ÉMILE PICARD

Sur une classe de fonctions fondamentales et sur certains développements en séries

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 27 (1910), p. 569-574

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__569_0>

SUR UNE

CLASSE DE FONCTIONS FONDAMENTALES

ET SUR

CERTAINS DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. On sait que de nombreux travaux ont été publiés dans ces dernières années sur les développements en séries des fonctions de variables réelles. Parmi les résultats de ces travaux, un des plus remarquables est un théorème donné par M. Schmidt (*Math. Annalen*, t. LXIII) sur le développement en séries des fonctions $f(x)$ susceptibles de se mettre sous la forme

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)\, F(y)\, dy. \tag{1}$$

M. Schmidt commence par envisager le système des deux équations fonctionnelles

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int_a^b K(x, y)\, \psi(y)\, dy, \\ \psi(x) &= \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Sauf un cas particulier facile à caractériser, il existe une infinité de valeurs réelles de λ (qu'on peut supposer positives), pour lesquelles ces équations sont satisfaites autrement que pour $\varphi = \psi = 0$.

---

(1) Cet article reproduit en substance une Note des *Comptes rendus* du 27 décembre 1909.

Soient, rangées par ordre de grandeur croissante,

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots,$$

ces valeurs de λ, et les valeurs correspondantes des φ et des ψ

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n, \quad \ldots,$$
$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_n, \quad \ldots,$$

les fonctions φ et ψ formant un système orthogonal et normal. M. Schmidt établit que toute fonction f susceptible de la forme (1) *est susceptible du développement en série*

$$f(x) = a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) + \ldots,$$

les a étant des constantes. Pour simplifier, nous supposons d'abord que le *noyau* $K(x, y)$ soit en général continu, pouvant avoir seulement des sauts brusques finis le long d'un nombre fini de courbes (relations entre x et y).

2. Ce très intéressant résultat est malheureusement d'une application assez difficile, car il ramène la question du développement à un problème au moins aussi difficile, je veux dire la résolution de l'équation intégrale (1) *de première espèce*, où $K(x, y)$ et $f(x)$ sont des données, l'inconnue étant $F(y)$. J'ai donné récemment [1] un théorème général sur les équations intégrales de première espèce, mais, tout en étant théoriquement très satisfaisante, cette proposition peut n'être pas d'un emploi très facile. Je veux indiquer ici un cas extrêmement simple où le théorème de M. Schmidt s'appliquera sans aucune peine.

Soit $H(x, y)$ une fonction donnée de x et y, et prenons la fonction $K(x, y)$ définie par les conditions

$$K(x, y) = H(x, y) \qquad (\text{pour } y \leqq x),$$
$$K(x, y) = 0 \qquad (\text{pour } y > x);$$

les variables x et y varient dans l'intervalle (a, b).

---

[1] *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXIX, 1910).

L'équation (1) devient ici

$$f(x) = \int_a^x H(x, y)\, F(y)\, dy, \tag{3}$$

et le système des équations (2) peut s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= \lambda \int_a^x H(x, y)\, \psi(y)\, dy, \\ \psi(x) &= \lambda \int_x^b H(y, x)\, \varphi(y)\, dy. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Or l'équation (3) est une équation du type d'Abel et de M. Volterra, c'est-à-dire une équation intégrale qu'on discute aujourd'hui facilement, au moins si certaines conditions particulières ne se présentent pas pour $H(x, y)$.

3. Pour prendre le cas le plus simple, supposons que $H(x, y)$ soit continue, et que

$$H(x, x)$$

ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b). On sait alors que, si la fonction continue $f(x)$ s'annule pour $x = a$ et a une dérivée $f'(x)$, on pourra trouver une fonction F satisfaisant à (3).

Nous voyons donc que, sous les conditions précédentes, *une fonction quelconque $f(x)$ sera développable dans l'intervalle (a, b) suivant les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ résultant de la considération du système* (4).

Le cas où $H(x, x)$ s'annule dans (a, b) est beaucoup plus difficile, comme l'ont montré les belles recherches de M. Volterra relatives à l'équation (3).

Le noyau $H(x, y)$ pourrait alors n'être pas continu; ainsi, pour ne citer qu'un cas, prenons

$$H(x, y) = \frac{G(x, y)}{(x - y)^n} \qquad (0 < n < 1),$$

la fonction $G(x, x)$ ne s'annulant pas dans l'intervalle (a, b). On aurait un théorème analogue à celui qui a été énoncé plus haut, et l'on pourrait même supposer que la fonction à développer ne s'annule pas en a.

4. Revenons au cas où $\mathrm{H}(x, y)$ reste finie. On voit facilement que, si

$$\mathrm{H}(x, x)$$

ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b), *la suite des ψ sera fermée, ainsi que celle des φ.*

En effet, d'après la théorie de Schmidt, pour que la suite des ψ_n soit fermé, il faut et il suffit qu'on ne puisse pas trouver une fonction $h(y)$ (non identiquement nulle), telle qu'on ait, quel que soit x,

$$\int_a^b \mathrm{K}(x, y)\, h(y)\, dy = 0,$$

ce qui revient ici à

$$\int_a^x \mathrm{H}(x, y)\, h(y)\, dy = 0.$$

Or il en est bien ainsi, car, avec l'hypothèse faite sur $\mathrm{H}(x, x)$, on sait que l'identité précédente entraîne que $h(y)$ soit identiquement nulle. Un raisonnement analogue montre que la suite des φ est fermée.

Les résultats précédents subsistent, si l'on a identiquement

$$\mathrm{H}(x, x) = 0$$

dans l'intervalle (a, b), pourvu que, en posant

$$\mathrm{H}_1(x, y) = \frac{\partial \mathrm{H}(x, y)}{\partial x},$$

la fonction $\mathrm{H}_1(x, x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle (a, b). En effet, on ne peut encore dans ce cas trouver une fonction (non identiquement nulle) pour laquelle

$$\int_a^x \mathrm{H}(x, y)\, h(y)\, dy = 0,$$

identiquement, car on déduirait de là, en dérivant par rapport à x

$$\int_a^x \mathrm{H}_1(x, y)\, h(y)\, dy = 0,$$

ce qui est impossible, à cause de l'hypothèse faite sur $\mathrm{H}_1(x, x)$.

5. En particularisant $\mathrm{H}(x, y)$, on rencontrerait aisément des exemples connus. Prenons d'abord comme exemple

$$\mathrm{H}(x, y) = g(y),$$

$g(y)$ ne s'annulant pas de a à b.

Les équations (4) deviennent alors

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x g(y)\, \psi(y)\, dy,$$

$$\psi(x) = \lambda \int_x^b g(x)\, \varphi(y)\, dy.$$

En posant

$$\frac{\psi(x)}{g(x)} = u(x),$$

on arrive très aisément à l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda^2 g^2(x)\, u = 0, \tag{5}$$

et la fonction $u(x)$ doit satisfaire aux deux conditions

$$u'(a) = 0, \qquad u(b) = 0.$$

Les valeurs singulières de λ^2 correspondent à une intégrale de (5) satisfaisant à ces deux conditions.

Les théorèmes énoncés plus haut trouvent facilement leur application dans ce cas particulier.

Indiquons encore le cas particulier suivant dont il serait intéressant d'approfondir l'étude :

Soit

$$\mathrm{H}(x, y) = e^{-xy},$$

et prenons pour a une quantité *positive* et $b = +\infty$. Nous aurons donc ici

$$f(x) = \int_a^{\infty} e^{-xy} \mathrm{F}(y)\, dy,$$

et les deux équations simultanées de la forme (4)

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^{x} e^{-xy} \psi(y)\, dy,$$

$$\psi(x) = \lambda \int_x^{\infty} e^{-xy} \varphi(y)\, dy,$$

que nous laisserons au lecteur le soin d'étudier.