R. RADAU

Note sur la rotation des corps solides

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1re série, tome 7 (1870), p. 97-98
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1870_1_7__97_0>

NOTE

SUR LA

ROTATION DES CORPS SOLIDES,

PAR M. R. RADAU.

Dans un travail publié en 1869 (*Annales de l'École Normale supérieure*), j'ai critiqué un des résultats que renferme le Mémoire de M. Sylvester *Sur la rotation des corps solides*. Le savant géomètre anglais considère un ellipsoïde matériel dont le centre est fixe, et qui roule sur un plan résistant. J'ai cru comprendre qu'il posait en principe, qu'un pareil ellipsoïde devait tourner sans glisser autour du rayon mené au point de contact. M. Sylvester répond que j'ai mal interprété sa pensée : il a voulu dire que la rugosité du plan empêche le glissement de se produire; c'est ce qu'il indique par les mots *upon an indefinitely rough plane*. Puisqu'il faut entendre de cette manière le texte de M. Sylvester, je reconnais que ma critique est sans objet, et que son calcul est exact. Voici d'ailleurs le raisonnement qu'il emploie. Soit J le couple de la résistance *oblique* du plan (qui, par hypothèse, suffit à empêcher le glissement); soient p_1, q_1, r_1 les trois rotations actuelles de l'ellipsoïde, et λ, μ, ν les cosinus des angles que l'axe de ce couple fait avec les axes principaux, l'on aura

$$\lambda p_1 + \mu q_1 + \nu r_1 = 0,$$

puisque l'axe du couple est perpendiculaire à l'axe instantané.

Les équations du mouvement sont de la forme

$$A_1 \frac{dp_1}{dt} - (B_1 - C_1) q_1 r_1 = J\lambda, \ldots,$$

et donnent l'intégrale

$$A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2 = \text{const.}$$

Pour un corps libre, on aurait

$$A \frac{dp}{dt} - (B - C) qr = 0,$$

d'où

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = H, \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2.$$

En supposant que l'ellipsoïde matériel est semblable à l'ellipsoïde central du corps libre, on peut prendre

$$A_1 = \frac{1}{B} + \frac{1}{C}, \quad B_1 = \frac{1}{C} + \frac{1}{A}, \quad C_1 = \frac{1}{A} + \frac{1}{B},$$

d'où

$$A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2 = \frac{(A + B + C)H - K^2}{ABC}.$$

Soit alors ρ le rapport des temps infiniment petits pendant lesquels les ellipsoïdes tournent d'une même quantité angulaire, on aura

$$\rho^2 = \frac{A_1 p_1^2 + B_1 q_1^2 + C_1 r_1^2}{A_1 p^2 + B_1 q^2 + C_1 r^2} = \text{const.},$$

et l'on pourra faire $\rho = 1$, ce qui revient à confondre les vitesses p, q, r avec p_1, q_1, r_1. On trouve

$$J\lambda = \frac{(B - C)(B + C - A)}{ABC} qr;$$

les résistances normale et tangentielle (P et F), ainsi que le rapport P : F, s'expriment en fonction d'une seule variable, qui est la vitesse totale ω, ou bien le rayon de contact R,

$$F = \frac{2pqr}{ABC} \frac{(A - B)(B - C)(C - A)}{\sqrt{R^2K^2 - H}}, \quad P = \frac{mR^4 + nR^2 + l}{R^2K^2 - H},$$

où m, n, l sont des constantes, et l'on peut chercher le maximum du rapport F : P, ou bien le minimum du coefficient de frottement nécessaire.