ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JULES HAAG

Sur certains réseaux sphériques et les systèmes triples orthogonaux qui en dérivent

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 30 (1913), p. 413-462

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30__413_0>

SUR

CERTAINS RÉSEAUX SPHÉRIQUES

ET

LES SYSTÈMES TRIPLES ORTHOGONAUX QUI EN DÉRIVENT;

PAR M. J. HAAG.

Dans ma Thèse de doctorat [1], j'ai appelé *réseau* (σ) tout réseau sphérique qui peut servir de représentation sphérique commune à toutes les surfaces d'une même famille de Lamé. Je me propose, dans ce qui va suivre, de déterminer quelques-uns de ces réseaux et d'étudier les systèmes triples orthogonaux correspondants.

Les résultats qui vont être développés ont d'ailleurs été résumés dans deux Communications à l'Académie des Sciences [2].

I. — Réseaux (σ) comprenant une famille de cercles.

1. Nous sommes certains à l'avance qu'il existe une catégorie assez étendue de tels réseaux, car la considération des surfaces de Joachimstal engendrées par une tractrice [Th. [3], n° 7] nous prouve

---

(1) *Familles de Lamé composées de surfaces égales. Généralisations; applications* (Gauthier-Villars, 1910). *Voir* aussi *Annales de l'École Normale supérieure*, 1910, p. 257 à 337.

(2) *Comptes rendus*, 21 mars et 2 mai 1910.

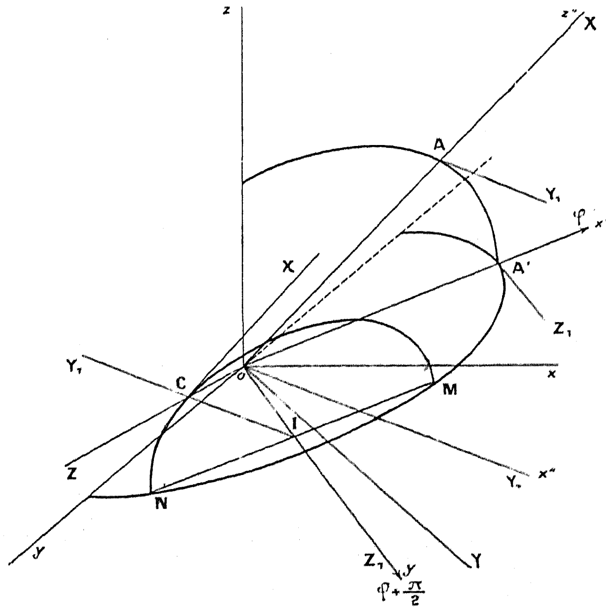
(3) Nous désignerons par cette abréviation notre Thèse déjà citée.

que *les sections de la sphère par les plans tangents d'un cylindre quelconque répondent à la question.*

Nous allons prouver que *c'est là la solution la plus générale.* On peut le faire de diverses manières. Nous allons adopter celle qui nous paraît la plus féconde.

Soit un système triple orthogonal dont les surfaces (ρ_2) admettent pour représentation sphérique un réseau (σ), dont les lignes (v), correspondant sur chaque surface (ρ_2) aux lignes $\rho_1 =$ const., soient des cercles. Considérons le trièdre OXYZ (Th., n° 13), dont les trois axes OX, OY, OZ sont respectivement parallèles aux normales aux sur-

Fig. 1.



faces (ρ), (ρ_1), (ρ_2). Nous savons qu'il dépend seulement de deux paramètres u et v, coordonnées curvilignes de la trace sphérique C de OZ par rapport au réseau (σ); les axes OX et OY étant respectivement parallèles aux tangentes en C aux lignes (v) et (u) de ce dernier.

Ceci étant rappelé, *pour exprimer que les lignes* (v) *de* (σ) *sont des cercles*, nous allons écrire que *la trace* A *de* OX *décrit un grand cercle lorsque* v *demeure constant*, condition évidemment nécessaire et suffisante. Considérons le réseau (r) formé par ces grands cercles et par leurs trajectoires orthogonales, dont nous désignerons respectivement les paramètres par v' et u', le premier étant nécessairement une fonction de v et le second étant supposé égal à l'arc d'un grand cercle (v), de telle sorte que l'élément linéaire relatif à ce réseau soit de la forme

$$d\sigma^2 = du'^2 + C^2\,dv'^2.$$

Soient OY_1 et OZ_1 les parallèles aux tangentes en A aux lignes (v') et (u'), orientées de telle manière que le déplacement élémentaire du point A ait pour projections sur ces axes du' et $C\,dv'$.

En écrivant cette dernière condition et tenant compte des relations classiques entre les rotations d'un trièdre à deux paramètres, on trouve facilement que les rotations élémentaires du trièdre OXY_1Z_1 pour les accroissements du', dv' sont

$$(1) \qquad \frac{\partial C}{\partial u'}\,dv', \qquad -C\,dv', \qquad du'.$$

D'autre part, *si u et v sont les variables canoniques* (Th., n° 16) du réseau (σ) et si l'on désigne par les notations habituelles les rotations de $OXYZ$ relativement à ces variables; si de plus on observe que OXY_1Z_1 peut se déduire de $OXYZ$ par une rotation autour de OX d'un angle que nous appellerons $-\Phi$, on voit que les rotations élémentaires de OXY_1Z_1 pour les accroissements du, dv peuvent s'écrire

$$(2) \quad p_1\,dv - d\Phi, \quad q\,du\cos\Phi - r(du-dv)\sin\Phi, \quad q\,du\sin\Phi + r(du-dv)\cos\Phi.$$

Identifions (1) et (2), en nous souvenant que v est fonction de v' seulement; nous obtenons les six relations

$$(3) \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial\Phi}{\partial u'} = 0, \qquad p_1\dfrac{dv}{dv'} - \dfrac{d\Phi}{dv'} = \dfrac{\partial C}{\partial u'}, \\ q\cos\Phi - r\sin\Phi = 0, \qquad r\sin\Phi\dfrac{dv}{dv'} = -C, \\ (q\sin\Phi + r\cos\Phi)\dfrac{\partial u}{\partial u'} = 1, \qquad (q\sin\Phi + r\cos\Phi)\dfrac{\partial u}{\partial v'} - r\cos\Phi\dfrac{dv}{dv'} = 0. \end{array} \right.$$

La première nous prouve que Φ *ne doit dépendre que de v'*. Si l'on élimine q et r entre les quatre dernières, on trouve

$$\frac{\partial u}{\partial v'} = \cos^2\Phi \frac{dv}{dv'}, \tag{4}$$

$$C\frac{\partial u}{\partial u'} = -\sin\Phi\cos\Phi\frac{dv}{dv'}. \tag{5}$$

L'équation (4) montre que u est de la forme $f(u') + g(v')$; à la suite de quoi l'équation (5) nous apprend que C *est de la forme* $F(u')G(v')$. D'où l'on conclut que *le réseau* (r) *est un réseau de méridiens et parallèles.* Par suite, les cercles (v) du réseau (σ) ont leurs plans parallèles à une même droite et l'on retombe bien sur la solution énoncée au début.

2. Nous allons maintenant nous servir des résultats précédents pour déterminer les conséquences qu'on peut tirer de cette solution.

Prenons pour axe Oz l'axe des méridiens du réseau (r). Soient φ et θ la longitude et la colatitude du point A. Nous prendrons

$$u' = \theta, \qquad v' = \varphi, \qquad C = \sin\theta. \tag{6}$$

Nous savons que $\frac{\partial u}{\partial u'}$ ne doit pas dépendre de v'; comme il en est de même de C, la formule (5) nous apprend que le produit $C\frac{\partial u}{\partial u'}$ doit être constant. Les variables canoniques étant seulement déterminées, pour un réseau (σ) donné, à un facteur constant près, nous pouvons prendre ce produit égal à l'unité; d'où

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{1}{\sin\theta}, \qquad \frac{dv}{d\varphi} = -\frac{1}{\sin\Phi\cos\Phi}. \tag{7}$$

L'équation (4) donne ensuite

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = -\cot\Phi. \tag{8}$$

On tire de là, et en tenant compte de (3),

$$u = \log\tang\frac{\theta}{2} - \int\cot\Phi\, d\varphi, \qquad v = -\int\frac{d\varphi}{\sin\Phi\cos\Phi}; \tag{9}$$

$$p_1 = \frac{d\Phi}{dv} - \sin\Phi\cos\Phi\cos\theta, \qquad q = \sin\Phi\sin\theta, \qquad r = -r_1 = \cos\Phi\sin\theta. \tag{10}$$

Quant à Φ, *c'est une fonction arbitraire de* φ, ce qui permet de prévoir qu'on peut choisir arbitrairement les plans des cercles (φ) du réseau (σ), pourvu qu'ils soient parallèles à Oz. C'est du reste ce que nous allons voir de manière précise en cherchant à construire ces cercles.

Construisons d'abord le trièdre OXY_1Z_1. A cet effet, nous faisons tourner $Oxyz$ de l'angle φ autour de Oz, ce qui nous donne le trièdre $Ox'y'z$ (*fig.* 1). Une rotation de l'angle θ autour de Oy' nous conduit ensuite au trièdre $Ox''y'z''$. Le trièdre OXY_1Z_1 coïncide avec $Oz''x''y'$. En le faisant tourner de Φ autour de OX, nous obtenons OXYZ.

D'après cela, il est manifeste que *si* θ *seul varie, le point* C *décrit un cercle de plan parallèle à* Oz, *de rayon* $\sin\Phi$ *et dont le centre* I *a pour coordonnées polaires dans* xOy $\left(\cos\Phi,\ \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$. De plus, le point C se déduit à chaque instant du point N (*fig.* 1) par une rotation de l'angle θ autour de Oy'.

Ceci nous montre de façon claire que, si Φ est une fonction arbitraire de φ, le plan du cercle pourra envelopper un cylindre quelconque parallèle à Oz.

3. Il est utile d'introduire les représentations sphériques des surfaces (ρ_1) et (ρ) du système triple orthogonal.

Le point B, trace de OY, se déduit de C par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ autour de OX. D'où il suit que *le réseau représentation sphérique des surfaces* (ρ_1) *se déduit de* (σ) *par le simple changement de* Φ *en* $\Phi - \frac{\pi}{2}$. Il se compose des cercles polaires des précédents et de leurs trajectoires orthogonales.

Quant à la représentation sphérique des surfaces (ρ), c'est un réseau (σ') caractérisé par la propriété suivante : *Le méridien d'angle polaire* φ *coupe toutes les lignes de la première famille sous l'angle* Φ *et toutes celles de la seconde famille sous l'angle* $\Phi + \frac{\pi}{2}$. Cela résulte, en effet, de ce que les tangentes en A aux courbes $\rho_2 =$ const. et $\rho_1 =$ const. sont respectivement parallèles à OY et à OZ.

Si l'on fait une projection stéréographique sur xOy, *le réseau* (σ') *devient un réseau plan orthogonal* (σ'') *composé, dans chaque famille, de courbes homothétiques par rapport au point* O.

En effet, l'angle φ est alors l'angle polaire du point a, projection de A, et Φ désigne l'angle dont il faut faire tourner son rayon vecteur pour l'amener suivant la tangente à la courbe de la première famille qui passe par ce point. L'angle Φ étant une fonction arbitraire de φ, le réseau (σ'') est le réseau orthogonal le plus général du plan des xy qui soit composé de courbes homothétiques par rapport à O.

4. *Étude des systèmes triples orthogonaux correspondants.* — Nous allons maintenant nous proposer d'étudier les systèmes triples orthogonaux, que nous désignerons sous le nom général de *systèmes* (Σ), dont les surfaces (ρ_2) admettent toutes pour représentation sphérique le réseau (σ) précédemment déterminé.

Tout d'abord, on calcule sans difficulté le Tableau des cosinus

$$
(11) \quad \left\{
\begin{aligned}
&X = \sin\theta\cos\varphi, \qquad Y = \sin\theta\sin\varphi, \qquad Z = \cos\theta,\\
&X_1 = \cos\theta\cos\varphi\cos\Phi - \sin\varphi\sin\Phi,\\
&Y_1 = \cos\theta\sin\varphi\cos\Phi + \cos\varphi\sin\Phi,\\
&Z_1 = -\sin\theta\cos\Phi;\\
&X_2 = -\cos\theta\cos\varphi\sin\Phi - \sin\varphi\cos\Phi,\\
&Y_2 = -\cos\theta\sin\varphi\sin\Phi + \cos\varphi\cos\Phi,\\
&Z_2 = \sin\theta\sin\Phi.
\end{aligned}
\right.
$$

On a ensuite [Th., n° 16, formules (29)]

$$
(12) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\lambda = \beta_{12} = \beta_{21} = \sin\Phi\cos\Phi\left(\cos\theta + \frac{d\Phi}{d\varphi}\right),\\
&\lambda_1 = \beta_{02} = \beta_{20} = \sin\Phi\sin\theta,\\
&\lambda_2 = \beta_{10} = \beta_{01} = -\cos\Phi\sin\theta.
\end{aligned}
\right.
$$

Signalons les égalités suivantes, dont nous aurons à faire usage,

$$(13) \qquad \lambda_1 = Z_2, \qquad \lambda_2 = Z_1.$$

En portant ces valeurs de λ_1 et λ_2 dans le système classique

$$(14) \qquad \frac{\partial U_i}{\partial \rho_i} = -\lambda_l U_k - \lambda_k U_l, \qquad \frac{\partial U_i}{\partial \rho_k} = \lambda_l U_k \qquad (i \neq k \neq l),$$

qui doivent vérifier les cosinus, on obtient les relations simples :

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial X}{\partial \rho} = ZX, & \dfrac{\partial X}{\partial \rho_1} = Z_1 X_1, & \dfrac{\partial X}{\partial \rho_2} = Z_2 X_2; \\ \dfrac{\partial Y}{\partial \rho} = ZY, & \dfrac{\partial Y}{\partial \rho_1} = Z_1 Y_1, & \dfrac{\partial Y}{\partial \rho_2} = Z_2 Y_2; \\ \dfrac{\partial Z}{\partial \rho} = Z^2 - 1, & \dfrac{\partial Z}{\partial \rho_1} = Z_1^2, & \dfrac{\partial Z}{\partial \rho_2} = Z_2^2; \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial \rho} = Z_1 X, & \dfrac{\partial Y_1}{\partial \rho} = Z_1 Y, & \dfrac{\partial Z_1}{\partial \rho} = Z_1 Z; \\ \dfrac{\partial X_2}{\partial \rho} = Z_2 X, & \dfrac{\partial Y_2}{\partial \rho} = Z_2 Y, & \dfrac{\partial Z_2}{\partial \rho} = Z_2 Z. \end{array}\right.$$

Rappelons enfin que les variables canoniques u et v sont liées à ρ, ρ_1, ρ_2 par les formules (Th., n° 16)

$$(16)\qquad u = \rho - \rho_2, \qquad v = \rho_1 - \rho_2.$$

5. Cela posé, plusieurs méthodes se trouvent en présence pour la recherche des systèmes (Σ). Celle qui vient la première à l'esprit consiste à tenter l'intégration du système

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial P}{\partial \rho_1} = Z_1 P_1, & \dfrac{\partial P_1}{\partial \rho_2} = \lambda P_2, & \dfrac{\partial P_2}{\partial \rho} = Z_2 P, \\ \dfrac{\partial P}{\partial \rho_2} = Z_2 P_2, & \dfrac{\partial P_2}{\partial \rho} = Z_1 P, & \dfrac{\partial P_2}{\partial \rho_1} = \lambda P_1, \end{array}\right.$$

que doivent vérifier à la fois les P_i et les H_i (Th., n° 12). Mais on n'arrive à aucun résultat simple.

On pourrait aussi appliquer à l'un des systèmes (T) (Th., n° 17), lesquels s'obtiennent par quadratures, la méthode générale de recherche des systèmes parallèles basée sur l'intégration d'un système de trois équations de Laplace (¹). Les calculs sont encore compliqués.

Un troisième procédé consisterait à remarquer que les trajectoires orthogonales des surfaces (ρ) sont planes, pour appliquer ensuite la méthode de M. Darboux pour la détermination de tous les systèmes triples orthogonaux comprenant une famille à trajectoires planes

(¹) G. Darboux, *Théorie des surfaces*, nᵒˢ 1047 à 1053.

(*Théorie des surfaces*, t. IV, n° 1060). On se ramènerait à la recherche des surfaces admettant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure le réseau (σ'), (n° 3).

Mais nous aurons des calculs plus simples et serons ramenés à un problème équivalent au précédent, à savoir l'intégration de l'équation de Laplace relative au réseau plan (σ''), en procédant de la manière suivante.

On peut toujours trouver, sans aucune quadrature, une infinité de systèmes (Σ) *dépendant d'une fonction arbitraire de la variable* ρ. Ces systèmes, que nous appellerons systèmes (Σ_0), *admettent comme surfaces* (ρ) *une famille arbitraire de sphères ayant leurs centres sur* O*z* [1]. Cette affirmation se justifie en remarquant qu'il suffit, pour avoir une surface (ρ_2) par exemple, d'associer les trajectoires orthogonales [2] de la famille de sphères de façon qu'elles s'appuient toutes sur une même courbe de la première famille du réseau (σ'), en supposant, ce qui est évidemment permis, que la sphère de centre O et de rayon 1 fait partie des surfaces (ρ). On constate aisément que les surfaces de Joachimstal ainsi obtenues admettent toutes pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure le réseau (σ).

Au reste, nous allons vérifier ceci analytiquement. Soient h et r la cote du centre et le rayon de la sphère (ρ). Les équations du système sont nécessairement

$$x_0 = r\mathrm{X}, \qquad y_0 = r\mathrm{Y}, \qquad z_0 = h + r\mathrm{Z}$$

et les P_i sont (Th., n° 12) :

$$\mathrm{P}^0 = r + h\mathrm{Z}, \qquad \mathrm{P}_1^0 = h\mathrm{Z}_1, \qquad \mathrm{P}_2^0 = h\mathrm{Z}_2.$$

Or, si l'on porte ces valeurs dans le système (17) et si l'on tient compte de ce que les Z_i vérifient ce même système, on trouve l'unique condition

$$r = \frac{dh}{d\rho}.$$

---

(1) En des points variables.

(2) On sait d'ailleurs (*voir* par exemple Darboux, *Théorie des surfaces*, n°s 92 à 94) que ces trajectoires se calculent sans quadratures, si l'on s'est donné la famille de sphères ρ en se fixant l'une d'elles.

Nous pouvons donc choisir arbitrairement h en fonction de ρ [1], pourvu que cette fonction ne se réduise pas à une constante. Nous avons alors

$$(18) \qquad x_0 = h'X, \qquad y_0 = h'Y, \qquad z_0 = h + h'Z$$

et

$$(19) \qquad P^0 = h' + hZ, \qquad P_1^0 = hZ_1, \qquad P_2^0 = hZ_2.$$

Ceci étant, considérons le système particulier (Σ_1) obtenu en prenant

$$h = e^\rho.$$

Les sphères (ρ) sont dans ce cas tangentes en O au plan des xy et leurs trajectoires orthogonales sont les cercles tangents en O à Oz. Effectuons sur ce système une inversion de centre O et de puissance égale à 2 par exemple. Nous obtenons *un nouveau système* (Σ_1') *pour lequel les surfaces* (ρ) *sont des plans parallèles à* Oxy, *tandis que les surfaces* (ρ_1) *et* (ρ_2) *sont les cylindres parallèles à* Oz *et ayant pour bases les courbes du réseau* (σ''). Or, on sait [2] que *la recherche des systèmes parallèles à* (Σ_1) *équivaut à la recherche des systèmes parallèles à* (Σ_1'), *laquelle revient à l'intégration de l'équation de Laplace relative au réseau plan* (σ'') [3].

6. Nous allons voir que cette méthode, loin d'être purement théorique, conduit au contraire à des calculs fort simples.

Remarquons tout d'abord que les H_i du système (Σ_1) sont égaux à ses P_i, car nous avons affaire à un système (H), dont le nombre σ est égal à l'unité (Th., n° 17). Nous avons donc, en appliquant les formules (19),

$$(20) \qquad H^1 = e^\rho(1 + Z), \qquad H_1^1 = e^\rho Z_1, \qquad H_2^1 = c^\rho Z_2.$$

---

[1] Ou, ce qui revient au même, r en fonction de h.

[2] DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. IV, n^{os} 1057 et 1058.

[3] Il revient au même de chercher les surfaces qui possèdent un réseau conjugué se projetant sur xOy suivant (σ'').

On en déduit les H_i du système (Σ'_1) par l'emploi de la formule

$$H'_i = \frac{2H_i}{x^2+y^2+z^2},$$

qui donne ici

$$(21) \qquad H'^1 = e^{-\rho}, \qquad H'^1_1 = e^{-\rho}\frac{Z_1}{1+Z}, \qquad H'^1_2 = e^{-\rho}\frac{Z_2}{1+Z}$$

ou

$$(22) \quad H'^1 = e^{-\rho}, \qquad H'^1_1 = -\cos\Phi\, e^{-\rho_1-\int \operatorname{tang}\Phi\, d\varphi}, \qquad H'^1_2 = \sin\Phi\, e^{-\rho_1-\int \operatorname{tang}\Phi\, d\varphi}.$$

Soit maintenant Ω la solution la plus générale commune aux trois équations de Laplace que vérifient x_1, y_1, z_1. Les coordonnées relatives au système (Σ) cherché sont données par (¹)

$$(23) \qquad x = \Delta(x_1, \Omega), \qquad y = \Delta(y_1, \Omega), \qquad z = \Delta(z_1, \Omega),$$

en posant

$$(24) \qquad \Delta(\theta, \theta_1) = \sum_i \left(\frac{1}{H_i^1}\right)^2 \frac{\partial\theta}{\partial\rho_i}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_i},$$

c'est-à-dire

$$(25) \quad \Delta(\theta, \theta_1) = e^{-2\rho}\left[\frac{1}{(1+Z)^2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho} + \frac{1}{Z_1^2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_1} + \frac{1}{Z_2^2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_2}\right].$$

De plus, on a

$$(26) \qquad H_i = H_i^1 \frac{\dfrac{\partial\Delta\Omega}{\partial\rho_i}}{2\dfrac{\partial\Omega}{\partial\rho_i}}.$$

Or, si Ω' désigne la solution générale des équations de Laplace que vérifient x'_1, y'_1, z'_1, on peut prendre (²)

$$\Omega = \frac{\Omega'}{2}(x_1^2+y_1^2+z_1^2),$$

c'est-à-dire

$$(27) \qquad \Omega = \Omega' e^{2\rho}(1+Z).$$

(¹) DARBOUX, *loc. cit.*, n° 1055.
(²) DARBOUX, *loc. cit.*, n° 1057.

Mais, les équations de Laplace relatives au système (Σ'_1) doivent être *a priori* de la forme

$$(28)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\rho_1} = 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\rho\,\partial\rho_2} = 0,$$

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} + a\frac{\partial u}{\partial\rho_1} + b\frac{\partial u}{\partial\rho_2} = 0,$$

l'équation (29) étant l'équation de Laplace relative au réseau plan (σ''), de sorte que a et b ne doivent dépendre que de ρ_1 et ρ_2. Du reste, rien n'est plus facile que de vérifier tout cela, si l'on se souvient que les équations de Laplace relatives à tout système triple orthogonal peuvent s'écrire (1)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho_i\,\partial\rho_k} - \frac{1}{H_i}\frac{\partial H_i}{\partial\rho_k}\frac{\partial u}{\partial\rho_i} - \frac{1}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial\rho_i}\frac{\partial u}{\partial\rho_k} = 0.$$

En remplaçant les H par les H'^1 que donnent les formules (22), on retrouve d'abord les équations (28), puis les coefficients a et b de l'équation (29), à savoir :

$$(30)\qquad a = (\Phi' + 1)\sin^2\Phi, \qquad b = (\Phi' + 1)\cos^2\Phi,$$

en désignant par Φ' la dérivée $\dfrac{d\Phi}{d\varphi}$.

Si ω désigne l'intégrale générale de (29), il est aisé de montrer qu'on a

$$\Omega' = R + \omega,$$

en appelant R une fonction arbitraire de ρ. La formule (27) nous donne ensuite

$$\Omega = e^{2\rho}(1 + Z)(R + \omega).$$

Si l'on établit la formule préliminaire

$$\Delta(\theta, \Omega) = (R + \omega)\,\delta\theta + \frac{R'}{Z + 1}\frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \frac{1 + Z}{Z_1^2}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + \frac{1 + Z}{Z_2^2}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_2},$$

où l'on a posé

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial\rho} + \frac{\partial\theta}{\partial\rho_1} + \frac{\partial\theta}{\partial\rho_2};$$

(1) DARBOUX, *loc. cit.*, n° 1047.

si l'on remarque que les δX_i, δY_i, δZ_i sont tous nuls, et si l'on utilise enfin les relations (15), on trouve sans peine que les formules (23) deviennent

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} x &= e^\rho\left[X(R'+R+\omega)+(1+Z)\left(\frac{X_1}{Z_1}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}+\frac{X_2}{Z_2}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}\right)\right],\\ y &= e^\rho\left[Y(R'+R+\omega)+(1+Z)\left(\frac{Y_1}{Z_1}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}+\frac{Y_2}{Z_2}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}\right)\right],\\ z &= e^\rho\left[R'Z+(1+Z)\left(R+\omega+\frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

7. Si l'on pose

$$h = e^\rho.R,$$

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} x_2 &= e^\rho\left[\omega X+(1+Z)\left(\frac{X_1}{Z_1}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}+\frac{X_2}{Z_2}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}\right)\right],\\ y_2 &= e^\rho\left[\omega Y+(1+Z)\left(\frac{Y_1}{Z_1}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}+\frac{Y_2}{Z_2}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}\right)\right],\\ z_2 &= e^\rho(1+Z)\left(\omega+\frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}+\frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}\right), \end{aligned}\right.$$

on a

$$(33)\qquad x = x_0+x_2,\qquad y=y_0+y_2,\qquad z=z_0+z_2.$$

Donc, *on aura le système* (Σ) *le plus général par composition géométrique du système* (Σ_0) *le plus général et du système* (Σ_2) *qui est défini par les équations* (32).

Ici se pose la question de savoir s'il existe une propriété géométrique simple caractérisant les systèmes du type (Σ_2). Nous allons montrer que *le système* (Σ_2) *est, parmi les systèmes* (Σ), *le système cyclique le plus général.*

A cet effet, nous allons chercher les équations de la courbe (ρ_1, ρ_2) de (Σ) dans son plan. *A priori*, ce plan est perpendiculaire à la droite du plan des xy d'angle polaire $\varphi+\frac{\pi}{2}$. Faisons donc tourner les axes de l'angle φ. Si ξ, η, z désignent les nouvelles coordonnées, nous avons

$$\xi = x\cos\varphi + y\sin\varphi,\qquad \eta = -x\sin\varphi+y\cos\varphi.$$

On trouve facilement, en tenant compte de (9) [1] et (11),

$$(34)\qquad \begin{cases} \xi = h' \sin\theta + A\omega - A\omega_1 \cos\theta, \\ \eta = A\left(-\dfrac{\partial\omega}{\partial\rho_1}\operatorname{tang}\Phi + \dfrac{\partial\omega}{\partial\rho_2}\cot\Phi\right), \\ z = h + h'\cos\theta + A\omega_1 \sin\theta, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(35)\qquad A = e^{\frac{\rho_1+\rho_2}{2} - \int \cot 2\Phi \, d\varphi},$$

$$(36)\qquad \omega_1 = \omega + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_1} + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}.$$

La deuxième équation vérifie que la courbe est plane et nous donne son plan. La première et la troisième nous donnent les équations de la projection de la courbe sur le nouveau plan des zx. Elles montrent que cette *projection résulte de la composition géométrique de la courbe* (ρ_1, ρ_2) *du système* (Σ_0) *et d'un cercle de rayon* $A\omega_1$ *et dont le centre, situé sur* $O\xi$, *a pour abscisse sur cet axe* $A\omega$.

Ceci nous montre déjà que tous les systèmes (Σ_2) sont des systèmes cycliques. Je dis que, réciproquement, tout système (Σ) qui est un système cyclique, rentre dans la famille des systèmes (Σ_2). En effet, il est à peu près évident que, pour que la courbe (ρ_1, ρ_2) de (Σ) soit un cercle, il faut et il suffit que la courbe (ρ_1, ρ_2) de (Σ_0) soit aussi un cercle, ce qui exige que les sphères (ρ) de (Σ_0) passent par un cercle fixe, que l'on peut, à une translation près, supposer dans xOy.

On voit aisément que h doit alors être de la forme

$$h = m\, e^{-\rho} + n\, e^{\rho},$$

m, n désignant des constantes. Or, si l'on porte cette valeur dans (34), on obtient le même résultat qu'en y remplaçant h par zéro, ω par $\omega' = \omega - \frac{m}{A^2} + n$, et ω_1 par $\omega'_1 = \omega_1 + \frac{m}{A^2} + n$. D'autre part, il est facile de vérifier que ω' satisfait à l'équation (29) et que ω'_1 est égal

[1] En combinant ces deux équations, on obtient l'équation plus symétrique

$$e^{\rho} = A \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}.$$

à $\omega' + \frac{\partial \omega'}{\partial \rho_1} + \frac{\partial \omega'}{\partial \rho_2}$. De tout cela, il résulte que les systèmes (Σ) qui correspondent à la valeur précédente de h sont tous des systèmes (Σ_2), ce qui démontre notre réciproque.

Finalement, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Le système (Σ) *le plus général peut s'obtenir par composition géométrique d'un système* (Σ_0) *et d'un système cyclique.*

8. Ce théorème aurait pu être prévu de la manière suivante. Considérons d'une façon générale un système triple orthogonal quelconque (S_1), dont les surfaces (ρ) aient des trajectoires orthogonales planes. Appelons (S) tous les systèmes parallèles à (S_1). On sait, d'après un théorème de Ribaucour [1], que si l'on considère l'un d'eux, les cercles osculateurs des trajectoires planes en tous les points où ces trajectoires rencontrent une surface (ρ) déterminée, donnent naissance à un système cyclique (S_2) parallèle à (S). Prenons la différence géométrique de (S) et (S_2); nous obtenons un système (S_0) parallèle aux précédents, mais pour lequel *les plans des trajectoires planes passent par un point fixe* O. *On aura donc le système* (S) *le plus général par composition géométrique d'un système* (S_0) *et d'un système cyclique.*

Si l'on revient au cas particulier actuel, on voit de suite que les systèmes (S_0) coïncident nécessairement avec nos systèmes (Σ_0); d'où le théorème énoncé tout à l'heure.

Le raisonnement précédent nous montre qu'il existe une infinité de manières d'obtenir un système (S) donné par composition géométrique d'un système (S_0) et d'un système (S_2); il suffit en effet de faire varier le paramètre de la surface (ρ) particulière considérée tout à l'heure. Supposons qu'on ait par exemple

$$(S) = (S_0) + (S_2) = (S'_0) + (S'_2);$$

d'où

$$(S_0) - (S'_0) = (S'_2) - (S_2).$$

La différence géométrique de deux systèmes cycliques parallèles

---

[1] DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. IV, n° 1060.

étant évidemment un système cyclique parallèle aux deux premiers, il suit de là que *le couple* (S'_0), (S'_2) *le plus général qui ait pour somme géométrique un système* (S) *donné se déduit d'un couple* (S_0), (S_2) *particulier en ajoutant à* (S_0) *et retranchant de* (S_2) *le système le plus général qui soit à la fois* (S_0) *et système cyclique.*

Il serait peut-être intéressant de poursuivre les conséquences qui peuvent découler des considérations générales qui précèdent. Mais cela nous entraînerait loin de notre sujet, et nous nous bornerons à les appliquer au cas particulier qui nous occupait précédemment.

9. Nous avons vu à la page 425 que le système (Σ_0) le plus général qui soit cyclique est obtenu, à une translation près, en prenant

$$h = m e^{-\rho} + n e^{\rho}.$$

En l'ajoutant au système (Σ_2), nous avons obtenu un système (Σ'_2) dont les fonctions ω et ω_1 sont :

$$\omega' \equiv \omega - \frac{m}{A^2} + n, \qquad \omega'_1 = \omega_1 + \frac{m}{A^2} + n.$$

Il résulte de là qu'*on obtient tous les groupes* (H, Ω) *qui donnent le même système* (Σ) *qu'un groupe* (h, ω) *donné par les formules*

$$(37)\quad H = h - m e^{-\rho} - n e^{\rho}, \qquad \Omega = \omega - \frac{m}{A^2} + n, \qquad \Omega_1 = \omega_1 + \frac{m}{A^2} + n,$$

où m, n *sont deux constantes arbitraires.*

D'après cela, il est facile de trouver quel est, parmi les systèmes (Σ_2), le système cyclique qui provient de (Σ) par l'application du théorème de Ribaucour à la surface (ρ) de paramètre ρ^0. Différentions la première et la troisième équations (34), en y regardant ρ comme seul variable; il vient, en remarquant que, dans ces conditions, $d\rho = \frac{d\theta}{\sin\theta}$,

$$d\xi = \left(A\omega_1 + \frac{h'' + h'\cos\theta}{\sin\theta}\right)\sin\theta\, d\theta,$$

$$dz = \left(A\omega_1 + \frac{h'' + h'\cos\theta}{\sin\theta}\right)\cos\theta\, d\theta.$$

Ces formules montrent que le rayon de courbure de la courbe (ρ_1, ρ_2), ou (K), au point M de paramètre ρ, est mesuré, sur la demi-droite d'angle polaire $-\theta$ (relativement à $O\xi$), par le nombre $R = A\omega_1 + \frac{h'' + h'\cos\theta}{\sin\theta}$. D'autre part, si l'on considère le système cyclique (Σ_2) qui correspond à la fonction ω, le rayon de courbure, au point m de paramètre ρ, du cercle (ρ_1, ρ_2) de ce système, est mesuré sur la même demi-droite par $A\omega_1$. Pour que ce cercle coïncide avec le cercle osculateur à (K) en M, il faut donc déjà qu'on ait

$$h'' + h'\cos\theta = 0.$$

Mais on veut que ceci ait lieu pour une valeur donnée ρ^0 de ρ et pour toutes les valeurs de ρ_1 et ρ_2 et, par suite, de θ; ceci exige que h' et h'' s'annulent pour $\rho = \rho^0$. Cette condition étant remplie, il faut encore (et c'est maintenant suffisant) que m coïncide avec M; et, pour cela, il faut et suffit, d'après (31), que h soit également nul pour $\rho = \rho_0$.

En résumé, *pour que le système* $(\Sigma) = (\Sigma_0) + (\Sigma_2)$ *admette* (Σ_2) *pour système cyclique de Ribaucour relativement à la surface* (ρ^0), *il faut et suffit que la fonction h qui donne naissance à* (Σ_0) *s'annule pour* $\rho = \rho^0$, *ainsi que ses deux premières dérivées* (¹).

Servons-nous maintenant des formules (37) et déterminons m, n, pour que H, H′, H″ soient nuls pour $\rho = \rho^0$. On trouve de suite

$$m = e^{\rho_0}\frac{h''_0 - h'_0}{2}, \qquad n = e^{-\rho_0}\frac{h''_0 + h'_0}{2}, \tag{38}$$

avec la condition $h_0 = h''_0$, qu'on peut toujours supposer remplie, grâce à une translation convenable suivant Oz imprimée au système (Σ).

D'ou la règle suivante :

Pour avoir le système cyclique de Ribaucour relatif à la surface (ρ^0) *du système* (Σ) *donné par les fonctions* (h, ω), *on calcule les cons-*

(¹) On peut dire aussi que la sphère (ρ_0) de (Σ_0) doit se réduire au point O et avoir le plan xOy pour plan radical avec la sphère infiniment voisine; ou encore que les trajectoires orthogonales des sphères (ρ) doivent toutes admettre le point O pour point de rebroussement.

tantes m, n *par les formules* (38); *puis on remplace, dans les équations* (32), *la fonction* ω *par* $\omega - \frac{m}{A^2} + n$; *le système* (Σ_2) *ainsi obtenu est le système cyclique cherché.*

10. Revenons au système (Σ) le plus général pour calculer ses P_i et ses H_i. Les premiers se calculent aisément, soit en partant des équations (31), soit en utilisant la formule générale

$$P_i = \frac{1}{H_i^2}\frac{\partial\Omega}{\partial\rho_i}.$$

On trouve ainsi

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= h' + hZ + e^\rho\omega(1+Z),\\ P_1 &= hZ_1 + e^\rho\left(\omega Z_1 + \frac{1+Z_1}{Z_1}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_1}\right),\\ P_2 &= hZ_2 + e^\rho\left(\omega Z_2 + \frac{1+Z_2}{Z_2}\frac{\partial\omega}{\partial\rho_2}\right).\end{aligned}\right.$$

On a ensuite les H_i par la formule (Th., n° 17)

$$H_i = \delta P_i,$$

δ désignant le symbole opératoire $\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial}{\partial\rho_1} + \frac{\partial}{\partial\rho_2}$. Si l'on remarque que $\delta Z = \delta Z_1 = \delta Z_2 = 0$, puisque Z, Z_1, Z_2 ne dépendent que de $\rho - \rho_2$ et $\rho_1 - \rho_2$, on trouve immédiatement

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned} H &= h'' + h'Z + e^\rho\omega_1(1+Z),\\ H_1 &= h'Z_1 + e^\rho\left(\omega_1 Z_1 + \frac{1+Z}{Z_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial\rho_1}\right),\\ H_2 &= h'Z_2 + e^\rho\left(\omega_1 Z_2 + \frac{1+Z}{Z_2}\frac{\partial\omega_1}{\partial\rho_2}\right).\end{aligned}\right.$$

L'un ou l'autre de ces deux groupes de formules donne la solution générale du système (17), si h y désigne une fonction arbitraire de ρ et ω l'intégrale générale de l'équation (29) [1]. Il suit de là que *si* ω

[1] On peut d'ailleurs, par un calcul facile, vérifier que si $P = e^\rho\omega(1+Z)$ satisfait à

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} - \frac{\lambda\lambda_2}{\lambda_1}\frac{\partial P}{\partial\rho_2} - \frac{\lambda\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\partial P}{\partial\rho_1} = 0;$$

conséquence de (17), ω doit satisfaire à (29). Le calcul est simplifié si l'on observe que $1+Z$ vérifie aussi l'équation ci-dessus.

vérifie (29), *il en est de même de* ω_1. C'est ce qu'il est aisé de vérifier directement en soumettant le premier membre de (29) au symbole opératoire $\frac{\partial}{\partial\rho_1} + \frac{\partial}{\partial\rho_2}$ et remarquant que, dans ce calcul, on peut considérer a et b comme des constantes, parce qu'ils ne dépendent que de $v = \rho_1 - \rho_2$. On s'aperçoit ainsi que *la propriété est vraie quand bien même a et b seraient deux fonctions quelconques de* v, au lieu d'être données par (30).

Réciproquement, donnons-nous ω_1, solution de (29), et proposons-nous de chercher toutes les solutions ω de la même équation qui satisfont en même temps à l'équation (36), ou, plus généralement, à la suivante :

$$(41) \qquad \frac{\partial\omega}{\partial\rho_1} + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_2} + \varepsilon\omega = \omega_1,$$

où ε désigne une constante quelconque.

L'équation (41) s'intègre par quadrature, en substituant la variable v à la variable ρ_2. Si ω_0 en désigne une solution particulière, les autres sont données par la formule

$$(42) \qquad \omega = \omega_0 + e^{-\varepsilon\rho_1} f(v),$$

en appelant $f(v)$ une fonction arbitraire de v. Portant cette valeur dans (29), il vient

$$(43) \qquad f'' + f'(b - a - \varepsilon) + \varepsilon a f = e^{\varepsilon\rho_1}\left(\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2} + a\frac{\partial\omega_0}{\partial\rho_1} + b\frac{\partial\omega_0}{\partial\rho_2}\right).$$

Pour que le problème soit possible, il faut et suffit que le second membre ne dépende que de v. Or, cette condition est satisfaite identiquement, comme on le constate en soumettant le second membre au symbole opératoire $\frac{\partial}{\partial\rho_1} + \frac{\partial}{\partial\rho_2}$, et tenant compte de (41), sans oublier que ω_1 vérifie (29) par hypothèse.

On voit qu'à des quadratures près on est ramené à intégrer l'équation différentielle linéaire

$$(44) \qquad f'' + f'(b - a - \varepsilon) + \varepsilon a f = 0.$$

Si les coefficients a et b sont quelconques, cette équation sera la plus générale et ne saura être intégrée. Mais, dans certains cas, il n'en sera pas de même et l'on voit comment *de toute solution de* (29) *on pourra en déduire une infinité d'autres dépendant de trois constantes arbitraires.* Par l'application répétée des opérations précédentes, *on pourra obtenir des solutions dépendant d'un nombre de constantes arbitraires aussi grand qu'on le voudra.* En particulier, on pourra toujours partir de la solution évidente $\omega = 0$.

Observons que l'équation (44) prend une forme plus symétrique par le changement de variable

$$f = e^{\frac{\varepsilon v}{2}} g.$$

L'équation en g s'écrit

$$g'' + (b-a)g' + \frac{\varepsilon}{2}\left(a + b - \frac{\varepsilon}{2}\right)g = 0. \tag{45}$$

On pourrait en particulier appliquer les considérations précédentes à l'équation classique d'Euler et de Poisson ([1]). Nous ne le ferons pas, car cela nous entraînerait hors de notre sujet.

11. Revenons au *cas où les coefficients a et b sont donnés par les formules* (30), cas qui est caractérisé, comme on le constate facilement, par la relation

$$\frac{a'}{a} - \frac{b'}{b} + 2(a + b - 1) = 0. \tag{46}$$

Nous sommes certains a priori *de savoir intégrer l'équation* (44) *ou* (45), *au moins pour* $\varepsilon = 1$. En effet, la recherche des fonctions ω satisfaisant à la fois à (29) et (36) revient au calcul des systèmes (Σ_2) dont les H_i sont donnés par (40), où l'on fait $h = 0$. Or, connaissant les H_i, on a x_2, y_2, z_2 par des quadratures, avec trois constantes additives arbitraires α, β, γ. La constante γ devra d'ailleurs être déterminée par la condition que xOy devra être un plan de symétrie du système ([2]), ce qui réduira à deux le nombre des constantes arbitraires.

([1]) *Voir* par exemple DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 55 et suiv.

([2]) On a vu, en effet (n° 7), que les cercles (ρ_1, ρ_2) ont leurs centres dans xOy.

La manière la plus simple d'obtenir ensuite ω est de tirer cette fonction de la valeur de P, qui est de la forme

$$\Theta_1 + \alpha X + \beta Y + \gamma Z,$$

Θ_1 désignant une fonction déterminée de ρ, ρ_1, ρ_2. En se servant de la première équation (39), où l'on annule h, on a

$$\omega = \frac{e^{-\rho}(\Theta_1 + \gamma Z)}{1 + Z} + \frac{\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi}{A}.$$

On déterminera γ pour que le premier terme soit indépendant de ρ et l'on aura pour ω une expression générale de la forme

$$\omega = \Theta + \frac{\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi}{A}. \tag{47}$$

Il résulte de là que l'intégrale générale de l'équation (45) par exemple est, *a priori*, pour $\varepsilon = 1$,

$$g = e^{\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}} \frac{\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi}{A} = e^{\int \cot 2\Phi \, d\varphi} (\alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi).$$

Ceci nous suggère, pour le cas où ε est quelconque, le changement de variable

$$g = e^{\int \cot 2\Phi \, d\varphi} \lambda, \tag{48}$$

φ devenant en outre la variable indépendante. Nous sommes sûrs, *a priori*, de l'identité, d'ailleurs facile à vérifier directement,

$$g'' + (b - a) g' + \left(a + b - \frac{1}{2}\right) \frac{g}{2} = e^{\int \cot 2\Phi \, d\varphi} \sin^2\Phi \cos^2\Phi \left(\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \lambda\right);$$

d'où l'on déduit que l'équation (45) devient

$$\frac{d^2\lambda}{d\varphi^2} + \lambda \left[1 - \sigma \frac{2\Phi' + \sigma}{(\sin 2\Phi)^2}\right] = 0. \tag{49}$$

où l'on a posé

$$\sigma = 1 - \varepsilon.$$

On peut encore la simplifier en posant

$$\mu = \frac{1}{\lambda}\frac{d\lambda}{d\varphi}, \qquad t = \cot 2\Phi;$$

moyennant quoi, elle s'écrit

$$\frac{d\mu}{d\varphi} + \mu^2 + 1 = -\sigma\frac{dt}{d\varphi} + \sigma^2(t^2+1). \tag{50}$$

Si la fonction Φ (et par suite t) de φ est quelconque, il ne semble pas qu'on puisse intégrer pour toute valeur de σ. On ne peut pas non plus choisir t sous une forme telle que l'on connaisse à l'avance une solution particulière en μ, car l'équation (50) est aussi bien de Riccati par rapport à t que par rapport à μ. Néanmoins, *il convient de signaler, outre le cas déjà vu de* $\varepsilon = 1\ (\sigma = 0)$, *ceux de* $\sigma = +1$ *et* $\sigma = -1$, pour lesquels on a l'intégrale particulière $\mu = -t$ ou $\mu = t$. Nous retrouverons d'ailleurs un peu plus loin (n° 13) ces cas particuliers.

Il est intéressant de remarquer que nous avons été conduits par des considérations géométriques à certaines propriétés non évidentes d'analyse pure. Tout d'abord, *nous savons obtenir des solutions contenant un nombre illimité de constantes arbitraires de toute équation de la forme* (29), *et cela par des quadratures, quand les coefficients a et b sont liés par* (46). En outre, *nous savons intégrer*, *dans la même hypothèse, les équations* (44) *ou* (45) *pour* $\varepsilon = 1, 0, 2$.

12. Revenons maintenant à la Géométrie.

Nous pourrions appliquer ici les transformations (θ_1) et (θ_{-1}) (Th., n° 17); mais cela ne ferait que nous donner de nouveau les propriétés précédentes relatives aux solutions de l'équation (29). Nous ne nous occuperons donc pas de cette question et *nous allons porter notre attention sur les systèmes* (T) (*loc. cit.*).

On pourrait, pour les déterminer, chercher les fonctions ω et h correspondantes. Mais cette méthode conduit à des calculs compliqués. Il est beaucoup plus simple de calculer directement x, y, z par les formules

$$u = \int \mathrm{HU}\, d\rho + \mathrm{H}_1\mathrm{U}_1\, d\rho_1 + \mathrm{H}_2\mathrm{U}_2\, d\rho_2,$$

sachant que, pour une translation de direction (α, β, γ), on a (Th., n° 17)

$$H = \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \qquad H_1 = \alpha X_1 + \beta Y_1 + \gamma Z_1, \qquad H_2 = \alpha X_2 + \beta Y_2 + \gamma Z_2.$$

Observons d'abord que, par le simple examen des H_i, on peut trouver les directions auxquelles correspondent des systèmes cycliques. En effet, pour que les surfaces (ρ_2), et par suite les surfaces (ρ_1) soient des périsphères, il faut et suffit que le rayon de courbure principal R_{20} de la surface (ρ_2) suivant la ligne $\rho_1 =$ const. soit indépendant de ρ. Or, on a ([1])

$$R_{20} = -\frac{H}{\beta_{20}} = -\frac{\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi}{\sin\Phi} - \frac{\gamma\cot\theta}{\sin\Phi}.$$

Comme, dans cette expression, θ est la seule variable qui dépende de ρ, la condition cherchée est $\gamma = 0$. Donc, *les directions qui donnent des systèmes cycliques sont celles du plan* xOy ([2]).

Calculons les systèmes (T_1), (T_2), (T_3), qui proviennent des directions Ox, Oy, Oz; nous savons (Th., n° 17) que les autres s'en déduisent par composition géométrique.

Système (T_1). — Nous avons

$$x_1 = \int X^2\, d\rho + X_1^2\, d\rho_1 + X_2^2\, d\rho_2,$$

$$y_1 = \int XY\, d\rho + X_1 Y_1\, d\rho_1 + X_2 Y_2\, d\rho_2,$$

$$z_1 = \int XZ\, d\rho + X_1 Z_1\, d\rho_1 + X_2 Z_2\, d\rho_2 = X, \qquad \text{d'après (15)}$$

En remplaçant $d\rho_1$ et $d\rho_2$ par

$$(51) \qquad d\rho_1 = d\rho - \frac{d\theta}{\sin\theta} - \tan\Phi\, d\varphi, \qquad d\rho_2 = d\rho - \frac{d\theta}{\sin\theta} + \cot\Phi\, d\varphi,$$

([1]) DARBOUX, *Systèmes orthogonaux*, n° 107.

([2]) C'est ce qui résulte aussi d'un Mémoire de LUCIEN LÉVY (*Journal de Liouville*, 1892, p. 351), dont nous allons retrouver toutes les conclusions.

on trouve facilement

$$(52)\quad \begin{cases} x_1 = \rho - \log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} - \cos\theta\cos^2\varphi + 2\int \cot 2\Phi \sin^2\varphi\, d\varphi, \\ y_1 = -\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi - \int \cot 2\Phi \sin 2\varphi\, d\varphi, \\ z_1 = \sin\theta\cos\varphi. \end{cases}$$

On vérifiera aisément sur ces formules les propriétés suivantes :

La ligne (v) de la surface $(\rho_2 = 0)$ est un cercle de rayon $\cos\varphi$, dont l'axe a pour angle polaire $\varphi + \frac{\pi}{2}$ et dont le centre ω_1 a pour coordonnées dans xOy

$$a_1 = -\int (\cot\Phi\cos^2\varphi + \operatorname{tang}\Phi\sin^2\varphi)\, d\varphi, \qquad b_1 = -\int \cot 2\Phi \sin 2\varphi\, d\varphi.$$

Le centre de la sphère inscrite le long de ce cercle a pour coordonnées

$$\alpha_1 = a_1 + \cot\Phi\sin\varphi\cos\varphi, \qquad \beta_1 = b_1 - \cot\Phi\cos^2\varphi.$$

Le rayon R de cette sphère est égal à $\frac{\cos\varphi}{\sin\Phi}$. Il satisfait à la relation de Lucien Lévy [1] :

$$R^2(d\alpha_1^2 + d\beta_1^2 - dR^2) = d\beta_1^2.$$

Enfin, le cylindre ayant pour section droite le cercle (v) précédent intercepte sur Ox une longueur égale à 2 [2].

Système (T_2). — Les équations de ce système se déduisent *a priori* de celles de (T_1) par une rotation de $-\frac{\pi}{2}$, suivie du changement de φ en $\varphi - \frac{\pi}{2}$; ceci donne

$$(53)\quad \begin{cases} x_2 = -\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi - \int \cot 2\Phi \sin 2\varphi\, d\varphi, \\ y_2 = \rho - \log\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin^2\varphi + 2\int \cot 2\Phi \cos^2\varphi\, d\varphi, \\ z_2 = \sin\theta\sin\varphi. \end{cases}$$

---

(1) *Loc. cit.* On établit d'abord les formules

$$d\alpha_1 = \frac{dR}{\cos\Phi}\sin\varphi, \qquad d\beta_1 = -\frac{dR}{\cos\Phi}\cos\varphi.$$

La relation de L. Lévy est alors évidente.

(2) LUCIEN LÉVY, *loc. cit.*

On vérifiera sans peine que les H_i de ce système sont égaux aux Y_i.

Quant au cercle (φ) de la surface ($\rho_2 = 0$), il a pour rayon $\sin\varphi$ et pour centre un point ω_2 de coordonnées

$$a_2 = -\int \cot 2\Phi \sin 2\varphi \, d\varphi, \qquad b_2 = -\int (\cot\Phi \sin^2\varphi + \operatorname{tang}\Phi \cos^2\varphi)\, d\varphi.$$

La sphère inscrite a pour rayon $\frac{\sin\varphi}{\sin\Phi}$ et pour centre le point de coordonnées

$$\alpha_2 = a_2 + \cot\Phi \sin^2\varphi, \qquad \beta_2 = b_2 - \cot\Phi \sin\varphi \cos\varphi.$$

Système (T_3). — Il a pour équations

$$x_3 = \int ZX\, d\rho + Z_1 X_1\, d\rho_1 + Z_2 X_2\, d\rho_2 = z_1 = X,$$
$$y_3 = \int ZY\, d\rho + Z_1 Y_1\, d\rho_1 + Z_2 Y_2\, d\rho_2 = z_2 = Y,$$
$$z_3 = \int Z^2\, d\rho + Z_1^2\, d\rho_1 + Z_2^2\, d\rho_2 \qquad = \rho + Z, \qquad \text{d'après (15)}.$$

d'où

$$(54) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_3 &= \sin\theta\cos\varphi, \\ y_3 &= \sin\theta\sin\varphi, \\ z_3 &= \rho + \cos\theta. \end{aligned} \right.$$

On voit que la surface (ρ) est une sphère de rayon 1, dont le centre, situé sur Oz, a pour cote ρ (¹).

Si l'on veut maintenant le système (T) correspondant à une translation de direction (α, β, γ), il suffit d'appliquer les formules

$$x = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3, \qquad y = \alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3, \qquad z = \alpha z_1 + \beta z_2 + \gamma z_3.$$

Il est à remarquer que *les surfaces* (ρ) *sont toujours transcendantes*, sauf pour le système (T_3), car sur ces surfaces les courbes $\varphi = \text{const.}$, qui sont les lignes d'ombre relatives aux directions du plan des xy, sont transcendantes. La forme de ces lignes est d'ailleurs indépendante de la fonction Φ et il serait facile d'en donner une définition géométrique assez simple.

Quant aux surfaces (ρ_1) et (ρ_2), elles ne peuvent être algébriques

---

(¹) Il est clair qu'on pouvait prévoir ce résultat, d'après ce qui a été dit sur les systèmes (Σ_0).

que lorsqu'elles sont des périsphères, et à condition que la fonction Φ soit convenablement choisie.

13. *Cherchons maintenant les systèmes* (H). Nous savons (Th., n° 17) qu'ils sont caractérisés par les conditions

$$H_i = \sigma P_i, \qquad \sigma = \text{const.}$$

Or, si l'on se reporte aux équations (39) et (40), on voit que si l'on pose

$$K = h' - \sigma h, \qquad \tau = \omega_1 - \sigma\omega,$$

il revient au même de dire que le système (Σ) qu'on obtiendrait en prenant K et τ pour fonctions h et ω se réduit à l'origine des coordonnées. Comme la solution ($K = 0$, $\tau = 0$) convient, la solution générale est donnée, d'après ce qui a été dit au n° 9, par les équations

$$(55)\qquad \begin{cases} h' - \sigma h = m\, e^{-\rho} + n\, e^{\rho}, \\ \dfrac{\partial\omega}{\partial\rho_1} + \dfrac{\partial\omega}{\partial\rho_2} + \varepsilon\omega = \dfrac{m}{A^2} - n, \end{cases}$$

où m et n désignent deux constantes arbitraires et ε le nombre $1 - \sigma$.

Préoccupons-nous d'abord de simplifier les seconds membres. Nous savons qu'on peut, sans changer le système, ajouter aux fonctions h et ω les quantités respectives

$$\mu\, e^{-\rho} + \nu\, e^{\rho} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu}{A^2} - \nu,$$

μ et ν étant deux constantes arbitraires. Ceci augmente les premiers membres de (55) des quantités respectives

$$-e^{-\rho}\mu(1+\sigma) + e^{\rho}\nu(1-\sigma) \qquad \text{et} \qquad -\frac{\mu(1+\sigma)}{A^2} - \nu(1-\sigma) \quad (^1).$$

Par suite, on fera disparaître les seconds membres, si l'on peut prendre

$$\mu(1+\sigma) = -m \qquad \text{et} \qquad \nu(1-\sigma) = n.$$

---

(1) S'appuyer sur ce que $\omega' = \omega - \dfrac{m}{A^2} + n$ donne $\omega'_1 = \omega_1 + \dfrac{m}{A^2} + n$, (n° 9).

D'où trois cas à distinguer :

Si $\sigma^2 \neq 1$, on peut supposer $m = n = 0$.
Si $\sigma = 1$, on peut supposer $m = 0$.
Si $\sigma = -1$, on peut supposer $n = 0$.

Étudions séparément ces trois cas.

Premier cas : $\sigma^2 \neq 1$. — *Nous aurons un premier système* (H_1) en prenant

$$h = e^{\sigma\rho}, \qquad \omega = 0.$$

Cela nous donnera un système (Σ_0) pour lequel les sphères (ρ) sont homothétiques par rapport à l'origine, mais non tangentes en ce point à xOy.

Nous aurons une infinité d'autres systèmes, qui seront des systèmes cycliques, en prenant h nul et ω égal à l'une quelconque des solutions communes à (29) et à

$$\frac{\partial\omega}{\partial\rho_1} + \frac{\partial\omega}{\partial\rho_2} + \varepsilon\omega = 0.$$

On retombe sur l'équation (41) sans second membre; il faudra donc prendre

$$\omega = e^{-\frac{\varepsilon}{2}(\rho_1+\rho_2)} g,$$

g désignant l'intégrale générale de (45). Malheureusement, lorsque la fonction Φ est quelconque, nous ne savons précisément pas, dans l'hypothèse actuelle, calculer cette intégrale.

Si l'on connaissait deux intégrales distinctes, on en déduirait deux systèmes cycliques homothétiques, qui, composés géométriquement avec (H_1), donneraient tous les systèmes (H) qui correspondent au nombre σ donné.

Deuxième cas : $\sigma = 1$. — Annulons seulement m dans les équations (55). La première donne

$$(56) \qquad h = e^{\rho}(n\rho + C_1) \qquad (C_1 = \text{const.}).$$

La seconde est de la forme (41), avec $\varepsilon = 0$, $\omega_1 = -n$. Procédant comme au n° 10, nous pouvons prendre $\omega_0 = -\frac{n}{2}(\rho_1 + \rho_2)$; l'équation (43) devient alors

$$f'' + f'(\Phi' + 1)\cos 2\Phi = -\frac{n}{2}(\Phi' + 1)$$

ou

$$\frac{d^2 f}{d\varphi^2} - 2\frac{df}{d\varphi}\cot 2\Phi = -\frac{2n(\Phi' + 1)}{(\sin 2\Phi)^2}.$$

Cette équation, linéaire et du premier ordre en $\frac{df}{d\varphi}$, s'intègre par quadratures. Posons, pour abréger l'écriture,

$$\mathrm{I} = \int e^{\int 2\cot 2\Phi\, d\varphi} d\varphi, \qquad \mathrm{J} = \int \left[e^{\int 2\cot 2\Phi\, d\varphi} \int e^{-2\int \cot 2\Phi\, d\varphi} \frac{\Phi' + 1}{(\sin 2\Phi)^2} d\varphi \right] d\varphi.$$

Nous avons

$$f = -2n\mathrm{J} + \mathrm{C}_2\mathrm{I} + \mathrm{C}_3, \qquad \mathrm{C}_2 \text{ et } \mathrm{C}_3 = \text{const.},$$

d'où

$$\omega = -\frac{n}{2}(\rho_1 + \rho_2) - 2n\mathrm{J} + \mathrm{C}_2\mathrm{I} + \mathrm{C}_3.$$

Telle est la valeur de ω qu'il faut combiner à la valeur (56) de h pour avoir le système (H) le plus général correspondant à $\sigma = 1$. Il semble, contrairement à la théorie générale (Th., n° 17), qu'on ait quatre constantes arbitraires n, C_1, C_2, C_3; mais, d'après (37), les constantes C_1 et C_3 rentrent l'une dans l'autre, de sorte qu'on peut supposer par exemple $\mathrm{C}_3 = 0$.

Si l'on annule deux des constantes n, C_1, C_2, on obtient trois systèmes (H) particuliers, qui donneront le plus général par composition géométrique. En annulant n et C_2, on obtient le système (Σ_1) du n° 5. En annulant n et C_1, on obtient un système cyclique.

Donc, tous les systèmes pour lesquels n est nul sont des systèmes cycliques, et ce sont les seuls.

Troisième cas : $\sigma = -1$. — Annulons seulement n dans les équations (55). La première donne

$$h = e^{-\rho}(m\rho + \mathrm{C}_1). \tag{57}$$

La seconde est de la forme (41), avec

$$\varepsilon = 2, \qquad \omega_1 = \frac{m}{A^2}.$$

Si l'on remarque que, d'après les formules (37), ω_1 annule le premier membre, on aperçoit immédiatement la solution particulière

$$\omega_0 = \rho_1 \frac{m}{A^2}.$$

Comme $\frac{m}{A^2}$ est solution de (29), l'équation (43) devient

$$f'' + f'(b - a - 2) + 2af = m\, e^{\rho + 2\int \cot 2\Phi \, d\varphi} (\Phi' - 1) \cos^2 \Phi.$$

Si l'on se rappelle maintenant (n° 11) que l'équation (50) admet, pour $\sigma = -1$, la solution $\mu = t$, on voit qu'on pourra intégrer par quadratures. Indiquons seulement les résultats.

Si l'on pose

$$I_0 = \int e^{-2\int \cot 2\Phi \, d\varphi} d\varphi, \qquad J_0 = \int \left[e^{-2\int \cot 2\Phi \, d\varphi} \int e^{2\int \cot 2\Phi \, d\varphi} \frac{\Phi' - 1}{\sin^2 \Phi} d\varphi \right] d\varphi,$$

on a

$$\omega = \frac{m\rho_1 + m J_0 + C_2 I_0 + C_3}{A^2}.$$

Comme dans le cas précédent, on peut supposer $C_3 = 0$, ce qui laisse subsister trois constantes m, C_1, C_2.

Pour $m = 0$, on a des systèmes cycliques.

14. Étude de quelques cas particuliers. — Pour terminer cette première Partie, nous allons indiquer quelques exemples de réseaux (σ), pour lesquels l'équation (29) est intégrable ou bien prend une forme simple.

Demandons-nous d'abord *pour quelle valeur de la fonction Φ l'équation* (29) *aura un invariant nul.*

Si l'on se reporte à l'interprétation géométrique de la transformation de Laplace, on reconnait immédiatement qu'il faut et suffit que le réseau plan (σ'') et par suite le réseau sphérique (σ') comprennent une famille de cercles [1]; d'où l'on conclut sans peine que *le réseau* (σ) *doit se composer uniquement de cercles* [2].

Or ceci n'arrive que si les plans des cercles (v) passent par une droite fixe Δ, que nous pouvons toujours supposer dans le plan des zx. On sait que dans ces conditions, les lignes (u) de (σ) sont des cercles dont les plans passent par la droite Δ' conjuguée de Δ par rapport à la sphère. On peut aussi reconnaître géométriquement que les deux familles de (σ') se composeront de cercles si Δ et Δ' sont tangentes à la sphère et dans ce cas seulement. Ce dernier cas est le seul où toutes les surfaces du système (Σ) ont toutes leurs lignes de courbure planes. Les systèmes correspondants ont été calculés depuis longtemps déjà par M. Darboux dans sa Thèse de doctorat [3].

Nous allons retrouver analytiquement les conclusions précédentes. Les invariants de (29) sont

$$h = ab + \frac{da}{dv}, \qquad k = ab - \frac{db}{dv}$$

ou

$$(58) \qquad \begin{cases} h = \sin^2\Phi\cos^2\Phi(1 - \Phi'^2 - \Phi''\operatorname{tang}\Phi), \\ k = \sin^2\Phi\cos^2\Phi(1 - \Phi'^2 + \Phi''\cot\Phi). \end{cases}$$

Si l'on annule h par exemple, on arrive à

$$\cos\Phi = m\sin\varphi \qquad (m = \text{const.}),$$

en négligeant une constante qui devrait être ajoutée à φ.

Or, ceci exprime que le plan de la ligne (v) de (σ) contient la droite Δ d'équations

$$y = 0, \qquad x = -m.$$

Si l'on porte la valeur précédente de Φ dans le second invariant, on

---

(1) *Voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 21.

(2) En effet, les surfaces (ρ) ont une famille de lignes de courbure planes, qu'on peut toujours supposer être leurs lignes d'intersection avec les surfaces (ρ_2); celles-ci ont alors toutes leurs lignes de courbure planes.

(3) *Voir*, par exemple, *Annales de l'École Normale*, 1866, p. 129. — *Voir* aussi *Théorie des surfaces*, t. IV, p. 292.

trouve

$$k = (1 - m^2)\cot^2\Phi;$$

donc k ne sera nul que pour $m = \pm 1$, c'est-à-dire si Δ est tangente à la sphère.

Rien ne serait plus facile maintenant que d'appliquer au cas particulier actuel la théorie générale qui vient d'être exposée. On obtiendrait de la sorte, et *sans aucune quadrature*, *le système triple orthogonal le plus général dont les surfaces* (ρ_2) *sont à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et ont même représentation sphérique*.

Pour les systèmes (T) en particulier, on arrive à des formules très simples, exemptes de toute quadrature. On obtient, entre autres, le système dont les surfaces (ρ_2) sont obtenues par la translation suivant Ox d'une cyclide de Dupin ayant ses points doubles sur Oy et Oz (*cf.* Th., n° 11).

Le cas où la droite Δ signalée plus haut est tangente à la sphère ($m = \pm 1$) conduit à des résultats intéressants. Mais, dans la crainte d'allonger inutilement ce Mémoire, nous ne reproduirons aucun de ces calculs, d'autant plus que M. Darboux a indiqué comment on pouvait déterminer tous les systèmes triples orthogonaux comprenant une famille de surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes [1].

15. *Cas où les invariants de* (29) *sont égaux.* — Si l'on se reporte aux formules (58), on voit que les invariants sont égaux pour $\Phi'' = 0$; ce qui va nous conduire aux deux solutions suivantes.

I. $\Phi = \text{const.}$ — *Les cercles* (v) *sont égaux.* Leurs plans sont tangents à un cylindre de révolution d'axe Oz. Il revient au même de dire que les surfaces (ρ_2) coupent sous le même angle tous les plans de leurs lignes de courbure planes.

Le réseau (σ') *se compose* dans ce cas *de loxodromies*, se déduisant, dans chaque famille, de l'une d'entre elles par rotation autour de Oz.

---

[1] G. Darboux, *Détermination des systèmes triples orthogonaux qui comprennent une famille de cyclides de Dupin, etc. Voir* aussi Th., n° 41.

L'équation (29) se ramène, par la substitution

$$u = v\, e^{-(\rho_1 \cos^2\Phi + \rho_2 \sin^2\Phi)},$$

à la suivante :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\rho_1\, \partial\rho_2} = \sin^2\Phi \cos^2\Phi\, v,$$

qui se transforme en elle-même par la méthode de Laplace.

L'équation (45), qui permet d'en obtenir une infinité de solutions, *est à coefficients constants* et par suite s'intègre immédiatement. D'où il résulte (n° 13) *qu'on peut calculer par quadratures tous les systèmes* (H) *correspondants*.

Quant aux systèmes (T), ils sont toujours donnés par les formules (52), (53), (54), dont les quadratures se calculent dans ce cas sans aucune difficulté [1].

II. $\Phi = m\varphi$ (m = const.). — *Les plans des cercles* (v) *enveloppent un cylindre ayant pour base une hypo- ou épicycloïde tangente en ses sommets au cercle de section de la sphère par* xOy.

Il y a exception toutefois lorsque $m = \pm 1$, auquel cas on retombe sur le réseau exclusivement composé de cercles tangents entre eux dans chaque famille (n° 14); les invariants de (29) sont alors tous deux égaux à zéro, ainsi qu'on l'a d'ailleurs déjà vu au numéro précédent.

Le réseau plan (σ'') (n° 3) est composé des lignes ayant pour équation générale en coordonnées polaires

$$\rho^m = a \sin m\varphi, \qquad \rho^m = a \cos m\varphi \qquad (a = \text{const.}). \tag{59}$$

Les formules (9) donnent

$$\left(\tang\frac{\theta}{2}\right)^m = \sin m\varphi\, e^{mu} = \sin m\varphi\, e^{m(\rho-\rho_2)} = \cos m\varphi\, e^{m(\rho-\rho_1)},$$
$$\tang m\varphi = e^{m(\rho_2-\rho_1)}.$$

[1] Pour le système (T_3), les H_i et β_{ik} ne dépendent que de la seule variable θ. M. Darboux a déterminé tous les systèmes jouissant d'une telle propriété (*Systèmes triples orthogonaux*, n° 176) et a donné comme solution générale le système des hélicoïdes à courbure constante. Le système (T_3) ci-dessus constitue une solution particulière, celle pour laquelle le rapport $\frac{H_1}{H_2}$ est constant.

L'équation (29) devient

$$(60)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\rho_1\,\partial\rho_2}+(m+1)\left(\frac{e^{2m\rho_2}\dfrac{\partial\omega}{\partial\rho_1}+e^{2m\rho_1}\dfrac{\partial\omega}{\partial\rho_2}}{e^{2m\rho_1}+e^{2m\rho_2}}\right)=0,$$

ou, en posant

$$e^{2m\rho_1}=\lambda_1,\qquad e^{2m\rho_2}=-\lambda_2,$$

$$(61)\qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda_1\,\partial\lambda_2}+\frac{m+1}{2m}\,\frac{-\dfrac{\partial\omega}{\partial\lambda_1}+\dfrac{\partial\omega}{\partial\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}=0.$$

On reconnaît *l'équation d'Euler* (¹), dont on pourrait appliquer ici toutes les propriétés bien connues. En particulier, on sait qu'*elle est intégrable par la méthode de Laplace* et par suite sans quadratures toutes les fois que $\frac{m+1}{2m}$ est entier, ce qui arrive *lorsque m est l'inverse d'un nombre impair* (²). Voilà donc une infinité de cas pour lesquels *on peut calculer tous les systèmes* (Σ) *sans aucune quadrature.*

Nous ne voyons rien de particulier à dire sur *les systèmes* (T), si ce n'est que les quadratures qu'ils composent peuvent s'effectuer par les fonctions élémentaires chaque fois que m est commensurable, ou, ce qui revient au même, chaque fois que le réseau (σ'') est algébrique.

Quant aux systèmes (II), *leur détermination* revient à l'intégration de l'équation (49), qui ici devient

$$(62)\qquad \frac{d^2\lambda}{d\varphi^2}+\lambda\left[1-\frac{\sigma(2m+\sigma)}{(\sin 2m\varphi)^2}\right]=0.$$

Cette équation rentre dans un type connu (³) et *se ramène à l'équation de la série hypergéométrique* par le changement de variables

$$(\sin 2m\varphi)^2=t,\qquad \lambda=\rho\, t^{-\frac{\sigma}{4m}}.$$

(¹) *Cf.* G. Darboux, *Théorie des surfaces*, nᵒˢ 344 et suiv.

(²) Au point de vue qui nous occupe, *il suffit de considérer des valeurs positives de m*; car deux valeurs opposées donnent, d'après (59), deux réseaux (σ'') inverses l'un de l'autre et par suite deux réseaux (σ') symétriques l'un de l'autre par rapport à xOy.

(³) *Cf.* Darboux, *loc. cit.*, n° 408.

L'équation transformée est, en effet,

$$t(1-t)\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{d\rho}{dt}\left[\frac{1}{2}-\frac{\sigma}{2m}+t\left(\frac{\sigma}{2m}-1\right)\right]+\rho\frac{(1-\sigma^2)}{16m^2}=0, \tag{63}$$

laquelle coïncide avec l'équation de la série hypergéométrique si l'on prend, avec les notations habituelles,

$$\alpha=-\frac{1}{4m}(\sigma-1),\qquad \beta=-\frac{1}{4m}(\sigma+1),\qquad \gamma=\frac{1}{2m}(m-\sigma).$$

Réseaux (σ') *isothermes*. — Le réseau (σ) ne peut être isotherme, d'après une propriété bien connue, que s'il est uniquement composé de cercles, cas étudié précédemment. Quant au réseau (σ'), il est isotherme en même temps que (σ''). Or, ce dernier ne l'est que si les invariants de l'équation de Laplace correspondante sont égaux (¹). *Les seuls réseaux* (σ') *qui soient isothermes sont donc ceux qui viennent d'être étudiés dans ce numéro.*

II. — Réseaux (σ) isothermes.

16. Proposons-nous maintenant de rechercher tous les réseaux (σ) isothermes. Nous sommes sûrs qu'il en existe, puisque nous en avons découvert dans le numéro précédent et qu'en outre on connaît le système des ellipses et hyperboles homofocales.

Partons de l'élément linéaire de la sphère pris sous la forme

$$d\sigma^2=e^\theta(du^2+dv^2). \tag{64}$$

Nous savons que θ doit satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial v^2}+2e^\theta=0. \tag{65}$$

Pour que les lignes coordonnées forment un réseau (σ), il faut et suffit (Th., n° 16) qu'on puisse trouver deux fonctions U_1 et V_1 de u

---

(¹) G. DARBOUX, *loc. cit.*, n° 432.

et v respectivement telles qu'on ait

$$U_1 \frac{\partial \theta}{\partial v} + V_1 \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0.$$

D'où l'on conclut que θ doit être une fonction de la seule variable $\alpha = U + V$, en appelant U une fonction de u et V une fonction de v. Remarquons, dès à présent, qu'aucune de celles-ci ne peut se réduire à une constante, sans quoi on obtiendrait un réseau de méridiens et parallèles, ce qui n'est pas un réseau (σ). De même, θ' ne peut être nul.

17. Cela posé, l'équation (65) s'écrit, dans l'hypothèse actuelle,

$$2e^{\theta} + \theta'(U'' + V'') + \theta''(U'^2 + V'^2) = 0. \tag{66}$$

Différentions, en supposant α constant, il vient

$$\theta'(U_1 - V_1) + 2\theta''(U'' - V'') = 0, \tag{67}$$

en posant

$$U_1 = \frac{U'''}{U'}, \qquad V_1 = \frac{V'''}{V'}.$$

On obtient une première solution en supposant

$$U'' = V'' = \text{const.},$$

car U_1 et V_1 sont alors nuls.

Deux cas sont à distinguer :

I. U *et* V *sont du premier degré*. — Par l'addition de constantes convenables à u et v, on peut supposer

$$U = au, \qquad V = bv,$$

d'où

$$\alpha = au + bv.$$

Or, si l'on pose $\beta = bu - av$, l'élément linéaire peut s'écrire

$$d\sigma^2 = f(\alpha)(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

lequel convient au seul réseau de méridiens et parallèles. *Les lignes* (u)

et (v) *sont alors des loxodromies*. On retombe sur le réseau (σ') du n° 15 (I).

II. U *et* V *sont du second degré*. — En ajoutant des constantes convenables à u, v, α et multipliant α par un certain facteur également constant, on peut supposer

$$U = u^2, \qquad V = v^2;$$

donc

$$d\sigma^2 = f(u^2 + v^2)(du^2 + dv^2).$$

Je dis que les lignes $v = ku$, où k désigne une constante arbitraire, sont des géodésiques. En effet, il nous suffit de vérifier l'équation [1]

$$d\omega + r\,du + r_1\,dv = 0.$$

Si l'on remarque que $\omega = \operatorname{arc\,tang} k = \text{const.}$, on doit constater que [2]

$$-\frac{f'}{f} v\,du + \frac{f'}{f} u\,dv = 0,$$

ou

$$v\,du - u\,dv = 0,$$

équation qui est bien satisfaite pour $\frac{v}{u} = \text{const.}$

Remarquons maintenant que toutes les géodésiques précédentes passent par le point $(u = 0,\ v = 0)$; donc, elles constituent sur la sphère une famille de méridiens. Il suit de là que les réseaux (σ) de ce deuxième cas font partie des réseaux (σ') du paragraphe I. Or, nous avons précisément découvert et étudié ceux de ces réseaux qui sont isothermes (n° 15). Nous retrouvons donc encore des résultats que nous connaissions déjà.

18. *Supposons maintenant* $U'' - V'' \neq 0$. Je dis qu'on a aussi néces-

---

(1) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, n° 514.

(2) On a en effet (*loc. cit.*, n° 500)

$$r = -\frac{1}{2}\frac{\partial \log f}{\partial v}, \qquad r_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial \log f}{\partial u}.$$

sairement

$$\theta''(U_1 - V_1) \neq 0. \tag{68}$$

En effet, si l'un des facteurs de ce produit était nul, l'autre le serait aussi, d'après (67). On aurait alors

$$\theta = a\alpha + b, \qquad U'' = mU, \qquad V'' = mV \qquad (a,\ b,\ m = \text{const.} \neq 0).$$

L'équation (66) deviendrait

$$2\,e^{a\alpha+b} + am\alpha = 0,$$

ce qui est impossible.

Ceci étant, l'équation (67) s'écrit

$$-\frac{2\theta''}{\theta'} = \frac{U_1 - V_1}{U'' - V''}. \tag{69}$$

Différentions en supposant α constant; il vient

$$(U'' - V'')(U_2 + V_2) + V_1^2 - U_1^2 = 0, \tag{70}$$

en posant

$$U_2 = \frac{U_1'}{U'}, \qquad V_2 = \frac{V_1'}{V'}.$$

On peut satisfaire à cette équation en prenant

$$U_1 = -V_1 = a = \text{const.} \neq 0.$$

C'est d'ailleurs le seul cas où $U_2 + V_2$ soit nul, puisque $U_1 - V_1$ doit être différent de zéro. Voyons si cette hypothèse conduit à des résultats. On en déduit, en négligeant des constantes ajoutées à U et V,

$$U'' = aU, \qquad V'' = -aV,$$
$$U'^2 = aU^2 + b, \qquad V'^2 = -aV^2 + b' \qquad (b,\ b' = \text{const.}).$$

Portant dans (67) et (66), on a

$$\theta''\alpha + \theta' = 0,$$
$$2\,e^{\theta} = (b + b')\frac{\theta'}{\alpha}.$$

La seule solution commune à ces deux équations est

$$2\,e^{\theta} = -\frac{b+b'}{\alpha^2}.$$

Elle conduit à un élément linéaire de la forme

$$d\sigma^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(\mathrm{U}+\mathrm{V})^2},$$

qui ne saurait convenir qu'à un *réseau de cercles* [1].

19. Supposons maintenant

$$(\mathrm{U}_2 + \mathrm{V}_2)(\mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1) \neq 0. \tag{71}$$

Différentions (70) par rapport à u :

$$\mathrm{U}''\mathrm{U}'_2 - \mathrm{U}_1\mathrm{U}'_1 = \mathrm{V}''\mathrm{U}'_2 - \mathrm{U}'''\mathrm{V}_2. \tag{72}$$

Différentions par rapport à v :

$$\mathrm{V}'''\mathrm{U}'_2 - \mathrm{U}'''\mathrm{V}'_2 = 0 \tag{73}$$

Supposons d'abord $\mathrm{U}''' = 0$; d'où $\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_2 = 0$. L'équation (69) devient

$$-\frac{2\,\theta''}{\theta'} = -\frac{\mathrm{V}_1}{\mathrm{U}''-\mathrm{V}''}$$

Comme U'' est une constante, les deux membres sont aussi nécessairement égaux à une même constante $-2a$, d'ailleurs non nulle, à cause de (71). On tire de là

$$\theta = c + b\,e^{a\alpha} \qquad (b,\ c = \text{const.};\ ab \neq 0).$$

Portons dans (66)

$$\frac{2}{ab}\,e^{c+be^{a\alpha}-2\alpha} + \mathrm{U}'' + \mathrm{V}'' + a(\mathrm{U}'^2 + \mathrm{V}'^2) = 0.$$

---

[1] *Cf.* G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 155.

Si l'on remarque que U et par suite α sont des polynomes en u, on voit de suite que cette égalité ne peut avoir lieu. *Il faut donc que* $U'''V'''$ *soit différent de zéro*. On peut encore satisfaire à (73) en *supposant* $U'_2 = V'_2 = 0$; d'où

$$U_2 = a, \qquad V_2 = a'.$$

En portant dans (72), on trouve de suite $a' = a \neq 0$. Donc

$$U_1 = a\,U, \qquad V_1 = a\,V,$$

en négligeant des constantes ajoutées à U et V. Portons dans (70), nous obtenons

$$(74) \qquad 2\,U'' - a\,U^2 = 2\,V'' - a\,V^2 = b.$$

Moyennant quoi, (69) devient

$$(75) \qquad \frac{\theta''}{\theta'} = -\frac{1}{\alpha}.$$

Intégrons (74) :

$$(76) \qquad U'^2 = \frac{a}{3}U^3 + b\,U + c, \qquad V'^2 = \frac{a}{3}V^3 + b\,V + c' \qquad (c,\ c' = \text{const.}).$$

Portons dans (66), en tenant également compte de (74) et (75),

$$(77) \qquad \frac{2\,e^\theta}{\theta'} = \frac{c + c'}{\alpha} - \frac{a}{6}\alpha^2.$$

Or, (75) s'intègre à vue et donne

$$\theta = A \log\alpha + \log B \qquad (A,\ B = \text{const.});$$

d'où

$$\frac{2\,e^\theta}{\theta'} = \frac{2\,B}{A}\alpha^{A+1}.$$

En comparant avec (77) et se rappelant que $a \neq 0$, on voit qu'il faut prendre

$$c' = -c, \qquad A = 1, \qquad B = -\frac{a}{12},$$

d'où

$$e^\theta = -\frac{a}{12}\alpha.$$

Nous obtenons finalement une *quatrième solution*, dont l'élément linéaire peut s'écrire

$$d\sigma^2 = -\frac{a}{12}(U+V)\left(\frac{dU^2}{\frac{a}{3}U^3+bU+c}+\frac{dV^2}{\frac{a}{3}V^3+bV-c}\right). \tag{78}$$

Je dis que *le réseau correspondant n'est autre que celui des ellipses et hyperboles homofocales*. En effet, ce dernier a, comme on sait, un $d\sigma^2$ de la forme (¹)

$$d\sigma^2 = (\cos 2\mu - \cos 2\nu)\left(\frac{d\mu^2}{\cos 2\mu - \cos 2c}+\frac{d\nu^2}{\cos 2c - \cos 2\nu}\right). \tag{79}$$

Or, si l'on pose

$$\cos 2\mu = mx+n, \qquad \cos 2\nu = -my+n, \qquad \cos 2c = p,$$

il devient

$$\begin{aligned} d\sigma^2 = & -\frac{m^3(x+y)}{4} \\ & \times\left[\frac{dx^2}{m^3x^3+m^2x^2(3n-p)+mx(3n^2-2np-1)+(n^2-1)(n-p)}\right. \\ & \left.+\frac{dy^2}{m^3y^3+m^2y^2(p-3n)+my(3n^2-2np-1)+(n^2-1)(p-n)}\right].\end{aligned}$$

On l'identifie avec (78) en prenant

$$U = x, \qquad V = y, \qquad p = 3n, \qquad \frac{3b}{a}+\frac{3n^2+1}{m^2} = 0, \qquad \frac{3c}{a}+\frac{2n(n^2-1)}{m^3} = 0.$$

Tant que b et c ne sont pas tous deux nuls, les deux dernières équations donnent m et n et l'identification est possible.

Si $b = c = 0$, on a

$$d\sigma^2 = -\frac{U+V}{4}\left(\frac{dU^2}{U^3}+\frac{dV^2}{V^3}\right).$$

Si l'on pose

$$\sqrt{\xi} = \frac{1}{\sqrt{U}}+\frac{i}{\sqrt{V}}, \qquad \sqrt{\eta} = \frac{1}{\sqrt{U}}-\frac{i}{\sqrt{V}},$$

(¹) *Voir*, par exemple, G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 422.

il vient

$$d\sigma^2 = \frac{4\,d\xi\,d\eta}{(\xi - \eta)^2}.$$

Par suite, si X, Y, Z sont des coordonnées cartésiennes rectangulaires ayant leur origine au centre de la sphère, les lignes (u) et (v) peuvent être définies par l'équation [1]

$$\sqrt{\frac{X + iY}{1 - Z}} \pm \sqrt{\frac{X + iY}{-1 - Z}} = \text{const.},$$

ou, en tenant compte de l'équation de la sphère,

$$4(X^2 + Y^2) + [2Z - a(X - iY)]^2 = 0 \qquad (a = \text{const.}).$$

Or, cette équation représente une famille de cônes du second degré homofocaux; mais, trois focales sont confondues avec la droite isotrope $Z = 0$, $X - iY = 0$; la quatrième est OZ. *Nous avons donc affaire à une dégénérescence imaginaire des coniques homofocales.* Nous laisserons de côté ce cas particulier, qui ne nous semble pas présenter grand intérêt.

20. *Revenons à* (73) *et supposons* $U'_2 V'_2 \neq 0$. On a nécessairement

$$U'_2 = 2aU''', \qquad V'_2 = 2aV''' \qquad (a = \text{const.} \neq 0).$$

Intégrant et tenant compte de (72), il vient

$$(80) \qquad U_2 = 2aU'' + b, \qquad V_2 = 2aV'' + b \qquad (b = \text{const},).$$

Portons dans (70)

$$(81) \qquad U_1^2 - 2aU''^2 - 2bU'' = V_1^2 - 2aV''^2 - 2bV'' = c \qquad (c = \text{const.}).$$

Si l'on remarque que

$$(82) \qquad \frac{dU_1}{dU} = \frac{U'_1}{U'} = U_2 = 2aU'' + b,$$

(1) *Voir* G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. I, nos 15 et 23.

ces équations s'écrivent

(83) $$\left(\frac{dU_1}{dU}\right)^2 = 2aU_1^2 + b^2 - 2ac, \qquad \left(\frac{dV_1}{dV}\right)^2 = 2aV_1^2 + b^2 - 2ac.$$

En multipliant U et V par une même constante, nous pouvons d'ailleurs supposer $2a = -1$; la première équation (83) devient alors, en changeant la valeur de c,

(84) $$\left(\frac{dU_1}{dU}\right)^2 + U_1^2 = c.$$

Supposons d'abord $c = 0$. Alors

$$\frac{dU_1}{dU} = iU_1, \qquad \frac{dV_1}{dV} = \pm iV_1.$$

D'où deux cas à considérer.

Premier cas : $\frac{dU_1}{dU} = iU_1$, $\frac{dV_1}{aV} = iV_1$. — Intégrons, en négligeant des constantes venant s'ajouter à U et V,

$$U_1 = e^{iU}, \qquad V_1 = e^{iV}.$$

Or, d'après (82), on a

(85) $$U'' = b - i\,e^{iU}, \qquad V'' = b - i\,e^{iV}.$$

Portant dans (69), il vient

$$-\frac{2\theta''}{\theta'} = i;$$

d'où

$$\theta = A\,e^{-i\frac{\alpha}{2}} + B \qquad (A, B = \text{const.}, A \neq 0).$$

D'autre part, en intégrant (85), on a

$$U'^2 = 2bU - 2e^{iU} + d, \qquad V'^2 = 2bV - 2e^{iV} + d'.$$

Portons dans (66), il vient

(86) $$\frac{4i}{A} e^{B + Ae^{-i\frac{\alpha}{2}} + i\frac{\alpha}{2}} + 2b - \frac{i}{2}(d + d') - ib\alpha = 0,$$

égalité impossible.

Deuxième cas : $\frac{dU_1}{dU} = iU_1$, $\frac{dV_1}{dV} = -iV_1$. — Comme précédemment, on a

$$U_1 = e^{iU}, \qquad V_1 = e^{-iV};$$

$$U'' = b - i e^{iU}, \qquad V'' = b + i e^{-iV};$$

$$\frac{\theta''}{\theta'} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}, \quad \theta' = \frac{m}{2\cos\frac{\alpha}{2}}, \quad e^{\theta} = A\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^m \quad (A, m = \text{const.} \neq 0),$$

$$U'^2 = 2bU - 2e^{iU} + d, \qquad V'^2 = 2bV - 2e^{-iV} + d'.$$

Portons dans (66)

$$(87) \quad \frac{4A}{m}\cos\frac{\alpha}{2}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^m + 2b + b\alpha\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} + \frac{d+d'}{2}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = 0.$$

A cause du terme en $\alpha\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}$, il faut évidemment que b soit nul. Mais alors, si l'on fait $\alpha = 0$, il vient $A = 0$, *ce qui ne peut être.*

Revenons à l'équation (84) *en supposant* $c \neq 0$. Nous avons, en négligeant des constantes devant s'ajouter à U et V, et multipliant u et v par une même constante,

$$U_1 = \cos U, \qquad V_1 = \cos V.$$

Puis, d'après (82),

$$U'' = b + \sin U, \qquad V'' = b + \sin V.$$

D'où

$$-\frac{2\theta''}{\theta'} = -\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}, \qquad \theta' = \frac{m}{2\cos\frac{\alpha}{2}}, \qquad e^{\theta} = A\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]^m;$$

$$U'^2 = 2bU - 2\cos U + d, \qquad V'^2 = 2bV - 2\cos V + d'.$$

Portons dans (66), *nous retombons sur* (87), *c'est-à-dire sur une impossibilité.*

21. Notre discussion est maintenant terminée et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Les seuls réseaux (σ) *isothermes sont :*

1° *Les réseaux de loxodromies ;*

2° *Les réseaux* (σ') *du* n° 15 (II);
3° *Les réseaux des cercles;*
4° *Les réseaux de coniques sphériques homofocales.*

Nous avons étudié précédemment les systèmes triples orthogonaux qui résultent des trois premières de ces catégories de réseaux. Nous allons donc seulement nous occuper un peu de la quatrième. Nous nous bornerons à calculer les systèmes (T) correspondants.

22. Partons de la famille de cônes homofocaux

$$\frac{x^2}{m-\lambda}+\frac{y^2}{n-\lambda}+\frac{z^2}{p-\lambda}=0. \tag{88}$$

Si λ_1 et λ_2 sont les deux racines de cette équation en λ, on a

$$\left\{\begin{aligned} x^2&=\frac{(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)}{(n-m)(p-m)},\\ y^2&=\frac{(n-\lambda_1)(n-\lambda_2)}{(p-n)(m-n)},\\ z^2&=\frac{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)}{(m-p)(n-p)}\end{aligned}\right. \tag{89}$$

et

$$d\sigma^2=h_1^2\,d\lambda_1^2+h_2^2\,d\lambda_2^2,$$

avec

$$h_1^2=\frac{\lambda_1-\lambda_2}{f(\lambda_1)},\qquad h_2^2=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{f(\lambda_2)},\qquad f(\theta)=4(m-\theta)(n-\theta)(p-\theta). \tag{90}$$

Cherchons les variables canoniques u *et* v. Soit

$$\lambda_1=\mathrm{U},\qquad \lambda_2=\mathrm{V};$$

on doit avoir (*Th.*, n° 16)

$$\mathrm{U}'^2\frac{\partial(h_1^2)}{\partial\lambda_2}\mathrm{V}'=\mathrm{V}'^2\frac{\partial(h_2^2)}{\partial\lambda_1}\mathrm{U}',$$

ou

$$\frac{\mathrm{U}'}{f(\lambda_1)}=\frac{\mathrm{V}'}{f(\lambda_2)}=\text{const.}=1,\qquad \text{par exemple.}$$

D'où

$$u=\int\frac{d\lambda_1}{f(\lambda_1)},\qquad v=\int\frac{d\lambda_2}{f(\lambda_2)}. \tag{91}$$

Écrivons maintenant le Tableau des neuf cosinus. Nous avons d'abord

$$
(92)\qquad \begin{cases} X_2 = \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{(m-\lambda_1)(m-\lambda_2)}, \\[2ex] Y_2 = \dfrac{1}{\beta}\sqrt{(n-\lambda_1)(n-\lambda_2)}, \\[2ex] Z_2 = \dfrac{1}{\gamma}\sqrt{(p-\lambda_1)(p-\lambda_2)}, \end{cases}
$$

en posant, pour abréger l'écriture,

$$
(93)\qquad \begin{cases} \alpha = \sqrt{(n-m)(p-m)}, \\ \beta = \sqrt{(p-n)\,m-n)}, \\ \gamma = \sqrt{(m-p)(n-p)}. \end{cases}
$$

Puis

$$
X = \frac{1}{h_1}\frac{\partial X_2}{\partial \lambda_1} = \frac{1}{2h_1}\frac{X_2}{\lambda_1 - m},
$$

d'où les formules suivantes :

$$
(94)\qquad X = \frac{1}{2h_1}\frac{X_2}{\lambda_1 - m}, \qquad Y = \frac{1}{2h_1}\frac{Y_2}{\lambda_1 - n}, \qquad Z = \frac{1}{2h_1}\frac{Z_2}{\lambda_1 - p};
$$

$$
(95)\qquad X_1 = \frac{1}{2h_2}\frac{X_2}{\lambda_2 - m}, \qquad Y_1 = \frac{1}{2h_2}\frac{Y_2}{\lambda_2 - n}, \qquad Z_1 = \frac{1}{2h_2}\frac{Z_2}{\lambda_2 - p}.
$$

Système (T_1). — Nous avons

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \int X^2\, d\rho + X_1^2\, d\rho_1 + X_2^2\, d\rho_2 = \rho_2 + \int X^2\, du + X_1^2\, dv, \\
y_1 &= \int XY\, d\rho + X_1 Y_1\, d\rho_1 + X_2 Y_2\, d\rho_2 = \int XY\, du + X_1 Y_1\, dv, \\
z_1 &= \int XZ\, d\rho + X_1 Z_1\, d\rho_1 + X_2 Z_2\, d\rho_2 = \int XZ\, du + X_1 Z_1\, dv.
\end{aligned}
$$

On trouve, après des calculs que nous ne reproduisons pas,

$$
(96)\qquad \begin{cases} x_1 = \rho_2 + \dfrac{1}{4\alpha^2}\log\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{(\lambda_1-m)(\lambda_2-m)}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{1}{4\alpha\beta}\log\dfrac{\sqrt{(\lambda_1-m)(\lambda_2-n)}-\sqrt{(\lambda_1-n)(\lambda_2-m)}}{\sqrt{(\lambda_1-m)(\lambda_2-n)}+\sqrt{(\lambda_1-n)(\lambda_2-m)}}, \\[2ex] z_1 = \dfrac{1}{4\alpha\gamma}\log\dfrac{\sqrt{(\lambda_1-m)(\lambda_2-p)}-\sqrt{(\lambda_1-p)(\lambda_2-m)}}{\sqrt{(\lambda_1-m)(\lambda_2-p)}+\sqrt{(\lambda_1-p)(\lambda_2-m)}}. \end{cases}
$$

Pour avoir les systèmes (T_2) et (T_3), il suffit de permuter circulairement les lettres x, y, z et m, n, p.

23. Il est facile de former l'équation de la surface $\rho_2 = 0$, par exemple du système (T_1). Il suffit d'éliminer λ_1 et λ_2 entre les équations précédentes, ce qui n'offre pas grande difficulté. On obtient, à une homothétie et à une translation près,

$$e^{\alpha x}(\cos i\gamma z - \cos i\beta y) = 1.$$

D'où l'on déduit le théorème suivant :

La surface

$$e^{ax}(\cos by - \cos cz) = 1 \tag{97}$$

engendre une famille de Lamé dans une translation parallèle à Ox, *sous la seule condition* $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Nous avons donné autre part une vérification directe de cette propriété [1].

Les lignes de courbure de la surface précédente ont pour représentations sphériques les ellipses et hyperboles homofocales, sections de la sphère par les cônes homofocaux

$$\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\frac{1}{c^2} + \lambda} + \frac{z^2}{-\frac{1}{b^2} + \lambda} = 0.$$

III. — Réseaux (σ) représentations sphériques de surfaces à courbure totale constante.

24. On est conduit à des calculs entièrement analogues à ceux du paragraphe II quand on cherche les réseaux (σ) représentations sphériques de surfaces à courbure totale constante.

---

[1] J. HAAG, *Sur les équations aux variables mêlées*, etc. (*Bull. des Sc. math.*, janvier 1912).

On sait ([1]) qu'un tel réseau a un élément linéaire de la forme

$$d\sigma^2 = \sin^2\omega\, du^2 + \cos^2\omega\, dv^2, \tag{98}$$

la fonction ω devant vérifier l'équation

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} = \sin\omega\,\sin\omega. \tag{99}$$

Pour qu'on ait affaire à un réseau (σ), il faut encore et il suffit que ω *ne dépende que d'une seule variable* α *de la forme* $\mathrm{U}+\mathrm{V}$. Moyennant cette hypothèse, l'équation (99) devient

$$\omega''(\mathrm{U}'^2 - \mathrm{V}'^2) + \omega'(\mathrm{U}'' - \mathrm{V}'') = \sin\omega\cos\omega, \tag{100}$$

équation analogue à (66). Différentions en supposant α constant et conservons les notations du paragraphe II, il vient

$$2\omega''(\mathrm{U}'' + \mathrm{V}'') + \omega'(\mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1) = 0. \tag{101}$$

On obtient une première solution en supposant $\mathrm{U}'' = -\mathrm{V}'' = \text{const.}$, ce qui conduit à distinguer deux cas :

I. $\mathrm{U} = au$, $\mathrm{V} = bv$, $\alpha = au + bv$. — La fonction ω est donnée par

$$\omega''(a^2 - b^2) = \sin\omega\cos\omega,$$

et conduirait à la *représentation sphérique des hélicoïdes à courbure constante*.

II. $\mathrm{U} = u^2$, $\mathrm{V} = -v^2$, $\alpha = u^2 - v^2$. — La fonction ω est donnée par

$$4(\omega''\alpha + \omega') = \sin\omega\cos\omega. \tag{102}$$

L'intégration de cette équation donnerait une nouvelle solution ; malheureusement, nous n'avons pu l'effectuer.

25. *Supposons maintenant* $\mathrm{U}'' + \mathrm{V}'' \neq 0$. Comme au n° 18, cela entraîne

$$\omega''(\mathrm{U}_1 + \mathrm{V}_1) \neq 0. \tag{103}$$

([1]) *Cf.* G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 378.

De l'équation (102) on déduit ensuite

$$(104)\qquad (U''+V'')(U_2-V_2)+V_1^2-U_1^2=0.$$

On peut satisfaire à cette équation, en prenant

$$U_1=V_1=a=\text{const.}\neq 0.$$

En procédant comme au n° 18, on constate que ω devrait alors vérifier les deux équations différentielles

$$\omega''\alpha+\omega'=0,\qquad \sin\omega\cos\omega=\frac{K\omega'}{\alpha}\qquad (K=\text{const.}).$$

Or, le lecteur vérifiera sans peine qu'elles sont incompatibles. Il nous faut donc supposer $V_1^2-U_1^2\neq 0$ et par suite $U_2-V_2\neq 0$.

Différentions (104), par rapport à u,

$$(105)\qquad U''U_2'-U_1U_1'=U'''V_2-V''U_2',$$

puis, par rapport à v,

$$(106)\qquad U'''V_2'-V'''U_2'=0.$$

En procédant comme au n° 19, on constate que $U'''V'''$ doit être différent de zéro. On peut essayer de vérifier (106) en prenant

$$U_2'=V_2'=0;$$

d'où, en tenant compte de (105),

$$U_2=a,\qquad V_2=-a;\qquad U_1=aU,\qquad V_1=-aV.$$

Portons dans (104)

$$2U''-aU^2=-(2V''+aV^2)=b.$$

En continuant comme au n° 19, on est conduit aux deux équations

$$\alpha\omega''+\omega'=0,\qquad \frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega'}=\frac{a}{6}\alpha^2+\frac{c'-c}{\alpha},$$

qui doivent être vérifiées simultanément par ω. Or, il est aisé de voir que ces équations sont incompatibles.

26. Dès lors, supposons $U'_2 V'_2 \neq 0$. Nous avons

$$U'_2 = 2aU''', \qquad V'_2 = 2aV''' \qquad (a = \text{const.} \neq 0).$$

Intégrons, en tenant compte de (105),

$$U_2 = 2aU'' + b, \qquad V_2 = 2aV'' - b.$$

Portons dans (104)

$$U_1^2 - 2aU''^2 - 2bU'' = V_1^2 - 2aV''^2 + 2bV'' = c \qquad (c = \text{const.});$$

équations qui se ramènent, comme au n° 20, aux deux suivantes :

$$(107) \qquad \left(\frac{dU_1}{dU}\right)^2 + U_1^2 = \left(\frac{dV_1}{dV}\right)^2 + V_1^2 = c.$$

Supposons d'abord $c = 0$. Nous sommes conduits à distinguer deux cas. Le premier $\left(\frac{dU_1}{dU} = iU_1, \frac{dV_1}{dV} = iV_1\right)$ nous conduit à

$$\omega = Ae^{-i\frac{\alpha}{2}} + B, \qquad \frac{\sin\omega\cos\omega}{\omega'} = 2b - ib\alpha - i\left(\frac{d - d'}{2}\right),$$

égalités manifestement incompatibles. Passons au second cas : $\frac{dU_1}{dU} = iU_1, \frac{dV_1}{dV} = -iV_1$. On tire successivement

$$U_1 = e^{iU}, \qquad V_1 = e^{-iV};$$

$$U'' = b - ie^{iU}, \qquad V'' = -b + ie^{-iV};$$

$$\frac{\omega''}{\omega'} = -\frac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2}, \qquad \omega' = \frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad \omega = \log\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{4}\right)^m + \frac{1}{2i}\log A;$$

$$U'^2 = 2bU - 2e^{iU} + d, \qquad V'^2 = -2bV - 2e^{-iV} + d'.$$

Portons dans (100), en y remplaçant $\sin\omega\cos\omega$ par $\frac{e^{2i\omega} - e^{-2i\omega}}{4i}$; il vient, en posant $2im = n$,

$$(108) \quad \frac{\sin\alpha}{2}\left[A^2\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{4}\right)^n - \left(\cot\frac{\alpha}{4}\right)^n\right] = An\left(2b - b\alpha\cot\frac{\alpha}{2} + \frac{d' - d}{2}\cot\frac{\alpha}{2}\right).$$

A cause du terme en $\alpha\cot\frac{\alpha}{2}$, il faut que b soit nul. Si l'on pose alors $\tang \frac{\alpha}{4} = t$, l'équation devient

$$\frac{2t}{1+t^2}\left(A^2 t^n - \frac{1}{t^n}\right) = K \frac{1-t^2}{2t}, \qquad \left[K = \frac{An(d'-d)}{2}\right]$$

ou

$$A^2 t^{2n} - 1 = \frac{K}{4}(1-t^4)t^{n-2}.$$

Cette égalité est vérifiée identiquement pour

$$\begin{array}{lll} A^2 = 1, & n = 2, & K = -4, \\ A^2 = 1, & n = -2, & K = 4. \end{array}$$

Prenons, par exemple, *la solution* $A = 1$, $n = 2$, $K = -4$. Elle nous donne successivement

$$e^{2i\omega} = \tang^2 \frac{\alpha}{4}, \qquad \cos^2\omega = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \qquad \sin^2\omega = -\cot^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$du^2 = \frac{dU^2}{\lambda + 2 - 2e^{iU}}, \qquad dv^2 = \frac{dV^2}{\lambda - 2 - 2e^{-iV}},$$

où λ désigne une constante arbitraire que nous substituons aux deux constantes d et d' liées par la relation $d' - d = -4$. Si, pour faire disparaître des imaginaires, nous posons

$$iU = \xi, \qquad iV = -\eta,$$

nous obtenons finalement l'élément linéaire suivant :

$$(109) \qquad d\sigma^2 = \frac{1}{e^{\xi-\eta} + e^{\eta-\xi} - 2}\left[\frac{(e^{\xi-\eta} + e^{\eta-\xi} + 2)\,d\xi^2}{2e^{\xi} - 2 - \lambda} + \frac{4\,d\eta^2}{\lambda - 2 - 2e^{\eta}}\right].$$

Il est réel, pour ξ et η réels, tant qu'on a

$$e^{\xi} > \frac{\lambda}{2} + 1, \qquad e^{\eta} < \frac{\lambda}{2} - 1,$$

ce qui n'est possible que si $\lambda > 2$.

La solution $A = -1$, $n = 2$, $K = -4$ se déduit de la précédente par l'échange de d et d', $\cos^2\omega$ et $\sin^2\omega$, c'est-à-dire en somme par l'échange des variables u et v. Quant à la solution $A=1$, $n=-2$, $K=4$, elle équivaut à un simple changement de signe sur ω et ne donne non plus rien de nouveau.

Il ne nous reste plus qu'à examiner le cas où, dans (107), *on suppose* $c \neq 0$. En multipliant u et v par une même constante, on peut supposer $c=1$. D'où

$$U_1 = \cos U, \qquad V_1 = \cos V; \qquad U'' = b + \sin U, \qquad V'' = -b + \sin V;$$

$$\frac{\omega''}{\omega'} = -\frac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2}, \qquad \omega' = \frac{m}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad \omega = \log\left(\operatorname{tang}\frac{\alpha}{4}\right)^m + \frac{1}{2i}\log A;$$

$$U'^2 = 2bU - 2\cos U + d, \qquad V'^2 = -2bV - 2\cos V + d'.$$

En portant dans (100), on retombe sur (108). On en conclut la même valeur que précédemment pour ω et l'on obtient l'élément linéaire

$$(110) \qquad d\sigma^2 = \cot^2\left(\frac{U+V}{2}\right)\frac{dU^2}{\lambda - 4\sin^2\frac{U}{2}} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{U+V}{2}\right)}\frac{dV^2}{-\lambda - 4\cos^2\frac{V}{2}}.$$

En résumé, *les réseaux* (σ), *représentations sphériques de surfaces à courbure totale constante, sont :*

1° *Les représentations sphériques d'hélicoïdes à courbure constante ;*

2° *Les réseaux pour lesquels la fonction* ω *ne dépend que de* $u^2 - v^2$ *et doit vérifier l'équation* (102);

3° *Les réseaux dont l'élément linéaire est* (109);

4° *Les réseaux dont l'élément linéaire est* (110).

Il convient d'observer que les équations finies de ces réseaux ne peuvent être obtenues que pour la première solution. Pour les trois autres, il faudrait encore intégrer des équations de Riccati bien connues.