H. VERGNE

Sur certaines propriétés des systèmes d'équations différentielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 27 (1910), p. 543-563
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__543_0>

SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS

DES

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES,

PAR M. H. VERGNE.

Étant donné un système d'équations différentielles, la connaissance d'une ou de plusieurs intégrales ne permet pas, en général, d'écrire une nouvelle intégrale distincte des premières; toutefois, cela est possible dans certains cas : par exemple, si les équations sont canoniques, on sait que la connaissance de deux intégrales distinctes permet d'en écrire immédiatement une troisième (théorème de Poisson).

Ce sont ces propriétés, et d'autres analogues, qui font l'objet de cette étude. Dans un premier paragraphe, j'étudierai spécialement les équations canoniques; dans un second paragraphe, il sera question d'un système quelconque d'équations différentielles du premier ordre. Plusieurs des résultats établis directement pour les systèmes canoniques se retrouveront d'ailleurs comme cas particuliers de ceux établis pour les systèmes généraux.

I. — Équations canoniques. Changements canoniques de variables.

1. Considérons une fonction $S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ dépendant de deux séries de n variables; et posons

$$(a) \qquad y_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1}, \quad y_2 = \frac{\partial S}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{\partial S}{\partial x_n},$$

$$(b) \qquad \beta_1 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{\partial S}{\partial \alpha_2}, \quad \ldots, \quad \beta_n = \frac{\partial S}{\partial \alpha_n}.$$

1° Ces $2n$ équations (a), (b) permettent d'exprimer $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$: il en résultera des dérivées partielles, au nombre de $4n^2$, de l'une des formes

$$(c) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \beta_k}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial \beta_k}.$$

2° Les mêmes $2n$ équations (a), (b) permettent d'exprimer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$: il en résultera un second groupe de $4n^2$ dérivées partielles de l'une des formes

$$(d) \qquad \frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \alpha_k}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial \beta_k}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial \beta_k}{\partial y_i}.$$

Les relations suivantes, dues à Jacobi, permettent d'exprimer (¹) l'une quelconque des dérivées (c) au moyen d'une des dérivées (d) :

$$(e) \qquad \frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial x_i},$$

$$(f) \qquad \frac{\partial y_i}{\partial \beta_k} = -\frac{\partial \alpha_k}{\partial x_i},$$

$$(g) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \alpha_k}{\partial y_i},$$

$$(h) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} = -\frac{\partial \beta_k}{\partial y_i}.$$

Nous aurons à faire usage de ces formules.

Les formules (a), (b) expriment que les expressions suivantes

$$\sum_i y_i\,dx_i + \sum_i \beta_i\,d\alpha_i = d\mathrm{S},$$

$$\sum_i \beta_i\,d\alpha_i - \sum_i x_i\,dy_i = d\left(\mathrm{S} - \sum_i x_i y_i\right)$$

sont des *différentielles exactes*.

2. Je suppose que les x_i et les y_i soient assujettis à satisfaire à un

(¹) Tisserand, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 20.

système de $2n$ équations canoniques (au sens de Hamilton)

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

F désignant une fonction des x_i et des y_i, pouvant dépendre aussi de t explicitement.

Faisons le changement de variables indiqué par les formules (a), (b), changement de variables que je désignerai par la notation

$$(x, y) \rightarrow (\beta, \alpha);$$

les relations de Jacobi (e), (f), (g), (h) montrent immédiatement que les nouvelles variables β_k, α_k satisfont aux équations

$$(2) \qquad \frac{d\beta_k}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \alpha_k}, \qquad \frac{d\alpha_k}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \beta_k},$$

c'est-à-dire que le changement de variables $(x,y)\rightarrow(\beta,\alpha)$ n'a pas altéré la forme canonique des équations différentielles [1].

Nous dirons, avec M. Poincaré, qu'un tel changement de variables est *canonique*.

3. Une fonction arbitraire $S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ permet donc d'effectuer un changement canonique de variables $(x,y)\rightarrow(\beta,\alpha)$. Prenons, en particulier, pour S, la fonction

$$S=\alpha_1 q_1+\alpha_2 q_2+\ldots+\alpha_n q_n,$$

linéaire par rapport aux α, les q étant des fonctions quelconques distinctes des x.

Les formules (a), (b), devenues

$$(a_1) \qquad y_i=\alpha_1\frac{\partial q_1}{\partial x_i}+\alpha_2\frac{\partial q_2}{\partial x_i}+\ldots+\alpha_n\frac{\partial q_n}{\partial x_i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$(b_1) \qquad \beta_i=q_i$$

nous définissent un changement canonique de variables $(x,y)\rightarrow(\beta,\alpha)$,

---

(1) H. Poincaré, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, Chap. I; *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 3.

pour lequel les β sont des fonctions *arbitraires* des x, les α étant donnés par les n équations *linéaires* (a_1). Dans le cas de la Dynamique, les x_i représentent les coordonnées de $\frac{n}{3}$ points matériels, les y_i les composantes de leurs quantités de mouvement, F l'énergie totale; et les équations (1) sont les équations du mouvement.

Le changement de variables défini par les formules (a_1), (b_1) n'est autre alors que le changement classique de Poisson-Hamilton, pour le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées curvilignes.

4. Revenons aux changements canoniques en général. Et tout d'abord écrivons les conditions pour que

$$\sum_i y_i\,dx_i + \sum_k \beta_k\,d\alpha_k \tag{3}$$

soit une différentielle exacte dS : prenant pour variables indépendantes les α et les β, nous aurons

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \alpha_k} &= \beta_k + \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k},\\ \frac{\partial S}{\partial \beta_k} &= \sum_i y_i \frac{\partial x_i}{\partial \beta_k}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Nous écrirons que (3) est une différentielle exacte dS en égalant les deux valeurs différentes que (4) donne pour les dérivées secondes obliques $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial \beta_k}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial \beta_h}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_k \partial \alpha_h}$, $\frac{\partial^2 S}{\partial \beta_k \partial \beta_h}$. Nous obtenons ainsi les conditions

$$\left\{\begin{aligned} &1 - \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta_k}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\frac{\partial y_i}{\partial \beta_k}\right) = 0,\\ &\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta_h}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\frac{\partial y_i}{\partial \beta_h}\right) = 0,\\ &\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_h}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_k} - \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}\frac{\partial y_i}{\partial \alpha_h}\right) = 0,\\ &\sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta_h}\frac{\partial y_i}{\partial \beta_k} - \frac{\partial x_i}{\partial \beta_k}\frac{\partial y_i}{\partial \beta_h}\right) = 0, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

conditions qui peuvent s'écrire, en employant les notations des *crochets de Lagrange* (¹),

$$(5\ bis)\qquad \begin{cases} [\beta_k, \alpha_k] = 1, \\ [\beta_h, \alpha_k] = 0, \\ [\alpha_h, \alpha_k] = 0, \\ [\beta_h, \beta_k] = 0. \end{cases}$$

Mais le fait que (3) est une différentielle exacte entraîne, entre les dérivées partielles des (x_i, y_i) par rapport aux (α_k, β_k) et celles des (α_k, β_k) par rapport aux (x_i, y_i), les relations de Jacobi (e), (f), (g), (h). Remplaçant dans (5) les dérivées $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\beta, \alpha)}$ par leurs valeurs tirées de ces relations, ces conditions (5) prennent la forme nouvelle

$$(6)\qquad \begin{cases} 1 - \sum_i \left(\frac{\partial\beta_k}{\partial x_i} \frac{\partial\alpha_k}{\partial y_i} - \frac{\partial\beta_k}{\partial y_i} \frac{\partial\alpha_k}{\partial x_i} \right) = 0, \\ \sum_i \left(\frac{\partial\beta_k}{\partial x_i} \frac{\partial\alpha_h}{\partial y_i} - \frac{\partial\beta_k}{\partial y_i} \frac{\partial\alpha_h}{\partial x_i} \right) = 0, \\ \sum_i \left(\frac{\partial\beta_k}{\partial x_i} \frac{\partial\beta_h}{\partial y_i} - \frac{\partial\beta_k}{\partial y_i} \frac{\partial\beta_h}{\partial x_i} \right) = 0, \\ \sum_i \left(\frac{\partial\alpha_k}{\partial x_i} \frac{\partial\alpha_h}{\partial y_i} - \frac{\partial\alpha_k}{\partial y_i} \frac{\partial\alpha_h}{\partial x_i} \right) = 0; \end{cases}$$

ces conditions peuvent s'écrire, en employant la notation bien connue des *parenthèses de Poisson* (appelées aussi *crochets de Jacobi*) :

$$(6\ bis)\qquad \begin{cases} (\beta_k, \alpha_k) = 1, \\ (\beta_k, \alpha_h) = 0, \\ (\beta_k, \beta_h) = 0, \\ (\alpha_k, \alpha_h) = 0. \end{cases}$$

[Bien entendu, dans tout ceci, rien ne distingue le rôle des (x, y) de celui des (β, α) : on pourra faire jouer aux (x, y) le rôle des (β, α) et inversement; car, si le changement $(x, y) \to (\beta, \alpha)$ est canonique, le changement $(\beta, \alpha) \to (x, y)$ l'est aussi.]

(¹) H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 18 : dans la définition de M. Poincaré, les (β, α) désigneraient des constantes d'intégration; mais on peut aussi bien supposer que ce sont de nouvelles variables.

5. Reprenons les équations canoniques (1), dans lesquelles nous supposons maintenant que la fonction F ne dépend pas de t. Effectuons un changement de variables canonique

$$(x, y) \rightarrow (\beta, \alpha),$$

et supposons que l'une des nouvelles variables, α_1 par exemple, soit la fonction F elle-même ([1]) : $F = \alpha_1$. Alors les nouvelles équations canoniques (2) seront

$$\frac{d\beta_1}{dt} = 1,$$
$$\frac{d\beta_k}{dt} = 0 \qquad (k \neq 1),$$
$$\frac{d\alpha_k}{dt} = 0;$$

si bien que les $2n$ intégrales des équations (1) seront

$$\begin{array}{llll} \alpha_1 = C_1, & \alpha_2 = C_2, & \ldots, & \alpha_n = C_n, \\ \beta_1 - t = C_{n+1}, & \beta_2 = C_{n+2}, & \ldots, & \beta_n = C_{2n}, \end{array}$$

les C étant des constantes d'intégration ([2]).

Pour qu'une fonction $\varphi(x_i, y_i, t)$ soit une intégrale des équations (1), il faut et il suffit qu'exprimée au moyen des variables (α_k, β_k, t), elle ne dépende que de

$$\begin{array}{llll} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n, \\ \beta_1 - t, & \beta_2, & \ldots, & \beta_n. \end{array}$$

6. Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ des intégrales des équations (1). Je considère une expression

$$\mathcal{F}\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}, \ldots, \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i}, \ldots\right), \tag{7}$$

([1]) Cela est toujours possible; il suffit de prendre pour la fonction S de tout à l'heure une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi

$$F\left(x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = \alpha_1,$$

contenant, outre la constante α_1, $(n-1)$ autres constantes $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, dont aucune n'est additive.

([2]) Ce changement de variables est à comparer avec celui que fait M. Poincaré à la page 7 du Tome III des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*.

dépendant de φ_1, φ_2, ... et de leurs dérivées partielles (d'un ordre quelconque); je suppose que cette expression reste invariante par tout changement de variables canonique, c'est-à-dire que le changement canonique $(x, y) \rightarrow (\beta, \alpha)$ transforme cette expression en

$$\mathcal{F}\left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_i}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_i}, \ldots, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_i}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_i}, \ldots\right), \tag{8}$$

où les $\frac{\partial}{\partial \beta_i}$, $\frac{\partial}{\partial \alpha_i}$ remplacent simplement les $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial y_i}$ qui figurent dans (7). Je dis que dans ces conditions l'expression (7) est une intégrale des équations (1).

Supposons, en effet, que les nouvelles variables (β, α) soient précisément celles du numéro précédent : alors φ_1, φ_2, ... ne dépendent que de

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n, \\ \beta_1 - t, & \beta_2, & \ldots, & \beta_n; \end{matrix}$$

il en est évidemment de même des dérivées $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \beta_i}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_i}, \ldots, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \beta_i}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \alpha_i}, \ldots,$ et par suite de l'expression (8) : donc (8), c'est-à-dire (7), est une intégrale. Nous énonçons donc la proposition suivante :

Toute expression dépendant des intégrales des équations (1), *et de leurs dérivées partielles, et qui reste invariante par un changement canonique de variables, est elle-même une intégrale* [1].

7. Il est facile maintenant de retrouver (et de généraliser) le théorème de Poisson : Si φ_1 et φ_2 sont deux intégrales des équations (1), la parenthèse de Poisson (φ_1, φ_2) en est une troisième. Il suffira de montrer que l'expression (φ_1, φ_2) est invariante par un changement de variables canonique $(x, y) \rightarrow (\beta, \alpha)$; or on a

$$\begin{aligned}(\varphi_1, \varphi_2) = & \sum_k (\beta_k, \alpha_k) \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\beta_k, \alpha_k)} + \sum_{kh} (\beta_k, \alpha_h) \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\beta_k, \alpha_h)} \\ & + \sum_{kh} (\beta_k, \beta_h) \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\beta_k, \beta_h)} + \sum_{kh} (\alpha_k, \alpha_h) \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\alpha_k, \alpha_h)},\end{aligned}$$

---

(1) H. VERGNE, *Sur les changements canoniques de variables* (*Comptes rendus*, 25 avril 1910).

ce qui, en vertu des conditions (6) *bis*, se réduit à

$$\sum_k \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(\beta_k, \alpha_k)},$$

c'est-à-dire à la parenthèse (φ_1, φ_2) exprimée avec les variables nouvelles (β, α) (¹).

8. M. Poincaré a donné, du théorème de Poisson, la généralisation suivante (²) : Soient $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ quatre intégrales des équations (1); soit Δ_{ik} leur jacobien par rapport à x_i, y_i, x_k, y_k :

$$\Delta_{ik} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{D(x_i, y_i, x_k, y_k)}.$$

L'expression

$$\sum_{ik} \Delta_{ik}$$

est encore une intégrale.

Ce théorème résulte, dans notre ordre d'idées, de ce que cette expression est invariante par un changement canonique de variables $(x, y) \to (\beta, \alpha)$: les relations (6 *bis*) montrent, en effet, qu'un tel changement transforme l'expression $\sum_{ik} \Delta_{ik}$ en la suivante :

$$\sum_{lh} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{D(\beta_l, \alpha_l, \beta_h, \alpha_h)}.$$

De même, si $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ sont six intégrales des équations (1), l'expression

$$\sum_{ikl} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6)}{D(x_i, y_i, x_k, y_k, x_l, y_l)}$$

est encore une intégrale. Et ainsi de suite. De telles expressions restent, en effet, invariantes par un changement canonique de variables.

9. Supposons que les équations (1) ayant été intégrées, les x_i et

---

(¹) Au sujet de l'invariance des parenthèses de Poisson, et sur le théorème de Poisson généralisé, *voir* deux Notes de M. De Donder (*Comptes rendus*, 8 mars 1909 et 1er août 1910).

(²) H. Poincaré, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, p. 43.

les y_i se trouvent exprimés en fonction de t et de $2n$ constantes d'intégration $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Considérons une expression

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_1}, \frac{\partial x_i}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial y_i}{\partial a_1}, \frac{\partial y_i}{\partial a_2}, \ldots\right) \tag{9}$$

dépendant des dérivées partielles (d'un ordre quelconque), des (x_i, y_i) par rapport aux constantes d'intégration, et supposons que tout changement canonique $(x, y) \to (\beta, \alpha)$, effectué sur les (x_i, y_i), transforme cette expression identiquement en

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial \beta_i}{\partial a_1}, \frac{\partial \beta_i}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial \alpha_i}{\partial a_1}, \frac{\partial \alpha_i}{\partial a_2}, \ldots\right), \tag{10}$$

où les β_i, α_i remplacent simplement les x_i, y_i qui figurent dans (9). Je dis que, dans ces conditions, *l'expression* (9) *est une intégrale des équations* (1).

Supposons, en effet, que les nouvelles variables (β, α) soient précisément celles du n° 5 : alors

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n, \\ \beta_1 - t, & \beta_2, & \ldots, & \beta_n \end{matrix}$$

étant des constantes, ne dépendront que de $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, et pas de t; il en sera évidemment de même de

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial \alpha_i}{\partial a_2}, \quad \ldots$$

et par suite de l'expression (10) : donc (10), c'est-à-dire (9), est une intégrale.

10. Considérons le crochet de Lagrange

$$[a_h, a_l] = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_h}\frac{\partial y_i}{\partial a_l} - \frac{\partial x_i}{\partial a_l}\frac{\partial y_i}{\partial a_h}\right);$$

c'est une expression de la forme (9) : d'ailleurs, un changement canonique $(x, y) \to (\beta, \alpha)$ la transforme en

$$\sum_k \left(\frac{\partial \beta_k}{\partial a_h}\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_l} - \frac{\partial \beta_k}{\partial a_l}\frac{\partial \alpha_k}{\partial a_h}\right),$$

ainsi qu'il résulte des formules (5 *bis*). Donc $[a_h, a_l]$ est une intégrale des équations (1) (¹).

On peut donner de ce théorème des généralisations analogues à celles que M. Poincaré a données du théorème de Poisson, et que nous avons rappelées au nº 8. Appelons D_{ik} le jacobien de x_i, y_i, x_k, y_k par rapport à quatre de nos constantes d'intégration, par rapport à a_1, a_2, a_3, a_4, par exemple

$$D_{ik} = \frac{D(x_i, y_i, x_k, y_k)}{D(a_1, a_2, a_3, a_4)};$$

l'expression

$$\sum_{ik} D_{ik}$$

est une intégrale des équations (1). Et ainsi de suite. De telles expressions restent en effet invariantes par un changement canonique de variables; cela résulte toujours des formules (5 *bis*).

11. On pourrait aussi se proposer de former des expressions dépendant à la fois des dérivées

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_i}, \quad \ldots$$

[dérivées des intégrales du système (1) par rapport aux variables], et des dérivées

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial x_i}{\partial a_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial y_i}{\partial a_1}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial a_2}, \quad \ldots$$

(dérivées des variables par rapport aux constantes d'intégration), et qui resteraient invariantes par un changement canonique. De telles expressions seraient encore des intégrales du système (1). Par exemple

$$\sum_i \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial a_h} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial a_h} \right)$$

est une intégrale; mais elle n'est autre que l'intégrale évidente $\frac{\partial\varphi_1}{\partial a_h}$.

(¹) H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 18.

Nous pouvons dire, de même, que des expressions telles que les suivantes sont des intégrales :

$$\sum_{ik} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_i} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_k} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_k} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_i} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_i} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_k} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_k} \\ -\dfrac{\partial y_i}{\partial a_h} & \dfrac{\partial x_i}{\partial a_h} & -\dfrac{\partial y_k}{\partial a_h} & \dfrac{\partial x_k}{\partial a_h} \\ -\dfrac{\partial y_i}{\partial a_l} & \dfrac{\partial x_i}{\partial a_l} & -\dfrac{\partial y_k}{\partial a_l} & \dfrac{\partial x_k}{\partial a_l} \end{vmatrix}, \qquad \sum_{ik} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_i} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_k} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y_k} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_i} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_i} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x_k} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial y_k} \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x_i} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial y_i} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial x_k} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial y_k} \\ -\dfrac{\partial y_i}{\partial a_l} & \dfrac{\partial x_i}{\partial a_l} & -\dfrac{\partial y_k}{\partial a_l} & \dfrac{\partial x_k}{\partial a_l} \end{vmatrix}, \qquad \ldots$$

Pour établir l'invariance de ces expressions, dans un changement canonique de variables, il faudrait faire usage des deux groupes de formules (5 *bis*) et (6 *bis*), ou de l'un de ces deux groupes combiné avec les relations de Jacobi (e), (f), (g), (h).

Il est à remarquer que, de même que les diverses généralisations du théorème de Poisson ne sont pas effectivement distinctes de ce théorème, de même les intégrales que je viens de signaler auraient pu se déduire de l'emploi combiné du théorème de Poisson et du théorème sur les crochets de Lagrange.

12. La même considération d'invariance par changement canonique de variables va nous permettre de retrouver les divers invariants intégraux que M. Poincaré a donnés ([1]) pour les équations canoniques (1).

L'expression différentielle

$$\sum_i \begin{vmatrix} \delta x_i & \delta y_i \\ \delta' x_i & \delta' y_i \end{vmatrix} = \sum_i (\delta x_i \delta' y_i - \delta y_i \delta' x_i)$$

(dans laquelle δ et δ' représentent deux systèmes différents de différentielles) est invariante par un changement canonique [d'après les formules (5 *bis*)]; il en résulte, toujours par le même raisonnement, que c'est une intégrale dépendant de trois solutions infiniment voisines

([1]) H. POINCARÉ, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, Chap. II.

des équations (1), autrement dit, que l'intégrale double

$$\int\int\sum_i \delta x_i \delta y_i$$

est un invariant intégral des équations (1).

De même, l'expression

$$\sum_{ik}\begin{vmatrix} \delta x_i & \delta y_i & \delta x_k & \delta y_k \\ \delta' x_i & \delta' y_i & \delta' x_k & \delta' y_k \\ \delta'' x_i & \delta'' y_i & \delta'' x_k & \delta'' y_k \\ \delta''' x_i & \delta''' y_i & \delta''' x_k & \delta''' y_k \end{vmatrix}$$

est invariante par un changement canonique. Nous en déduisons l'invariant intégral du quatrième ordre

$$\int\int\int\int\sum_{ik} \delta x_i \delta y_i \delta x_k \delta y_k,$$

et ainsi de suite jusqu'à l'invariant d'ordre $2n$

$$\int\int\cdots\int \delta x_1 \delta y_1 \delta x_2 \delta y_2 \ldots \delta x_n \delta y_n.$$

II. — Systèmes généraux d'équations différentielles. Invariants intégraux.

13. Abandonnons maintenant les équations canoniques, pour nous occuper d'un système général d'équations différentielles; et tout d'abord établissons un lemme préliminaire.

Considérons n variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

et posons

$$(\alpha) \qquad \xi_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les φ étant n fonctions distinctes des x; nous définissons ainsi un changement de variables effectué sur les x :

1° Nous pouvons regarder les ξ comme fonctions des x ; il en résultera des dérivées partielles, au nombre de n^2, de la forme

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k};$$

2° Nous pouvons regarder les x comme fonctions des ξ; il en résultera un second groupe de n^2 dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}.$$

J'écrirai tout d'abord certaines relations qui existent entre ces deux sortes de dérivées partielles. Je désignerai par Δ le jacobien (non identiquement nul par hypothèse) des ξ par rapport aux x :

$$\Delta = \frac{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.$$

Les relations que j'ai en vue, entre les deux sortes de dérivées, sont les suivantes :

$$(\beta)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x_h}{\partial \xi_i} = \frac{(-1)^{h+i}}{\Delta} \frac{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_n)},\\ &\frac{D(x_h, x_l)}{D(\xi_i, \xi_k)} = \frac{(-1)^{h+i+k+l}}{\Delta} \frac{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_{k+1}, \ldots, \xi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{h-1}, x_{h+1}, \ldots, x_{l-1}, x_{l+1}, \ldots, x_n)},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, x_{r+1}, \ldots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{s-1}, \xi_{s+1}, \ldots, \xi_n)} = \frac{(-1)^{r+s}}{\Delta} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_r}. \end{aligned}\right.$$

La première de ces relations est immédiate : si l'on différentie les n équations (α) par rapport à ξ_i, on obtient

$$\begin{gathered} 1 = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_i} + \ldots + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi_i},\\ 0 = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial \xi_i} + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial \xi_i} + \ldots + \frac{\partial \xi_k}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial \xi_i}\\ (k = 0, 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n), \end{gathered}$$

et ce système de n équations linéaires par rapport aux $\frac{\partial x_h}{\partial \xi_i}$ donne immédiatement

$$\frac{\partial x_h}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial \xi_i}{\partial x_h}},$$

qui n'est autre que la première (β). On a ensuite, d'après cette formule même,

$$(\gamma) \qquad \frac{\partial x_h}{\partial \xi_i}\frac{\partial x_l}{\partial \xi_k} - \frac{\partial x_h}{\partial \xi_k}\frac{\partial x_l}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\Delta^2}\left[\frac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_h}}\frac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial \xi_k}{\partial x_l}} - \frac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial \xi_k}{\partial x_h}}\frac{\partial \Delta}{\partial \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_l}}\right];$$

or ce dernier crochet, d'après une formule bien connue relative aux déterminants, est égal à

$$\Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_h}\,\partial \dfrac{\partial \xi_k}{\partial x_l}},$$

si bien que la formule (γ) n'est autre que la seconde (β). Toutes les formules (β) s'établissent ainsi de proche en proche, comme conséquence de la première.

14. Prenons maintenant le système de n équations différentielles du premier ordre

$$(11) \qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

les X étant des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$. Et supposons que, ces équations ayant été résolues, on ait écrit les n intégrales de ce système :

$$\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \xi_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \xi_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \xi_n, \end{array}$$

les ξ étant des constantes d'intégration. Si nous regardons t comme fixe, ces n dernières équations nous définissent n^2 dérivées $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}$, et n^2 dérivées $\frac{\partial x_k}{\partial \xi_i}$, entre lesquelles existent les relations (β).

Je dis tout d'abord que le jacobien

$$\Delta = \frac{D(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

est un *multiplicateur* (au sens de Jacobi), pour les équations (11) : il suffira de faire voir, d'après un théorème de M. Poincaré (¹), que l'intégrale d'ordre n

$$\overbrace{\int\int\cdots\int}^{n} \Delta\, \delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_n$$

est un invariant intégral : or cela est évident, puisque l'élément placé sous le signe $\int$ n'est autre que

$$\delta\xi_1\, \delta\xi_2 \ldots \delta\xi_n,$$

et que les ξ sont des constantes.

15. Supposons maintenant que les équations (11) admettent un invariant intégral d'ordre $n-1$

$$\overbrace{\int\int\cdots\int}^{n-1} \sum_i \mathrm{M}_i\, \delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_{i-1}\, \delta x_{i+1} \ldots \delta x_n$$

(les M_i étant des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$) : cela signifie que l'expression

$$(12) \qquad \sum_i \mathrm{M}_i \begin{vmatrix} \delta_1 x_1 & \delta_1 x_2 & \ldots & \delta_1 x_{i-1} & \delta_1 x_{i+1} & \ldots & \delta_1 x_n \\ \delta_2 x_1 & \ldots & \ldots & \delta_2 x_{i-1} & \delta_2 x_{i+1} & \ldots & \delta_2 x_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n-1} x_1 & \ldots & \ldots & \delta_{n-1} x_{i-1} & \delta_{n-1} x_{i+1} & \ldots & \delta_{n-1} x_n \end{vmatrix},$$

où $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}$ sont $n-1$ symboles différents de différentielles, est une intégrale dépendant de n solutions voisines. Les différentielles δ devant être prises sans faire varier t, nous pouvons prendre

$$\delta_\alpha x_\beta = \frac{\partial x_\beta}{\partial \xi_\alpha}\, \delta\xi_\alpha;$$

alors l'expression (12) devient

$$\sum_i \mathrm{M}_i \frac{\mathrm{D}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\mathrm{D}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})}\, \delta\xi_1\, \delta\xi_2 \ldots \delta\xi_{n-1};$$

(¹) H. Poincaré, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. III, Chap. II. — P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 462.

supprimant le facteur *constant* $\delta\xi_1\,\delta\xi_2\ldots\delta\xi_{n-1}$, et tenant compte des relations (β), nous voyons que

$$\sum_i \frac{(-1)^i}{\Delta} \mathrm{M}_i \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i}$$

est une intégrale des équations (11). Puisque Δ est un multiplicateur, et que le produit d'une intégrale par un multiplicateur est encore un multiplicateur, nous voyons que l'expression

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{M}_i \frac{\partial \xi_n}{\partial x_i}$$

[dans laquelle $\xi_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ représente une intégrale *quelconque* du système (11)] est un multiplicateur. Ce théorème est dû à M. Kœnigs [1], qui l'a établi en supposant que les M_i et les X_i sont indépendants de t.

Si l'on pose

$$\mathrm{B}(\theta) = \sum_i (-1)^i \mathrm{M}_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i},$$

on peut en déduire, avec M. Kœnigs, que, si α et β sont deux intégrales de (11) n'annulant pas $\mathrm{B}(\theta)$, la fonction

$$\frac{\mathrm{B}(\beta)}{\mathrm{B}(\alpha)}$$

est encore une intégrale : c'est, en effet, le quotient de deux multiplicateurs.

16. Supposons maintenant que l'on connaisse, pour les équations (11), un invariant intégral d'ordre $n-2$

$$\overbrace{\int\int\cdots\int}^{n-2} \sum_{ik} \mathrm{M}_{ik}\, \delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_{i-1}\, \delta x_{i+1} \ldots \delta x_{k-1}\, \delta x_{k+1} \ldots \delta x_n\,;$$

un raisonnement, en tout semblable au précédent, montrera que

(1) G. Kœnigs, *Sur les invariants intégraux* (*Comptes rendus*, 6 janvier 1896).

l'expression

$$\sum_{ik} (-1)^{i+k} M_{ik} \frac{D(\xi_{n-1}, \xi_n)}{D(x_i, x_k)} \tag{13}$$

[dans laquelle ξ_{n-1} et ξ_n sont deux intégrales quelconques du système (11)], est un multiplicateur. Si l'on possède trois intégrales, on pourra ainsi former deux multiplicateurs distincts, dont le quotient donnera une nouvelle intégrale.

La généralisation de ce théorème saute aux yeux : si l'on possède, pour les équations (11), un invariant intégral d'ordre $n-p$, et p intégrales, on saura former un multiplicateur. Ce théorème a été démontré, par une autre voie, par M. De Donder (*Circolo di Palermo*, t. XV, 1901).

17. Je suppose maintenant que, dans les équations (11), les X *ne dépendent pas de t*, et que l'intégrale simple

$$\int \mu_1\,\delta x_1 + \mu_2\,\delta x_2 + \ldots + \mu_n\,\delta x_n$$

soit un invariant intégral du premier ordre : cela signifie que la somme

$$\mu_1\,\delta x_1 + \mu_2\,\delta x_2 + \ldots + \mu_n\,\delta x_n$$

est une intégrale quand les δx_i sont un système de solutions des équations *aux variations* (1) du système (11); or les X ne dépendant pas de t constituent un tel système de solutions; donc

$$\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \ldots + \mu_n X_n$$

est une intégrale des équations (11) (2).

Si $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ est une intégrale, nous aurons l'invariant du premier ordre

$$\int \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\delta x_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\delta x_n,$$

---

(1) H. POINCARÉ, *Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, t. I, p. 162.
(2) *Ibid.*, t. III, Chap. I.

et par suite l'intégrale

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}X_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}X_n;$$

mais, φ étant une intégrale, on a identiquement

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}X_2 + \ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}X_n = 0; \tag{13 bis}$$

par suite, l'intégrale précédente n'est autre que $-\frac{\partial\varphi}{\partial t}$.

Donc, lorsque les X ne dépendent pas de t, *si φ est une intégrale, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ en est une autre* (1). De même $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}, \cdots$ sont des intégrales. (*Cf.* P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II, p. 419.)

18. Nous appliquerons les résultats qui précèdent à un système d'équations canoniques

$$\frac{dx_i}{\frac{\partial F}{\partial y_i}} = \frac{dy_i}{-\frac{\partial F}{\partial x_i}} = dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

où la fonction F dépend des x, des y et de t. Pour ces équations, on

---

(1) Cette remarque est d'ailleurs tout à fait évidente; différentiant en effet l'identité (13 *bis*) par rapport à t, il vient

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial t}X_1 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\,\partial t}X_2 + \ldots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n\,\partial t}X_n = 0,$$

ce qui prouve que $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ est une intégrale.

Plus généralement, je suppose que les X dépendent des x et de t, mais que tous les X satisfassent à une *même* équation aux dérivées partielles linéaire et homogène du premier ordre *à coefficients constants*,

$$\mathcal{F}(X_i) = \frac{\partial X_i}{\partial t} + a_1\frac{\partial X_i}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial X_i}{\partial x_2} + \ldots + a_n\frac{\partial X_i}{\partial x_n} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

alors, si $\varphi = \text{const.}$ est une intégrale du système (11), $\mathcal{F}(\varphi) = \text{const.}$ en est une autre.

De même, si tous les X, sauf X_1, satisfont à $\mathcal{F}(X_i) = 0$, et si l'on a une intégrale φ ne dépendant pas de x_1, on aura encore l'intégrale $\mathcal{F}(\varphi)$.

connaît *a priori* un invariant intégral I_{2k} de chaque ordre pair $2k$: ces invariants sont

$$I_2 = \int\int \sum_i \delta x_i \, \delta y_i,$$
$$I_4 = \int\int\int\int \sum_{ik} \delta x_i \, \delta y_i \, \delta x_k \, \delta y_k,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$I_{2n} = \int\int \cdots \int \delta x_1 \, \delta y_1 \, \delta x_2 \, \delta y_2 \dots \delta x_n \, \delta y_n.$$

L'invariant I_{2n} nous apprend que 1 est un multiplicateur pour les équations (14), ce qui est bien connu. L'invariant I_{2n-2}, auquel on applique le théorème du n° 16, nous donne l'intégrale (13) qui est ici

$$\sum_i \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(x_i, y_i)},$$

dans laquelle φ_1 et φ_2 désignent deux intégrales quelconques du système (14) : c'est le théorème de Poisson. L'invariant I_{2n-4} nous apprendrait de même que, si φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 sont quatre intégrales, l'expression

$$\sum_{ik} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{D(x_i, y_i, x_k, y_k)}$$

est encore une intégrale; et ainsi de suite : c'est la généralisation du théorème de Poisson donnée par M. Poincaré (*Méthodes nouvelles*, t. III, p. 43), et que nous avons rappelée plus haut.

Supposons maintenant que, les équations (14) ayant été intégrées, les x_i et les y_i se trouvent exprimés en fonction de t et de $2n$ constantes d'intégration a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n}. L'invariant I_2 nous apprend que la somme

$$\sum_i (\delta x_i \, \delta' y_i - \delta' x_i \, \delta y_i)$$

est une intégrale quand les δx_i, δy_i et les $\delta' x_i$, $\delta' y_i$ sont deux systèmes de solutions des équations aux variations du système (14); si nous prenons, par exemple,

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{a}_1}\delta \mathrm{a}_1, \qquad \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial \mathrm{a}_1}\delta \mathrm{a}_1,$$

$$\delta' x_i = \frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{a}_2}\delta \mathrm{a}_2, \qquad \delta' y_i = \frac{\partial y_i}{\partial \mathrm{a}_2}\delta \mathrm{a}_2,$$

nous pourrons dire que l'expression

$$[\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2] = \sum_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{a}_1}\frac{\partial y_i}{\partial \mathrm{a}_2} - \frac{\partial x_i}{\partial \mathrm{a}_2}\frac{\partial y_i}{\partial \mathrm{a}_1} \right)$$

est une intégrale : c'est le théorème sur les *crochets de Lagrange* (*Cf.* n° 10).

L'invariant I_4 nous apprendrait de même que

$$\sum_{ik} \frac{\mathrm{D}(x_i, y_i, x_k, y_k)}{\mathrm{D}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4)}$$

est une intégrale; et ainsi de suite.

19. J'indiquerai encore une propriété du système canonique (14) : je suppose que ce système admette l'invariant intégral du premier ordre

$$\int \sum_i \mathrm{M}_i\,\delta x_i + \mathrm{N}_i\,\delta y_i; \tag{15}$$

on peut démontrer que l'intégrale $(n-1)$-uple

$$\overbrace{\int\int\cdots\int}^{n-1} \sum_i \mathrm{N}_i\,\delta\omega_{x_i} + \mathrm{M}_i\,\delta\omega_{y_i}$$

est aussi un invariant intégral : $\delta\omega_{x_i}$ représente le produit des différentielles

$$\delta x_1\,\delta y_1\,\delta x_2\,\delta y_2\ldots\,\delta x_n\,\delta y_n,$$

dans lequel on a supprimé le facteur δx_i; $\delta\omega_{y_i}$ représente le même produit, mais où manque le facteur δy_i.

Appliquons à ce dernier invariant d'ordre $n-1$ le théorème de

M. Kœnigs (n° 15). Si φ est une intégrale, l'expression

(16)
$$\sum_i -N_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + M_i \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}$$

est un multiplicateur, et par suite c'est une intégrale (puisque son quotient par le multiplicateur 1 est une intégrale). Donc, dans le cas des équations canoniques, la connaissance d'un invariant du premier ordre et d'une intégrale permet d'écrire une nouvelle intégrale.

Supposons que, φ_1 étant une intégrale autre que φ, l'invariant du premier ordre (15) dont nous partons soit

$$\int \sum_i \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i} \partial x_i + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i} \partial y_i;$$

alors l'intégrale (16) devient

$$\sum_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_i} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_i};$$

nous retrouvons encore le théorème de Poisson.