta$  et les demi-droites du côté négatif de cette bissectrice deviendront des demi-perpendiculaires du côté négatif de  $\Delta$ . Deux demi-droites opposées se transformeront en deux demi-perpendiculaires opposées.

Un angle convexe se transformera, s'il n'est pas traversé par D en une région parcourue par une demi-perpendiculaire restant du même côté de  $\Delta$  et, s'il est traversé par D, en deux régions allant à l'infini et telles qu'il n'existe pas deux demi-perpendiculaires opposées situées

respectivement dans ses deux parties. Un angle convexe sera donc représenté sous l'une des trois formes

Fig. 14.



Si nous représentons ces régions par leur base représentée en traits pleins au-dessus de  $\Delta$  et en traits ponctués au-dessous, un angle convexe sera représenté sous l'une des trois formes



que, pour en rappeler la signification, nous désignerons toujours sous le nom de *segment convexe*.

A ce point de vue, une demi-droite parcourant successivement les quatre angles convexes  $pq$ ,  $qQ$ ,  $QP$ ,  $Pp$  fournira un point parcourant successivement quatre segments convexes sur  $\Delta$  et ces quatre segments recouvriront entièrement les deux côtés de  $\Delta$  sans empiéter les uns sur les autres.

Nous connaissons déjà le segment convexe qui représente la région d'irréductibilité, c'est la base de sustentation telle que nous l'avons définie au début de ce problème; quand nous aurons trouvé le segment convexe représentant la région de réduction totale, nous aurons les deux régions de réduction partielle par jonction ou, ce qui revient au même, par remplissage des deux côtés de  $\Delta$ .

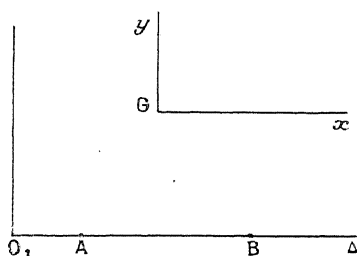
Pour définir cette région, reprenons alors la question directement. Imaginons deux axes fixes, l'axe des  $x$ , étant  $\Delta$  et deux axes attachés à la plaque, issus du centre de gravité  $G$ , l'axe des  $x$  étant parallèle à la droite des deux contacts de façon que  $Gx$  soit parallèle à  $\Delta$  quand le double contact a lieu. Soient  $u$ ,  $h$  les coordonnées de  $\omega$  dans le système  $Gxy$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  les coordonnées de  $G$  par rapport aux axes fixes, et enfin  $\theta$  l'angle de  $Gx$  avec  $\Delta$ .

Les équations du mouvement  $M_A$  sont, en introduisant la réaction

totale,

$$\begin{aligned} M\alpha'' &= \dots, \\ M\beta'' &= N + \dots, \\ I\theta'' &= Nu + \dots \end{aligned}$$

Fig. 15.



Donc, les équations de discontinuité de la suppression totale sont (puisqu'on passe de  $M_A$  à  $M_l$  en faisant  $N = 0$ )

$$\begin{aligned} M\alpha'' &= 0, \\ M\beta'' &= -N, \\ I\theta'' &= -Nu. \end{aligned}$$

On définit ainsi le déplacement ( $p$ ) pour lequel les deux points A et B doivent avoir des déplacements verticaux du côté positif de  $\Delta$ , ce qui nous conduit à distinguer deux cas suivant que les deux contacts sont au-dessus ou l'un au-dessus et l'autre au-dessous. Dans la première hypothèse, les déplacements verticaux de A et B doivent être tous deux positifs et, dans la seconde, celui de A doit être positif et celui de B négatif.

Ces déplacements verticaux

$$\delta\beta + a \cos\theta \delta\theta - h \sin\theta \delta\theta, \quad \delta\beta + b \cos\theta \delta\theta - h \sin\theta \delta\theta$$

se réduisent, en vertu du contact ( $\theta = 0$ ), à

$$\delta\beta + a\delta\theta, \quad \delta\beta + b\delta\theta$$

ou

$$\beta'' + a\theta'', \quad \beta'' + b\theta'',$$

$\beta''$  et  $\theta''$  étant donnés par les équations de discontinuité; finalement,

on obtient les deux expressions

$$-N \left[ \frac{1}{M} + \frac{au}{I} \right], \quad -N \left[ \frac{1}{M} + \frac{bu}{I} \right]$$

qui conduisent, dans tous les cas, à considérer les deux points P et Q d'abscisses

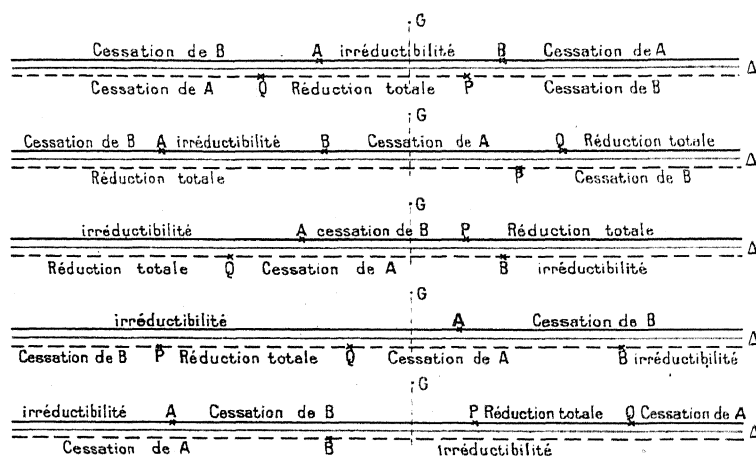
$$-\frac{I}{aM}, \quad -\frac{I}{bM}$$

qui sont les conjugués harmoniques de A et B par rapport au segment imaginaire de milieu G' et dont les extrémités sont définies par

$$x^2 + \frac{I}{M} = 0.$$

Ayant la base de sustentation AB et les deux points PQ, les quatre segments convexes sont parfaitement déterminés. On formera le segment convexe AP en partant de A à l'extérieur de la base de sustentation, marchant au-dessus jusqu'à ce qu'on rencontre P et alors P est au-dessus de Δ, sinon continuant et passant au-dessous de +∞ à -∞ ou de -∞ à +∞ et continuant ensuite jusqu'à P, qui est alors

Fig. 16.



au-dessous. On formera de même le segment convexe BQ et le segment qui restera sera PQ.

On a alors, suivant la disposition de la base de sustentation et de la projection du point G, les divers diagrammes de la figure 16.

Ces diagrammes, qui permettent de résoudre le problème initial, sont composés de quatre points qui sont définis au moyen des trois points A, B, G' et de la quantité

$$\frac{1}{M}$$

Cette quantité et le système géométrique formés par A, B, G' restent invariables pendant tout le mouvement sur la liaison totale.

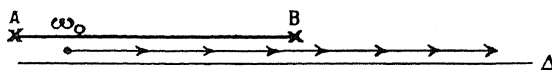
Les diagrammes sont donc invariables pendant tout le mouvement  $M_A$  et permettent d'étudier simplement le problème pendant le mouvement.

Pour cela, nous considérerons la trajectoire relative du point  $\omega$ , c'est-à-dire le chemin suivi par  $\omega$  dans la plaque; ce chemin est porté par la droite AB de la plaque et il doit être considéré comme au-dessus dans les parties où N est positive et au-dessous dans les parties où elle est négative. En tout cas, ce chemin part, d'après l'hypothèse, d'un point  $\omega_0$  situé à l'intérieur de la base de sustentation.

Ce chemin peut sortir de la base de deux façons :

Ou bien il arrivera à traverser l'une des extrémités de cette base, B par exemple, sans avoir auparavant traversé la droite  $\Delta$ , c'est-à-dire sans que N ait changé de signe.

Fig. 17.

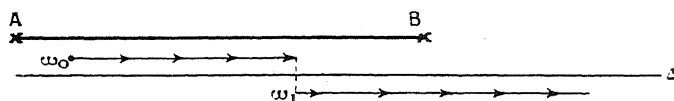


Le point  $\omega$  passe alors forcément dans le segment convexe BQ, de sorte que l'on se trouve, sans avoir à faire la moindre discussion, dans un cas très précis : le contact A cesse, tandis que le contact B persiste.

Ou bien le chemin peut sortir de la base parce qu'il traverse  $\Delta$  avant d'arriver à une de ses extrémités, c'est-à-dire parce que N change de signe auparavant. En traversant  $\Delta$  en  $\omega_1$ , le point  $\omega$  entre dans un segment convexe de la partie inférieure de  $\Delta$ . Mais ici, ce point  $\omega$ , n'est pas toujours dans la même région; c'est qu'en effet,  $\omega_1$  peut être

un point quelconque de AB et le segment convexe symétrique de AB n'est pas forcément (comme on le constate sur les diagrammes) tout

Fig. 18.



entier intérieur à l'une des régions de réduction; dans certains cas, il n'y aura qu'un contact qui cessera; dans d'autres cas, il pourra y en avoir deux.

### III. — Les liaisons unilatérales triples.

32. *Le problème à résoudre.* — Pour ne pas nous répéter, nous nous bornerons à faire remarquer la complication du nouveau problème; le nombre des mouvements réduits est donné par celui des liaisons réduites; si la liaison unilatérale triple n'est pas surabondante il y a 7 liaisons réduites, donc on a à choisir entre 7 mouvements. Si la liaison est surabondante le nombre des liaisons réduites peut devenir aussi grand que l'on veut, de sorte que finalement on a à choisir entre des mouvements dont le nombre a un minimum mais qui n'a pas de maximum; ce n'est plus un nombre bien déterminé comme celui (2 ou 4) qui s'est présenté dans les études antérieures.

33. *Mouvements réduits possibles.* — Pour qu'un mouvement réduit ne soit pas impossible, il faut qu'il ait lieu du côté positif de la liaison totale et, en outre, qu'il soit irréductible, dernière condition que nous savons exprimer puisque, ayant lieu sur une liaison réduite, c'est un mouvement sur une liaison unilatérale simple ou double.

Les raisonnements conduisant à cette notion étant les mêmes que dans le cas de la liaison double, nous ne les reprendrons pas.

34. *La région de possibilité du mouvement.*  $M_l$ . — Soient

$$X(\omega), Y(\omega), Z(\omega)$$

les trois fonctions  $\varphi$  que nous prenons pour définir la liaison totale

et

$$\xi X(\omega) + \eta Y(\omega) + \zeta Z(\omega)$$

le travail virtuel de la réaction totale. Le point  $\xi, \eta, \zeta$  sera le point figuratif de cette réaction.

Nous poserons, au moyen de la force vive  $W$  de la liaison

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \Psi(x, y, z) = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad \Theta(x, y, z) = -\frac{\partial W}{\partial z}.$$

Les inégalités définissant le côté positif de la liaison sont toutes de la forme

$$\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) + \gamma Z(\omega) > 0,$$

et, pour que le mouvement  $M_i$  soit possible, il faut que le déplacement ( $p$ ) fourni par les équations de discontinuité de la suppression totale satisfasse à toutes les inégalités

$$\alpha X(p) + \beta Y(p) + \gamma Z(p) > 0,$$

c'est-à-dire que le point  $\xi, \eta, \zeta$  satisfasse à toutes les inégalités

$$\alpha \Phi(\xi, \eta, \zeta) + \beta \Psi(\xi, \eta, \zeta) + \gamma \Theta(\xi, \eta, \zeta) > 0.$$

Ce point doit donc être du côté positif de tous les plans

$$\alpha \Phi(x, y, z) + \beta \Psi(x, y, z) + \gamma \Theta(x, y, z) = 0$$

qui dérivent des plans

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

par la transformation homographique  $(\Phi, \Psi, \Theta)$  déjà rencontrée à propos de la transformation  $W$  de l'espace.

Comme ces derniers plans définissent, par leurs côtés positifs, l'angle solide convexe  $a'$  figuratif de la liaison, on est ainsi conduit à l'angle solide convexe  $A$  transformé de  $a'$  par la transformation  $(\Phi, \Psi, \Theta)$ .

35. *Région de possibilité du mouvement réduit sur une liaison réduite double fournie par une arête de l'angle solide  $a'$ .* — Soient

$$\begin{aligned} a x + b y + c z &= 0, \\ a' x + b' y + c' z &= 0, \end{aligned}$$



les plans des deux faces aboutissant à l'arête considérée de  $\alpha'$ . Si l'une des faces est courbe, l'un de ces deux plans sera le plan tangent le long de l'arête et, si les deux faces sont courbes, les deux plans seront les deux plans tangents.

Dans l'équation de d'Alembert du mouvement  $M_\Delta$  figure le travail virtuel

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z,$$

tandis que dans l'équation de d'Alembert du mouvement réduit considéré figure le travail virtuel

$$\lambda(aX + bY + cZ) + \lambda'(a'X + b'Y + c'Z),$$

ou

$$(\lambda a + \lambda' a') X + (\lambda b + \lambda' b') Y + (\lambda c + \lambda' c') Z.$$

En faisant la soustraction on aura les équations de discontinuité du passage de  $M_\Delta$  au mouvement réduit et qui ne différeront de celles relatives à la suppression totale que par le changement de  $\xi, \eta, \zeta$  en  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  définis par

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \xi - \lambda a - \lambda' a', \\ \eta_1 &= \eta - \lambda b - \lambda' b', \\ \zeta_1 &= \zeta - \lambda c - \lambda' c', \end{aligned}$$

de sorte que l'on en tirera

$$\begin{aligned} X(\rho) &= \Phi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \\ Y(\rho) &= \Psi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), \\ Z(\rho) &= \Theta(\xi_1, \eta_1, \zeta_1). \end{aligned}$$

On aura, de plus, les deux équations

$$\begin{aligned} a X(\rho) + b Y(\rho) + c Z(\rho) &= 0, \\ a' X(\rho) + b' Y(\rho) + c' Z(\rho) &= 0, \end{aligned}$$

provenant des équations de liaison et qui, pouvant s'écrire

$$\begin{aligned} a \Phi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + b \Psi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + c \Theta(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) &= 0, \\ a' \Phi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + b' \Psi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + c' \Theta(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) &= 0, \end{aligned}$$

détermineront les deux inconnues auxiliaires  $\lambda$  et  $\lambda'$ .

Le point  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ , d'après ses coordonnées, est dans un plan mené par  $\xi, \eta, \zeta$  perpendiculaire à l'arête considérée de l'angle solide  $\alpha'$  et les deux dernières équations écrites expriment qu'il est sur l'arête correspondante de l'angle solide  $\Lambda$  ou, du moins, sur la droite qui porte cette arête.

Pour abrégier le langage, appelons  $\delta'$  l'arête de  $\alpha'$ ,  $\Delta$  l'arête de  $\Lambda$  et  $f$  la face correspondante de  $\alpha$  supplémentaire de  $\alpha'$ . Le point  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  est donc la projection de  $\xi, \eta, \zeta$  sur  $\Delta$  parallèlement à  $f$ .

La première condition de possibilité est que le déplacement ( $p$ ) relatif au mouvement réduit ait lieu du côté positif de  $\Lambda$ , c'est-à-dire satisfasse à toutes les inégalités

$$\alpha X(p) + \beta Y(p) + \gamma Z(p) > 0,$$

qui s'écrivent

$$\alpha \Phi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + \beta \Psi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + \gamma \Theta(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) > 0,$$

et expriment que  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  ne doit pas être extérieur à  $\Lambda$ . Comme il est sur la droite portant l'arête  $\Delta$  et que, vu la convexité de  $\Lambda$ , le prolongement de  $\Delta$  est extérieur, il faut que le point  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  soit sur l'arête  $\Delta$  elle-même.

La seconde condition de possibilité est l'irréductibilité, laquelle, d'après la théorie des liaisons unilatérales doubles, se traduit par l'inégalité

$$\lambda[\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) + \gamma Z(\omega)] + \lambda'[\alpha' X(\omega) + \beta' Y(\omega) + \gamma' Z(\omega)] > 0,$$

devant avoir lieu pour tous les déplacements satisfaisant à

$$\alpha X(\omega) + \beta Y(\omega) + \gamma Z(\omega) > 0,$$

$$\alpha' X(\omega) + \beta' Y(\omega) + \gamma' Z(\omega) > 0,$$

ou, ce qui revient au même, par la condition que tous les points du côté positif des deux plans

$$a x + b y + c z = 0,$$

$$a' x + b' y + c' z = 0,$$

soient du côté positif du plan

$$(P) \quad (\lambda a + \lambda' a') x + (\lambda b + \lambda' b') y + (\lambda c + \lambda' c') z = 0.$$

Les points considérés sont tous les points intérieurs au dièdre convexe  $\delta'$  de  $a'$ , donc le plan considéré, qui passe par  $\delta'$  ne doit pas traverser ce dièdre à l'intérieur duquel  $a'$  est entièrement contenu; ce plan ne doit donc pas traverser  $a'$  et doit le laisser tout entier du côté positif. Quel est ce côté? Considérons le vecteur  $\mu$  mené par l'origine et équipollent au vecteur allant de  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  à  $\xi, \eta, \zeta$ . Ce vecteur, d'après ce qui a été dit plus haut, est dans le plan de la face  $f$  et le plan P est précisément le plan qui lui est perpendiculaire en O; les coordonnées de l'extrémité de  $\mu$  sont

$$\lambda a + \lambda' a', \quad \lambda b + \lambda' b', \quad \lambda c + \lambda' c',$$

et, si on les substitue dans l'équation du plan P, on obtient un résultat

$$(\lambda a + \lambda' a')^2 + (\lambda b + \lambda' b')^2 + (\lambda c + \lambda' c')^2$$

essentiellement positif. Le plan P passant par l'arête  $\delta'$  de  $a'$  ne traverse donc pas  $a'$  et le vecteur  $\mu$  est dirigé comme une demi-perpendiculaire du côté de  $a'$ ; on en conclut que  $\mu$  est à l'intérieur de la face  $f$  de l'angle solide supplémentaire  $a$ .

En définitive, le point  $\xi, \eta, \zeta$  doit être l'extrémité d'un vecteur issu d'un point de  $\Delta$  et équipollent à une demi-droite intérieure à la face  $f$ , c'est-à-dire doit être dans la région balayée par l'angle  $f$  subissant une translation faisant décrire à son sommet l'arête  $\Delta$ . On définit ainsi l'intérieur du trièdre convexe  $f, \Delta$  déjà rencontré dans l'étude de la transformation W.

Ainsi :

*La région de possibilité est l'intérieur de l'angle solide convexe (trièdre) défini par la face de  $a$  et l'arête de  $\Delta$  qui correspondent à l'arête de  $a'$  fournissant la liaison réduite.*

36. *Région de possibilité du mouvement réduit sur une liaison réduite simple fournie par une face plane de l'angle solide  $a'$ .* — La liaison réduite simple est fournie par

$$ax + by + cz = 0.$$

Si nous refaisons un calcul analogue à celui du cas précédent, nous

aurons, pour le passage de  $M_\lambda$  au mouvement réduit,

$$\begin{aligned} X(\rho) &= \Phi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), & \xi_1 &= \xi - \lambda a, \\ Y(\rho) &= \Psi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), & \eta_1 &= \eta - \lambda b, \\ Z(\rho) &= \Theta(\xi_1, \eta_1, \zeta_1), & \zeta_1 &= \zeta - \lambda c, \end{aligned}$$

l'inconnue  $\lambda$  étant déterminée par

$$a\Phi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + b\Psi(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) + c\Theta(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = 0.$$

On voit immédiatement que le point  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  est, d'après ses coordonnées, sur la perpendiculaire menée de  $\xi, \eta, \zeta$  à la face  $f'$  de  $a'$  et, d'après la dernière équation, dans le plan de la face correspondante F de A, de sorte que le vecteur allant de  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  à  $\xi, \eta, \zeta$  est un vecteur issu d'un point du plan F et parallèle à l'arête  $\delta$  de  $a$ .

Pour que le mouvement réduit ait lieu du côté positif il faut encore que  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  ne soit pas extérieur à A et, comme il est dans le plan de la face F de cet angle solide convexe, qu'il soit à l'intérieur de cette face F.

Pour que le mouvement réduit soit irréductible, il faut avoir

$$\lambda(ax + by + cz) > 0$$

pour tous les points  $x, y, z$  satisfaisant à

$$ax + by + cz > 0;$$

donc

$$\lambda > 0.$$

Considérons alors l'extrémité

$$\lambda a, \lambda b, \lambda c,$$

du vecteur mené par O et équipollent à celui qui va de  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  à  $\xi, \eta, \zeta$ . Si nous substituons dans l'équation de la face  $f'$  nous obtenons

$$\lambda(a^2 + b^2 + c^2),$$

qui est du signe de  $\lambda$ ; donc le vecteur considéré est porté sur  $\delta$  et, étant du côté positif du plan  $f'$ , est dans le sens de  $\delta$ . De ces conditions on déduit que  $\xi, \eta, \zeta$  doit être dans la région balayée par  $\delta$  subis-

sant une translation faisant parcourir à son origine tout l'intérieur de la face F. Donc :

*La région de possibilité est l'intérieur de l'angle solide convexe (trièdre) défini par l'arête de  $a$  et la face de A qui correspondent à la face de  $a'$  fournissant la liaison réduite.*

37. *Région de possibilité du mouvement réduit sur une liaison réduite simple fournie par une face conique de l'angle solide  $a'$ .* — Les déplacements virtuels sur la liaison réduite sont tous ceux qui sont situés dans le plan tangent

$$ax + by + cz = 0.$$

On peut alors recommencer tous les calculs et raisonnements du paragraphe précédent. Le seul changement sera que le point  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  situé dans le plan tangent correspondant de A ne devant pas être extérieur à cet angle solide sera forcément sur la génératrice de contact. Au plan tangent  $p'$  de  $a'$  correspondra une arête  $\delta$  de  $a$  et un plan tangent P de A, donc une génératrice de contact  $\Delta$ . Il faudra que le point  $\xi, \eta, \zeta$  soit intérieur à l'angle convexe de deux génératrices correspondantes de A et  $a$ . Ainsi :

*La région de possibilité est l'angle solide convexe  $\varphi, \Phi$  limité par les faces coniques  $\varphi$  et  $\Phi$  de  $a$  et A correspondant à la face conique considérée de  $a'$  et par les angles convexes joignant les génératrices limites correspondantes de  $\varphi$  et  $\Phi$ .*

38. *Nombre maximum des mouvements réduits possibles.* — Nous sommes donc amenés à considérer les régions A,  $\delta F, f\Delta$  et  $\varphi\Phi$  déduites d'un angle solide convexe  $a$  par une transformation W; du fait que ces régions n'empiètent jamais les unes sur les autres, résulte alors immédiatement que le point  $\xi, \eta, \zeta$  n'est dans aucune d'entre elles, ou bien est dans l'une d'elles et dans une seule, s'il n'est pas sur une frontière.

Si ce point est dans la région  $a$ , il n'y a aucun mouvement réduit possible, donc le mouvement réel est forcément le mouvement  $M_A$  sur la liaison totale. Nous retrouvons donc le même résultat que pour la liaison unilatérale double :

*Le nombre des mouvements réduits possibles n'est jamais supérieur à l'unité. Quand il est nul, le mouvement réel a lieu sur la liaison totale.*

Dans ce dernier cas, nous dirons que la liaison est *irréductible*.

39. *Principe du mouvement réduit pour les liaisons unilatérales triples.*

— De ce qui précède résulte encore que, lorsqu'il y a à choisir, le choix ne porte que sur deux mouvements : le mouvement  $M_A$  et l'unique mouvement réduit possible.

Sans qu'il soit nécessaire d'en donner des exemples, bien faciles d'ailleurs à trouver, on constate expérimentalement le fait suivant qu'on érige en principe général :

*Lorsque la liaison unilatérale triple n'est pas irréductible, il y a indétermination entre le mouvement sur la liaison totale et celui des mouvements réduits qui seul est possible. Le mouvement qui se produit réellement est toujours le mouvement réduit.*

à propos duquel on fera les mêmes remarques que dans le cas des liaisons doubles.

40. *Il n'y a jamais impossibilité ou indétermination.* — Les régions de possibilité des mouvements réduits sont donc, en vertu du principe précédent, les régions de production effective de ces mouvements réduits et, pour compléter l'espace, il faut y ajouter la région  $a$  qui, par exclusion, est la région de production effective de  $M_A$ . Il n'y a ni impossibilité ni indétermination parce que toutes ces régions n'empiètent jamais les unes sur les autres et remplissent tout l'espace comme nous l'avons vu dans l'étude de la transformation  $W$  de l'espace.

41. *Cas où le point figuratif de la réaction est sur une frontière.* — On traitera cette question comme dans le cas des liaisons doubles en cherchant où passe ce point à l'instant  $t_0 + dt$  ( $dt > 0$ ).

42. *Définition mécanique de la région d'irréductibilité.* — On mon-

trera, comme nous l'avons fait dans le plan, que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une demi-droite fasse un angle aigu avec toutes les demi-droites intérieures à un angle solide convexe  $\alpha'$ , est que cette demi-droite soit intérieure à l'angle solide convexe  $\alpha$  supplémentaire de  $\alpha'$ .

Pour que le point  $\xi, \eta, \zeta$  soit dans  $\alpha$ , il faut donc et il suffit que son rayon fasse un angle aigu avec celui de tout point  $X, Y, Z$  situé dans  $\alpha'$ , c'est-à-dire que la quantité

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z$$

soit positive pour tout point  $X, Y, Z$  dans  $\alpha'$  et, comme c'est le travail virtuel de la réaction, nous arrivons au même résultat que pour la liaison double :

*Pour être dans la région d'irréductibilité, il faut et il suffit que la réaction de la liaison totale ait un travail positif pour tout déplacement virtuel du côté positif de cette liaison.*

43. *Le problème pendant le mouvement.* — Les régions varient généralement avec le temps et le point  $\xi, \eta, \zeta$ , se déplace d'une façon continue en partant d'une position initiale située, par hypothèse, dans l'intérieur de  $\alpha$ . Le mouvement  $M_\Lambda$  cessera quand la réaction sortira de la région d'irréductibilité.

Si  $\xi, \eta, \zeta$  sort par une face de  $\alpha$ , on entre dans une région  $f\Delta$  bien déterminé et l'on a un mouvement réduit sur une liaison réduite double; mais si  $\xi, \eta, \zeta$  sort par une arête ou par le sommet, il peut entrer dans plusieurs régions et il faut étudier le signe que prennent certaines expressions linéaires pour déterminer la région dans laquelle il entre effectivement et qui indique le mouvement réduit succédant à  $M_\Lambda$ .

44. *Le problème de la liaison unilatérale pour un solide en contact avec un plan par un nombre fini ou infini de points non en ligne droite.* — Supposant la liaison réduite à trois contacts non en ligne droite et choisis arbitrairement, on pourra faire la discussion au moyen des trois réactions partielles  $\xi, \eta, \zeta$  qui sont normales au plan. Mais le

choix de ces trois contacts, sauf le cas où la liaison n'est pas surabondante, est absolument arbitraire et, comme nous l'avons fait dans le cas analogue de la liaison double, il est plus symétrique et plus intéressant de la faire au moyen de la réaction totale  $N$  et de son pied  $\omega$  considéré comme situé sur la face supérieure ou sur la face inférieure du plan suivant que  $N$  sera dirigée au-dessus ou au-dessous de ce plan.

On passera de  $\xi, \eta, \zeta$  à  $N$  et aux coordonnées  $u, \omega$  de  $\omega$  par la transformation

$$\begin{aligned} \xi + \eta + \zeta &= N, \\ a\xi + b\eta + c\zeta &= Nu, \\ a'\xi + b'\eta + c'\zeta &= N\omega, \end{aligned}$$

dans laquelle  $a, b, c, a', b', c'$  sont des constantes et sur laquelle on fera exactement les mêmes remarques que sur la transformation analogue déjà étudiée pour la liaison double.

Chaque région sera définie par sa base dans le plan de contact, cette base pouvant être tout entière d'un seul côté du plan ou être constituée par deux portions, l'une sur une face, l'autre sur la seconde face.

La région d'irréductibilité sera l'intérieur de la base de sustentation telle que nous l'avons définie. Nous allons nous proposer d'en tirer la région de réduction totale par une étude directe et nous en déduirons les régions de réduction partielle comme conséquence des résultats de la théorie générale.

Prenons trois axes fixes  $O_1, x_1, y_1, z_1$ , les axes  $O_1x_1$  et  $O_1y_1$  étant dans le plan fixe de contact et, pour éviter le cas d'indétermination des angles d'Euler, prenons trois axes mobiles attachés au solide, issus du centre de gravité  $G$  et tels que le solide étant en contact avec le plan par sa base de sustentation,  $Gy$  soit parallèle à  $O_1z_1$  et de même sens.

Si  $a, b, c$  sont les coordonnées absolues de  $G$  et  $\theta, \varphi, \psi$  les trois angles d'Euler, la liaison totale se traduira par les trois équations

$$c = h = \text{const.}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = 0.$$



Les équations du mouvement sur la liaison totale sont

$$M a'' = \dots$$

$$M b'' = \dots$$

$$M c'' = N + \dots$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial p} \right) + \dots = -N\varpi + \dots$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial q} \right) + \dots = \dots$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \dots = Nu + \dots$$

Avec

$$\frac{dp}{dt} = \psi'' \sin \varphi \sin \theta + \theta'' \cos \varphi + \dots$$

$$\frac{dq}{dt} = \psi'' \cos \varphi \sin \theta - \theta'' \sin \varphi + \dots$$

$$\frac{dr}{dt} = \psi'' \cos \theta + \varphi'' + \dots$$

ou, lorsqu'on est sur la liaison  $\Lambda$ ,

$$\frac{dp}{dt} = \theta'' + \dots$$

$$\frac{dq}{dt} = \psi'' + \dots$$

$$\frac{dr}{dt} = \varphi'' + \dots$$

On a donc les équations de discontinuité de la suppression totale

$$M a'' = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \theta''} = N\varpi,$$

$$M b'' = 0, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \psi''} = 0,$$

$$M c'' = -N, \quad \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial \varphi''} = -Nu.$$

Tout point  $x, -h, z$  situé dans la face de contact a une altitude au-dessus de  $O_1, x_1, y_1$  donnée par

$$z_1 = c + x \sin \varphi \sin \theta - h \cos \varphi \sin \theta + z \cos \theta,$$

donnant

$$\begin{aligned} \delta z_1 = & \delta c + \delta \varphi [x \cos \varphi \sin \theta + h \sin \varphi \sin \theta] \\ & + \delta \theta [x \sin \varphi \cos \theta - h \cos \varphi \cos \theta - z \sin \theta], \end{aligned}$$

ou, puisque l'on est sur la liaison  $\Lambda$ ,

$$\delta z_1 = \delta c + x \delta \varphi - z \delta \theta.$$

Pour le déplacement  $(p)$  on est donc amené à considérer la quantité.

$$c'' + x\varphi'' - z\theta'' = -\frac{N}{M} + x\varphi'' - z\theta'' = -N\Omega,$$

$c''$ ,  $\varphi''$  et  $\theta''$  étant ceux que fournissent les équations de discontinuité. Si, changeant de notations, on pose

$$X = \frac{\theta''}{N}, \quad Y = \frac{\varphi''}{N}, \quad Z = \frac{c''}{N},$$

on aura

$$\Omega = -xZ + zX + \frac{1}{M},$$

$X$ ,  $Y$ ,  $Z$  étant donnés par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial X} = \xi & \quad \xi = \alpha, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial Y} = \eta & \quad \text{avec} \quad \eta = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial Z} = \zeta & \quad \zeta = -\alpha. \end{aligned}$$

Les formules en  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  conduisent à la polaire réciproque

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta) = 1,$$

de l'ellipsoïde central d'inertie par rapport à la sphère de rayon un et de centre  $G$ , et, par réciprocity, on a

$$X = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}, \quad Y = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad Z = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}.$$

Pour avoir  $X$  et  $Z$  on peut introduire de suite, dans  $\Phi$ , l'hypothèse

$\eta = 0$  et si, ensuite, nous considérons la fonction

$$\Theta(u, w) = \Phi(w, 0, -u),$$

nous aurons

$$X = \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial w}, \quad Z = -\frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial u},$$

et, par suite,

$$\Omega = x \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial u} + z \frac{1}{2} \frac{\partial \Theta}{\partial w} + \frac{1}{M},$$

qui est la forme polaire, relative aux deux points  $(x, z)$  et  $(u, w)$ , de la conique

$$\Theta(u, w) + \frac{1}{M} = 0.$$

Cette conique  $\Gamma$  peut visiblement, d'après le calcul précédent, se définir géométriquement de la façon suivante. On part de l'ellipsoïde central de gyration

$$F(X, Y, Z) = M,$$

on en prend l'ellipsoïde conjugué

$$F(X, Y, Z) + M = 0,$$

qui est imaginaire, on le fait tourner de  $90^\circ$  autour de la perpendiculaire au plan de contact issu de son centre  $G$ , ce qui donne

$$F(Z, Y, -X) + M = 0,$$

enfin on prend la polaire réciproque par rapport à la sphère

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

on coupe ce nouvel ellipsoïde par le plan  $G, x, z$ , parallèle au plan de contact et l'on projette cette section sur le plan de contact lui-même.

Nous retiendrons, pour ce qui va suivre, le seul fait que  $\Gamma$  est une ellipse imaginaire ayant pour centre la projection du centre de gravité.

L'équation

$$\Omega = 0,$$

où l'on considère  $x$  et  $z$  comme coordonnées courantes, est la polaire  $P_\omega$  du point  $\omega$ . Si on y considère  $u$  et  $w$  comme coordonnées courantes, c'est la polaire  $P_{x,z}$  du point  $x, z$ . De quelque façon que l'on considère  $\Omega$  comme droite, on est toujours assuré que son côté positif est celui qui contient la projection  $G'$  du centre de gravité.

La région d'irréductibilité ou région  $R_0$  de réduction nulle est la base de sustentation pouvant avoir une portion  $R_0^+$  au-dessus du plan de contact et une région  $R_0^-$  sur la face inférieure de ce plan. De même, la région  $R_t$  de réduction totale pourra avoir deux portions  $R_t^+$  et  $R_t^-$ .

Si  $\omega$  est dans  $R_t$ , c'est que  $N\Omega$  a le signe — pour tout point de  $R_0^+$  et le signe + pour tout point de  $R_0^-$ . Autrement dit, la polaire  $P_\omega$  laisse d'un même côté tout  $R_0^+$  et laisse tout entière de l'autre côté  $R_0^-$ . Si  $\omega$  vient à sortir de  $R_t$ , c'est que  $P_\omega$  cesse de satisfaire à ces conditions, donc vient passer par un sommet de  $R_0$  ou, ce qui revient au même, que  $\omega$  vient traverser la polaire  $P_{x,z}$  d'un sommet de  $R_0$ .

La région  $R_t$  est donc limitée par les polaires des sommets de  $R_0$ .

Si le point  $\omega$  est dans  $R_t^+$ , cela signifie que  $N$  est positive, donc on doit avoir

$$\Omega < 0$$

pour tous les points  $x, z$  de  $R_0^+$  et, en particulier, pour ses sommets, et

$$\Omega > 0$$

pour tous les points  $x, z$  de  $R_0^-$  et, en particulier, pour ses sommets.

Si  $\omega$  est dans  $R_t^-$ , les résultats sont renversés, de sorte qu'en définitive :

*La région  $R_t^+$  est la région commune aux côtés négatifs des polaires des sommets de  $R_0^+$  et aux côtés positifs des polaires des sommets de  $R_0^-$ .*

*La région  $R_t^-$  est la région commune aux côtés positifs des polaires des sommets de  $R_0^+$  et aux côtés négatifs des polaires des sommets de  $R_0^-$ .*

Ayant formé  $R_0$  et  $R_t$  on formera les régions de réduction partielle en faisant la jonction des côtés aux sommets correspondants au moyen des segments rectilignes convexes analogues à ceux considérés dans le problème semblable pour la liaison double.

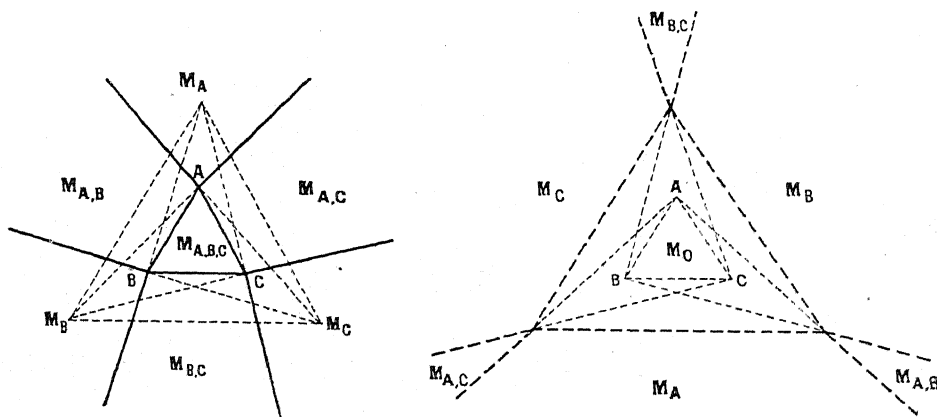
Nous représenterons en traits pleins — tout ce qui est sur la face supérieure du plan, en traits pointillés — — — — tout ce qui est sur la face inférieure et nous remarquerons que les diagrammes obtenus étant obtenus au moyen de quantités invariables pendant le mouvement  $M_A$  sont eux-mêmes invariables pendant tout le mouvement sur la liaison totale et fournissent la solution du problème pendant le mouvement aussi bien que celle du problème initial.

EXEMPLE I. — *Trépied symétrique.* — Il n'y a alors que  $R_0^+$  qui est un triangle équilatéral; par suite de la symétrie le point  $G$  se projette au centre de ce triangle et, l'ellipsoïde central d'inertie étant de révolution autour de la normale au plan de contact, la conique  $\Gamma$  est un cercle imaginaire.

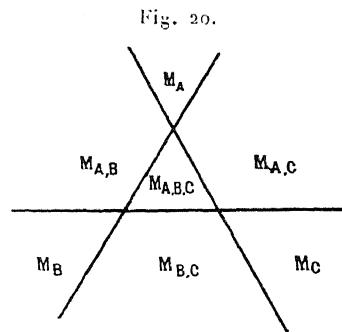
Les polaires des sommets du triangle équilatéral forment un nouveau triangle équilatéral contenant  $G'$  et dont l'intérieur étant la région commune aux côtés positifs des polaires est la région  $R_1^-$ . Les côtés négatifs n'ont pas de portion commune, de sorte qu'il n'y a pas de  $R_1^+$ .

Si nous désignons chaque région par  $M_{ABC}, M_{AB}, \dots, M_A, \dots, M_0$  en indiquant ainsi les contacts qui persistent dans le mouvement effectif, nous obtiendrons les deux diagrammes supérieurs et inférieurs qui suivent.

Fig. 19.

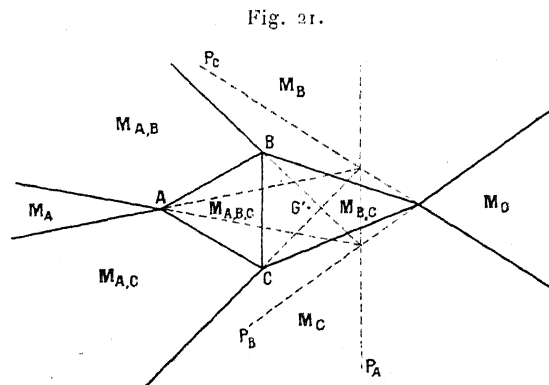


Et nous remarquerons que les résultats sont bien différents de ceux fournis par la théorie couramment admise. L'étude du signe des réactions conduirait en effet à la région  $M_0$  représentée par toute la face inférieure du plan et au diagramme supérieur suivant :



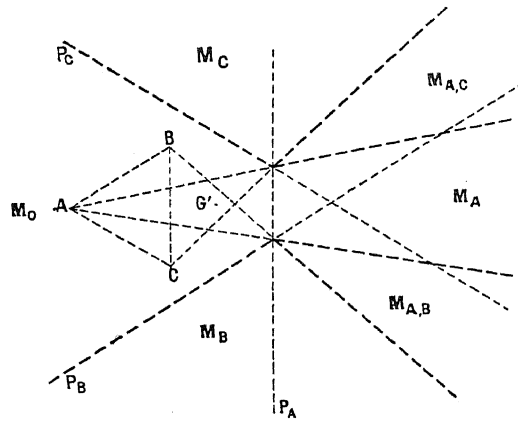
EXEMPLE II. — *Trépied à base équilatérale, n'ayant qu'un plan de symétrie, et dont le centre de gravité se projette en dehors de la base.* — Il y a alors une région commune aux côtés positifs des trois polaires de A, B, C et aussi une région commune à leurs côtés négatifs. La première est la région  $R_7^-$  et la seconde la région  $R_7^+$ .

On a alors le diagramme supérieur :



et le diagramme inférieur :

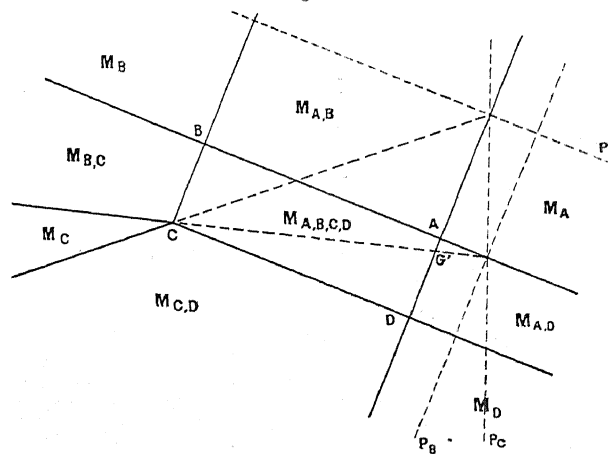
Fig. 22.



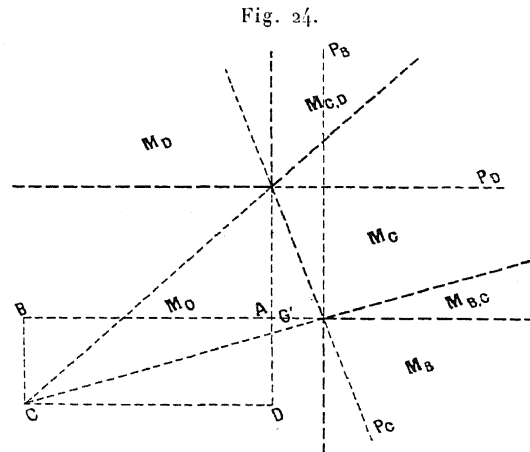
EXEMPLE III. — *Le solide est en contact avec le plan par une face rectangulaire. Son ellipsoïde central d'inertie est de révolution autour d'un axe perpendiculaire à cette face et passant par un de ses sommets. — Il y a ici un sommet dont la polaire est la droite de l'infini et la conique  $\Gamma$  est un cercle imaginaire; les côtés négatifs des quatre polaires n'ont pas de partie commune, donc il n'y a pas de  $R_t^+$  et il y a une  $R_t^-$  limitée par la droite de l'infini.*

On a le diagramme supérieur :

Fig. 23.



et le diagramme inférieur :



45. *Le problème de la liaison unilatérale pour un solide reposant sur un plan fixe par une base limitée par une courbe fermée convexe.* — La courbe  $R_0$  étant convexe, toute droite qui la rencontre la traverse en deux points et rien que deux et, par tout point extérieur, on peut mener deux tangentes et rien que deux.

Si  $G'$  est à l'intérieur de  $R_0$  on ne peut pas mener de tangentes issues de  $G'$ ; donc  $R_t$ , qui est la polaire réciproque de  $R_0$  par rapport à l'ellipse imaginaire  $\Gamma$  de centre  $G'$ , n'a pas de points à l'infini; c'est une courbe fermée convexe contenant  $G'$  à son intérieur qui constitue  $R_t^-$  et il n'y a pas de  $R_t^+$ .

Si  $G'$  est extérieur à  $R_0$  on peut mener deux tangentes déterminant sur  $R_0$  deux arcs, l'un du côté de  $G'$  par rapport à la corde des contacts et l'autre du côté opposé. La courbe  $R_t$  a deux asymptotes qui sont les polaires des deux points de contact et se compose de deux branches analogues à des branches d'hyperbole, celle qui est transformée de l'arc du côté de  $G'$  aura son intérieur du côté négatif de toutes les tangentes, ce sera  $R_t^+$  et l'autre, transformée de l'arc de  $R_0$  opposé à  $G'$ , aura son intérieur du côté positif de toutes les tangentes, donc sera  $R_t^-$ .

Si le point  $\omega$  est à l'intérieur de  $R_0$  ou de  $R_t$ , la question se trouve complètement résolue, mais s'il ne se trouve ni dans l'une ni dans l'autre, c'est-à-dire dans la région  $R'$  formée par les deux faces du plan



après enlèvement de  $R_0$  et de  $R_c$ , on est assuré qu'il y a réduction à un contact tangentiel, le solide se soulève de façon que la base reste en contact, par un point de son contour, avec le plan; ce point de contact va être variable dans le mouvement ultérieur, mais il est utile et intéressant de déterminer sa position initiale que nous appellerons *point de soulèvement*.

Soit

$$x = f(t), \quad z = \varphi(t)$$

la courbe  $R_0$  définie au moyen d'un paramètre et  $\xi, \zeta$ , le point correspondant de  $R_c$ . La polaire

$$X \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} + Z \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} + \frac{1}{M} = 0$$

du point  $\xi, \eta$  doit être identique à la tangente

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Z - z}{z'},$$

en  $x, z$ ; donc

$$\frac{\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}}{z'} = \frac{\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta}}{-x'} = \frac{1}{zx' - xz'}.$$

Équations linéaires donnant  $\xi$  et  $\zeta$  en fonction de  $x, z, x'$  et  $z'$ , c'est-à-dire en fonction de  $t$ .

Pour que  $x, z$  soit le point de soulèvement, il faut que  $\omega$  se trouve sur le segment convexe allant du point  $x, z$  au point  $\xi, \zeta$ , donc ces trois points doivent se trouver en ligne droite, d'où l'équation

$$\mathcal{F}(t) = \begin{vmatrix} x & z & 1 \\ \xi & \zeta & 1 \\ u & v & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

qui fournit un certain nombre de valeurs de  $t$  parmi lesquelles il faut choisir celle qui donne le point de soulèvement.

Cette équation exprime que  $\omega$  est sur le segment convexe allant de  $x, z$  à  $\xi, \zeta$  ou sur le segment non convexe qui le complète. D'après l'étude générale que nous avons faite du mouvement de l'angle convexe formé par deux demi-droites correspondantes, nous savons qu'il y a

un et un seul segment convexe passant par un point  $\omega$  pris arbitrairement dans  $R'$ , il en résulte que, si on se limite à l'intervalle de variation de  $t$  fournissant une fois et une seule la courbe  $R_0$ , l'équation  $\mathcal{F}$  admet une et une seule racine telle que  $\omega$  soit effectivement sur le segment convexe correspondant.

A quels caractères reconnaître cette racine?

La question est résolue presque immédiatement quand on est dans le cas où  $G'$  est à l'intérieur de  $R_0$ .

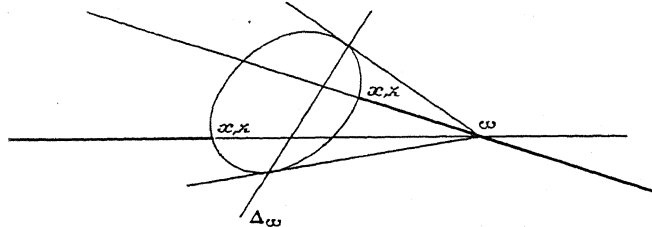
Supposons d'abord  $\omega$  au-dessus du plan et soit  $\Delta_\omega$  la droite des contacts des tangentes menées de ce point à  $R_0$ , droite qui existe réellement, puisque  $\omega$  est supposé être dans  $R'^+$  qui est toute la portion supérieure du plan extérieur à  $R_0$ .

Considérons deux droites  $x, z, \xi, \zeta$  issues, l'une d'un point de l'arc de  $R_0$  qui est du côté de  $\omega$  et l'autre d'un point de l'arc à l'opposé de  $\omega$ , et passant toutes deux par  $\omega$ . Pour la première, la partie supérieure du segment convexe (figurée en gros traits) contient forcément  $\omega$ , et, pour la seconde, ne le contient certainement pas. Il faut donc et il suffit que le point  $x, z$  soit du côté de  $\omega$  par rapport à  $\Delta_\omega$ .

En formant l'équation de  $\Delta_\omega$  on aura donc une inégalité définissant sans ambiguïté la racine à choisir pour obtenir le point de soulèvement.

Supposons maintenant  $\omega$  au-dessous du plan. On fera exactement le même raisonnement au moyen de  $R_t$  et du point  $\xi, \zeta$ , ce qui conduira à prendre la corde des contacts des tangentes menées de  $\omega$  à  $R_t$ . On peut revenir à  $R_0$  en prenant les pôles et polaires par rapport à  $\Gamma$ ; la

Fig. 25.



polaire  $P_\omega$  coupe certainement  $R_0$  parce que  $\omega$  au-dessous est à l'extérieur de  $R_t$  et l'on voit facilement que le point  $x, z$  doit être, par

rapport à  $P_\omega$ , du côté opposé à  $G'$ , d'où encore l'inégalité définissant sans ambiguïté la racine donnant le point de soulèvement.

Lorsqu'on est dans le cas où  $G'$  tombe à l'extérieur de  $R_0$  la solution est un peu plus compliquée.

Supposons  $\omega$  au-dessus. On distinguera les solutions en  $t$  donnant des points  $x, z$  d'un côté ou de l'autre de la droite de contact  $\Delta_G$ . Pour qu'une valeur de  $t$  correspondant à un point à l'opposé de  $G'$  convienne, il faut et il suffit, puisqu'elle donne un point  $\xi, \zeta$  au-dessous du plan, que ce point  $x, z$  soit du côté  $\omega$  de  $\Delta_\omega$ , ce qui donne en définitive deux inégalités. Pour qu'une valeur de  $t$  correspondant à un point du côté  $G'$  de  $\Delta_G$  convienne, il faut encore la même inégalité relative à  $\Delta_\omega$ , mais cela ne suffit plus, car  $\xi, \zeta$  est alors au-dessus du plan; il faut, en plus, que  $\omega$  soit situé entre les deux points  $x, z$  et  $\xi, \zeta$ , ce qui donne une nouvelle inégalité.

Supposons  $\omega$  au-dessous, il est extérieur à la branche  $R_t^-$  et il peut être intérieur ou extérieur à  $R_t^+$ . Dans le premier cas, toute droite issue de  $\omega$  rencontre  $R_t^-$  en un seul point et il en résulte que si  $\xi, \zeta$  est sur  $R_t^-$  et donne une droite passant par  $\omega$ , ce point  $\omega$  est forcément sur le segment convexe correspondant. On a alors à satisfaire à une seule condition qui est que le point  $x, z$  se trouve du côté  $G'$  de  $\Delta_G$ . Dans le second cas, on peut mener des tangentes de  $\omega$  à  $R_t$  et il faudra que  $\xi, \zeta$  soit sur  $R_t^-$  et du côté de  $\omega$  par rapport à la droite de contact des tangentes menées de  $\omega$  à  $R_t$ . On aura donc une inégalité relative à  $\Delta_G$  et une autre relative à  $P_\omega$ .

En définitive, dans tous les cas on aura des inégalités conduisant à la détermination précise du point de soulèvement.

Pour étudier le problème pendant le mouvement, on considère la trajectoire du point  $\omega$  à l'intérieur de la base de sustentation. Elle part d'une position initiale  $\omega_0$  située à l'intérieur, donc au-dessus; elle reste au-dessus pendant un certain parcours et peut ensuite passer au-dessous lorsque  $N$  change de signe.

Si la trajectoire sort de  $R_0$  en un point avant de passer au-dessous du plan, la question est de suite résolue; ce point de sortie est le point de soulèvement.

Si la trajectoire sort de  $R_0$  parce qu'elle passe de l'autre côté du plan; c'est ce point  $\omega_1$ , considéré comme au-dessous du plan, qui va

fournir la solution. S'il est dans  $R_c^-$ , il y a réduction totale, sinon il est dans  $R'$  et il y a réduction partielle dont le point de soulèvement sera déterminé au moyen du point  $\omega$ , par les méthodes indiquées précédemment.

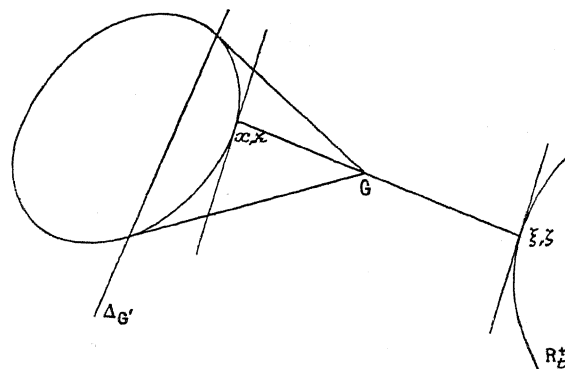
EXEMPLE I. — *Solide pesant reposant sur un plan horizontal par une base limitée par une courbe fermée convexe.* — Les équations du mouvement  $M_\Lambda$  montrent que, soit au début, soit pendant le mouvement, la réaction  $N$  est constante, positive et appliquée au point  $G'$ .

Si le centre de gravité se projette à l'intérieur de  $R_0$ , il y a irréductibilité au début et pendant tout le mouvement.

Si le centre de gravité se projette à l'extérieur de  $R_0$ , la projection  $G'$  doit être considérée comme un point  $\omega$  au-dessus du plan, puisque  $N$  est positive; ce point est d'ailleurs, par définition, extérieur à  $R_c^+$  qui est la région commune aux côtés négatifs de certaines droites, côtés opposés à  $G'$ .  $\omega$  est donc forcément dans la région  $R'^+$  et il s'agit de construire le point de soulèvement.

Le point  $x, z$  et le point  $\xi, \zeta$  doivent être en ligne droite avec  $G'$ . Or tous les points d'une telle droite ont leurs polaires par rapport à  $\Gamma$  paral-

Fig. 26.



lèles et la tangente en  $x, z$  est la polaire de  $\xi, \zeta$ ; il en résulte que les points  $x, z$  peuvent se définir comme étant les points de  $R_0$  tels que le rayon allant à  $G'$  et la tangente soient deux directions conjuguées par rapport à  $\Gamma$ .

Comme  $G'$  est ici pris comme point au-dessus du plan, il faut que le point  $x, z$  soit du côté de  $G'$  par rapport à  $\Delta_G$ ; cette condition entraîne comme conséquence que le point  $\xi, \zeta$  correspondant est sur  $R_t^+$ , donc il faut, en outre, que  $G'$  soit entre  $x, z$  et  $\xi, \zeta$ ; cette dernière condition est forcément réalisée parce que  $\Gamma$  est une ellipse imaginaire, les deux points sont homologues dans une involution de centre  $G'$  et à points doubles imaginaires, donc sont forcément de part et d'autre de  $G'$ .

En définitive : *On cherche les points  $m$  de  $R_0$  tels que la tangente en  $m$  et le rayon  $mG'$  soient deux directions conjuguées par rapport à l'ellipse imaginaire  $\Gamma$ . Parmi les points trouvés il y en a certainement un et un seul situé du côté de  $G'$  par rapport à la droite des contacts des tangentes issues de  $G'$ . C'est le point de soulèvement et la réduction de la liaison se produit forcément à l'instant initial.*

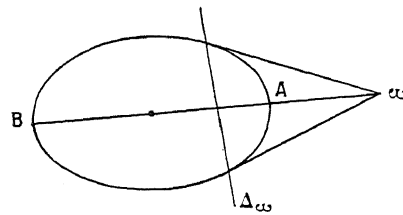
Un cas particulier intéressant est celui où, le point  $G'$  tombant toujours en dehors de  $R_0$ , le cylindre vertical circonscrit à l'ellipsoïde central est de révolution. On voit alors géométriquement que  $\Gamma$  est un cercle imaginaire par rapport auquel les directions conjuguées sont rectangulaires. Le point de soulèvement  $m$  doit alors être tel que la tangente en  $m$  soit orthogonale à  $mG'$ , ce qui signifie que  $m$  est le pied d'une normale menée de  $G'$  à  $R_0$ . La théorie générale montre que, parmi ces pieds de normales, il y en a forcément un et un seul du côté  $G'$  de  $\Delta_G$ , c'est le point de soulèvement et l'on voit aisément qu'on peut le définir comme pied de la plus courte normale menée de  $G'$  ou encore comme étant le point de  $R_0$  le plus rapproché de  $G'$ .

EXEMPLE II. — *La base de sustentation  $R_0$  est une ellipse de centre  $G'$  et homothétique à l'ellipse conjuguée de l'ellipse imaginaire  $\Gamma$ . — On voit immédiatement que  $R_t$  polaire réciproque de  $R_0$  par rapport à  $\Gamma$  est une ellipse de centre  $G'$  et homothétique à  $R_0$  et, en outre, que la droite joignant deux points correspondants  $x, z$  et  $\xi, \zeta$  de  $R_0$  et  $R_t$ , passe toujours par le point  $G'$ , centre commun, lequel est toujours situé entre les deux points correspondants.*

Nous aurons donc une région  $R_0^+$  qui est l'intérieur de l'ellipse  $R_0$ , une région  $R_t^-$ , intérieur de l'ellipse  $R_t$  et enfin une région  $R'$  formée par la face supérieure à l'extérieur de  $R_0$  et par la face inférieure à l'extérieur de  $R_t$ .

Si  $\omega$  est dans  $R'^+$ , on aura les points  $x, z$  en joignant  $\omega G'$ , ce qui donnera deux points, l'un A situé entre  $\omega$  et  $G'$ , l'autre B non situé entre  $\omega$  et  $G'$ ; parmi ces deux points il faut choisir celui qui est du

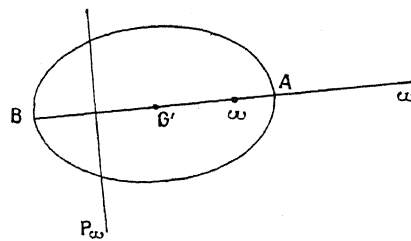
Fig. 27.



côté de  $\omega$  par rapport à la droite des contacts des tangentes menées de  $\omega$ ; c'est forcément le point A et l'on a ainsi le point de soulèvement.

Supposons maintenant  $\omega$  dans  $R'^-$ . Il peut se trouver en dehors de  $R_0$  ou à l'intérieur, car il est uniquement assujéti à être extérieur à  $R_t$  qui peut être une ellipse plus petite que  $R_0$ . Nous devons alors prendre la polaire  $P_\omega$  par rapport à  $\Gamma$ , polaire qui se trouve, par

Fig. 28.



rapport à  $G'$ , du côté opposé à  $\omega$  et coupe certainement  $R_0$ ; le point de soulèvement est celui des deux points d'intersection qui se trouve, par rapport à  $P_\omega$ , du côté opposé à  $G'$ . C'est forcément le point B.

On peut encore dire que l'on prend les deux points d'intersection de  $\omega G'$  avec l'ellipse  $R_0$  et que, si  $\omega$  est dans  $R'^+$ , le point de soulèvement est celui des deux qui est le plus près de  $\omega$ , tandis que, si  $\omega$  est dans  $R'^-$ , c'est celui des deux qui est le plus éloigné de  $\omega$ .