

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

COLLET

Intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction

Annales scientifiques de l'É.N.S. 1^{re} série, tome 7 (1870), p. 7-57

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1870_1_7_7_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1870, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

INTÉGRATION
DES ÉQUATIONS SIMULTANÉES

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DU PREMIER ORDRE D'UNE SEULE FONCTION,

PAR M. COLLET,
DOCTEUR ÈS SCIENCES.

Le problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre a été résolu généralement par Cauchy (*) et Jacobi. Ce dernier, considérant d'abord la question proposée comme un cas particulier du problème de Pfaff (**), lui a appliqué la méthode de résolution relative à ce dernier problème, en démontrant toutefois qu'il suffit alors d'intégrer le premier des n systèmes d'équations qui se présentent dans le cas général (***). Plus tard, Jacobi a donné, d'abord pour le cas de quatre variables (****), puis ensuite pour le cas

(*) CAUCHY, *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II.

(**) PFAFF, *Mémoires de Berlin*, 1814. — JACOBI, *Journal de Crelle*, t. II.

(***) JACOBI, *Journal de Crelle*, t. XVII.

(****) *Vorlesungen für Dynamik*.

général (*), une méthode qui se prête facilement à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une même fonction, problème qui se présente dans différentes théories mathématiques, en particulier dans la recherche des intégrales intermédiaires des équations aux dérivées partielles du second ordre (**) et dans la recherche du facteur intégrant des expressions différentielles du premier ordre. Il y a plus, la méthode même de Jacobi, pour l'intégration d'une seule équation, exige la considération de systèmes successifs d'équations linéaires aux dérivées partielles, et dont il faut trouver une solution commune. Cette solution s'obtient, eu égard à la forme des équations, en appliquant un théorème de Jacobi qui est l'analogue de celui établi par Bour dans son *Mémoire sur l'intégration des équations de la Dynamique* (***), où il l'emploie pour la simplification du problème, au moyen des solutions particulières antérieurement déterminées. On peut d'ailleurs étendre à des équations homogènes quelconques, satisfaisant toutefois aux conditions d'intégrabilité, la méthode de Jacobi relative aux systèmes auxiliaires, en dirigeant les calculs de façon à obtenir la solution complète du système considéré : c'est ce qu'a fait Boole (****) qui, abordant directement la question, est arrivé à des résultats conformes à ceux qui résultent de la méthode de Jacobi. Quant au problème de l'intégration des équations simultanées quelconques, il a été considéré pour la première fois par Bour dans son *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles*.

(*) *Nova methodus pro integratione*.... (*Journal de Crelle*, t. LX).

(**) AMPÈRE, *Mémoire sur l'intégration* (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XI et XII).

(***) BOUR, *Mémoires des Savants étrangers*, 1856.

(****) G. BOOLE, *Philosophical transactions*, 1863.

§ I. — *Énoncé du problème.*

Le problème que nous nous proposons de résoudre est le suivant :

Étant données les relations

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_m = 0$$

entre une fonction V, les variables q_1, q_2, \dots, q_n dont elle dépend et les dérivées de V par rapport à ces mêmes variables, trouver l'expression de V en fonction de q_1, q_2, \dots, q_n qui satisfait aux équations proposées.

Nous supposerons toujours, dans la suite, que les équations proposées ne renferment pas la fonction cherchée; dans le cas contraire, on la ferait disparaître par un changement de variable, en posant

$$U = tV, \quad \text{d'où} \quad \frac{dU}{dq_i} = t \frac{dV}{dq_i}, \quad \frac{dU}{dt} = V,$$

U étant la nouvelle fonction cherchée et t une nouvelle variable indépendante.

Si nous considérons maintenant que les valeurs des dérivées partielles p_1, p_2, \dots, p_n de la fonction V, prises respectivement par rapport à q_1, q_2, \dots, q_n , tout en satisfaisant aux équations proposées, devront aussi être telles que l'expression $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n$ soit la différentielle totale dV , nous en concluons que le problème proposé peut encore s'énoncer comme il suit :

Étant données m relations

$$f_1 = 0, f_2 = 0, \dots, f_m = 0$$

entre les variables q_1, q_2, \dots, q_n et les dérivées partielles correspondantes p_1, p_2, \dots, p_n de la fonction V, trouver entre les mêmes quantités $n - m$ autres relations qui, jointes aux premières, permettent de déterminer pour p_1, p_2, \dots, p_n des valeurs en fonction de q_1, q_2, \dots, q_n qui rendent l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ une différentielle exacte. La fonction V sera donnée par l'intégration de cette expression.

La méthode que nous allons exposer pour le cas de m équations comprend le cas particulier de l'intégration d'une seule équation.

§ II. — *Des relations qui expriment que $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ est une différentielle exacte.*

L'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ sera une différentielle exacte si, pour deux quelconques p_i et p_k des quantités p_1, p_2, \dots, p_n , on a la relation

$$(1) \quad \left(\frac{dp_k}{dq_i} \right) = \left(\frac{dp_i}{dq_k} \right),$$

les parenthèses indiquant des dérivées totales.

Supposons que p_i et p_k soient exprimés en fonction de q_1, q_2, \dots, q_n et d'un certain nombre des quantités p_1, p_2, \dots, p_n ; soient p_λ, p_μ, \dots celles de ces dernières quantités qui entrent dans p_i ou p_k : la condition (1) devient alors, en développant,

$$\frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_\lambda} \left(\frac{dp_\lambda}{dq_i} \right) + \frac{dp_k}{dp_\mu} \left(\frac{dp_\mu}{dq_i} \right) + \dots = \frac{dp_i}{dq_k} + \frac{dp_i}{dp_\lambda} \left(\frac{dp_\lambda}{dq_k} \right) + \frac{dp_i}{dp_\mu} \left(\frac{dp_\mu}{dq_k} \right) + \dots,$$

ou bien, au moyen des conditions analogues à la précédente (1),

$$(2) \quad \frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_\lambda} \left(\frac{dp_i}{dq_\lambda} \right) + \frac{dp_k}{dp_\mu} \left(\frac{dp_i}{dq_\mu} \right) + \dots = \frac{dp_i}{dq_k} + \frac{dp_i}{dp_\lambda} \left(\frac{dp_k}{dq_\lambda} \right) + \frac{dp_i}{dp_\mu} \left(\frac{dp_k}{dq_\mu} \right) + \dots$$

Nous allons maintenant prouver que, dans cette égalité, ainsi que dans toutes ses analogues, on peut remplacer les dérivées totales qui y entrent par les dérivées partielles correspondantes.

On a, en effet, d'une manière générale,

$$(3) \quad \left(\frac{dp_m}{dq_{\alpha'}} \right) = \frac{dp_m}{dq_{\alpha'}} + \sum_{\alpha} \frac{dp_m}{dp_{\alpha}} \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\alpha'}} \right),$$

où α doit prendre successivement les valeurs des indices des quantités p qui entrent dans l'expression de p_m ; si $m = i$ ou k , α prend successivement les valeurs λ, μ, \dots . Au moyen de la formule (3), où m prend des valeurs convenables, l'égalité (2) devient la suivante :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_k}{dq_i} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_k}{dp_{\alpha'}} \frac{dp_i}{dq_{\alpha'}} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_k}{dp_{\alpha'}} \sum_{\alpha} \frac{dp_i}{dp_{\alpha}} \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\alpha'}} \right) \\ = \frac{dp_i}{dq_k} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_i}{dp_{\alpha'}} \frac{dp_k}{dq_{\alpha'}} + \sum_{\alpha'} \frac{dp_i}{dp_{\alpha'}} \sum_{\alpha} \frac{dp_k}{dp_{\alpha}} \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\alpha'}} \right), \end{array} \right.$$

où α' , comme α , doit prendre toutes les valeurs λ, μ, \dots . Si alors on réunit dans un même membre les deux sommes doubles en permutant les indices α et α' de l'une d'elles, on aura l'expression suivante :

$$\sum_{\alpha'} \sum_{\alpha} \frac{dp_k}{dp_{\alpha}} \frac{dp_i}{dp_{\alpha'}} \left[\left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\alpha'}} \right) - \left(\frac{dp_{\alpha'}}{dq_{\alpha}} \right) \right],$$

qui est identiquement nulle; donc l'égalité (4) se réduit à la suivante :

$$(5) \quad \frac{dp_k}{dq_i} - \frac{dp_i}{dq_k} + \sum_{\alpha} \left(\frac{dp_k}{dp_{\alpha}} \frac{dp_i}{dq_{\alpha}} - \frac{dp_i}{dp_{\alpha}} \frac{dp_k}{dq_{\alpha}} \right) = 0.$$

Pour établir cette formule, on n'a pas explicitement supposé que l'expression de p_k renfermât p_i , ni que celle de p_i pût contenir p_k ; mais il est clair que les raisonnements précédents subsistent complètement dans cette hypothèse, et, par suite, que la formule (5) est encore applicable. Dans le développement de cette formule, il ne faut pas oublier que les valeurs successives que prend α sont celles des indices des différentes variables p entrant explicitement dans p_i ou p_k , et que les valeurs de α répondant à p_i ne sont pas nécessairement les mêmes que celles qui sont relatives à p_k ; d'où il résulte que α ne doit pas prendre la valeur k dans la somme $\sum_{\alpha} \frac{dp_k}{dp_{\alpha}} \frac{dp_i}{dq_{\alpha}}$, et qu'il ne doit pas prendre la valeur i dans l'autre somme $\sum_{\alpha} \frac{dp_i}{dp_{\alpha}} \frac{dp_k}{dq_{\alpha}}$. La formule (5) développée sera donc

$$(6) \quad \frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_i} \frac{dp_i}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_{\lambda}} \frac{dp_i}{dq_{\lambda}} + \dots - \frac{dp_i}{dq_k} - \frac{dp_i}{dp_k} \frac{dp_k}{dq_k} - \frac{dp_i}{dp_{\lambda}} \frac{dp_k}{dq_{\lambda}} - \dots = 0;$$

et si p_k contient p_i sans que p_i contienne p_k , on aura alors plus simplement

$$(7) \quad \frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_i} \frac{dp_i}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_{\lambda}} \frac{dp_i}{dq_{\lambda}} + \dots - \frac{dp_i}{dq_k} - \frac{dp_i}{dp_{\lambda}} \frac{dp_k}{dq_{\lambda}} - \dots = 0.$$

En somme, il résulte de ce qui précède que les relations (5) devront être satisfaites par les valeurs de p_i et de p_k , quelle que soit la forme sous laquelle elles se présentent : que ces valeurs soient déduites des équations proposées, et alors les relations (5) donnent naissance à des conditions qui doivent être satisfaites par les équations proposées; ou bien qu'elles soient fournies par l'intégration, et alors les équations

considérées pourront précisément servir à la détermination de p_i , si, par exemple, p_k est supposé connu. En un mot, les formules dont la relation (5) est le type sont la base de toute la théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles simultanées du premier ordre.

La formule (5) peut revêtir d'autres formes dont la considération est nécessaire pour ce qui suit.

Pour les obtenir, supposons d'abord que p_i soit fourni par une équation de la forme suivante :

$$f_i(p_i, p_\lambda, p_\mu, \dots, q_1, q_2, \dots, q_n) = a_i,$$

a_i étant une constante déterminée ou arbitraire, et p_k pouvant entrer dans la fonction f_i ; p_k sera, d'après cela, une fonction de p_λ, p_μ, \dots , en même temps que des variables q_1, q_2, \dots, q_n . En dérivant les deux membres de l'égalité précédente successivement par rapport à q_m et à p_m , on déduira des équations obtenues les valeurs suivantes :

$$\frac{dp_i}{dq_m} = -\frac{\frac{df_i}{dq_m}}{\frac{df_i}{dp_i}}, \quad \frac{dp_i}{dp_m} = -\frac{\frac{df_i}{dp_m}}{\frac{df_i}{dp_i}};$$

et, si nous substituons ces valeurs dans la formule (5), en donnant à m des valeurs convenables, on en obtiendra la formule

$$(8) \quad \frac{df_i}{dq_k} + \sum_{\alpha} \left(\frac{dp_k}{dq_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} - \frac{dp_k}{dp_{\alpha}} \frac{df_i}{dq_{\alpha}} \right) = 0,$$

qui est équivalente à la précédente (5), et qui, par conséquent, peut la remplacer pour l'intégration. Les remarques énoncées précédemment au sujet des valeurs successives de α sont d'ailleurs applicables dans le cas actuel, aussi bien que dans le cas précédent.

Si nous supposons maintenant que p_k soit donné à son tour par une équation telle que $f_k = a_k$, on pourra, par un calcul analogue au précédent, transformer la formule (8) et lui donner la forme suivante :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{df_i}{dq_k} \frac{df_k}{dp_k} + \frac{df_i}{dq_i} \frac{df_k}{dp_i} + \frac{df_i}{dq_\lambda} \frac{df_k}{dp_\lambda} + \frac{df_i}{dq_\mu} \frac{df_k}{dp_\mu} + \dots \\ - \frac{df_k}{dq_k} \frac{df_i}{dp_k} - \frac{df_k}{dq_i} \frac{df_i}{dp_i} - \frac{df_k}{dq_\lambda} \frac{df_i}{dp_\lambda} - \frac{df_k}{dq_\mu} \frac{df_i}{dp_\mu} - \dots = 0. \end{array} \right.$$

Si nous posons

$$(10) \quad (f_i f_k) = \sum_{\alpha} \left(\frac{df_i}{dq_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\alpha}} - \frac{df_k}{dq_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \right),$$

l'équation (9) s'écrira simplement

$$(11) \quad (f_i f_k) = 0.$$

Telle est la troisième forme des relations déduites de la condition que l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ soit une différentielle exacte.

La formule (11) pouvait être établie directement en démontrant que, si l'expression $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n$ est une différentielle exacte, deux quelconques, f_i, f_k , des fonctions qui sont les premiers membres des équations, d'où les valeurs des p_1, p_2, \dots, p_n sont déduites, satisfont à la condition $(f_i f_k) = 0$.

Soient les deux équations $f_i = a_i, f_k = a_k$; si on les dérive par rapport à q_{α} , qu'on retranche les résultats après les avoir multipliés respectivement par $\frac{df_k}{dp_{\alpha}}, \frac{df_i}{dp_{\alpha}}$, et enfin qu'on prenne la somme des résultats obtenus en donnant à α les valeurs 1, 2, 3, ..., n, on aura l'égalité suivante :

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{df_i}{dq_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\alpha}} - \frac{df_k}{dq_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \right) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left[\frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\beta}} \left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) - \frac{df_k}{dp_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\beta}} \left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) \right],$$

où β , comme α , doit prendre successivement toutes les valeurs 1, 2, ..., n. Mais si, dans la deuxième partie du second membre, nous permutons les indices α et β , ce second membre pourra s'écrire

$$\sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\beta}} \left[\left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) - \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\beta}} \right) \right],$$

et cette quantité sera identiquement nulle si l'expression

$$p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$$

est une différentielle exacte. Dans ce cas, les fonctions f_i, f_k doivent donc, ainsi que nous l'avons annoncé, satisfaire à la condition

$$\sum_{\alpha} \left(\frac{df_i}{dq_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\alpha}} - \frac{df_k}{dq_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \right) = 0.$$

Dans les raisonnements précédents, on a supposé que la fonction cherchée V n'entrait pas dans les fonctions f_i, f_k ; si le contraire avait lieu, on serait conduit, par un calcul analogue, à des conditions dont la formule est la suivante :

$$(11 \text{ bis}) \quad \sum_{\alpha} \left[\left(\frac{df_i}{dq_{\alpha}} + p_{\alpha} \frac{df_i}{dV} \right) \frac{df_k}{dp_{\alpha}} - \left(\frac{df_k}{dq_i} + p_i \frac{df_k}{dV} \right) \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \right] = 0.$$

Partant de là, on pourrait, en raisonnant comme nous le ferons avec les relations (8) et (11), composer une méthode complète d'intégration où l'on ne supposerait pas que la fonction cherchée fût absente des équations proposées. Nous nous bornerons à cette simple indication et reviendrons immédiatement à la question, telle que nous l'avons posée.

De tout ce qui précède, il résulte que, *si le système des n équations distinctes,*

$$(\alpha) \quad f_1 = a_1, \dots, f_i = a_i, \dots, f_k = a_k, \dots, f_n = a_n,$$

où a_1, \dots, a_n sont des constantes déterminées ou arbitraires, est tel que les valeurs de p_1, p_2, \dots, p_n qu'on en déduit rendent l'expression

$$(\beta) \quad p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$$

une différentielle exacte, les relations (5), (8), (11) seront satisfaites pour toutes les valeurs des indices i et k .

La réciproque de cette proposition est vraie, c'est-à-dire que, si les relations (5), ou (8), ou (11) sont satisfaites en vertu des équations (α), l'expression (β) sera une différentielle exacte quand on y remplacera p_1, \dots, p_n par les valeurs déduites des équations (α).

Démontrons cette réciproque, pour les relations (11) en particulier, et supposons, en conséquence, que, pour deux quelconques, f_i, f_k , des fonctions f_1, f_2, \dots, f_n , on ait

$$(f_i f_k) = \sum_{\alpha} \left(\frac{df_i}{dq_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\alpha}} - \frac{df_k}{dq_i} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \right) = 0;$$

il faut prouver que l'on a aussi

$$\left(\frac{dp_k}{dq_i} \right) = \left(\frac{dp_i}{dq_k} \right).$$

En effet, d'après ce qui précède, nous avons

$$(f_i f_k) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\beta}} \left[\left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) - \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\beta}} \right) \right],$$

ce qui peut encore s'écrire, en explicitant tous les termes répondant à une combinaison α, β , des nombres $1, 2, \dots, n$,

$$(12) \quad (f_i f_k) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\beta}} - \frac{df_k}{dp_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\beta}} \right) \left[\left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) - \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\beta}} \right) \right].$$

Dans le second membre de cette égalité, nous avons $\frac{n(n-1)}{2}$ termes; d'ailleurs, en attribuant à i et k toutes les valeurs qui donnent des résultats distincts, nous aurons aussi $\frac{n(n-1)}{2}$ équations qui permettront de déterminer les valeurs des quantités telles que la suivante :

$$(13) \quad \left(\frac{dp_{\beta}}{dq_{\alpha}} \right) = \left(\frac{dp_{\alpha}}{dq_{\beta}} \right),$$

en fonction des expressions α analogues à $(f_i f_k)$. Je dis que *ces équations donneront pour les quantités cherchées (13) des valeurs déterminées qui seront des fonctions linéaires et homogènes des expressions telles que $(f_i f_k)$.*

Il suffit de montrer, pour cela, que le déterminant des équations (12) n'est pas nul; et je dis, d'ailleurs, qu'il n'est pas autre que le suivant :

$$\Delta = \sum \left(\pm \frac{df_1}{dp_1} \dots \frac{df_n}{dp_n} \right),$$

que l'on sait être différent de zéro, si les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n sont distinctes, comme on le suppose (*).

Cherchons, en effet, la valeur de la quantité (13) fournie par les équations (12); et, dans ce but, ordonnons le déterminant Δ suivant les produits des termes des lignes horizontales dont les rangs sont indiqués par les indices k et i : on aura

$$\Delta = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \left(\frac{df_k}{dp_{\alpha}} \frac{df_i}{dp_{\beta}} - \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_k}{dp_{\beta}} \right) \delta_{\alpha, \beta}^{k, i},$$

(*) JACOBI, *De determinantibus functionalibus.*

en désignant par $\delta_{\alpha,\beta}^{k,i}$ le déterminant mineur résultant du proposé par la suppression des colonnes verticales dont les rangs sont indiqués par les indices inférieurs α et β , et par la suppression des lignes horizontales de rangs k et i . Multipliant maintenant les deux membres de l'équation (12) par $\delta_{\alpha,\beta}^{k,i}$, et ajoutant membre à membre les équations obtenues en donnant à i et k les valeurs répondant aux diverses combinaisons des nombres de la suite 1, 2, ..., n pris deux à deux, si l'on remarque que l'on a identiquement

$$\sum_k \sum_i \left(\frac{df_k}{dp_{\alpha'}} \frac{df_i}{dp_{\beta'}} - \frac{df_i}{dp_{\alpha'}} \frac{df_k}{dp_{\beta'}} \right) \delta_{\alpha,\beta}^{k,i} = 0,$$

on aura pour résultat

$$\Delta \left[\left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) - \left(\frac{dp_\alpha}{dq_\beta} \right) \right] = \sum_k \sum_i \delta_{\alpha,\beta}^{k,i} (f_i f_k),$$

ce qui démontre ce que nous avons avancé. Par conséquent, si les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n sont telles que, pour deux quelconques d'entre elles, f_i, f_k , on ait la condition satisfaite $(f_i f_k) = 0$, comme Δ est nécessairement différent de zéro par hypothèse, nous en concluons que

$$\left(\frac{dp_\beta}{dq_\alpha} \right) - \left(\frac{dp_\alpha}{dq_\beta} \right) = 0,$$

et, par conséquent, que l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ est une différentielle exacte, ce qui démontre la proposition énoncée.

Remarque I. — Dans ce qui précède, on pourrait remplacer les équations

$$(14) \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \dots, \quad f_n = a_n$$

par n autres équations équivalentes aux précédentes, et qu'on en déduirait en les combinant entre elles d'une manière quelconque. Soient

$$(15) \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \dots, \quad F_n = 0,$$

ces nouvelles équations dont les premiers membres contiennent une ou plusieurs constantes a_1, a_2, \dots, a_n . Il est évident que, si les con-

stantes sont réellement considérées comme telles, deux quelconques, F_i, F_k , des fonctions F_1, F_2, \dots, F_n satisferont encore à la condition

$$(16) \quad (F_i F_k) = 0;$$

il y a plus, en prenant une fonction dans chacun des systèmes (14) et (15), je dis qu'on aura aussi

$$(17) \quad (F_i f_k) = 0;$$

car, de deux choses l'une : ou bien les équations $F_i = 0$ et $f_k - a_k = 0$ sont distinctes, ou bien elles rentrent l'une dans l'autre. Dans le premier cas, la relation (17) est évidente; dans le second, elle ne l'est pas moins, puisque, F_i étant alors une fonction de $f_k - a_k$, on a

$$(F_i f_k) = \frac{dF_i}{df_k} (f_k f_k),$$

et que le second membre de cette égalité est identiquement nul.

Je dis maintenant que les relations (16) et (17) ont encore lieu quand on considère les constantes comme des fonctions définies par les équations (14).

Si, en effet, nous enfermons entre crochets les expressions dans lesquelles cette hypothèse est introduite, on aura, d'après un théorème connu,

$$[(F_i F_k)] = (F_i F_k) + \sum_a [(F_i f_a)] \frac{dF_k}{da_a} + \sum_b [(f_b F_k)] \frac{dF_i}{da_b} + \sum_a \sum_b (f_b f_a) \frac{dF_i}{da_b} \frac{dF_k}{da_a}.$$

Mais, d'après le même théorème, on a aussi

$$[(F_i f_a)] = (F_i f_a) + \sum_\gamma (f_\gamma f_a) \frac{dF_i}{da_\gamma};$$

donc, enfin, on a bien, en vertu des conditions (11), (16), (17),

$$[(F_i F_k)] = 0.$$

On verrait de même que l'on a aussi

$$[(F_i f_k)] = 0.$$

Remarque II. — Considérons deux fonctions quelconques φ et ψ renfermant n variables indépendantes q_1, \dots, q_n et les dérivées d'une fonction

tion par rapport à ces mêmes variables, et proposons-nous de chercher ce que devient l'expression $(\varphi\psi)$ quand on change les variables données en un nombre égal d'autres x_1, x_2, \dots, x_n liées aux premières par des relations déterminées, quelconques d'ailleurs.

Soit u la fonction, p_1, p_2, \dots, p_n ses dérivées prises respectivement par rapport à q_1, q_2, \dots, q_n , et enfin v_1, v_2, \dots, v_n ses dérivées prises par rapport aux nouvelles variables x_1, x_2, \dots, x_n ; on aura, dans l'une ou l'autre hypothèse,

$$du = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n,$$

et

$$du = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + \dots + v_n dx_n.$$

Les seconds membres doivent devenir identiques quand on exprime les p et q en fonction des x_1, x_2, \dots, x_n , ou les v et x en fonction des q_1, q_2, \dots, q_n . Nous aurons ainsi

$$(18) \quad v_k = \sum_h p_h \frac{dq_h}{dx_k} \quad \text{et} \quad p_h = \sum_k v_k \frac{dx_k}{dq_h};$$

de même, en dérivant la fonction φ dans l'une ou l'autre hypothèse, on aura

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dq_i} &= \frac{d\varphi}{dx_1} \frac{dx_1}{dq_i} + \dots + \frac{d\varphi}{dx_n} \frac{dx_n}{dq_i} + \frac{d\varphi}{dv_1} \frac{dv_1}{dq_i} + \dots + \frac{d\varphi}{dv_n} \frac{dv_n}{dq_i}, \\ \frac{d\varphi}{dp_i} &= \frac{d\varphi}{dv_1} \frac{dv_1}{dp_i} + \dots + \frac{d\varphi}{dv_n} \frac{dv_n}{dp_i}. \end{aligned}$$

La fonction ψ donnerait des résultats analogues. On aura alors

$$\begin{aligned} (\varphi\psi) &= \sum_i \left(\frac{d\varphi}{dq_i} \frac{d\psi}{dp_i} - \frac{d\psi}{dq_i} \frac{d\varphi}{dp_i} \right) \\ &= \sum_i \sum_k \sum_{M'} \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_{M'}}{dp_i} \left(\frac{d\varphi}{dx_k} \frac{d\psi}{dv_{M'}} - \frac{d\psi}{dx_k} \frac{d\varphi}{dv_{M'}} \right) \\ &\quad + \sum_i \sum_k \sum_{M'} \frac{dv_k}{dq_i} \frac{dv_{M'}}{dp_i} \left(\frac{d\varphi}{dv_k} \frac{d\psi}{dv_{M'}} - \frac{d\psi}{dv_k} \frac{d\varphi}{dv_{M'}} \right), \end{aligned}$$

cette dernière partie pouvant d'ailleurs s'écrire de la façon suivante :

$$\sum_i \sum_k \sum_{M'} \frac{d\varphi}{dv_k} \frac{d\psi}{dv_{M'}} \left(\frac{dv_k}{dq_i} \frac{dv_{M'}}{dp_i} - \frac{dv_{M'}}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} \right).$$

Comme dans chacune des sommes triples précédentes, on peut commencer par les sommations relatives à l'indice i , nous nous proposerons d'abord de calculer les deux sommes suivantes :

$$\sum_i \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_M}{dp_i} \quad \text{et} \quad \sum_i \left(\frac{dv_k}{dq_i} \frac{dv_M}{dp_i} - \frac{dv_M}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} \right).$$

Pour la première, de l'identité

$$\sum_i p_i dq_i = \sum_k v_k dx_k,$$

on déduira la suivante :

$$dq_i = \sum_k \frac{dv_k}{dp_i} dx_k,$$

d'où l'on aura les équations

$$(19) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_h} \frac{dv_k}{dp_i} = 0,$$

$$(20) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} = 1,$$

dont la première en donne $n - 1$, quand on attribue successivement à h les valeurs $1, 2, \dots, n$, i étant excepté. Nous obtenons donc ainsi un système de n équations, et nous aurons n systèmes semblables en donnant à i successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$. Si l'on multiplie maintenant l'une quelconque des équations du système précédent par $\frac{dx_k}{dq_i}$, et qu'on fasse la somme des résultats obtenus en donnant à i les valeurs successives $1, 2, \dots, n$; si l'on opère de même pour toutes les équations du système précédent, et que l'on pose, en général,

$$\sum_i \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_M}{dp_i} = K_M, \quad \text{et} \quad \sum_i \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} = 1 + K_k,$$

on aura n équations qui seront données par la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_i} K_k = 0,$$

en attribuant à i successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$. Comme le déterminant de ce système de n équations ne peut être nul, les fonctions x_1, x_2, \dots, x_n étant supposées distinctes, on en déduira

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \dots, \quad K_n = 0,$$

ou, en d'autres termes,

$$\sum_i \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_{k'}}{dp_i} = 0, \quad \text{pour } k \geq k',$$

et

$$\sum_i \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dp_i} = 1, \quad \text{pour } k = k',$$

La première partie de l'expression $(\varphi\psi)$ transformée se réduira donc à la suivante :

$$\sum_k \left(\frac{d\varphi}{dx_k} \frac{d\psi}{dv_k} - \frac{d\psi}{dx_k} \frac{d\varphi}{dv_k} \right).$$

Occupons-nous maintenant de la seconde partie.

Si nous représentons par le symbole (k, k') la quantité $\sum_i \frac{dv_k}{dq_i} \frac{dv_{k'}}{dp_i}$, la quantité à calculer se représentera par l'expression $(kk') - (k'k)$. Le calcul de cette expression est basé sur la résolution du système de n équations que l'on obtient en donnant à h , dans la formule suivante,

$$(21) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_h} u_k = M_h,$$

successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$. La valeur de l'une des inconnues u_k sera de la forme

$$u_k = \sum_{h=1}^{h=n} C_{kh} M_h,$$

les quantités telles que C_{kh} pouvant d'ailleurs se déterminer immédiatement par cette simple remarque, que le système (21) deviendrait identique au système fourni par les formules (19) et (20) si toutes les quantités M_h s'annulaient, à l'exception de M_i qui devrait alors devenir

égal à l'unité; d'où il résulte que $C_{kh} = \frac{dv_k}{dp_k}$, et, par suite, que l'on a

$$(22) \quad u_k = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{dv_k}{dp_h} M_h.$$

Ceci posé, si nous considérons les valeurs de p_h et de p_i données par la formule (18), en les différentiant respectivement par rapport à q_i et q_h , puis égalant leurs valeurs, on aura l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_h} \frac{dv_k}{dq_i} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dq_h},$$

qui en donne n quand on attribue à h successivement les valeurs 1, 2, ..., n . Si nous posons, en général,

$$M_h = \sum_k \frac{dx_k}{dq_i} \frac{dv_k}{dq_h},$$

on obtiendra un système analogue au système (21), et qui se résoudra, par conséquent, par l'application de la formule (22). On obtiendra ainsi, pour une valeur quelconque de h ,

$$\frac{dv_k}{dq_i} = \sum_{k'} \frac{dx_{k'}}{dq_i} (k, k');$$

et, comme en donnant à i successivement les valeurs 1, 2, ..., n , on obtient encore un système analogue au système (21), on en déduira, par une nouvelle application de la formule (22), $(kk') = (k'k)$; donc la seconde partie de l'expression $(\varphi\psi)$ est identiquement nulle, et, par suite, nous pouvons conclure que, par le changement des variables q_1, q_2, \dots, q_n dans les suivantes x_1, x_2, \dots, x_n , l'expression

$$(\varphi\psi) = \sum_i \left(\frac{d\varphi}{dq_i} \frac{d\psi}{dp_i} - \frac{d\psi}{dq_i} \frac{d\varphi}{dp_i} \right)$$

se change dans la suivante :

$$(\varphi\psi)' = \sum_k \left(\frac{d\varphi}{dx_k} \frac{d\psi}{dv_k} - \frac{d\psi}{dx_k} \frac{d\varphi}{dv_k} \right),$$

qui a exactement la même forme que la première.

§ III. — *Des conditions que doivent satisfaire les équations proposées pour admettre une solution commune.*

Soit proposé d'intégrer le système suivant de m équations :

$$(23) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \dots, \quad f_m = 0,$$

f_1, f_2, \dots, f_m désignant des fonctions quelconques de $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$; le problème ne sera possible qu'autant que les fonctions considérées satisferont à des conditions dont la détermination résulte de ce qui précède. On a, en effet, démontré que, si l'on détermine au moyen d'un système de n équations de la forme

$$f_i = a_i,$$

des valeurs des p_1, p_2, \dots, p_n qui rendent l'expression

$$p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$$

une différentielle exacte, les fonctions f_1, f_2, \dots, f_n satisfont deux à deux à des conditions de la forme

$$(24) \quad (f_i, f_k) = 0;$$

et, comme la réciproque de cette proposition a également été établie, nous sommes en droit de conclure, relativement aux équations (23), qu'il est nécessaire et suffisant, pour que le système considéré admette une solution commune, que deux quelconques des fonctions f_1, f_2, \dots, f_m satisfassent à la condition (24).

La formule (24) donne donc $\frac{m(m-1)}{2}$ conditions qui doivent être satisfaites soit identiquement, soit en vertu des équations données (23), soit enfin en établissant de nouvelles relations entre les quantités $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$. Ainsi donc, dans ce dernier cas, qui est celui où deux quelconques des fonctions données ne satisfont pas à la condition (24), il n'en faut pas conclure que le problème soit sans solution; mais, posant l'expression (f_i, f_k) égale à une nouvelle fonction f_h , on devra adjoindre l'équation $f_h = 0$ aux équations proposées (23), dont le

nombre sera ainsi augmenté d'une unité. Mais alors la fonction f_h devra aussi, pour que le problème proposé soit possible, satisfaire aux conditions (24), en lui adjoignant successivement les m fonctions f_1, f_2, \dots, f_m . Si, de nouveau, pour l'une de ces dernières en combinaison avec f_h , on n'a pas $(f_i f_h) = 0$, on opérera comme précédemment, en posant $(f_i f_h) = f_{h'}$, et joignant l'équation $f_{h'} = 0$ aux précédentes. On opérera ainsi successivement jusqu'à ce que l'on soit parvenu à un système d'équations distinctes $f_1 = 0, \dots, f_m = 0, \dots, f_{m'} = 0$, telles que, pour deux quelconques d'entre elles, la condition $(f_i f_h) = 0$ soit satisfaite. Alors, si $m' \leq n$, le problème proposé est possible, c'est-à-dire que les équations considérées admettent une solution commune; mais, si $m' > n$, le problème est impossible, car, en éliminant p_1, p_2, \dots, p_n entre les m' équations précédentes, on aurait pour résultat $m' - n$ relations entre les variables q_1, \dots, q_n , ce qui ne peut arriver, puisque ces variables sont supposées indépendantes. On voit donc que l'on pourra arrêter les calculs précédents quand on aura n équations, et si alors elles ne satisfont pas toutes aux conditions énoncées, le problème est réellement impossible.

Si maintenant on recherche la véritable signification de la marche que nous venons d'indiquer, on voit qu'elle consiste à établir à chaque condition non satisfaite une nouvelle relation finie, c'est-à-dire libre de toute constante ou fonction arbitraire, entre les quantités $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$, ce qui restreint la généralité du problème; et on restreint ainsi de proche en proche la généralité du problème proposé jusqu'à le rendre possible, si cela se peut. On peut donc dire que, *si les conditions (24) ne sont pas immédiatement satisfaites, soit identiquement, soit en vertu des équations proposées, le problème est impossible à résoudre dans la généralité avec laquelle il est posé; qu'il peut parfois admettre des solutions plus particulières, à la condition toutefois d'établir de nouvelles relations entre les variables, ce qui en diminue la généralité.*

Nous verrons d'ailleurs dans la suite que l'introduction d'une nouvelle équation diminue d'une unité le nombre des constantes arbitraires entrant dans la solution complète.

Quoi qu'il en soit, on voit donc que l'on ramène le problème, quand il est susceptible de solution, à un autre plus particulier dont les équations satisfont toutes aux conditions d'intégrabilité, et qui pourra

être résolu dans toute sa généralité : nous n'aurons donc, dans la suite, que ce dernier cas à considérer.

§ IV. — *Des systèmes auxiliaires; leur composition et leurs propriétés.*

Après avoir déterminé les conditions que doivent remplir les équations proposées pour qu'elles puissent admettre une solution commune, nous avons à chercher les nouvelles relations qui, jointes aux précédentes, permettent de déterminer pour p_1, p_2, \dots, p_n des valeurs en fonction de q_1, q_2, \dots, q_n telles, que l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ soit une différentielle exacte. Le problème qu'on aura à résoudre pour la détermination de chacune des nouvelles relations en particulier pourra s'énoncer en général de la façon suivante :

Étant données entre les quantités $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ les relations suivantes :

$$(25) \quad f_1 = a_1, \quad f_2 = a_2, \quad \dots, \quad f_s = a_s,$$

qui satisfont aux conditions (24), trouver entre les mêmes quantités une nouvelle relation

$$f_{s+1} = a_{s+1},$$

qui satisfasse aussi à ces mêmes conditions.

Nous représentons par $a_1, a_2, \dots, a_s, a_{s+1}$ des constantes arbitraires, à l'exception des m premières, qui sont nulles; et, à propos de ces constantes, il importe de remarquer que ces nouvelles relations qui viennent s'adjoindre aux proposées conservent à la question toute sa généralité, eu égard à la constante arbitraire que chacune d'elles introduit dans le système des équations auxquelles elle vient se joindre.

Ceci posé, nous nous proposons de résoudre le problème que nous venons d'énoncer. La fonction cherchée f_{s+1} devra satisfaire à un système d'équations déduites des formules (8) ou (11), en donnant à k successivement les valeurs 1, 2, ..., s , et donnant à i la valeur $(s+1)$. On pourrait même se servir de la formule (5), et alors on se propose-

rait la détermination directe de p_{s+1} et non de f_{s+1} , ce qui, d'ailleurs, remplirait aussi bien le but que l'on se propose d'atteindre. Nous ferons actuellement usage de la formule (8), et pour cela nous supposons que des équations (25) on déduise pour p_1, p_2, \dots, p_s des valeurs en fonction de $p_{s+1}, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_n$, et des constantes a_1, a_2, \dots, a_s ; quant aux équations auxquelles la fonction f_{s+1} devra satisfaire, elles seront comprises dans la formule suivante :

$$(26) \quad \frac{df_{s+1}}{dq_k} + \sum_{a=s+1}^{a=n} \left(\frac{dp_k}{dq_a} \frac{df_{s+1}}{dp_a} - \frac{dp_k}{dp_a} \frac{df_{s+1}}{dq_a} \right) = 0,$$

où k prendra successivement les valeurs 1, 2, ..., s . Les équations ainsi obtenues auront une forme spéciale qui permettra d'en déterminer une solution commune. Chaque fonction cherchée devra donc satisfaire à un système d'équations simultanées, lequel système est dit *auxiliaire*, par opposition au système des équations proposées qui est dit *principal*. Si le système principal se compose de m équations satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, n étant le nombre des variables, les systèmes auxiliaires seront au nombre de $n - m$, et se composeront successivement de $m + 1, m + 2, \dots, n$ équations; ils se déduiront du précédent (26), en donnant successivement à s les valeurs $m, m + 1, \dots, n - 1$. Tous ces systèmes s'intégreront de la même façon, à cause de leur forme semblable, que nous appellerons *canonique*; et la recherche d'une solution particulière commune aux équations de l'un de ces systèmes s'effectuera au moyen des théorèmes qui suivent.

THÉORÈME I. — *Si $f_{s+1} = \varphi$ est une solution de l'une quelconque des équations du système (26), en remplaçant f_{s+1} par sa valeur φ dans une autre quelconque des équations du même système, si le résultat de la substitution n'est pas identiquement nul ou constant, il sera une nouvelle solution de la première équation considérée.*

Ce théorème est compris dans un autre plus général, et dont l'énoncé suit :

THÉORÈME II. — *Si φ et ψ sont deux fonctions de $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ assujetties à la condition que l'on ait $(\varphi, \psi) = 0$, et que l'on considère*

les deux équations simultanées

$$(\varphi f) = 0, \quad (\psi f) = 0,$$

où f est la fonction cherchée; si $f = f_1$ est une solution de la première de ces équations, par exemple, l'expression (ψf_1) résultant de la substitution de f_1 à f dans la seconde équation sera, si elle n'est identiquement nulle ou constante, une nouvelle solution de la première équation, solution qui peut d'ailleurs se réduire à une fonction de la précédente.

La démonstration des théorèmes qui précèdent est basée sur le lemme suivant :

LEMME. — Si f, φ, ψ désignent trois fonctions quelconques de $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, on aura identiquement

$$(27) \quad (f(\varphi\psi)) + (\varphi(\psi f)) + (\psi(f\varphi)) = 0.$$

En effet, nous avons

$$(\varphi\psi) = \sum_h \left(\frac{d\varphi}{dq_h} \frac{d\psi}{dp_h} - \frac{d\psi}{dq_h} \frac{d\varphi}{dp_h} \right),$$

et des formules analogues pour (ψf) et $(f\varphi)$. L'indice h de la formule précédente étant remplacé successivement par i et k , on en déduira facilement l'égalité suivante :

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} (\varphi(\psi f)) = \sum_{i,k} \left[\frac{d\varphi}{dq_k} \left(\frac{d\psi}{dq_i} \frac{d^2 f}{dp_k dp_i} - \frac{d\psi}{dp_i} \frac{d^2 f}{dp_k dq_i} \right) - \frac{d\varphi}{dp_k} \left(\frac{d\psi}{dq_i} \frac{d^2 f}{dq_k dp_i} - \frac{d\psi}{dp_i} \frac{d^2 f}{dq_k dq_i} \right) \right. \\ \left. - \frac{d\varphi}{dq_k} \left(\frac{df}{dq_i} \frac{d^2 \psi}{dp_k dp_i} - \frac{df}{dp_i} \frac{d^2 \psi}{dp_k dq_i} \right) + \frac{d\varphi}{dp_k} \left(\frac{df}{dq_i} \frac{d^2 \psi}{dq_k dp_i} - \frac{df}{dp_i} \frac{d^2 \psi}{dq_k dq_i} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

On obtiendra les développements de $(\varphi(f\varphi))$ et de $(f(\varphi\psi))$ en remplaçant, dans la formule précédente, les lettres φ, ψ, f successivement par les suivantes ψ, f, φ , puis par f, φ, ψ , et les indices h, i par i, k , et ensuite par k, h . On peut alors démontrer l'identité (27) en faisant voir que tous les termes en $d^2 f$, par exemple, s'entre-détruisent. Pour arriver à cette conclusion, il suffit de remarquer que les expressions $(\varphi(\psi f))$ et $(\psi(f\varphi))$ renferment seules des termes de l'espèce considérée; que les termes en question entrant dans la première de ces deux expressions

sont les mêmes en valeur absolue que ceux qui entrent dans la seconde; et enfin que les signes de ces premiers termes sont respectivement contraires des signes des seconds. Cette dernière assertion résulte de cette remarque que, dans l'égalité (28), tout terme contenant une dérivée seconde de f est positif si les deux variables par rapport auxquelles on dérive sont de même espèce, négatif dans le cas contraire; et que l'inverse a lieu pour les termes en $d^2\varphi$: comme dans la seconde expression f prend la place qu'occupe ψ dans la première, ce que nous avons avancé se trouve pleinement justifié. Ce que nous avons dit pour les termes en d^2f pouvant se répéter pour les termes en $d^2\varphi$ et en $d^2\psi$, la proposition énoncée est donc complètement démontrée.

Le second théorème énoncé se déduit immédiatement du lemme qui précède. En effet, si, comme on le suppose, on a identiquement $(\varphi\psi) = 0$, et que $f = f_i$ soit une solution de l'équation $(\varphi\psi) = 0$, on aura aussi l'identité $(\varphi f_i) = 0$; en conséquence, si dans la relation (27) on remplace f par f_i , on aura l'identité suivante :

$$(\varphi(\psi f_i)) = 0,$$

ce qui démontre bien que, dans le cas où l'expression (ψf_i) n'est pas identiquement nulle ou constante, elle est une solution de l'équation $(\varphi f) = 0$, ainsi qu'on l'avait annoncé.

Nous allons actuellement démontrer le premier théorème. Posons, pour cela,

$$\varphi = \varphi_i - p_k, \quad \psi = \psi_i - p_i,$$

ψ_i et φ_i étant deux fonctions des quantités p_{s+1}, \dots, p_n et des variables q_1, \dots, q_n , et k, i deux nombres quelconques de la suite $1, \dots, s$, d'où il résulte que les fonctions ψ_i et φ_i ne contiennent ni p_i , ni k_i ; si en outre la fonction f ne contient aussi que les quantités $p_{s+1}, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, ce qui est conforme au théorème en question, on aura, pour l'équation $(\varphi f) = 0$ développée,

$$(29) \quad \frac{df}{dq_k} + \sum_{\alpha=s+1}^{\alpha=n} \left(\frac{d\varphi_i}{dq_\alpha} \frac{df}{dp_\alpha} - \frac{d\varphi_i}{dq_\alpha} \frac{df}{dq_\alpha} \right) = 0;$$

l'équation $(\psi f) = 0$ conduira à une équation en ψ_i analogue à la pré-

cédente, k y étant remplacé par i ; enfin, la condition $(\varphi\psi) = 0$ deviendra alors

$$(30) \quad \frac{d\psi_i}{dq_k} - \frac{d\varphi_i}{dq_i} + \sum_{\alpha=s+1}^n \left(\frac{d\varphi_i}{dq_\alpha} \frac{d\psi_i}{dp_\alpha} - \frac{d\varphi_i}{dp_\alpha} \frac{d\psi_i}{dq_\alpha} \right) = 0.$$

Le théorème II démontré s'applique à l'équation (29) et à son analogue, quelles que soient les fonctions ψ_i et φ_i , pourvu qu'elles satisfassent à la condition exprimée par l'équation (30); si donc on considère pour ψ_i et φ_i les valeurs de p_i et de p_k exprimées en fonction des variables $p_{s+1}, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, l'équation (29) et celle qui lui est jointe rentrent alors dans la formule (26), et la condition (30) devient la condition (5) antérieurement établie, et qui démontre le premier théorème énoncé.

Remarquons en passant que l'on aurait pu supposer, dans tout ce qui précède,

$$\begin{array}{l} p_1 \text{ fonction de } p_2, p_3, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, \\ p_2 \quad \text{»} \quad \text{de } p_3, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, \\ \dots, \\ p_s \quad \text{»} \quad \text{de } p_{s+1}, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n; \end{array}$$

alors les équations d'un système auxiliaire n'auraient plus le même nombre de termes; mais les théorèmes précédents seraient encore applicables à ces équations, et, pour le démontrer, il suffirait de répéter les raisonnements précédents, en supposant toutefois que ψ_i contienne p_k et φ_i, p_i . Ce que nous dirons sur l'intégration des systèmes auxiliaires s'appliquera donc aussi bien à ce mode de composition qu'à celui que nous avons spécialement considéré.

§ V. — Intégration des systèmes auxiliaires.

Considérons le système auxiliaire déduit de la formule (26) en donnant à k successivement les valeurs 1, 2, ..., s ; nous avons à chercher une solution commune des équations de ce système, ce que nous ferons en appliquant les théorèmes précédemment démontrés.

Soit $f_{s+1} = \varphi_i$ une solution particulière de l'une des équations considérées, de la première par exemple; en substituant cette valeur de φ_i à

la place de f_{s+1} dans une autre équation du système, la seconde par exemple, le résultat de la substitution, s'il n'est pas nul ou constant, sera une nouvelle solution de la première équation; soit φ_2 ce résultat, on a

$$\varphi_2 = \frac{d\varphi_1}{dq_2} + \frac{dp_2}{dq_{s+1}} \frac{d\varphi_1}{dp_{s+1}} + \dots + \frac{dp_2}{dq_n} \frac{d\varphi_1}{dp_n} - \frac{dp_2}{dp_{s+1}} \frac{d\varphi_1}{dq_{s+1}} - \dots - \frac{dp_2}{dp_n} \frac{d\varphi_1}{dq_n}.$$

En opérant de nouveau avec φ_2 , comme on l'a fait avec φ_1 , ce qui revient à remplacer, dans l'égalité précédente, φ_1 par φ_2 , on aura pour résultat une nouvelle solution φ_3 de la première équation, à la condition toutefois que φ_3 ne soit pas nul ou constant. On continuera ainsi les substitutions successives jusqu'à ce que l'on arrive à un résultat ou nul, ou constant, ou fonction des résultats antérieurement obtenus, ainsi que des variables q_2, q_3, \dots, q_s , qui sont considérées comme constantes dans l'équation intégrée; et, à défaut des deux premières circonstances, la troisième se présentera toujours après un nombre limité d'opérations, puisque le nombre des solutions particulières distinctes de ladite équation est lui-même limité. Dans le cas d'un résultat nul, la fonction substituée est une solution commune des deux équations considérées; nous verrons bientôt l'usage que l'on ferait d'un résultat constant; enfin, dans le troisième cas, qui est en réalité le cas le plus général, si φ_μ est un résultat fonction des précédents $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu-1}$ et des variables q_2, \dots, q_s , une fonction quelconque ϖ de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu-1}, q_2, \dots, q_s$ sera encore une solution de la première équation; nous nous proposerons de déterminer la forme de cette fonction de façon qu'elle soit aussi une solution de la seconde équation. La condition à satisfaire pour cela se trouvera en remplaçant f_{s+1} par ϖ dans la seconde équation du système (26), et qui donnera, en tenant compte des valeurs de $\varphi_1, \dots, \varphi_\mu$,

$$(31) \quad 0 = \frac{d\varpi}{dq_2} + \frac{d\varpi}{d\varphi_1} \varphi_2 + \frac{d\varpi}{d\varphi_2} \varphi_3 + \dots + \frac{d\varpi}{d\varphi_{\mu-1}} \varphi_\mu,$$

équation dans laquelle $q_2, \varphi_1, \dots, \varphi_{\mu-1}$ sont les variables, et φ_μ une fonction connue de ces variables. Soit $\varpi_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\mu-1}, q_2)$ une solution de cette équation; en posant $f_{s+1} = \varpi_1$, on aura une solution commune des deux premières équations du système auxiliaire considéré, et il en sera de même d'une fonction quelconque de ϖ_1 , des autres solutions de

l'équation (31) et des variables q_3, \dots, q_s qui sont considérées comme constantes dans ces deux équations. Dans le cas que nous avons seulement indiqué, où la série des fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ se termine à une constante, on obtiendrait une solution commune en opérant comme précédemment, φ_μ se trouvant remplacé par la constante en question; mais, dans ce cas, on peut arriver beaucoup plus simplement au même résultat, en remarquant que $\varpi_1 = \varphi_{\mu-1} - c_1 q_2$ est une solution commune des deux équations considérées.

Ayant une solution commune de deux équations du système, nous allons nous en servir pour trouver une fonction qui soit à son tour une solution commune de trois équations du système considéré. Pour cela, nous substituerons ϖ_1 à la place de f_{s+1} dans la troisième équation, et le résultat de la substitution, s'il n'est nul ou constant, sera une nouvelle solution commune des deux premières; et opérant alors sur cette troisième équation comme on l'a fait précédemment sur la seconde, on déterminera une série de fonctions $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_\lambda$ qui seront des solutions communes des deux premières équations, la fonction ϖ_λ qui termine la série étant une fonction de $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{\lambda-1}$ et des variables q_3, q_4, \dots, q_s , à moins qu'elle ne soit nulle ou constante. Si elle était nulle, $\varpi_{\lambda-1}$ serait une solution commune des trois équations; si elle est constante et égale à c_2 , $\varpi_{\lambda-1} - c_2 q_3$ sera cette solution commune; mais, dans le cas général, on se proposera de satisfaire à la troisième équation par une fonction ψ de $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{\lambda-1}, q_3, \dots, q_s$, cette fonction étant d'ailleurs, quelle que soit sa forme, une solution commune des deux premières équations. L'équation à laquelle la fonction ψ doit satisfaire est la suivante :

$$(32) \quad 0 = \frac{d\psi}{dq_3} + \frac{d\psi}{d\varpi_1} \varpi_2 + \frac{d\psi}{d\varpi_2} \varpi_3 + \dots + \frac{d\psi}{d\varpi_{\lambda-1}} \varpi_\lambda.$$

En opérant sur cette équation comme on l'a fait sur la précédente (31), et en continuant de la même façon pour les diverses équations du système considéré, on obtiendra enfin une fonction f_{s+1} de $q_1, q_2, \dots, q_n, p_{s+1}, p_{s+2}, \dots, p_n$ qui sera une solution particulière commune de toutes les équations de ce système. Si l'on pose $f_{s+1} = a_{s+1}$, a_{s+1} étant une constante arbitraire, et que l'on joigne cette équation à celle que l'on a déjà (25), on obtiendra un système de $(s+1)$ équations entre les

quantités $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, et desquelles on pourra déduire les valeurs de p_1, p_2, \dots, p_{s+1} en fonction de $p_{s+2}, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$, valeurs qui serviront à la composition du système auxiliaire suivant dont dépend la détermination de f_{s+2} . En continuant ainsi, on parviendra à un système de n équations

$$(33) \quad f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \dots, \quad f_m = 0, \quad f_{m+1} = a_{m+1}, \dots, \quad f_n = a_n,$$

qui seront telles, que les valeurs qu'on en déduira pour p_1, p_2, \dots, p_n en fonction de q_1, \dots, q_n et des constantes a_{m+1}, \dots, a_n rendront l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$ une différentielle exacte.

La marche que nous venons de suivre pourrait être un peu modifiée, suivant la remarque qui termine le § IV; mais la modification serait plus marquée si l'on partait des équations (11) au lieu des équations (8) dont on s'est servi jusqu'alors. La méthode à laquelle on serait conduit présenterait sur la précédente l'avantage d'éviter les calculs d'élimination que celle-ci suppose et qui la rendent parfois impraticable.

Supposons qu'il s'agisse, par exemple, de la détermination de la fonction f_{s+1} , elle devra satisfaire au système auxiliaire donné par la formule suivante :

$$(34) \quad \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{df_h}{dp_i} \frac{df_{s+1}}{dq_i} - \frac{df_h}{dq_i} \frac{df_{s+1}}{dp_i} \right) = 0,$$

lorsque h prend successivement les valeurs 1, 2, ..., s .

L'intégration de ce système résultera alors de l'application du théorème II, et la marche à suivre sera analogue à la précédente.

On pourrait même généraliser ce qui précède, en supposant les systèmes auxiliaires composés d'équations rentrant dans les formules (26) et (27), et l'intégration s'effectuerait en appliquant tour à tour les théorèmes I et II.

Quelle que soit d'ailleurs la marche suivie, on obtiendra finalement pour p_1, p_2, \dots, p_n des valeurs contenant $n - m$ constantes arbitraires, et telles que, substituées dans l'expression

$$p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n,$$

elles la rendent une différentielle exacte dont l'intégrale sera la fonc-

tion cherchée V. Cette intégrale contiendra $n - m + 1$ constantes arbitraires, en comptant celle qui s'introduit par simple addition; et nous verrons dans la suite que cette solution, que nous appellerons *solution complète*, peut donner toutes les autres par la variation des constantes.

§ VI. — Remarque.

Avant de quitter le sujet dont nous nous sommes occupés jusqu'à présent, nous poserons une remarque qui nous est suggérée par la généralité même de la méthode qui précède, et qui est peut-être susceptible d'application. En examinant un peu les calculs précédents, on remarque facilement que les quantités, $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ y sont simplement considérées comme formant deux séries de variables conjuguées deux à deux, sans que nulle part intervienne la signification de dérivées partielles attachées aux lettres p_1, p_2, \dots, p_n . Si donc on fait abstraction de cette signification des lettres p_1, p_2, \dots, p_n , le problème proposé rentre dans cet autre plus général : *Étant données m relations entre les variables $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ conjuguées deux à deux, on se propose d'en déterminer $n - m$ autres qui, jointes aux premières, permettent d'exprimer n des variables considérées et dont deux ne soient pas conjuguées, en fonction des n autres, de façon que l'expression*

$$(35) \quad \sum_{i=1}^{i=n} (\pm r_i ds_i)$$

soit une différentielle exacte, r_1, r_2, \dots, r_n désignant les n variables choisies et qui sont déterminées en fonction des n autres s_1, s_2, \dots, s_n respectivement conjuguées des précédentes.

Les conditions que les relations données ou inconnues devront satisfaire varieront en général avec la forme de l'expression (35), et il en sera de même de l'intégrale obtenue. Mais, parmi les problèmes compris dans l'énoncé précédent, il en est qui présentent cette particularité remarquable, que les équations proposées doivent satisfaire aux mêmes conditions que dans le cas où il s'agit de former la différentielle exacte $\sum p_i dq_i$; et, en outre, les relations établies subséquemment entre les va-

riables p et q sont aussi les mêmes que dans le cas précédemment considéré. Ces problèmes sont ceux où la différentielle exacte à obtenir est de la forme $\sum_i p_i dq_i - \sum_h q_h dp_h$, i prenant des valeurs quelconques de la suite $1, 2, \dots, n$, et h toutes les autres. Mais l'intégrale différera dans tous les cas de celle obtenue pour $\sum p_i dq_i$; ses dérivées partielles seront les p_i et les q_h , ces derniers précédés du signe $-$; les variables correspondantes seront les q_i et les p_h . Si donc on considère simultanément deux problèmes dont les équations soient en nombre égal, et qui d'ailleurs soient telles, qu'on puisse passer des unes aux autres en remplaçant quelques-unes des variables indépendantes par leurs dérivées partielles correspondantes changées de signe, et ces dernières par les variables correspondantes et de même signe; alors, d'après ce qui précède, ces deux systèmes seront assujettis aux mêmes conditions, c'est-à-dire que, si l'un d'eux est intégrable, l'autre l'est aussi nécessairement; et, en outre, les nouvelles relations entre ces diverses quantités se déduiront les unes des autres par les mêmes changements que les équations proposées. Donc, en intégrant complètement l'un de ces systèmes, on aura immédiatement intégré d'autres systèmes présentant avec le premier les relations que nous avons dites, et pour la recherche de la solution complète desquels il ne reste plus qu'à effectuer la quadrature finale qui est différente dans chacun d'eux.

Démontrons maintenant ce que nous avons annoncé. Pour cela, il suffit de considérer le cas où, dans l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_n dq_n$, on remplace un terme unique $+ p_h dq_h$ par $\pm q_h dp_h$. Si nous considérons les conditions (5), (8), (11), elles s'appliquent au cas actuel en y changeant $+ p_h$ en $\pm q_h$ et $+ q_h$ en $+ p_h$; on trouvera alors facilement que les termes dépendant de l'indice h dans la formule (11), par exemple, se réduisent, après les changements indiqués, au groupe suivant :

$$\mp \left(\frac{df_k}{dq_h} \frac{df_i}{dp_h} - \frac{df_h}{dp_h} \frac{df_i}{dq_h} \right);$$

d'où l'on voit que les équations (11) conserveront leur forme normale dans l'hypothèse actuelle, si l'on prend le signe $+$ devant l'expression précédente, c'est-à-dire si l'on remplace $+ p_h dq_h$ par $- q_h dp_h$. On démontrerait de même que les équations (8) conservent, dans le cas actuel, leur forme primitive, et, par suite, que les systèmes auxiliaires ne

seront pas modifiés par les changements que nous venons d'indiquer. D'où il résulte bien que, sauf la quadrature finale, tous les problèmes dans lesquels l'expression à rendre une différentielle exacte se ramène à la suivante : $\sum_i p_i dq_i - \sum_h p_h dq_h$, sont résolus en même temps par la résolution de l'un quelconque d'entre eux.

Ce qui précède peut d'ailleurs être établi directement, et, pour cela, il suffit de démontrer que, si les conditions (32) sont telles, que les valeurs qu'on en déduit pour p_1, \dots, p_n en fonction de q_1, \dots, q_n rendent l'expression $p_1 dq_1 + \dots$ une différentielle exacte, ces mêmes équations fourniront pour q_1, p_2, \dots, p_n des valeurs en fonction de p_1, q_2, \dots, q_n qui rendront aussi l'expression $-q_1 dp_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n$ une différentielle exacte; ou, en d'autres termes, que, pour toute valeur de α , on a

$$\left(\frac{dp_\alpha}{dp_1}\right) = -\left(\frac{dq_1}{dq_\alpha}\right).$$

Soit pour cela $f_i = \alpha_i$ l'une des équations données; en différentiant par rapport à p_1 et par rapport à q_α , on en déduira

$$(36) \quad 0 = \frac{df_i}{dp_1} + \frac{df_i}{dq_1} \left(\frac{dq_1}{dp_1}\right) + \frac{df_i}{dp_2} \left(\frac{dp_2}{dp_1}\right) + \dots + \frac{df_i}{dp_n} \left(\frac{dp_n}{dp_1}\right),$$

$$(37) \quad 0 = \frac{df_i}{dq_\alpha} + \frac{df_i}{dq_1} \left(\frac{dq_1}{dq_\alpha}\right) + \frac{df_i}{dp_2} \left(\frac{dp_2}{dq_\alpha}\right) + \dots + \frac{df_i}{dp_n} \left(\frac{dp_n}{dq_\alpha}\right).$$

Donnant à i successivement les valeurs 1, 2, ..., n , chaque formule précédente donnera un système de n équations d'où l'on pourra déduire, d'une part les valeurs des $\frac{dq_1}{dp_1}, \frac{dp_2}{dp_1}, \dots, \frac{dp_n}{dp_1}$, de l'autre celles des $\frac{dq_1}{dq_\alpha}, \frac{dp_2}{dq_\alpha}, \dots, \frac{dp_n}{dq_\alpha}$. Ces deux systèmes ont pour déterminant commun

$$\Delta = \sum \left(\pm \frac{df_1}{dq_1} \frac{df_2}{dp_2} \dots \frac{df_n}{dp_n} \right),$$

qui peut s'écrire, en ordonnant par rapport aux produits des éléments des colonnes verticales de rangs 1 et α ,

$$(38) \quad \Delta = \sum_i \sum_k \left(\frac{df_i}{dq_1} \frac{df_{i+k}}{dp_\alpha} - \frac{df_{i+k}}{dq_1} \frac{df_i}{dp_\alpha} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)},$$

$\delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)}$ étant le déterminant qui résulte de Δ quand on y supprime les

colonnes verticales de rangs 1 et α , et les colonnes horizontales de rangs i et $i+k$; i devant recevoir successivement toutes les valeurs 1, 2, ..., $n-1$, et k , pour chaque valeur de i , toutes les valeurs positives satisfaisant à la condition $k \leq n-1$. D'après un théorème connu, on a identiquement

$$(39) \quad 0 = \sum_i \sum_k \left(\frac{df_i}{dp_{\alpha'}} \frac{df_{i+k}}{dp_{\alpha}} - \frac{df_{i+k}}{dp_{\alpha'}} \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)},$$

et par conséquent aussi

$$(40) \quad 0 = \sum_i \sum_k \left(\frac{df_i}{dp_{\alpha'}} \frac{df_{i+k}}{dq_{\alpha'}} - \frac{df_{i+k}}{dp_{\alpha'}} \frac{df_i}{dq_{\alpha'}} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)}.$$

Mais les systèmes d'équations déduits des formules (36) et (37) donnent

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dq_{\alpha}} &= + \sum_i \sum_k \left(- \frac{df_i}{dq_{\alpha}} \frac{df_{i+k}}{dp_{\alpha}} + \frac{df_i}{dp_{\alpha}} \frac{df_{i+k}}{dq_{\alpha}} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)}, \\ \frac{dp_{\alpha}}{dp_i} &= + \sum_i \sum_k \left(- \frac{df_i}{dq_i} \frac{df_{i+k}}{dp_i} + \frac{df_i}{dp_i} \frac{df_{i+k}}{dq_i} \right) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)}; \end{aligned}$$

en additionnant ces deux valeurs avec les identités déduites de (40), en donnant à α' les valeurs 2, 3, ..., $\alpha-1$, $\alpha+1$, ..., n , on aura

$$\frac{dq_i}{dq_{\alpha}} + \frac{dp_{\alpha}}{dp_i} = \sum_i \sum_k (f_i f_{i+k}) \delta_{1,\alpha}^{(i,i+k)},$$

et comme les fonctions f_i, f_{i+k} satisfont par hypothèse aux conditions (11), on en conclura que

$$\frac{dq_i}{dq_{\alpha}} = - \frac{dp_{\alpha}}{dp_i},$$

ce qui est justement ce que l'on voulait démontrer.

§ VII. — Des diverses classes de solutions d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous appellerons *intégrale* ou *solution complète* d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, une solution renfermant un nombre tel de constantes arbitraires, que l'on puisse, par

leur élimination entre la fonction et ses dérivées du premier ordre, obtenir un système d'équations équivalent à celui qui est proposé.

D'après cette définition, l'intégrale complète représentera, entre la fonction et les variables, des dépendances précisément équivalentes à celles qui sont exprimées par les équations proposées.

D'après la définition précédente, on voit immédiatement que, *si le système proposé se compose de m équations, le nombre des variables étant égal à n , celui des constantes entrant dans la solution complète sera égal à $n - m + 1$, les équations proposées étant d'ailleurs supposées satisfaire aux conditions d'intégrabilité.*

Remarquons que, si les équations proposées ne renferment pas la fonction cherchée, l'élimination ne devra s'effectuer qu'entre les équations dérivées de la solution complète; par conséquent, si l'on a m équations, les dérivées en question ne pourront contenir que $n - m$ constantes. Mais, quant à l'intégrale complète, elle contiendra, comme précédemment, $n - m + 1$ constantes, en comptant celle qui s'introduit par simple addition.

Ceci posé, nous nous proposons de déduire de nouvelles solutions des équations proposées, en remplaçant les constantes de la solution complète par des fonctions des variables: ces fonctions devront être tellement choisies, que la nouvelle valeur obtenue pour la solution satisfasse encore aux équations proposées.

Si $V = f(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_h)$ est l'intégrale complète d'un système de $n - h + 1$ équations, les conditions que devront satisfaire les fonctions de q_1, q_2, \dots, q_n , mises à la place des constantes a_1, a_2, \dots, a_h , seront exprimées par les équations déduites de la formule suivante :

$$(41) \quad \sum_{i=1}^{i=h} \frac{df}{da_i} \frac{da_i}{dq_k} = 0,$$

quand on y remplace k successivement par les nombres $1, 2, \dots, n$.

Pour déduire des équations précédentes (41) les conséquences qu'elles comportent, nous nous servons du théorème suivant qui exprime la propriété principale des déterminants fonctionnels de Jacobi :

THÉORÈME. — *Si n fonctions f_1, f_2, \dots, f_n de n variables indépendantes*

q_1, q_2, \dots, q_n ont entre elles une ou plusieurs relations quelconques, le déterminant fonctionnel de ces fonctions est nul.

Réciproquement, si le déterminant fonctionnel de n fonctions à n variables est nul, il y a entre ces fonctions une ou plusieurs relations.

Revenons maintenant aux équations (41), et voyons de quelle façon on pourra les satisfaire.

Supposons, en premier lieu, qu'en prenant d'une manière quelconque k équations du système (41), le déterminant de ce système partiel dans lequel les termes de la forme $\frac{df}{da_i}$ sont considérés comme les inconnues, soit différent de zéro, et cela pour tous les groupes possibles de k équations : les équations précédentes ne pourront alors être satisfaites qu'en posant

$$\frac{df}{da_1} = 0, \quad \frac{df}{da_2} = 0, \dots, \quad \frac{df}{da_h} = 0.$$

Résolvant ces équations par rapport aux quantités a_1, a_2, \dots, a_h , on déterminera pour ces dernières quantités des valeurs en fonction des variables q_1, \dots, q_n , et qui seront telles, que, substituées dans la solution complète à la place des constantes, la fonction obtenue sera une solution des équations intégrées. Les solutions de cette nature sont en nombre limité, et présentent cette particularité, qu'elles ne contiennent aucune quantité arbitraire. Nous les désignerons sous le nom de *solutions singulières*.

Si, contrairement à ce qui précède, on suppose maintenant que l'un au moins des déterminants dont il est question précédemment soit nul, il suffira, pour cela, d'établir une ou plusieurs relations, quelconques d'ailleurs, entre les fonctions a_1, \dots, a_h , et les équations (41) seront alors identiquement satisfaites, quelles que soient les fonctions et les relations qui existent entre elles. Suivant le nombre de relations que nous établirons entre les fonctions en question, nous obtiendrons des classes de solutions ayant des caractères très-différents; ces solutions contiendront un nombre plus ou moins grand de fonctions arbitraires, et pour cela nous les appellerons des *intégrales générales*.

Supposons d'abord que l'on n'établisse qu'une seule relation entre les fonctions a_1, a_2, \dots, a_h , et que l'une de ces quantités a_h soit une

fonction arbitraire des autres, en totalité ou en partie, on aura

$$(42) \quad V = f(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, \dots, a_h), \quad a_h = \varphi(a_1, \dots, a_{h-1}).$$

Si, dans cette hypothèse, on dérive la fonction V par rapport à q_i , en remarquant que

$$p_i = \frac{df}{dq_i},$$

on aura

$$0 = \sum_{k=1}^{k=h-1} \frac{df}{da_k} \frac{da_k}{dq_i} + \frac{df}{da_h} \sum_{k=1}^{k=h-1} \frac{d\varphi}{da_k} \frac{da_k}{dq_i};$$

multipliant par dq_i , et ajoutant les égalités obtenues de la précédente en donnant à i les valeurs $1, 2, \dots, n$, et égalant séparément à zéro les coefficients des différentielles $da_1, da_2, \dots, da_{h-1}$, on aura $h - 1$ équations de la forme

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \frac{df}{da_k} + \frac{df}{da_h} \frac{d\varphi}{da_k}, \\ (k = 1, 2, \dots, h - 1). \end{array} \right.$$

Ces dernières équations permettraient, dans le cas où la fonction φ serait particularisée, d'éliminer les arbitraires a_1, a_2, \dots, a_{h-1} de l'intégrale V qui contient aussi une fonction arbitraire.

La solution V , accompagnée des $(h - 1)$ équations (43), représente une intégrale générale de l'espèce qui ne contient qu'une fonction arbitraire.

Si maintenant nous supposons que l'on exprime en général un nombre r des fonctions a_1, a_2, \dots, a_h en fonction des $h - r$ autres, on aura, pour l'une d'elles,

$$a_{h-r+l} = \varphi_l(a_1, a_2, \dots, a_{h-r}), \quad (l = 1, 2, \dots, r),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ étant des fonctions arbitraires.

Si l'on dérive, comme précédemment, la fonction V par rapport à q_i , en supposant que a_1, a_2, \dots, a_h soient des fonctions présentant entre elles les relations que nous avons dites, on trouvera n équations de la forme

$$0 = \sum_{k=1}^{k=h-r} \frac{df}{da_k} \frac{da_k}{dq_i} + \sum_{l=1}^{l=r} \frac{df}{da_{h-r+l}} \sum_{k=1}^{k=h-r} \frac{d\varphi_l}{da_k} \frac{da_k}{dq_i},$$

en faisant successivement $i = 1, 2, 3, \dots, n$; elles conduiront à leur tour aux $h - r$ équations de la forme suivante :

$$(44) \quad 0 = \frac{df}{da_k} + \sum_{l=1}^{l=r} \frac{df}{da_{h-r+l}} \frac{d\varphi_l}{da_k},$$

en faisant successivement $k = 1, 2, 3, \dots, h - r$.

Ces équations permettraient de déterminer les valeurs des fonctions a_k si les formes des fonctions φ_l étaient particularisées; la fonction V , accompagnée de ces $h - r$ équations, représente une intégrale générale de l'espèce qui contient r fonctions arbitraires. Si l'on attribue à r successivement les valeurs $1, 2, \dots, h - 1$, on aura les formules de $h - 1$ classes de solutions générales renfermant successivement $1, 2, \dots, h - 1$ fonctions arbitraires. Le cas d'une seule fonction arbitraire que nous avons considéré isolément est compris dans la formule actuelle, ainsi que le dernier cas où toutes les constantes, moins une, sont des fonctions de cette dernière.

Ces différentes classes de solutions ont un caractère très-différent, suivant le nombre des relations arbitraires que l'on suppose exister entre les constantes arbitraires. La classe renfermant les solutions les plus générales est celle où il n'y a qu'une relation entre les constantes, et cette généralité diminue quand le nombre des relations, et par suite des fonctions arbitraires, augmente; car il est visible que l'étendue ou l'indétermination des résultats est d'autant plus grande que les constantes ont moins de conditions à satisfaire. A la limite de ces classes, on peut considérer l'intégrale complète, puisque l'on peut supposer h relations arbitraires entre les h constantes, ce qui donnerait pour chacune d'elles une fonction arbitraire de quantités constantes, c'est-à-dire une constante arbitraire.

Les solutions des diverses classes peuvent encore renfermer dans leurs fonctions arbitraires des constantes aussi arbitraires et en nombre quelconque. Si donc, dans l'une des solutions générales, on donne aux fonctions arbitraires en tout h constantes aussi arbitraires, en particulier d'une manière quelconque les fonctions, l'intégrale générale considérée deviendra une *solution complète* de laquelle on pourrait déduire des classes de solutions dont le degré de généralité dépendrait

aussi du nombre des fonctions arbitraires qu'elles contiendraient respectivement. Il semblerait donc, d'après cela, que le nombre des solutions complètes, et par suite celui des solutions des diverses classes, doive être considéré comme infini; mais nous démontrerons dans la suite que l'on peut d'une solution complète unique déduire toutes les autres solutions dont le système d'équations proposé est susceptible; d'où il résulte que les solutions déduites de plusieurs solutions complètes rentrent les unes dans les autres.

On peut aussi particulariser chaque solution générale de manière qu'il en résulte une solution appartenant à une classe moins générale. Par exemple, si k constantes sont des fonctions arbitraires des $h - k$ autres, et si l est compris entre h et k , on peut particulariser les k fonctions arbitraires de façon qu'elles contiennent l fonctions arbitraires de $h - l$ constantes; on pourra alors regarder cette solution comme appartenant à une classe moins générale que la première, et pouvant se déduire de la solution complète en y considérant l constantes comme fonctions arbitraires des autres, et en mettant pour celles-ci de telles fonctions, que les coefficients différentiels partiels de la solution complète, pris par rapport à elles, s'évanouissent.

Enfin, pour terminer ces généralités, nous remarquerons qu'il pourrait se faire aussi que les fonctions arbitraires, au nombre de r , par exemple, qui entrent dans les intégrales générales de la $r^{\text{ième}}$ classe, ne contiennent pas toutes les $h - r$ dernières constantes arbitraires. On pourrait alors, sans particulariser les fonctions arbitraires, éliminer de la solution considérée les constantes qui n'entrent dans aucune fonction arbitraire. Les valeurs de ces dernières, que nous supposerons être a_1, a_2, \dots, a_s , seraient données par les équations

$$\frac{df}{da_1} = 0, \quad \frac{df}{da_2} = 0, \dots, \quad \frac{df}{da_s} = 0.$$

Les valeurs fournies par ces équations pour a_1, \dots, a_s contiendront les fonctions arbitraires $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ de a_{s+1}, \dots, a_{h-r} , ainsi que ces dernières constantes; substituant ces valeurs dans la solution générale, elle contiendra, outre les constantes a_{s+1}, \dots, a_{h-r} , r fonctions arbitraires de ces mêmes constantes; les fonctions mises à la place des constantes restantes devront satisfaire à des équations de la forme (44),

où k ne devra recevoir que les valeurs suivantes : $s + 1, s + 2, \dots, h - r$.

Remarquons aussi que, dans la recherche des intégrales générales, aussi bien que dans celle des solutions singulières, certaines constantes auraient pu être considérées absolument comme telles. Pour les intégrales générales, cela ne conduit à rien de particulier; mais, dans le cas des solutions singulières, si l'on remplace les constantes demeurées telles par des fonctions présentant entre elles une ou plusieurs relations, ces solutions nouvelles satisferont aux équations proposées, et l'on aura ainsi une nouvelle classe de solutions ne rentrant ni dans la catégorie des intégrales générales, ni dans celle des solutions singulières. Ces *solutions*, que nous appellerons *mixtes*, pourraient se diviser en classes et en groupes dépendant du plus ou moins grand nombre de constantes laissées telles dans la recherche des solutions singulières, et aussi du nombre de relations établies entre les fonctions que l'on substitue à ces constantes. Il nous suffit d'indiquer cette nouvelle catégorie de solutions auxquelles on pourrait d'ailleurs appliquer quelques-unes des observations relatives aux intégrales générales. Maintenant, avant de démontrer le théorème important que nous avons précédemment énoncé, nous allons vérifier que *l'élimination des fonctions arbitraires que renferme une solution générale quelconque conduit bien à un système de $n - h + 1$ équations aux dérivées partielles du premier ordre*, n étant le nombre des variables indépendantes, et h le nombre des constantes de la solution complète.

Considérons, en effet, une intégrale générale renfermant r fonctions arbitraires des $h - r$ constantes a_1, a_2, \dots, a_{h-r} , les fonctions substituées à ces dernières constantes étant d'ailleurs assujetties à satisfaire aux équations (44); on aura, en différentiant l'intégrale par rapport à q_i ,

$$p_i = \frac{df}{dq_i} + \sum_{k=1}^{k=h-r} \frac{df}{da_k} \frac{da_k}{dq_i} + \sum_{l=1}^{l=r} \frac{df}{d\alpha_{h-r+l}} \sum_{k=1}^{k=h-r} \frac{d\varphi_l}{da_k} \frac{da_k}{dq_i},$$

($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Mais, au moyen des équations (44), le système précédent se réduit au

suisant :

$$p_i = \frac{df}{dq_i}, \quad p_2 = \frac{df}{dq_2}, \dots, \quad p_n = \frac{df}{dq_n};$$

et, si l'on élimine entre ces dernières équations et l'intégrale générale considérée les quantités $a_1, a_2, \dots, a_{h-r}, \varphi_1, \dots, \varphi_r$, au nombre de h , on obtiendra bien finalement un système de $n - h + 1$ équations, comme nous nous proposons de le démontrer.

Enfin, pour terminer, nous allons établir le théorème général suivant :

Toutes les solutions dont un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre est susceptible peuvent se déduire d'une solution complète unique.

Soit $V = \psi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ une solution commune des $n - m$ équations simultanées dont l'une est la suivante :

$$(45) \quad \begin{cases} f_i(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = 0, \\ (i = 1, 2, 3, \dots, n - m), \end{cases}$$

et soit

$$(46) \quad V = f(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_{m+1})$$

une solution complète de ce système.

Si nous déterminons les valeurs des constantes a_1, a_2, \dots, a_{m+1} au moyen des $m + 1$ équations suivantes :

$$(47) \quad f = \psi, \quad \frac{df}{dq_1} = \frac{d\psi}{dq_1}, \dots, \quad \frac{df}{dq_m} = \frac{d\psi}{dq_m},$$

je dis que les dérivées des fonctions f et ψ , par rapport aux variables q_{m+1}, \dots, q_n , seront aussi égales chacune à chacune.

En effet, par hypothèse, on a les deux systèmes d'équations satisfaites résultant des deux formules suivantes :

$$f_i\left(q_1, q_2, \dots, q_n, \frac{d\psi}{dq_1}, \dots, \frac{d\psi}{dq_n}\right) = 0, \quad f_i\left(q_1, \dots, q_n, \frac{df}{dq_1}, \dots, \frac{df}{dq_n}\right) = 0,$$

quand on donne à i les valeurs successives $1, 2, \dots, n - m$; et le der-

nier de ces systèmes, en vertu des équations (47), devient le suivant :

$$f_i \left(q_1, q_2, \dots, q_m, \frac{d\psi}{dq_1}, \dots, \frac{d\psi}{dq_m}, \frac{df}{dq_{m+1}}, \dots, \frac{df}{dq_n} \right) = 0, \\ (i = 1, 2, 3, \dots, n - m).$$

Comparant alors ce dernier système au premier, on en conclut les égalités

$$(48) \quad \frac{df}{dq_{m+1}} = \frac{d\psi}{dq_{m+1}}, \dots, \quad \frac{df}{dq_n} = \frac{d\psi}{dq_n},$$

qui auront lieu en même temps que les équations (47). Donc si, dans la solution complète, on attribue aux constantes a_1, \dots, a_{m+1} les valeurs déterminées par les équations (47), elle devient égale à la fonction ψ , et les dérivées successives de ces deux fonctions le sont aussi : la solution $V = \psi$ est donc bien comprise dans la solution complète. Il nous reste à déterminer l'espèce de la solution.

Les valeurs obtenues des équations (47), pour les constantes a_1, a_2, \dots, a_{m+1} , sont généralement des fonctions des variables q_1, q_2, \dots, q_n . Dans le cas particulier où ces valeurs seraient constantes, la solution considérée serait une solution particulière de l'intégrale complète. Dans le cas général, si l'on remplace dans la fonction f les constantes par leurs valeurs, on aura l'identité $f = \psi$; différentiant, par rapport à q_k , les deux membres de cette égalité, on aura

$$\frac{d\psi}{dq_k} = \frac{df}{dq_k} + \sum_{h=1}^{h=m+1} \frac{df}{da_h} \frac{da_h}{dq_k}, \\ (k = 1, 2, 3, \dots, n);$$

comparant ces égalités aux précédentes (47), (48), qu'on suppose satisfaites, on aura le système suivant de conditions :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 = \sum_{h=1}^{h=m+1} \frac{df}{da_h} \frac{da_h}{dq_k}, \\ (k = 1, 2, \dots, n). \end{array} \right.$$

Si les valeurs obtenues pour a_1, a_2, \dots, a_{m+1} sont telles, qu'en prenant un groupe quelconque de m équations du système précédent, le déter-

minant correspondant, et dont les éléments sont les dérivées partielles des fonctions mises pour a_1, a_2, \dots, a_{m+1} , soit différent de zéro, alors les équations (49) exigent que l'on ait en même temps

$$\frac{df}{da_1} = 0, \quad \frac{df}{da_2} = 0, \dots, \quad \frac{df}{da_{m+1}} = 0,$$

c'est-à-dire que la solution considérée rentre dans la catégorie des solutions singulières. Mais si, contrairement à ce qui précède, de quelque façon que l'on choisisse m équations du système (49), le déterminant du système ainsi formé est constamment égal à zéro, les fonctions a_1, a_2, \dots, a_{m+1} ont entre elles une ou plusieurs relations, et la solution considérée est une solution particulière de l'une des intégrales générales.

En terminant, nous remarquerons que, si l'on a à intégrer un système d'équations en nombre égal à celui des variables, l'intégrale complète ne contiendra plus qu'une constante; dans ce cas, l'intégrale générale se confond avec la solution complète, et, quant aux solutions singulières, elles résultent encore de l'élimination de la constante a_1 entre les deux équations

$$V = f(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1) \quad \text{et} \quad \frac{df}{da_1} = 0.$$

Dans le paragraphe suivant, nous allons appliquer à un exemple particulier la méthode d'intégration précédemment développée pour l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre.

§ VIII. — Application.

Soit proposé d'intégrer le système suivant :

$$f_1 = p_1 p_4 - q_2 q_3 = 0,$$

$$f_2 = p_2 p_3 - q_1 q_4 = 0.$$

Si nous formons l'expression représentée par le symbole (f_1, f_2) , nous trouvons qu'elle ne s'annule pas, et que sa valeur f_3 est la suivante :

$$f_3 = q_1 p_1 - q_2 p_2 - q_3 p_3 + q_4 p_4.$$

On trouve ensuite que ces trois fonctions f_1, f_2, f_3 donnent $(f_1 f_3) = 0$, $(f_2 f_3) = 0$; posant donc $f_3 = 0$, c'est-à-dire $(f_1 f_2) = 0$, la question sera ramenée à l'intégration d'un système de trois équations

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0.$$

satisfaisant aux conditions d'intégrabilité.

Nous avons à chercher une nouvelle relation de la forme $f_4 = a$, qui, jointe aux précédentes, permette de déterminer pour p_1, p_2, p_3, p_4 des valeurs en fonction de q_1, q_2, q_3, q_4 , qui, substituées dans l'expression $p_1 dq_1 + \dots + p_4 dq_4$, la rendent une différentielle exacte.

Si nous supposons que des équations (49) on tire les valeurs de p_1, p_2, p_3 en fonctions de p_4, q_1, q_2, q_3, q_4 , la fonction f_4 devra satisfaire à un système de trois équations dont la formule est la suivante :

$$0 = \frac{df}{dq_m} + \frac{dp_m}{dq_4} \frac{df}{dp_4} - \frac{dp_m}{dp_i} \frac{df}{dq_i},$$

($m = 1, 2, 3$).

Les équations (49) nous donnent les valeurs suivantes :

$$p_1 = \frac{q_2 q_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{q_1 q_4}{p_3}, \quad p_3 = \frac{q_1 q_2 q_3 + q_4 p_4^2 \pm (q_1 q_2 q_3 - q_4 p_4^2)}{2 q_3 p_4},$$

pour lesquelles il nous faudra considérer deux cas, suivant le signe que l'on prend dans la valeur de p_3 .

Premier cas. — On prend le signe supérieur, d'où

$$p_1 = \frac{q_2 q_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{q_4 p_4}{q_2}, \quad p_3 = \frac{q_1 q_2}{p_4};$$

les équations du système auxiliaires sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{df}{dq_1} + \frac{q_2 q_3}{p_4^2} \frac{df}{dq_4}, \\ 0 &= \frac{df}{dq_2} + \frac{p_4}{q_2} \frac{df}{dp_4} - \frac{q_4}{p_2} \frac{df}{dq_4}, \\ 0 &= \frac{df}{dq_3} + \frac{q_1 q_2}{p_4^2} \frac{df}{dq_4}. \end{aligned}$$

La première de ces équations admet la solution

$$f = q_1 - \frac{q_1 q_2 q_3}{p_1^2} = \varphi_1;$$

portant cette valeur dans la seconde équation, à la place de f , on obtient, pour le résultat,

$$\varphi_2 = -\frac{q_4}{q_2} + \frac{q_1 q_3}{p_1^2} = -\frac{\varphi_1}{q_2},$$

qui n'est pas une nouvelle solution, mais simplement une fonction de la première, puisque, dans cette première équation, q_2 est considéré comme une constante. Une fonction quelconque de φ_1, q_2, q_3 sera encore une solution de la première équation; soit $\varpi(\varphi_1, q_2, q_3)$ une telle fonction : nous nous proposons de déterminer la forme de cette fonction ϖ de façon qu'elle soit aussi une solution de la seconde équation. La condition pour que cela ait lieu est que l'on ait

$$0 = \frac{d\varpi}{dq_2} + \frac{d\varpi}{dq_1} \varphi_2.$$

Cette équation admet la solution particulière $q_2 \varphi_1$ qui, satisfaisant aussi, comme il est facile de le constater, à la troisième équation du système, sera la solution commune cherchée. On devra donc joindre aux équations (49) la suivante :

$$f_4 = q_2 q_4 - \frac{q_1 q_2^2 q_3}{p_1^2} = a,$$

et de ces quatre équations on déduira

$$p_1 = q_3 \frac{\sqrt{q_2 q_4 - a}}{\sqrt{q_1 q_3}}, \quad p_2 = q_4 \frac{\sqrt{q_1 q_3}}{\sqrt{q_2 q_4 - a}},$$

$$p_3 = q_1 \frac{\sqrt{q_2 q_4 - a}}{\sqrt{q_1 q_3}}, \quad p_4 = q_2 \frac{\sqrt{q_1 q_3}}{\sqrt{q_2 q_4 - a}}.$$

La différentielle exacte $p_1 dq_1 + \dots + p_4 dq_4$ aura ainsi pour intégrale la fonction

$$V = 2 q_1^{\frac{1}{2}} q_3^{\frac{1}{2}} (q_2 q_4 - a)^{\frac{1}{2}} + b,$$

et c'est là une solution complète des équations proposées. Il est facile

de vérifier qu'elle ne donne pas de solutions singulières, et qu'elle admet pour intégrale générale celle qui est définie par le système

$$V = 2q_1^{\frac{1}{2}}q_3^{\frac{1}{2}}(q_2q_4 - a)^{\frac{1}{2}} + \varphi(a), \quad 0 = q_1^{\frac{1}{2}}q_3^{\frac{1}{2}}(q_2q_4 - a)^{-\frac{1}{2}} - \varphi'(a),$$

φ représentant une fonction complètement arbitraire.

Deuxième cas. — On prend le signe inférieur dans la valeur de p_3 ; on a alors

$$p_1 = \frac{q_2q_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{q_1q_3}{p_4}, \quad p_3 = \frac{q_1p_4}{q_3},$$

et le système auxiliaire est le suivant :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{df}{dq_1} + \frac{q_2q_3}{p_4^2} \frac{df}{dq_4}, \\ 0 &= \frac{df}{dq_2} + \frac{q_1q_3}{p_4^2} \frac{df}{dq_4}, \\ 0 &= \frac{df}{dq_3} + \frac{p_4}{q_3} \frac{df}{dp_4} - \frac{q_1}{q_3} \frac{df}{dq_4}. \end{aligned}$$

En opérant comme précédemment, on trouve, pour solution commune de ces équations,

$$f_4 = q_3q_4 - \frac{q_1q_2q_3^2}{p_4^2};$$

posant $f_4 = a_1$, et joignant cette équation au système (49), on en déduira les valeurs de p_1, p_2, p_3, p_4 , et l'on trouvera la solution complète

$$V = 2q_1^{\frac{1}{2}}q_2^{\frac{1}{2}}(q_3q_4 - a_1)^{\frac{1}{2}} + b,$$

qui jouit des mêmes propriétés que la précédente.

§ IX. — *Intégration des équations linéaires.*

Le problème de l'intégration des équations linéaires est résolu d'une manière générale en même temps que celui des équations quelconques, car la méthode que nous avons développée leur est en tout point appli-

cable. Mais cette méthode générale nécessite elle-même l'intégration directe de systèmes linéaires auxiliaires d'une forme spéciale. Nous nous proposons d'étendre cette méthode aux équations linéaires quelconques, et de la compléter de façon qu'elle puisse nous conduire à la solution complète, tandis que précédemment on ne se proposait que la recherche d'une solution particulière commune.

On aura bien encore ici à considérer des systèmes successifs d'équations simultanées; mais d'un système au suivant, le nombre des équations, ainsi que celui des termes de chacune d'elles, diminuera d'une unité. Il n'en faudrait pas pourtant conclure que cette méthode soit, pour cette raison, bien supérieure à la méthode générale; car elle présente, en revanche, le désavantage d'exiger constamment des intégrations complètes, alors que, pour la première, il ne fallait déterminer chaque fois qu'une solution particulière; aussi, dans la pratique, préférera-t-on souvent la méthode générale comme présentant plus de chances de réussite, sans exiger pour cela des calculs beaucoup plus étendus.

Si nous considérons les équations d'un système auxiliaire (§ IV), nous voyons qu'elles sont homogènes, et que l'équation de rang k ne contient que les termes en p_k, p_{m+1}, \dots, p_n , m étant le nombre des équations du système considéré. Nous allons montrer que tout système d'équations linéaires peut être ramené à cette forme, et, pour cela, il suffit de pouvoir les rendre homogènes, car alors, par des éliminations convenablement dirigées, on parviendra toujours à mettre les équations sous la forme désirée.

Soit donc proposé d'intégrer un système de m équations distinctes de la forme

$$(50) \quad X_1^k p_1 + X_2^k p_2 + \dots + X_m^k p_m + \dots + X_n^k p_n - X^k = 0,$$

X^k, X_1^k, \dots, X_n^k étant des fonctions de q_1, q_2, \dots, q_n , ne contenant pas la fonction cherchée V ; les différentes équations du système s'obtiendront de la précédente en attribuant à k successivement les valeurs $1, 2, \dots, m$.

Si ces équations ne satisfont pas toutes aux conditions d'intégrabilité, on sera conduit à ajouter de nouvelles équations à celles qui sont proposées, et il est facile de voir que ces nouvelles relations ont la même

forme que les premières; le problème proposé conservera donc la même forme dans tous les cas où il est possible.

Pour rendre ces équations homogènes, nous remarquerons que, si u est une fonction quelconque de la fonction cherchée v et des variables q_1, q_2, \dots, q_n , on aura

$$p_i = - \frac{\frac{du}{dq_i}}{\frac{du}{dv}},$$

et par suite l'équation (50) deviendra la suivante :

$$X^i \frac{du}{dv} + X_1^i \frac{du}{dq_1} + \dots + X_n^i \frac{du}{dq_n} = 0.$$

Toutes les équations du système (50) seront donc ainsi rendues homogènes par rapport aux dérivées partielles de la nouvelle fonction u , la fonction v n'étant plus alors considérée que comme une simple variable; comme la fonction u n'entre pas non plus dans les coefficients, les équations ont bien la forme que nous voulions leur donner. Mais ici ce n'est plus la fonction v que l'on se propose de déterminer, mais une fonction u de v et des variables; et, quand on aura trouvé cette fonction u , en l'égalant à zéro, on aura une équation d'où l'on déduira la valeur de v .

Remarquons que la transformation précédente conviendrait encore dans le cas où les coefficients renfermeraient la fonction cherchée, en supposant satisfaites les conditions d'intégrabilité relatives à ce cas (11 bis).

Nous supposons dorénavant que le système à intégrer se compose de m équations linéaires, homogènes, ne contenant pas la fonction cherchée, et enfin, satisfaisant aux conditions d'intégrabilité. Soient

$$(51) \quad f_i = X_1^i \frac{dv}{dq_1} + X_2^i \frac{dv}{dq_2} + \dots + X_n^i \frac{dv}{dq_n} = 0,$$

$$(52) \quad f_h = X_1^h \frac{dv}{dq_1} + \dots + X_n^h \frac{dv}{dq_n} = 0$$

deux équations quelconques d'un tel système : nous nous proposons de démontrer que le théorème I (§ IV) s'applique à ces équations, c'est-à-

dire que si $\nu = \varphi$ est une solution de la première de ces équations, le résultat ψ de la substitution de φ à la place de ν , dans la seconde, sera encore une solution de la première, si toutefois ce résultat n'est pas identiquement nul ou constant.

En effet, par hypothèse, les fonctions f_i, f_h satisfont à la condition

$$(f_i f_h) = 0,$$

qui, développée, donne l'équation suivante :

$$\sum_a X_a^h \frac{d}{dq_a} \sum_\beta X_\beta^i p_\beta - \sum_a X_a^i \frac{d}{dq_a} \sum_\beta X_\beta^h p_\beta = 0.$$

Mais, $\nu = \varphi$ étant une solution de la première équation, on aura identiquement

$$\sum_\beta X_\beta^i \frac{d\varphi}{dq_\beta} \quad \text{ou} \quad \sum_\beta X_\beta^i p_\beta = 0;$$

d'où il suit que l'équation précédente devient alors

$$X_1^i \frac{d\psi}{dq_1} + X_2^i \frac{d\psi}{dq_2} + \dots + X_n^i \frac{d\psi}{dq_n} = 0,$$

en posant

$$\sum_\beta X_\beta^h \frac{d\varphi}{dq_\beta} \quad \text{ou} \quad \sum_\beta X_\beta^h p_\beta = \psi,$$

ce qui démontre précisément le théorème énoncé, puisque ψ est bien, d'après ce qui est posé, le résultat de la substitution de φ à ν dans la seconde équation, et que l'égalité qui vient d'être obtenue exprime précisément que ψ satisfait à la première équation. Si donc ψ n'est pas une constante, ce sera une solution de l'équation (51), solution qui peut d'ailleurs n'être qu'une fonction de la précédente.

Le théorème qui précède nous permet de résoudre le proposé, et, pour cela, nous suivrons la méthode de Boole (*); mais nous rappellerons préalablement quelques propriétés des équations linéaires isolées, et qui s'étendent immédiatement aux équations simultanées.

On sait qu'une équation linéaire aux dérivées partielles renfermant

(*) BOOLE, *Philosophical Transactions*, 1863.

n variables admet en général n intégrales particulières distinctes qui, dans le cas où la fonction cherchée n'entre pas dans les coefficients, représentent précisément les n valeurs distinctes de la fonction cherchée satisfaisant à l'équation considérée, l'une de ces solutions se réduisant toutefois à une constante, dans le cas où l'équation est homogène. On sait en outre que toute fonction de ces solutions satisfait aussi à l'équation proposée; et réciproquement, que toute solution est une fonction des précédentes. Ces propriétés des équations isolées étant rappelées, on voit sans peine qu'elles s'appliquent aussi aux équations simultanées, le nombre des solutions particulières distinctes étant seul modifié.

Pour ce qui va suivre, nous avons besoin de connaître *ce que devient une équation linéaire quand on change de variables.*

Soit l'équation

$$(53) \quad X_1^k \frac{dv}{dq_1} + X_2^k \frac{dv}{dq_2} + \dots + X_n^k \frac{dv}{dq_n} = X^k,$$

dont nous représenterons le premier membre par $(\Delta_k v)$, et supposons que les n variables q_1, q_2, \dots, q_n soient exprimées en fonction des n autres r_1, r_2, \dots, r_n : on propose de trouver ce que devient l'équation après ce changement.

Si l'on suppose la fonction v exprimée en fonction des nouvelles variables, on aura

$$\frac{dv}{dq_k} = \frac{dv}{dr_1} \frac{dr_1}{dq_k} + \dots + \frac{dv}{dr_n} \frac{dr_n}{dq_k},$$

et par suite l'équation (53) pourra s'écrire, en groupant les termes d'une façon convenable,

$$(54) \quad (\Delta_k r_1) \frac{dv}{dr_1} + (\Delta_k r_2) \frac{dv}{dr_2} + \dots + (\Delta_k r_n) \frac{dv}{dr_n} = X^k,$$

et c'est là le résultat cherché, si l'on suppose toutefois que, dans la fonction X^k , q_1, q_2, \dots, q_n soient remplacés par leurs valeurs en fonction de r_1, r_2, \dots, r_n .

Nous ajouterons que, si les équations telles que (53) satisfaisaient aux conditions d'intégrabilité, ces dernières (54) y satisferont aussi, d'après la remarque qui termine le § II.

Passons maintenant à l'intégration d'un système de m équations ho-

mogènes, la fonction cherchée n'entrant pas dans les coefficients, et supposons ces équations mises sous la forme

$$(55) \quad X_k^k \frac{dv}{dq_k} X_{m+1}^k \frac{dv}{dq_{m+1}} + \dots + X_n^k \frac{dv}{dq_n} = 0,$$

($k = 1, 2, 3, \dots, m$).

Cette équation, renfermant n variables indépendantes, aura $n - 1$ intégrales indépendantes distinctes v_1, v_2, \dots, v_{n-1} ; et si $k = 1$, on pourra supposer $v_2 = q_2, v_3 = q_3, \dots, v_m = q_m$, puisque ces dernières variables sont considérées comme constantes dans la première équation du système (55). Une fonction quelconque de $v_1, q_2, q_3, \dots, q_m, v_{m+1}, \dots, v_{n-1}$ sera encore une solution de l'équation considérée. Si l'on change alors de variables, et que le système q_1, q_2, \dots, q_n soit remplacé par le suivant : $q_1, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$, les équations du système (55), sauf la première, prendront la forme suivante :

$$(\Delta_h q_1) \frac{dv}{dq_1} + (\Delta_h v_1) \frac{dv}{dv_1} + (\Delta_h v_2) \frac{dv}{dv_2} + \dots + (\Delta_h v_{n-1}) \frac{dv}{dv_{n-1}} = 0,$$

($h = 2, 3, \dots, m$).

Mais on a, pour les valeurs précédentes de h , $(\Delta_h q_1) = 0$, et par suite le système transformé se compose de $m - 1$ équations avec $n - 1$ variables indépendantes v_1, v_2, \dots, v_{n-1} ; en outre, ce système est de même forme que le précédent, puisque l'on a, pour une valeur quelconque de h ,

$$(\Delta_h v_k) = 0,$$

k pouvant prendre toutes les valeurs de la suite $2, \dots, m$, h étant excepté.

La recherche des solutions communes des équations du premier système revient donc à celle des solutions communes du second, puisque ces dernières ne sont que des fonctions de v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , à la condition toutefois que les coefficients des nouvelles équations ne contiennent pas d'autres variables que ces dernières. Cela a lieu en vertu du théorème que nous avons précédemment démontré, puisque $(\Delta_h v_k)$, devant être une solution de l'équation $(\Delta_1 v) = 0$, ne peut être qu'une fonction des seules quantités v_1, v_2, \dots, v_{n-1} , ce qui justifie ce que nous avons avancé.

Nous pourrions donc raisonner sur ce second système absolument comme nous l'avons fait sur le précédent, et nous passerons de là à un troisième, en prenant pour nouvelles variables $q_2, \varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_{n-2}$, ces dernières quantités $\varpi_1, \dots, \varpi_{n-2}$ étant les $n - 2$ solutions distinctes de la première équation du second système. La variable q_2 disparaîtra complètement de ce nouveau système comme q_1 l'avait fait du précédent, et toute solution commune des équations de ce système sera, pour cette raison, une solution commune des précédents.

En continuant ainsi, on voit que d'un système au suivant le nombre des équations et celui des variables diminuent chacun d'une unité, et qu'on arrivera enfin à une seule équation homogène renfermant $n - m$ variables indépendantes : les $n - m - 1$ solutions particulières distinctes de cette équation seront les solutions communes du système proposé; égalées à des constantes, elles constituent la solution complète du problème proposé, et une fonction arbitraire de ces mêmes solutions en sera l'intégrale générale.

Nous allons, pour terminer ce travail, faire sur un exemple particulier l'application des deux méthodes d'intégration des équations linéaires.

§ X. — Applications.

Soit proposé d'intégrer le système suivant :

$$f_1 = 2q_1^2 q_2 \frac{dv}{dq_1} + q_1^2 q_4 \frac{dv}{dq_4} - q_1^2 v = 0,$$

$$f_2 = 2q_2 \frac{dv}{dq_2} - q_4 \frac{dv}{dq_4} - v = 0,$$

$$f_3 = q_2 q_1^2 \frac{dv}{dq_3} + q_1 q_3 q_4 \frac{dv}{dq_4} - q_1 q_3 v = 0.$$

Première méthode. — On fera disparaître la fonction v , tout en laissant les équations linéaires, en posant $u = \log v$; si l'on pose aussi $p_i = \frac{du}{dq_i}$, on aura, pour le système précédent,

$$(x) \quad \begin{cases} f_1 = 2q_1^2 q_2 p_1 + q_1^2 q_4 p_4 - q_1^2 = 0, \\ f_2 = 2q_2 p_2 - q_4 p_4 - 1 = 0, \\ f_3 = q_2 q_1^2 p_3 + q_1 q_3 q_4 p_4 - q_1 q_3 = 0. \end{cases}$$

On vérifie facilement que ces équations satisfont aux conditions d'intégrabilité.

De ces équations, on déduit les valeurs suivantes :

$$(\beta) \quad p_1 = -\frac{q_3^2}{2q_2q_1}p_4 + \frac{q_3^2}{2q_2q_1^2}, \quad p_2 = \frac{q_1}{2q_2}p_4 + \frac{1}{2q_2}, \quad p_3 = -\frac{q_1q_3}{q_2q_1}p_4 + \frac{q_1q_3}{q_2q_1^2},$$

au moyen desquelles on compose le système auxiliaire auquel doit satisfaire la fonction f_4 que, d'après la règle générale, il nous faut déterminer d'abord. Ce système auxiliaire sera le suivant :

$$(\gamma) \quad 0 = \frac{df_4}{dq_1} + \frac{q_3^2}{2q_2q_1} \frac{df_4}{dq_4} + \frac{q_3^2}{2q_2q_1^2} (q_4p_4 - 2) \frac{df_4}{dp_4},$$

$$(\delta) \quad 0 = \frac{df}{dq_2} - \frac{q_4}{2q_2} \frac{df_4}{dq_4} + \frac{p_4}{2q_2} \frac{df_4}{dp_4},$$

$$(\varepsilon) \quad 0 = \frac{df}{dq_3} + \frac{q_1q_3}{q_2q_4} \frac{df}{dq_4} + \frac{q_1q_3}{q_2q_4^2} (q_4p_4 - 2) \frac{df_4}{dp_4}.$$

Pour chercher une solution commune de ces équations, nous partons de l'équation (δ) qui admet la solution particulière $\varphi_1 = p_4q_4$; substituant dans l'équation (ε) , on aura pour résultat

$$\varphi_2 = \frac{2q_1q_2}{q_2q_4^2} (q_4p_4 - 1);$$

substituant de nouveau dans la même équation, on aura pour résultat

$$\varphi_3 = \frac{2q_1}{q_2q_4^2} (q_4p_4 - 1),$$

qui s'exprime au moyen de φ_2 et de q_3 , qui est considéré comme une constante dans l'équation (δ) . Une fonction $\varpi_1(q_3\varphi_1\varphi_2)$ sera aussi une solution de l'équation (δ) , et, pour qu'elle satisfasse aussi à l'équation (ε) , il faudra que l'on ait

$$\frac{d\varpi}{dq_3} + \frac{d\varpi}{d\varphi_1} \varphi_2 + \frac{d\varpi}{d\varphi_2} \varphi_3 = 0,$$

d'où

$$\varpi_1 = \frac{\varphi^2}{q_3} = \frac{2q_1}{q_2q_4^2} (p_4q_4 - 1).$$

Portant cette valeur dans l'équation (γ), elle donnera

$$\varpi_2 = \frac{2(p_1 q_4 - 1)}{q_2 q_4^2} = \frac{\varpi_1}{q_1}.$$

Une fonction $\lambda(q_1, \varpi_1)$ sera aussi une solution de l'équation (ε), ainsi que de l'équation (δ) : elle le sera de l'équation (γ) si l'on a

$$\frac{d\lambda}{dq_1} + \frac{d\lambda}{d\varpi_1} \varpi_2 = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\varpi_1}{q_1} = \frac{2(q_4 p_1 - 1)}{q_2 q_4^2}.$$

Posant cette solution du système auxiliaire égale à une constante a , et joignant l'équation ainsi obtenue aux équations données (α), on en déduira

$$p_1 = -a q_3^2, \quad p_2 = \frac{1}{q_2} + a q_1^2, \quad p_3 = -2a q_1 q_3, \quad p_4 = \frac{1}{q_1} + 2a q_2 q_4,$$

d'où

$$u = \text{const.} + a(q_2 q_4^2 - q_1 q_3^2) + \log q_2 q_4,$$

et par suite

$$v = b q_2 q_4 e^{a(q_2 q_4^2 - q_1 q_3^2)}.$$

Telle est la solution complète du système proposé.

Deuxième méthode. — Si nous rendons les équations proposées homogènes, en suivant pour cela la règle donnée à cet effet, nous obtiendrons le système suivant :

$$(\beta) \quad (\Delta u) = 2q_2 q_4^2 \frac{du}{dq_1} + q_3^2 q_4 \frac{du}{dq_2} + q_3^2 v \frac{du}{dv} = 0,$$

$$(\gamma) \quad (\Delta_1 u) = 2q_2 \frac{du}{dq_2} - q_4 \frac{du}{dq_1} + v \frac{du}{dv} = 0,$$

$$(\delta) \quad (\Delta_2 u) = q_2 q_1^2 \frac{du}{dq_3} + q_1 q_3 q_4 \frac{du}{dq_4} + q_1 q_3 v \frac{du}{dv} = 0,$$

où u est la nouvelle fonction cherchée, v n'étant plus considéré que comme une variable indépendante.

On trouve immédiatement, pour l'équation (β), la série suivante de solutions distinctes,

$$u_1 = \frac{v}{q_1}, \quad u_2 = q_2, \quad u_3 = q_3, \quad u_4 = \frac{q_2 q_4^2 - q_1 q_3^2}{q_2}.$$

Si l'on prend alors pour variables les quantités suivantes : q_1, u_1, u_2, u_3, u_4 , les équations (γ) et (δ) deviendront

$$(\gamma') \quad (\Delta'_1 u) = (\Delta_1 q_1) \frac{du}{dq_1} + (\Delta_1 u_1) \frac{du}{du_1} + (\Delta_1 q_2) \frac{du}{dq_2} + (\Delta_1 q_3) \frac{du}{dq_3} + (\Delta_1 u_4) \frac{du}{du_4} = 0,$$

$$(\delta') \quad (\Delta'_2 u) = (\Delta_2 q_1) \frac{du}{dq_1} + (\Delta_2 u_1) \frac{du}{du_1} + (\Delta_2 q_2) \frac{du}{dq_2} + (\Delta_2 q_3) \frac{du}{dq_3} + (\Delta_2 u_4) \frac{du}{du_4} = 0.$$

Mais on a

$$\begin{aligned} (\Delta_1 q_1) &= 0, & (\Delta_1 u_1) &= 2u_1, & (\Delta_1 q_2) &= 2q_2, & (\Delta_1 q_3) &= 0, & (\Delta_1 u_4) &= -2u_4, \\ (\Delta_2 q_1) &= 0, & (\Delta_2 u_1) &= 0, & (\Delta_2 q_2) &= 0, & (\Delta_2 q_3) &= q_2 q_3^2, & (\Delta_2 u_4) &= 0; \end{aligned}$$

donc les équations précédentes se réduiront aux suivantes :

$$u_1 \frac{du}{du_1} + q_2 \frac{du}{dq_2} - u_4 \frac{du}{du_4} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dq_3} = 0.$$

La première de ces équations admet les solutions

$$u'_1 = \frac{u_1}{q_2} = \frac{v}{q_2 q_1}, \quad u'_2 = q_2 u_4 = q_2 q_4^2 - q_1 q_3^2;$$

ces solutions, satisfaisant aussi à la dernière équation, sont les solutions communes du système proposé. L'intégrale générale sera donc une fonction arbitraire de u'_1 et u'_2 , d'où l'on aura enfin

$$v = q_2 q_1 \varphi(q_2 q_4^2 - q_1 q_3^2),$$

φ étant une fonction arbitraire.

Il est d'ailleurs évident que ce résultat s'accorde avec celui que nous avons déjà obtenu en appliquant aux équations proposées la méthode générale relative aux équations quelconques.

Nous indiquerons encore les exemples suivants.

Soit le système

$$\begin{aligned} (q_1^2 - q_3^2) \frac{dv}{dq_1} - (q_1 q_3 - q_2 q_4) \frac{dv}{dq_3} + (q_2 q_3 - q_1 q_4) \frac{dv}{dq_4} &= 0, \\ (q_4^2 - q_2^2) \frac{dv}{dq_2} + (q_2 q_3 - q_1 q_4) \frac{dv}{dq_3} + (q_1 q_3 - q_2 q_4) \frac{dv}{dq_4} &= 0; \end{aligned}$$

en appliquant la même méthode, on trouvera

$$v = \varphi(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2, q_1 q_2 + q_3 q_4).$$

Soit encore le système suivant

$$\begin{aligned} q_1 \frac{dv}{dq_1} - q_2 \frac{dv}{dq_2} + q_3 \frac{dv}{dq_3} - q_4 \frac{dv}{dq_4} &= 0, \\ q_3 \frac{dv}{dq_1} + q_4 \frac{dv}{dq_2} - q_1 \frac{dv}{dq_3} - q_2 \frac{dv}{dq_4} &= 0. \end{aligned}$$

Pour l'application de la seconde méthode, il faut remplacer ce système par le suivant, qui lui est équivalent,

$$\begin{aligned} (q_1 q_4 + q_2 q_3) \frac{dv}{dq_1} + (q_3 q_4 - q_1 q_2) \frac{dv}{dq_3} - (q_4^2 + q_2^2) \frac{dv}{dq_4} &= 0, \\ (q_1 q_4 + q_2 q_3) \frac{dv}{dq_2} - (q_1^2 + q_3^2) \frac{dv}{dq_3} + (q_3 q_4 - q_1 q_2) \frac{dv}{dq_4} &= 0; \end{aligned}$$

et la solution générale de ce système est la suivante :

$$v = \varphi \left[(q_1^2 + q_3^2)(q_2^2 + q_4^2), \frac{q_1 q_2 + q_3 q_4}{q_2 q_3 - q_1 q_4} \right].$$