

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 7 (1870), p. 163-173

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1870_1_7__163_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE,

PAR M. G. DARBOUX,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES
AU LYCÉE LOUIS-LE-GRAND.

I.

Dans l'état actuel de la science, on connaît peu de chose sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. A part une remarque très-ingénieuse de Bour (*Journal de l'École Polytechnique*, XXXIX^e Cahier, p. 186-189), rien d'essentiel n'a été ajouté à la théorie importante exposée d'une manière si lumineuse par Ampère dans les Cahiers XVII et XVIII du *Journal de l'École Polytechnique*. Je me propose, dans cette Note, d'exposer les principes seulement d'une nouvelle méthode qui, sans donner la solution complète du problème, me paraît constituer un progrès dans la théorie des équations aux dérivées partielles. Cette méthode s'étend aux équations *de tous les ordres, à un nombre quelconque de variables*, et même *aux équations simultanées*; mais, pour obtenir plus de netteté dans ce rapide exposé, je ne parlerai que des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.

Soit

$$(1) \quad f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

l'équation proposée, et soit

$$(2) \quad Xdx + Ydy + Zdz + Pdp + Qdq + Rdr + Sds + Tdt = 0$$

sa différentielle totale; adoptons, pour résoudre la question, la méthode du changement de variables employée avec tant de succès par Ampère et par Cauchy. Pour cela, nous remplacerons x et y par les variables indépendantes x, y_0 , y_0 étant une fonction de x et de y qu'on pourra déterminer comme on le jugera convenable.

Nous aurons d'abord les relations suivantes, qui sont bien connues :

$$(3) \quad \frac{\partial z}{\partial y_0} = q \frac{\partial y}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial p}{\partial y_0} = s \frac{\partial y}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial q}{\partial y_0} = t \frac{\partial y}{\partial y_0},$$

$$(4) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = p + q \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = r + s \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = s + t \frac{\partial y}{\partial x}.$$

De plus, les conditions d'intégrabilité prendront la forme

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial y_0} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial q}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial r}{\partial y_0} = \frac{\partial s}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial s}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x}, \\ \frac{\partial s}{\partial y_0} = \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial t}{\partial y_0} \frac{\partial y}{\partial x}. \end{cases}$$

A ces équations il faut joindre la suivante, obtenue en prenant la dérivée de l'équation (1) par rapport à y_0 :

$$Y \frac{\partial y}{\partial y_0} + Z \frac{\partial z}{\partial y_0} + P \frac{\partial p}{\partial y_0} + Q \frac{\partial q}{\partial y_0} + R \frac{\partial r}{\partial y_0} + S \frac{\partial s}{\partial y_0} + T \frac{\partial t}{\partial y_0} = 0.$$

Servons-nous maintenant des équations (3), (4), (5) pour éliminer de l'équation précédente toutes les dérivées par rapport à y_0 , excepté $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ et $\frac{\partial t}{\partial y_0}$; nous obtiendrons la nouvelle équation

$$(a) \quad \begin{cases} \left(Y + Zq + Ps + Qt + R \frac{\partial s}{\partial x} + S \frac{\partial t}{\partial x} - R \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right) \frac{\partial y}{\partial y_0} \\ + \left[S \frac{\partial y}{\partial x} - R \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - T \right] \frac{\partial t}{\partial y_0} = 0. \end{cases}$$

Or on peut supposer, d'après des principes qu'il est inutile de rap-

peler ici, que y_0 a été choisi de manière que l'équation suivante

$$(6) \quad R \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 - S \frac{\partial y}{\partial x} + T = 0$$

soit satisfaite.

L'équation (a) se réduit alors et devient

$$Y + Zq + Ps + Qt + R \frac{\partial s}{\partial x} + S \frac{\partial t}{\partial x} - R \frac{\partial t}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

ce qu'on peut encore écrire, en tenant compte de l'équation (6),

$$(7) \quad Y + Zq + Ps + Qt + R \frac{\partial s}{\partial x} + T \frac{\frac{\partial t}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x}} = 0.$$

Nous avons donc, en résumé, à déterminer les sept inconnues y, z, p, q, r, s, t fonctions de x et de y_0 , et satisfaisant aux équations (1), (3), (4), (6), (7). On peut même remplacer l'équation proposée par sa dérivée, prise par rapport à x , qui, en tenant compte de l'équation (7), prend la forme simple

$$(8) \quad X + Zp + Pr + Qs + R \frac{\partial r}{\partial x} + S \frac{\partial s}{\partial x} = 0.$$

Or parmi les équations (3), (4), (6), (7), (8), *six* ne contiennent pas la variable y_0 ; mais, comme il y a *sept* inconnues, le changement de variables n'a plus ici la même utilité que dans le cas du premier ordre; il ne peut donner la solution complète du problème.

II.

La méthode précédente est susceptible d'une grande simplification dans le cas très-important où l'équation proposée est de la forme

$$(9) \quad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q .

On peut ici se servir des équations

$$\frac{\partial p}{\partial x} = r + s \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = s + t \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Si l'on déduit de ces deux équations r , s en fonction de t , et qu'on substitue leurs valeurs dans l'équation proposée (9), il arrive, *par suite de la forme particulière de cette équation*, que le coefficient de t s'annule, t disparaît du résultat. On est ainsi conduit au système suivant :

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = m, \\ Hm^2 - 2Km + L + N \left(\frac{\partial p}{\partial x} + m \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0, \\ H \left(\frac{\partial p}{\partial x} - m \frac{\partial q}{\partial x} \right) + 2K \frac{\partial q}{\partial x} + M - N \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2 = 0, \\ dz = p dx + q dy, \end{cases}$$

qui ne contient plus les dérivées du second ordre r , s , t , mais seulement z , y , p , q et leurs dérivées par rapport à x . Ce sont les équations de Monge, auxquelles il faudrait joindre les suivantes pour la détermination complète de y , z , p , q :

$$(11) \quad \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial y_0} - \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y_0} = \frac{\partial p}{\partial y_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial y_0} = q \frac{\partial y}{\partial y_0}.$$

On voit que, dans le cas que nous venons d'examiner, et qui a été jusqu'ici presque le seul considéré par les géomètres, la forme particulière de l'équation permet d'éliminer du système des équations aux dérivées ordinaires considérées plus haut les trois dérivées r , s , t . Hâtons-nous de dire qu'une pareille simplification ne constitue que rarement un avantage, et que des simplifications analogues se présentent dans tous les ordres, quand les équations aux dérivées partielles ont une forme convenablement choisie.

III.

On a vu, dans les deux paragraphes précédents, que le problème des équations d'ordre supérieur se sépare très-nettement du problème relatif aux équations du premier ordre. Pour le premier ordre, en effet,

la méthode du changement de variables ramène la question à l'intégration d'un système *complet* d'équations aux dérivées ordinaires. Pour le second ordre et pour les ordres supérieurs, il y a au contraire moins d'équations que d'inconnues à déterminer. Les remarques qui suivent paraissent accuser aussi une différence profonde entre les deux problèmes.

Puisque, dans le cas où l'on se borne aux inconnues y, z, p, q, r, s, t , on a une équation de moins qu'il ne faudrait pour la solution cherchée du problème, il est naturel de se demander si, en adjoignant aux inconnues précédentes les quatre dérivées partielles du troisième ordre, que nous appellerons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on ne parviendrait pas à un nombre d'équations suffisant pour déterminer comme fonctions de x , non-seulement les inconnues primitives, mais aussi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Il se présente ici un fait important, et qui, je crois, n'a pas été remarqué. *Le nombre des équations ne contenant pas y_0 est encore inférieur d'une unité au nombre des fonctions inconnues.* Ces équations ne suffisent donc pas à déterminer les inconnues considérées comme fonctions de la seule variable x ; mais la différence entre le nombre des équations et celui des inconnues reste la même qu'auparavant : elle est égale à l'unité. Il en est de même si, au lieu de s'arrêter au troisième ordre, on continue les calculs jusqu'à un ordre quelconque : *il y a toujours une équation de moins qu'il n'y a d'inconnues.*

Les résultats précédents établissent, on le voit, une différence essentielle entre les équations aux dérivées partielles du premier ordre et celles des ordres supérieurs. Pour les équations du premier ordre, le nombre des équations contenant seulement les dérivées par rapport à x est toujours égal au nombre des fonctions inconnues. Il n'en est plus de même pour les équations d'ordre supérieur. Pour l'équation de Monge, par exemple, considérée dans le § II, on n'a que trois relations pour déterminer z, p, q, y considérées comme fonctions de x . On sait tout le parti qu'on tire d'ailleurs de ces relations différentielles : toutes les fois qu'elles offrent deux combinaisons intégrables, on peut résoudre l'équation différentielle, ou du moins la ramener à une équation du premier ordre.

Les remarques que nous avons faites indiquent de même, pour les équations du second ordre, la méthode suivante :

On essayera de trouver, en dehors de l'équation proposée, deux combinaisons intégrables des équations en y, z, p, q, r, s, t . Si ces combinaisons existent dans les deux systèmes qu'on obtient en prenant successivement pour $\frac{\partial y}{\partial x}$ les deux racines de l'équation du second degré qui détermine cette dérivée, le problème pourra être considéré comme entièrement résolu; si l'on n'a pas de combinaison intégrable, on aura recours aux équations qui contiennent ces dérivées du troisième ordre. *Alors même que les premières équations ne fourniraient pas de combinaison susceptible d'intégration, le second système formé avec les dérivées prises jusqu'au troisième ordre pourra en donner. Si ce système n'est pas susceptible d'intégration partielle, on ira jusqu'aux dérivées du quatrième ordre, et l'on pourra avoir des combinaisons intégrables, et ainsi de suite.*

IV.

La remarque énoncée à la fin du paragraphe précédent me paraît conduire à une méthode plus générale que celles qui sont habituellement employées. On peut, du reste, présenter cette méthode sous un autre point de vue qui permet d'obtenir plus facilement les systèmes successifs qu'on aura à employer partiellement.

Supposons que l'un quelconque de nos systèmes conduise à deux combinaisons intégrables

$$F(x, y, z, p, q, \dots) = \text{const.}, \quad F_1(x, y, z, p, q, \dots) = \text{const.}$$

Les deux constantes qui figurent dans ces équations *doivent être considérées comme des fonctions inconnues de y_0* . Éliminant y_0 , on est conduit à une équation de la forme

$$F = \text{fonction arbitraire de } F_1.$$

Cette dernière relation peut être évidemment considérée comme une nouvelle équation différentielle compatible avec la proposée, et qui admet en commun avec elle une intégrale *avec une fonction arbitraire*. Nous sommes donc conduits à la solution de la question suivante, qui répond à ce deuxième mode d'exposition :

Trouver une équation différentielle

$$V = a$$

du $n^{\text{ième}}$ ordre, admettant, en commun avec la proposée, une solution contenant au moins une fonction arbitraire.

Pour cela, il suffit de remarquer que la proposée, différenciée $n - 1$ fois, donne n équations contenant les dérivées d'ordre $n + 1$, au nombre de $n + 2$. L'équation $V = a$, différenciée successivement par rapport à x et à y , donne deux équations contenant, elles aussi, les dérivées d'ordre $n + 1$. On a donc en tout $n + 2$ équations contenant linéairement les dérivées d'ordre $n + 1$, et qui déterminent ces $n + 2$ dérivées en fonction des dérivées d'ordre inférieur, si les deux équations différentielles dont on cherche la solution commune sont prises arbitrairement. Mais ici cela ne doit pas être; sans cela les dérivées d'ordre supérieur à $n + 1$ se détermineraient toutes, comme les dérivées d'ordre $n + 1$, en fonction des dérivées d'ordre moindre; puisqu'une fois obtenues toutes les dérivées d'ordre $n + 1$ en fonction des dérivées d'ordre inférieur, on n'aurait qu'à dériver toutes les équations qui donneraient chacune de ces dérivées pour avoir les dérivées d'ordre supérieur, et la solution commune, si elle existait, ne pourrait contenir tout au plus *qu'un nombre limité de constantes arbitraires*. Il faut donc que ces $n + 2$ équations contenant linéairement les $n + 2$ dérivées d'ordre $n + 1$ forment un système indéterminé, ce qui donne deux équations de condition. Comme deux des équations contiennent les dérivées de V , $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$, ..., les relations de condition doivent être considérées comme deux équations aux dérivées partielles du premier ordre auxquelles doit satisfaire la fonction V . Ces équations sont homogènes et du second degré par rapport aux dérivées.

Ce qui précède explique et généralise la remarque par laquelle Bour a établi qu'on peut toujours reconnaître si l'application des méthodes de Monge et d'Ampère pourra réussir. Bour n'avait examiné que le premier cas, celui où l'on suppose que l'équation du premier ordre a une intégrale intermédiaire.

V.

Les deux méthodes que nous venons d'indiquer se retrouvent d'ailleurs dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. La première, fondée sur le changement de variables, est due, comme on sait, à l'illustre Cauchy, qui l'a donnée en 1819. La seconde a été introduite dans la science et développée par Jacobi. C'est en essayant d'établir un lien entre ces deux méthodes que j'ai été amené à l'étude dont les résultats principaux ont été rapidement indiqués ici.

La seconde méthode permet de se rendre compte simplement du nombre des intégrations qui sont nécessaires pour la solution complète du problème; mais il est indispensable qu'avant de traiter ce point, nous entrons dans quelques explications.

Soit une équation différentielle d'ordre n

$$F\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \dots\right) = 0.$$

Désignons par R_n, R_{n-1}, \dots les dérivées du premier membre de l'équation prises par rapport aux dérivées d'ordre $n, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \dots$. Nous appellerons *équation caractéristique* de l'équation différentielle l'équation suivante à une inconnue u :

$$R_n u^n + R_{n-1} u^{n-1} + \dots = 0.$$

Par exemple, pour l'équation différentielle (1), considérée au commencement, cette équation caractéristique serait

$$R u^2 + S u + T = 0.$$

Cette définition une fois comprise, il est facile de compléter un résultat énoncé plus haut.

Pour que l'équation proposée

$$f(x, y, z, p, q, \dots) = 0$$

et l'équation différentielle $V = a$ aient une solution commune avec une

fonction arbitraire, il faut d'abord que l'équation caractéristique de l'équation $V = a$ admette une des racines de l'équation

$$(12) \quad Ru^2 + Su + T = 0.$$

On voit donc que les équations différentielles $V = a$ que nous cherchons se divisent en deux classes, suivant qu'elles appartiennent à l'une ou à l'autre des racines de l'équation précédente. Pour la solution complète du problème, il suffit d'avoir une équation de chaque classe, contenant elle-même une fonction arbitraire. Un nombre quelconque d'équations différentielles appartenant à la même classe ne peut donner l'intégrale complète de notre équation. Il est, du reste, évident que si l'équation (12) est irréductible, si $S^2 - 4RT$ n'est pas carré parfait, il suffira de changer dans une intégrale le signe du radical pour en obtenir une nouvelle.

Ainsi, dans le cas où l'équation caractéristique est irréductible, il suffit, pour la solution complète du problème, que l'un des systèmes à intégrer fournisse deux combinaisons intégrables correspondant à la même racine de l'équation irréductible.

Si l'on n'a pas le nombre voulu de combinaisons intégrables, on n'aura évidemment que des solutions particulières.

Les méthodes précédentes réussiront toujours, il est facile de le démontrer, toutes les fois que les intégrales seront de celles qu'Ampère appelle *intégrales de première espèce*, et qui ne contiennent pas de signe d'intégration.

VI.

En terminant cet exposé sommaire, j'indiquerai quelques équations auxquelles j'ai appliqué la méthode précédente :

1° Il y a d'abord l'équation linéaire de Laplace : les différents cas d'intégrabilité indiqués par Laplace correspondent à nos systèmes successifs d'équations ;

2° L'équation simple

$$s = f(z).$$

En cherchant les cas les plus simples dans lesquels la méthode

réussit, on est conduit à l'équation suivante

$$s = e^{kz},$$

intégrée déjà par M. Liouville (*Journal de Mathématiques*, t. XVIII, p. 71). Cette équation se rencontre dans la théorie des surfaces applicables sur la sphère, et son intégrale peut être obtenue par des considérations géométriques.

3° Considérons l'équation différentielle donnée par Bour des surfaces applicables sur une surface donnée dans laquelle la distance des deux points infiniment voisins est donnée par la formule

$$ds^2 = 4\lambda dx dy.$$

Bour montre que les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface cherchée satisferont à l'équation

$$2(pq - \lambda) \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y} - s^2 + \left(r - p \frac{\partial \log \lambda}{\partial x} \right) \left(t - q \frac{\partial \log \lambda}{\partial y} \right) = 0.$$

Si nous cherchons les conditions les plus simples dans lesquelles la méthode indiquée puisse réussir, nous trouvons qu'en posant

$$a = \frac{\partial \log \lambda}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial \log \lambda}{\partial y}, \quad c = \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial x \partial y},$$

toutes les fois que λ satisfera à l'équation différentielle

$$\lambda^{\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} = \int \frac{\lambda^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{4}}}{4} \left(a - \frac{\partial c}{c \partial x} \right) dy \int \frac{\lambda^{\frac{3}{4}} c^{\frac{1}{4}}}{4} \left(b - \frac{\partial c}{c \partial y} \right) dx,$$

on pourra trouver une série de surfaces applicables sur la proposée, et contenant dans leur expression une fonction arbitraire.

VII.

Les résultats qui précèdent ont été communiqués à l'Académie des Sciences le 28 mars 1870 (*); mais il est facile de déduire des remarques faites plus haut quelques notions nouvelles sur la méthode de

(*) *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences*, t. LXX, p. 675 et 746.

la *variation des constantes*, à laquelle Bour attachait la plus grande importance.

Voici, pour le cas du second ordre, comment on devrait appliquer la méthode de Lagrange : il faudrait d'abord chercher une intégrale particulière contenant cinq constantes, et, remplaçant ensuite les constantes par des fonctions arbitraires, en disposer de manière que les expressions des dérivées jusqu'au second ordre restent toutes les mêmes. On est ainsi ramené à un système d'équations simultanées en général tout aussi difficile à intégrer que l'équation proposée, et par conséquent la méthode n'offre plus les mêmes avantages que pour le premier ordre.

Mais supposons qu'au lieu de connaître l'intégrale finie avec cinq constantes, on ne connaisse qu'une intégrale particulière du premier ordre avec deux constantes

$$(13) \quad \varphi(x, y, z, p, q, a, b) = 0.$$

Cette intégrale satisfaisant, quels que soient a et b , à l'équation proposée, si, entre l'équation (13) et ses deux premières dérivées, on élimine a et b , on devra retrouver l'équation différentielle proposée. Cela posé, supposons que a et b soient, non plus des constantes, mais des fonctions de x, y, z, p, q ; remplaçons b par une fonction arbitraire de a , et déterminons a par l'équation

$$(14) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{db}{da} = 0;$$

a deviendra une fonction de x, y, z, p, q , déterminée par l'équation (14); les deux dérivées de l'équation (13) ne changeront pas de forme, et l'on aura cette fois *une intégrale intermédiaire avec une fonction arbitraire* déduite d'une intégrale ne contenant que deux constantes. Le même théorème s'applique à toutes les équations $V = a$ considérées au § IV.