ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. CLAIRIN

Sur les transformations d'une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 27 (1910), p. 451-489

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__451_0>

SUR LES

TRANSFORMATIONS D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE,

PAR M. J. CLAIRIN,
Professeur à l'Université de Lille.

Introduction.

Ce travail est consacré à l'étude de transformations qui permettent de remplacer, par une équation de Monge-Ampère, une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes si cette équation admet un groupe de transformations de contact dépendant de deux paramètres au moins : les principaux résultats démontrés dans la première Partie ont été indiqués dans deux Notes communiquées à l'Académie des Sciences [1].

Nous ferons usage des notations généralement adoptées; x et y désignant deux variables indépendantes, nous représenterons par z une fonction de ces deux variables et nous poserons

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$
$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Pour les dérivées d'ordre supérieur nous emploierons la lettre p affectée de deux indices; nous écrirons

$$p_{i,j} = \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i\, \partial y^j};$$

i et j, comme toutes les lettres écrites en indice, désignent des

(1) *Comptes rendus*, novembre et décembre 1906.

nombres entiers positifs, la somme $i+j$ est égale ou supérieure à trois ; quelquefois nous nous servirons de notations semblables pour les dérivées secondes, que nous représenterons par $p_{2,0}$, $p_{1,1}$, $p_{0,2}$ au lieu de r, s, t.

Nous aurons à considérer simultanément plusieurs systèmes constitués d'une manière analogue par deux variables indépendantes, une fonction et les dérivées partielles de cette fonction ; nous emploierons toujours les lettres qui viennent d'être indiquées, en ajoutant, s'il y a lieu, un signe distinctif.

Désignons par $F(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n})$ une fonction contenant, outre les variables indépendantes, z et ses dérivées d'ordre inférieur ou égal à n; $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ seront les dérivées de F prises par rapport à x et à y en appliquant le théorème des fonctions composées :

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z} + r\frac{\partial F}{\partial p} + s\frac{\partial F}{\partial q} + \ldots + p_{2,n-1}\frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} + p_{1,n}\frac{\partial F}{\partial p_{0,n}},$$
$$\frac{dF}{dy} = \frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z} + s\frac{\partial F}{\partial p} + t\frac{\partial F}{\partial q} + \ldots + p_{1,n}\frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} + p_{0,n+1}\frac{\partial F}{\partial p_{0,n}}.$$

Nous ferons de même pour toutes les dérivées de F : si k est un entier supérieur à l'unité, $\frac{d^kF}{dx^k}$, $\frac{d^kF}{dx^{k-1}dy}$, $\cdots$ seront les différentes dérivées d'ordre k de F.

I.

1. L'équation

$$(\varepsilon) \qquad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0 \quad [1]$$

et celles qu'on en déduit par des dérivations successives permettent de calculer en fonction de x, y, z, p, q, s, t, $p_{1,2}$, $p_{0,3}$, $\ldots$, $p_{1,n-1}$, $p_{0,n}$ toutes les dérivées d'une intégrale z jusqu'à l'ordre n inclusivement, quel que soit n ; nous supposerons toujours que cette opération ait été effectuée et qu'on ait seulement laissé subsister dans les formules les $2n+3$ quantités qui viennent d'être énumérées. Ces quantités, qui

[1] Un changement de variables permet toujours de remplacer une équation aux dérivées partielles du second ordre par une équation où figure r; on peut alors imaginer que cette dernière équation soit résolue par rapport à r.

Pour la théorie générale de ces équations, *voir* GOURSAT, *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.*

définissent analytiquement la position d'un élément d'ordre n appartenant à une intégrale de (ε) — ou, comme nous dirons pour abréger, appartenant à (ε) — peuvent être appelées *les coordonnées de cet élément*.

Les dérivées k^{iemes} $\frac{d^k F}{dx^k}, \frac{d^k F}{dx^{k-1}dy}, \cdots$ d'une fonction F de ces $2n+3$ coordonnées sont des fonctions des coordonnées des éléments d'ordre $n+k$ de (ε); après que $r, p_{2,1}, \ldots, p_{2,n+k-2}$ auront été remplacées par leurs valeurs, en y supprimant les termes qui contiennent les dérivées $(n+k)^{\text{ièmes}}$ de z, il reste des expressions que nous représenterons par $\left(\frac{d^k F}{dx^k}\right), \left(\frac{d^k F}{dx^{k-1}dy}\right), \cdots$.

Nous ne considérerons que le cas où l'équation en λ

$$\lambda^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\lambda + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

a deux racines distinctes m et μ; (ε) possède alors deux systèmes de caractéristiques (C) et (Γ); les caractéristiques d'ordre n du système (Γ) sont des multiplicités de ∞^1 éléments appartenant à (ε), dont les $2n+3$ coordonnées satisfont aux équations différentielles

$$(1)\quad \begin{cases} dy = \mu\, dx, \qquad dz = p\, dx + q\, dy, \\ dp = -f\, dx + s\, dy, \quad \ldots, \quad dp_{1,n-2} = -\frac{d^{n-2}f}{dy^{n-2}}dx + p_{1,n-1}\, dy, \\ dq = \quad s\, dx + t\, dy, \quad \ldots, \quad dp_{0,n-1} = \quad p_{1,n-1}\, dx + p_{0,n}\quad dy, \\ \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right) dx + dp_{1,n-1} + m\, dp_{0,n} = 0; \end{cases}$$

en permutant m et μ on aurait les équations des caractéristiques du système (C).

Les fonctions $F(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n})$, telles que dF soit nulle quand $dx, dy, dz, dp, dq, \ldots, dp_{1,n-1}, dp_{0,n}$ satisfont aux équations (1) [1], sont les intégrales communes aux équations

$$(2)\quad \frac{\partial F}{\partial p_{0,n}} - m\frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} = 0,$$

$$(3)\quad \left(\frac{dF}{dx}\right) + \mu\left(\frac{dF}{dy}\right) - \left(\frac{d^{n-1}f}{dy^{n-1}}\right)\frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} = 0.$$

---

[1] On dit alors que F est un invariant du système (Γ) de caractéristiques. Le mot

L'effet d'une transformation de contact telle que (ε) devienne

$$(\bar{\varepsilon}) \qquad \bar{r} + \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{p}, \bar{q}, \bar{s}, \bar{t}) = 0$$

est évidemment de remplacer le système des équations (2) et (3) par

$$(2)' \qquad \frac{\partial F}{\partial \overline{p_{0,n}}} - \bar{m}\frac{\partial F}{\partial \overline{p_{1,n-1}}} = 0,$$

$$(3)' \qquad \left(\frac{dF}{d\bar{x}}\right) + \bar{\mu}\left(\frac{dF}{d\bar{y}}\right) - \left(\frac{d^{n-1}\bar{f}}{d\bar{y}^{n-1}}\right)\frac{\partial F}{\partial \overline{p_{1,n-1}}} = 0;$$

pour calculer $\bar{\mu}$, par exemple, on chercherait la transformée de

$$dy = \mu\, dx,$$

et l'on remarquerait qu'elle doit se réduire à

$$d\bar{y} = \bar{\mu}\, d\bar{x};$$

d'ailleurs $\bar{m}$ et $\bar{\mu}$ sont liées par les relations

$$\bar{m} + \bar{\mu} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{s}}, \qquad \bar{m}\bar{\mu} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{t}}.$$

Les équations (2) et (2)′ sont transformées l'une de l'autre. Si, en effet, on imagine écrites les $2n+3$ formules qui définissent la transformation de contact pour les éléments d'ordre n de (ε) et de $(\bar{\varepsilon})$, parmi les coordonnées des éléments de $(\bar{\varepsilon})$ seules $\overline{p_{1,n-1}}$ et $\overline{p_{0,n}}$ dépendent de $p_{1,n-1}$ et $p_{0,n}$ [1], la transformation de l'équation (2) ne pourra contenir que les dérivées $\frac{\partial F}{\partial \overline{p_{1,n-1}}}$, $\frac{\partial F}{\partial \overline{p_{0,n}}}$ et sera nécessairement l'équation (2)′.

Supposons que (ε) admette un groupe continu (G) de transformations de contact, appelons $(G^{(n)})$ le groupe obtenu en prolongeant (G) jusqu'à l'ordre n et en ne considérant que les $2n+3$ coordonnées des éléments de (ε), ce qui est possible puisque ces éléments forment un

---

invariant a dans plusieurs passages deux sens différents; j'ai tâché d'être assez précis pour éviter toute confusion.

(1) Ce raisonnement ne s'applique pas lorsque n est égal à l'unité.

ensemble invariant relativement au groupe; il résulte des considérations précédentes que l'équation (2) et le système formé par (2) et (3) sont invariants relativement à $(G^{(n)})$, c'est-à-dire relativement à toute transformation finie ou infinitésimale de ce groupe.

2. Supposons que le groupe continu (G) des transformations de contact qui laissent (ε) invariante ait pour ordre un nombre pair $2n$ et soit engendré par les transformations infinitésimales

$$X_1 F, \quad X_2 F, \quad \ldots, \quad X_{2n} F;$$

les transformations

$$X_1^{(n)} F, \quad X_2^{(n)} F, \quad \ldots, \quad X_{2n}^{(n)} F,$$

qui engendrent $(G^{(n)})$, se déduisent des précédentes en prolongeant jusqu'à l'ordre n, à condition de supposer que F contienne seulement les coordonnées des éléments de (ε) et d'exprimer en fonction de ces coordonnées les coefficients de

$$\frac{\partial F}{\partial s}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}}, \quad \frac{\partial F}{\partial p_{0,n}}.$$

Les invariants de $(G^{(n)})$ satisfont au système d'équations

$$X_1^{(n)} F = 0, \qquad X_2^{(n)} F = 0, \quad \ldots, \quad X_{2n}^{(n)} F = 0,$$

qui possède toujours au moins trois intégrales distinctes φ_1, φ_2, φ_3; il n'en possède d'ailleurs pas un plus grand nombre si $X_1^{(n)} F$, $X_2^{(n)} F$, ..., $X_{2n}^{(n)} F$ ne sont liées par aucune relation linéaire; admettons d'abord qu'il en soit ainsi.

Considérons une surface intégrale quelconque (Σ) de (ε); les coordonnées des éléments de (ε) qui engendrent cette intégrale dépendent de deux variables; en remplaçant ces coordonnées par leurs expressions dans φ_1, φ_2, φ_3, et en éliminant ces deux variables, il vient une équation que nous écrirons

$$\varphi_3 = \omega(\varphi_1, \varphi_2). \tag{4}$$

En général, l'équation précédente et (ε) admettent ∞^{2n} intégrales communes déduites de (Σ) à l'aide des transformations du groupe (G); la fonction $\omega(\varphi_1, \varphi_2)$ dépend d'une infinité de constantes arbitraires.

Les intégrales communes aux équations (4) et (ε) satisfont, en outre, aux équations

$$\frac{d\varphi_3}{dx} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dx},$$
$$\frac{d\varphi_3}{dy} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dy} + \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dy},$$

qui donnent

$$\frac{\dfrac{d\varphi_3}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_3}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_1}, \qquad \frac{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_3}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_3}{dx}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}} = \frac{\partial\omega}{\partial\varphi_2}.$$

Les premiers membres de ces dernières équations contiennent $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n}, p_{0,n+1}$; ce sont des invariants du groupe $(G^{(n+1)})$ [1], puisque dans les seconds membres figurent seulement les invariants φ_1, φ_2 de $(G^{(n)})$.

Posons

$$(5)\qquad \begin{cases} x' = \varphi_1(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}), \\ y' = \varphi_2(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}), \\ z' = \varphi_3(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}); \end{cases}$$

à chaque intégrale de (ε) les équations précédentes font correspondre une surface; nous allons montrer que toutes les surfaces ainsi obtenues sont, en général, les intégrales d'une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Les équations

$$\frac{d\varphi_3}{dx} = p'\frac{d\varphi_1}{dx} + q'\frac{d\varphi_2}{dx}, \qquad \frac{d\varphi_3}{dy} = p'\frac{d\varphi_1}{dy} + q'\frac{d\varphi_2}{dy}$$

donnent les dérivées de z' considérée comme fonction de x' et y'; en

---

[1] D'une manière générale, $(G^{(h)})$ désigne le groupe formé de la même manière que $(G^{(n)})$, en prolongeant (G) jusqu'à l'ordre h; la signification de $X_1^{(h)}F$, $X_2^{(h)}F, \ldots$ est aussi évidente.

résolvant, il vient

$$(6)\quad \begin{cases} p' = \dfrac{\dfrac{d\varphi_3}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_3}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}} = \psi_1(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n}, p_{0,n+1}), \\[2ex] q' = \dfrac{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_3}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_3}{dx}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}} = \psi_2(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n}, p_{0,n+1}); \end{cases}$$

les derniers membres de ces égalités sont, nous l'avons vu, des invariants de $(G^{(n+1)})$.

Les dérivées secondes de z' se calculent de la même manière :

$$(7)\quad \begin{cases} r' = \dfrac{\dfrac{d\psi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\psi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}} = \varpi_1(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n+1}, p_{0,n+2}), \\[2ex] s' = \dfrac{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\psi_1}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\psi_1}{dx}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}} = \varpi_2(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n+1}, p_{0,n+2}), \\[2ex] t' = \dfrac{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\psi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\psi_2}{dx}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}} = \varpi_3(x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n+1}, p_{0,n+2}); \end{cases}$$

ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sont des invariants du groupe $(G^{(n+2)})$; on le démontrerait en répétant le raisonnement indiqué plus haut.

Un invariant de $(G^{(n)})$ ou de $(G^{(n+1)})$ est un invariant de $(G^{(n+2)})$; nous avons donc trouvé huit invariants de $(G^{(n+2)})$; mais ce groupe ne peut admettre plus de sept invariants distincts, puisque ces invariants sont les intégrales du système complet

$$X_1^{(n+2)}F = 0, \qquad X_2^{(n+2)}F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n}^{(n+2)}F = 0,$$

qui contient $2n + 7$ variables [1]; il existe donc entre ces invariants

[1] Les équations précédentes sont indépendantes, puisque, par hypothèse, $X_1^{(n)}F$, $X_2^{(n)}F$, $\ldots$, $X_{2n}^{(n)}F$ ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène.

une relation

$$(8) \qquad H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3) = 0,$$

c'est-à-dire que $z'(x', y')$ satisfait à l'équation du second ordre

$$(\varepsilon') \qquad H(x', y', z', p', q', r', s', t') = 0.$$

Cette équation est une équation de Monge-Ampère : il est évident que les équations (5) et (6) font correspondre à toute multiplicité (M_{n+1}) formée de ∞^1 éléments unis du $(n+1)^{\text{ième}}$ ordre qui appartiennent à (ε) une multiplicité (M'_1) d'éléments unis du premier ordre et qu'à une intégrale de (ε) contenant (M_{n+1}) correspond une intégrale de la transformée qui contient (M'_1). Si (M_{n+1}) est une multiplicité caractéristique de (ε), il existe une infinité d'intégrales de (ε) qui contiennent (M_{n+1}); à ces intégrales qui dépendent d'une infinité de constantes arbitraires correspondent des intégrales de la transformée qui sont tangentes tout le long de (M'_1); d'ailleurs, à deux intégrales qui ont en commun tous les éléments de (M_{n+1}), mais non des éléments d'ordre plus élevé, correspondent deux intégrales dont le contact le long de (M'_1) est du premier ordre seulement puisque, d'après les formules (7), les valeurs de r', s', t' dépendent de $p_{1,n+1}$, $p_{0,n+2}$ [1]; (M'_1) est dans ce cas une caractéristique du premier ordre de l'équation transformée. Cette équation possède deux systèmes de caractéristiques du premier ordre qui correspondent aux deux systèmes de caractéristiques de (ε); c'est donc une équation de Monge-Ampère.

Nous allons d'ailleurs montrer qu'on peut diriger les calculs de telle sorte que H contienne linéairement r', s', t'. Imaginons qu'on élimine d'abord $p_{1,n+1}$ et $p_{0,n+2}$ entre les équations (7) ; ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 étant des polynomes du premier degré en $p_{1,n+1}$ et $p_{0,n+2}$, on trouve une relation de la forme

$$(9) \qquad Ar' + Bs' + Ct' + D = 0;$$

[1] ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sont, en général, des fonctions indépendantes de $p_{1,n+1}$, $p_{0,n+2}$; lorsqu'il en est autrement, on ne peut plus raisonner comme nous venons de faire; supposons, par exemple, que $p_{1,n+1}$ et $p_{0,n+2}$ figurent seulement par la combinaison $p_{1,n+1} + mp_{0,n+2}$ dans ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, si (M_{n+1}) est une caractéristique du système (C), r', s', t' ont des valeurs bien déterminées en chaque point de (M'_1).

A, B, C, D désignent des fonctions de x, y, z, p, q, ..., $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$. Il reste à éliminer ces quantités entre les équations (5), (6) et (9); le résultat sera nécessairement de la forme suivante :

$$\begin{aligned}\alpha(x', y', z', p', q')r' + \beta(x', y', z', p', q')s'\\ + \gamma(x', y', z', p', q')t' + \delta(x', y', z', p', q') = 0,\end{aligned}$$

ce que nous voulions établir [1].

Les raisonnements précédents sont en défaut si r', s', t' ne sont pas des fonctions indépendantes de $p_{1,n+1}$, $p_{0,n+2}$; un calcul qui n'offre aucune difficulté montre qu'il en est ainsi seulement lorsque ψ_1 et ψ_2 satisfont à l'équation

$$(10)\qquad \frac{\partial F}{\partial p_{0,n+1}} - m\frac{\partial F}{\partial p_{1,n}} = 0,$$

ou à l'équation obtenue en remplaçant m par μ. Dans ce cas, φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2 sont des intégrales du système formé par

$$X_1^{(n+1)}F = 0, \qquad X_2^{(n+1)}F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n}^{(n+1)}F = 0$$

et l'équation (10) ou l'équation analogue; ces $2n+1$ équations sont indépendantes, puisque nous avons supposé que $X_1^{(n)}F$, $X_2^{(n)}F$, ..., $X_{2n}^{(n)}F$ ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène, il n'existe donc pas plus de quatre intégrales distinctes, et l'on peut déduire des systèmes (5) et (6) une équation

$$(11)\qquad K(x', y', z', p', q') = 0;$$

la transformation (5) fait alors correspondre à l'équation du second ordre proposée une équation du premier ordre.

Avant d'examiner si cette circonstance peut se présenter, nous ferons encore une remarque : nous avons admis que la relation entre φ_1, φ_2, φ_3 qui correspond à une intégrale de (ε) peut être écrite sous la forme (4); il y a exception quand φ_3 ne figure pas dans cette relation; φ_1 et φ_2 sont alors nécessairement deux invariants de l'un des systèmes de caractéristiques de (ε). D'ailleurs, un changement de notations très

---

[1] Une démonstration semblable à celle qui est indiquée plus loin (n° 5) pourrait être faite ici également.

simple — il suffit de permuter φ_2 et φ_3, par exemple — permet toujours de revenir au cas général; l'équation transformée de (ε) est alors

$$q' = 0.$$

3. Observons d'abord que, $2n$ étant l'ordre du groupe (G), l'une au moins des fonctions φ_1, φ_2, φ_3 dépend effectivement des dérivées d'ordre n de z : le raisonnement développé plus haut montre toujours que

$$\frac{\dfrac{d\varphi_3}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_3}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}}, \qquad \frac{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_3}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_3}{dx}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx}\dfrac{d\varphi_2}{dy} - \dfrac{d\varphi_1}{dy}\dfrac{d\varphi_2}{dx}}$$

sont des invariants dont l'un au moins est distinct de φ_1, φ_2, φ_3, puisque la fonction $\omega(\varphi_1, \varphi_2)$ renferme une infinité de constantes arbitraires; ces expressions ne contiendraient aucune dérivée d'ordre supérieur à n si les quantités $x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n-2}, p_{0,n-1}$ figuraient seules dans φ_1, φ_2, φ_3; le groupe $(G^{(n)})$ posséderait donc plus de trois invariants, ce que nous avons reconnu impossible.

Supposons que la transformation (5) fasse correspondre à (ε) une équation de Monge-Ampère et considérons une des intégrales

$$(\Sigma') \qquad z' = g(x', y')$$

de cette équation; les intégrales correspondantes de (ε) doivent satisfaire à

$$(12) \qquad \varphi_3 = g(\varphi_1, \varphi_2);$$

les équations déduites de cette dernière par dérivation sont équivalentes aux équations

$$(13) \qquad \psi_1 = \frac{\partial g}{\partial \varphi_1}, \qquad \psi_2 = \frac{\partial g}{\partial \varphi_2},$$

on le vérifie aisément d'après les expressions de ψ_1, ψ_2 [formules (6)]. Puisque ψ_1 et ψ_2 sont des fonctions indépendantes de $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$, on peut calculer toutes les dérivées de z d'ordre supérieur à n en fonction des dérivées dont l'ordre ne dépasse pas n, celles-ci devant satisfaire à (12) et à (ε) ainsi qu'aux équations obtenues en dérivant. Les intégrales communes à (ε) et à (12) sont donc les intégrales d'un système de $2n$ équations aux différentielles totales et ne peuvent dépendre de plus de $2n$ constantes arbitraires. Elles dépendent d'ailleurs bien de $2n$ constantes, le système est complètement intégrable : en effet, les équations déduites de (13) en dérivant peuvent être remplacées par

$$\varpi_1 = \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi_1^2}, \qquad \varpi_2 = \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi_1 \, \partial \varphi_2}, \qquad \varpi_3 = \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi_2^2},$$

et ces trois équations ne sont pas indépendantes, puisque φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 satisfont à la condition (8) et que g représente une intégrale de (ε'). Ainsi, à une intégrale quelconque de (ε') correspondent ∞^{2n} intégrales de l'équation proposée; on peut évidemment obtenir toutes ces intégrales en appliquant à l'une d'elles les transformations du groupe (G).

Au contraire, si les surfaces déduites des intégrales de (ε) par la transformation (5) satisfont à une équation telle que (11), à chacune d'elles correspondent des intégrales de (ε) dépendant d'une infinité de constantes arbitraires. Conservons les mêmes notations; supposons que (Σ') soit une surface intégrale de (11), nous avons à chercher les intégrales communes à (ε) et à (12); en dérivant les deux membres de (12), on trouve des équations équivalentes à (13). Ces équations (13) ne sont pas indépendantes, parce que φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2 sont liées par la relation

$$K(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2) = 0,$$

et la même relation existe entre φ_1, φ_2, $g(\varphi_1, \varphi_2)$, $\dfrac{\partial g}{\partial \varphi_1}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \varphi_2}$; ($\varepsilon$) et (12) forment un système en involution, l'intégrale générale dépend d'une fonction arbitraire. Toute intégrale de (ε) satisfait donc à une équation telle que (4) qui a ∞^∞ intégrales communes avec (ε); cette dernière équation est alors intégrable par la méthode de M. Darboux, l'un des systèmes de caractéristiques, (C) ou (Γ), possède deux invariants qui sont en même temps des invariants de ($G^{(n)}$) ; nous avons déjà vérifié que, dans ce cas, la transformation étudiée permet de remplacer (ε) par une équation du premier ordre.

Il n'est pas évident que deux fonctions de x, y, z, p, q, $\ldots$, $p_{1,n-1}$,

$p_{0,n}$ puissent être à la fois des invariants de $(G^{(n)})$ et de l'un des systèmes de caractéristiques; aussi nous allons indiquer un exemple. Considérons l'équation

$$r + f(s) = 0;$$

elle admet le groupe des transformations ponctuelles

$$x = \overline{x} + \lambda_1, \qquad y = \overline{y}, \qquad z = \overline{z} + \lambda_2 \overline{x} + \lambda_3 \overline{y} + \lambda_4,$$

qui dépendent des quatre paramètres $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. y et $t + \int \frac{ds}{f'(s)}$ sont deux invariants de l'un des systèmes de caractéristiques et du groupe précédent prolongé jusqu'au second ordre. Si l'on définit une transformation par les équations

$$x' = t, \qquad y' = y, \qquad z' = t + \int \frac{ds}{f'(s)},$$

on trouve que $z'(x', y')$ satisfait à

$$p' = 0.$$

4. Nous avons supposé que les équations

$$X_1^{(n)} F = 0, \qquad X_2^{(n)} F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n}^{(n)} F = 0$$

sont linéairement indépendantes; nous allons montrer que cette hypothèse est toujours réalisée. Si les premiers membres de ces équations étaient liés par des relations linéaires et homogènes, $(G^{(n)})$ posséderait certainement quatre invariants distincts $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$, puisque le système précédent comprendrait moins de $2n$ équations indépendantes; une intégrale quelconque de (ε) et toutes les intégrales déduites de celle-ci à l'aide des transformations du groupe (G) satisferaient à deux équations de la forme

$$(14) \qquad \varphi_3 - \omega_1(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \qquad \varphi_4 - \omega_2(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

où ω_1 et ω_2 représenteraient des fonctions dépendant d'une infinité de constantes. Les intégrales communes à (ε) et à un système tel que (14) ne contiennent jamais $2n$ paramètres arbitraires, à moins que les deux équations (14) ne soient en involution avec (ε), leurs premiers membres étant des invariants de l'un des systèmes de caractéristiques. Trois invariants de $(G^{(n)})$ seraient alors des invariants de ce système de caractéristiques : supposons, pour fixer les idées, que φ_2, φ_3, φ_4 soient des invariants de (Γ). Il ne peut arriver que deux de ces fonctions — φ_2 et φ_3 par exemple — contiennent seulement les dérivées de z d'ordre inférieur à n ; à une caractéristique d'ordre $n-1$ du système (C) et à toutes les caractéristiques homologues correspondrait, en effet, une équation telle que

$$\varphi_3 = \omega_1(\varphi_2), \tag{15}$$

qui aurait seulement ∞^{2n-1} caractéristiques communes avec (ε). Le système (Γ) admettrait donc deux invariants d'ordre n ; n ne pourrait être supérieur à deux.

Nous nous bornerons à l'étude du cas où n est égal à deux [1].

X_1F, X_2F, X_3F, X_4F sont liées par des relations linéaires et homogènes dont le nombre est au moins égal à celui des relations qui existent entre $X_1^{(2)}F$, $X_2^{(2)}F$, $X_3^{(2)}F$, $X_4^{(2)}F$; en dehors des invariants de (G) le groupe $(G^{(2)})$ ne possède pas plus de deux invariants ; il est permis de supposer que φ_2 est un invariant du premier ordre. Lorsque (Γ) admet un tel invariant, il ne peut y avoir pour ce système de caractéristiques deux invariants du second ordre ; imaginons donc que φ_3 soit également du premier ordre : (ε) est une équation de Monge-Ampère avec l'intégrale intermédiaire (15).

Par hypothèse, φ_2 et φ_3 sont invariantes relativement à un groupe d'ordre supérieur à l'unité ; les équations

$$[W, \varphi_2] - W\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 0, \qquad [W, \varphi_3] - W\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0,$$

où W représente une fonction de x, y, z, p, q, admettent deux intégrales distinctes W_1, W_2. $W_1\,\theta\left(\frac{W_2}{W_1}\right)$ satisfait, quelle que soit la fonction θ, aux équations précédentes. Il existe un groupe d'ordre infini qui laisse invariantes φ_2, φ_3 et par conséquent l'équation (ε).

[1] Le cas où n est égal à l'unité a déjà été traité (*Comptes rendus*, mai 1902 ; *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXX, 1902, p. 100) ; certains des raisonnements précédents ne seraient pas applicables dans ce cas particulier.

5. Nous considérerons maintenant une équation

$$(\varepsilon) \qquad r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0,$$

qui admet un groupe continu (G) de transformations de contact dont l'ordre est un nombre impair $2n - 1$ ($n \geqq 2$), et nous démontrerons qu'il est possible de faire correspondre à (ε) deux équations de Monge-Ampère.

Les notations seront tout à fait analogues à celles que nous avons déjà employées.

Représentons par

$$X_1 F, \quad X_2 F, \quad \ldots, \quad X_{2n-1} F$$

les transformations infinitésimales qui engendrent le groupe (G) et par

$$X_1^{(n)} F, \quad X_2^{(n)} F, \quad \ldots, \quad X_{2n-1}^{(n)} F$$

les transformations infinitésimales qui engendrent ($G^{(n)}$), c'est-à-dire les transformations infinitésimales précédentes prolongées jusqu'à l'ordre n et dans lesquelles on a seulement laissé subsister les coordonnées $x, y, z, p, q, s, t, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}$ des éléments d'ordre n appartenant à (ε).

Nous avons vu (n° 1) que l'équation

$$A_n F = \frac{\partial F}{\partial p_{0,n}} - m \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} = 0$$

est invariante relativement au groupe (G_n); elle est donc invariante relativement aux transformations infinitésimales de ce groupe, et les équations

$$(16) \qquad X_1^{(n)} F = 0, \qquad X_2^{(n)} F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n-1}^{(n)} F = 0, \qquad A_n F = 0$$

forment un système complet qui possède trois intégrales distinctes, puisque les variables $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}$ sont au nombre de $2n + 3$; nous admettrons d'abord que les équations

$$X_1^{(n-1)} F = 0, \qquad X_2^{(n-1)} F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n-1}^{(n-1)} F = 0,$$

et par conséquent les équations (16), sont indépendantes.

Désignons par φ_1, φ_2, φ_3 les trois intégrales distinctes du système (16), et posons

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= \varphi_1(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}),\\ y' &= \varphi_2(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}),\\ z' &= \varphi_3(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n});\end{aligned}\right.$$

à chaque intégrale de (ε) les équations précédentes font correspondre une surface; nous voulons établir que ces surfaces sont, en général, les intégrales d'une équation de Monge-Ampère.

Comme précédemment, on trouve

$$(17)'\qquad \left\{\begin{aligned} p' &= \psi_1(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n}, \quad p_{0,n+1}),\\ q' &= \psi_2(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n}, \quad p_{0,n+1}),\\ r' &= \varpi_1(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n+1}, p_{0,n+2}),\\ s' &= \varpi_2(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n+1}, p_{0,n+2}),\\ t' &= \varpi_3(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n+1}, p_{0,n+2}),\end{aligned}\right.$$

ψ_1, ψ_2, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 étant toujours calculés de la même manière; ψ_1 et ψ_2 sont des invariants de ($G^{(n+1)}$), ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 des invariants de ($G^{(n+2)}$).

Il suffit de calculer dans $\frac{d\varphi_1}{dx}$, $\frac{d\varphi_1}{dy}$, $\frac{d\varphi_2}{dx}$, $\frac{d\varphi_2}{dy}$, $\frac{d\varphi_3}{dx}$, $\frac{d\varphi_3}{dy}$ les termes qui contiennent les dérivées $(n+1)^{\text{ièmes}}$ de z; de remplacer $p_{2,n-1}$ par la valeur obtenue en dérivant $(n-1)$ fois par rapport à y les deux membres de (ε) et de tenir compte des relations

$$m + \mu = \frac{\partial f}{\partial s}, \qquad m\mu = \frac{\partial f}{\partial t},$$

pour voir que $\frac{d\varphi_1}{dx}, \ldots, \frac{d\varphi_3}{dy}$ et, par conséquent, ψ_1 et ψ_2 satisfont à l'équation

$$A_{n+1}F = \frac{\partial F}{\partial p_{0,n+1}} - m\frac{\partial F}{\partial p_{1,n}} = 0.$$

De même, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 satisfont à

$$A_{n+2}F = \frac{\partial F}{\partial p_{0,n+2}} - m\frac{\partial F}{\partial p_{1,n+1}} = 0;$$

φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sont des intégrales du système

$$X_1^{(n+2)}F = 0, \qquad X_2^{(n+2)}F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n-1}^{(n+2)}F = 0, \qquad A_{n+2}F = 0;$$

ce sont en effet des invariants de $(G^{(n+2)})$, c'est-à-dire des intégrales des $2n-1$ premières équations du système précédent; de plus, nous venons de voir que ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 satisfont à la dernière équation, il en est ainsi également pour φ_1, φ_2, φ_3 ψ_1, ψ_2, qui ne contiennent pas les dérivées d'ordre $n+2$ de z. Ce système de $2n$ équations indépendantes où figurent $2n+7$ variables ne peut admettre plus de sept intégrales distinctes; il existe donc une relation

$$H(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \varpi_1, \varpi_2, \varpi_3) = 0$$

entre les huit intégrales que nous avons trouvées ou, ce qui revient au même, $z'(x', y')$ satisfait à l'équation du second ordre

$$(\varepsilon') \qquad H(x', y', z', p', q', r', s', t') = 0.$$

C'est une équation de Monge-Ampère; nous allons, en effet, montrer qu'elle possède deux systèmes de caractéristiques du premier ordre, que nous désignerons par (C') et (Γ'), et qui correspondent respectivement aux deux systèmes (C) et (Γ) de caractéristiques de (ε).

A une multiplicité (M_{n+1}) composée de ∞^1 éléments unis d'ordre $n+1$ appartenant à (ε) correspond une multiplicité (M'_1) de ∞^1 éléments unis du premier ordre. Supposons que (M_{n+1}) soit une multiplicité caractéristique du système (Γ); elle supporte une infinité de multiplicités caractéristiques d'ordre $n+2$, et à chacune de ces dernières les équations (17), (17)' font correspondre une multiplicité du second ordre qui est supportée par (M'_1) [1] et dont les éléments appartiennent à l'équation (ε'). Cette équation admet, par conséquent, une famille de caractéristiques du premier ordre qui sont les transformées des caractéristiques d'ordre $n+1$ du système (Γ).

Lorsqu'un élément $(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n})$ engendre une multiplicité caractéristique (M_n) d'ordre n du système (C), le point (x', y', z') correspondant décrit une courbe; en chaque point de cette courbe les valeurs de p', q' sont déterminées, puisqu'elles ne dépendent

---

[1] Ces multiplicités sont distinctes, puisque ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, qui dépendent de $p_{1,n+1}, p_{0,n+2}$, contiennent seulement $p_{1,n+1} + m p_{0,n+2}$; le long d'une caractéristique d'ordre $n+1$ du système (Γ), c'est $p_{1,n+1} + \mu p_{0,n+2}$ qui a en chaque point une valeur déterminée égale à $\dfrac{dp_{0,n+1}}{dx}$.

que des coordonnées des éléments de (M_n) et de $p_{1,n} + mp_{0,n+1}$, expression qui en chaque point de (M_n) est égale à $\frac{dp_{0,n}}{dx}$. La multiplicité engendrée par l'élément x', y', z', p', q' est une multiplicité caractéristique du premier ordre de (ε'); elle sert en effet de base à une infinité de multiplicités composées d'éléments unis du second ordre $(x', y', z', p', q', r', s', t')$ qui appartiennent à l'équation (ε'), puisque les fonctions ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 contiennent, outre les coordonnées des éléments de (M_n), $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$, $p_{1,n+1} + mp_{0,n+2}$. Aux caractéristiques du système (C), comme à celles du système (Γ), correspondent des caractéristiques du premier ordre de (ε'), ce que nous voulions démontrer.

L'équation transformée ne renferme pas de terme en $r't' - s'^2$: les caractéristiques (Γ') satisfont à l'équation différentielle

$$dy' = \mu' \, dx',$$

μ' étant donné par l'égalité

$$\mu' = \frac{\dfrac{d\varphi_2}{dx} + \mu \dfrac{d\varphi_2}{dy}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx} + \mu \dfrac{d\varphi_1}{dy}};$$

le second membre contient x, y, z et les dérivées de z jusqu'à l'ordre n — la vérification n'offre aucune difficulté —; de plus il est évidemment invariant relativement aux transformations de $(G^{(n)})$; il satisfait donc aux équations

$$X_1^{(n+1)}F = 0, \qquad X_2^{(n+1)}F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n-1}^{(n+1)}F = 0, \qquad A_{n+1}F = 0$$

et peut s'exprimer en fonction des cinq intégrales φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2 de ce système. μ' dépend seulement de x', y', z', p', q'; on en déduit immédiatement le résultat annoncé.

6. Avant de discuter les résultats précédents, observons que le système (16) possède toujours deux intégrales distinctes qui sont des fonctions de x, y, z et des dérivées de z jusqu'à l'ordre $n - 1$ seulement; il est permis de supposer que ces intégrales sont φ_1 et φ_2, tandis que φ_3 dépend des dérivées $n^{\text{ièmes}}$.

Le raisonnement qui a été fait pour établir qu'à une caractéristique d'ordre $n+1$ du système (Γ) correspond une caractéristique du premier ordre de l'équation (ε') se trouve en défaut quand ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sont indépendants de $p_{1,n+1}+mp_{0,n+2}$. En se reportant aux formules (7) et en développant les calculs, on voit que cette quantité ne figure pas dans ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 si ψ_1 et ψ_2 ne contiennent pas $p_{1,n}+mp_{0,n+1}$ ou si φ_1 et φ_2 satisfont aux égalités

$$\frac{d\varphi_1}{dx}+\mu\frac{d\varphi_1}{dy}=\frac{d\varphi_2}{dx}+\mu\frac{d\varphi_2}{dy}=0.$$

Nous laisserons de côté cette dernière hypothèse; en effet, dans ce cas, φ_1 et φ_2 seraient deux invariants du système (Γ) de caractéristiques; à une intégrale de (ε) ne correspondrait pas une équation de la forme (4), on aurait une relation entre φ_1 et φ_2 seulement. Nous reviendrons sur ce point.

Lorsque les seules variables qui figurent dans ψ_1 et ψ_2 sont $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}$, ces fonctions satisfont, comme $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, au système

$$X_1^{(n)}F=0, \qquad X_2^{(n)}F=0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n-1}^{(n)}F=0,$$

qui ne peut admettre plus de quatre intégrales distinctes; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2$ et par conséquent x', y', z', p', q' sont liées par une relation; la transformation (17) remplace (ε) par une équation du premier ordre.

Remarquons aussi que les coordonnées d'un élément d'ordre $n+2$ d'une caractéristique (C) satisfont aux équations

$$\frac{dp_{0,n}}{dx}=p_{1,n}+mp_{0,n+1},$$
$$\frac{d^2p_{0,n}}{dx^2}=(m-\mu)(p_{1,n+1}+mp_{0,n+2})+\left(\frac{dm}{dx}+m\frac{dm}{dy}\right)p_{0,n+1}-\left(\frac{d^nf}{dy^n}\right);$$

si $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3$ dépendent de $p_{1,n}, p_{0,n+1}, p_{1,n+1}+mp_{0,n+2}$ par l'intermédiaire des seconds membres des équations précédentes, la démonstration de l'existence d'un système de caractéristiques du premier ordre correspondant au système (C) est inapplicable; c'est le seul cas d'exception.

Écrivons l'équation

$$z'=g(x', y')$$

d'une surface (Σ') transformée d'une surface intégrale (Σ) de (ε); les équations (ε) et

$$(18) \qquad \varphi_3 = g(\varphi_1, \varphi_2)$$

admettent ∞^{2n-1} intégrales communes déduites de (Σ) par l'application des transformations du groupe (G). Les équations obtenues en dérivant les deux membres de (18) équivalent à

$$(19) \qquad \psi_1 = \frac{\partial g}{\partial \varphi_1}, \qquad \psi_2 = \frac{\partial g}{\partial \varphi_2}.$$

Supposons que φ_3, ψ_1, ψ_2 sont des fonctions indépendantes de $p_{1,n-1}$, $p_{0,n}$, $p_{1,n} + mp_{0,n+1}$; il est possible de calculer $p_{1,n-1}$, $p_{0,n}$ et par conséquent toutes les dérivées d'ordre supérieur, en fonction de celles dont l'ordre ne dépasse pas $n - 1$ et de x, y, z. D'ailleurs le système (19) donne par dérivation des équations équivalentes à

$$(20) \qquad \varpi_1 = \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi_1^2}, \qquad \varpi_2 = \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi_1\, \partial \varphi_2}, \qquad \varpi_3 = \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi_2^2};$$

ces équations (19) et (20) sont donc résolubles par rapport à $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$, ce qui ne pourrait être réalisé si ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 contenaient seulement les deux fonctions de $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$, $p_{1,n+1} + mp_{0,n+2}$ que nous avons indiquées.

Examinons le cas où φ_3, ψ_1, ψ_2 ne sont pas des fonctions indépendantes de $p_{1,n-1}$, $p_{0,n}$, $p_{1,n} + mp_{0,n+1}$; elles satisfont alors à une équation telle que

$$u \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} + v \frac{\partial F}{\partial p_{0,n}} + w \frac{\partial F}{\partial p_{1,n}} = 0,$$

où u, v, w représentent des fonctions de x, y, z et des dérivées de z; φ_1 et φ_2, qui ne contiennent pas de dérivées d'ordre supérieur à $n - 1$, satisfont à la même équation. φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2 sont cinq intégrales du système formé par cette équation et par

$$X_1^{(n+1)}F = 0, \qquad X_2^{(n+1)}F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n-1}^{(n+1)}F = 0, \qquad A_{n+1}F = 0;$$

les $2n + 1$ équations de ce système sont indépendantes, puisque les équations

$$X_1^{(n-1)}F = 0, \qquad X_2^{(n-1)}F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n-1}^{(n-1)}F = 0$$

le sont; il existe une relation entre φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2; la transformée de (ε) est une équation du premier ordre.

La transformation (17) fait donc correspondre à (ε) une équation de Monge-Ampère ou une équation du premier ordre : la discussion qui précède permet de distinguer les deux cas. Les équations (18) et (19) peuvent être résolues par rapport à $p_{1,n-1}$, $p_{0,n}$, $p_{1,n}+mp_{0,n+1}$ quand φ_3, ψ_1, ψ_2 sont des fonctions indépendantes de ces trois quantités; la recherche des intégrales communes à (ε) et à (18) se trouve ramenée à l'intégration d'un système de $2n-1$ équations aux différentielles totales; ce système est complètement intégrable, car nous ne trouvons que deux équations distinctes pour calculer $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$: puisque φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 sont liées par la même relation que φ_1, φ_2, g, $\frac{\partial g}{\partial \varphi_1}$, $\frac{\partial g}{\partial \varphi_2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi_1^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi_2^2}$, l'une des équations (20) est une conséquence des autres et doit être supprimée; en éliminant entre celles que l'on conserve $p_{1,n+1}+mp_{0,n+2}$, il reste une équation que l'on associe à celle qui a été formée en tirant de (18) et (19) la valeur de $p_{1,n}+mp_{0,n+1}$. A une intégrale de l'équation de Monge-Ampère (ε') correspondent ∞^{2n-1} intégrales de l'équation donnée.

Au contraire, si la transformée est une équation du premier ordre, c'est-à-dire s'il existe une relation entre φ_1, φ_2, φ_3, ψ_1, ψ_2, les équations (19) déduites de (18) en dérivant se réduisent à une seule, (ε) et (18) forment un système en involution; le groupe $(G^{(n)})$ possède alors deux invariants qui sont en même temps des invariants de Γ[1], cette condition nécessaire est suffisante; on s'en assure comme dans le cas d'un groupe d'ordre pair.

Nous avons admis qu'à une intégrale arbitrairement choisie de (ε) correspond une relation de la forme (4); une permutation d'indices permet toujours de supposer cette hypothèse réalisée.

En résumé, la transformée de (ε) est une équation de Monge-Ampère, à moins que le système (Γ) de caractéristiques ne possède deux invariants qui soient aussi des invariants de $(G^{(n)})$.

---

[1] La dernière équation (16) montre qu'une intégrale de ce système qui contient effectivement les dérivées $n^{\text{ièmes}}$ de z n'est pas un invariant du système (C); on doit se demander s'il n'y a jamais deux invariants de $(G^{(n-1)})$ qui soient des invariants de (C); nous montrons dans le paragraphe suivant que deux tels invariants ne peuvent exister, sauf dans un cas très particulier.

Cette circonstance exceptionnelle peut se présenter; nous le montrerons en considérant l'équation

$$r - qs + pt = 0,$$

qui admet le groupe à trois paramètres formé par toutes les translations; $q + \sqrt{q^2 - 4p}$ et $2s - (q + \sqrt{q^2 - 4p})t$ sont deux invariants d'un système de caractéristiques.

7. Le système

$$X_1^{(n-1)}F = 0, \qquad X_2^{(n-1)}F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n-1}^{(n-1)}F = 0$$

possède toujours deux intégrales distinctes — que nous continuerons à désigner par φ_1, φ_2 —; nous allons rechercher s'il est possible que ces intégrales soient deux invariants de l'un des systèmes de caractéristiques, — de Γ pour fixer les idées. Supposons qu'il en soit ainsi; toute solution de (ε) satisfait à une équation telle que

$$(21) \qquad \varphi_2 = \omega(\varphi_1),$$

qui a ∞^{2n-1} caractéristiques communes avec (ε); ces caractéristiques appartiennent au système (C), et ces caractéristiques peuvent être déduites de l'une d'entre elles à l'aide des transformations du groupe (G). A chaque caractéristique de (C) correspond en effet une équation entre φ_1 et φ_2 qu'on obtient en substituant aux coordonnées des éléments d'ordre $n-1$ leurs expressions en fonction d'un paramètre et en éliminant ce paramètre; cette équation ne change évidemment pas quand on remplace la caractéristique par une de ses transformées.

Sur une intégrale quelconque du système formé par (ε) et (21), considérons deux caractéristiques d'ordre n du système (C) et une caractéristique d'ordre n du système (Γ); nous les désignerons respectivement par les lettres (c), (c_0), (γ). La remarque qui vient d'être faite montre qu'il existe une transformation de (G) qui change la caractéristique d'ordre $n-1$ contenue dans (c_0) en la caractéristique du même ordre contenue dans (c); cette transformation change d'ailleurs (c_0) en (c) puisque $\dfrac{\dfrac{d\varphi_2}{dy}}{\dfrac{d\varphi_1}{dy}}$ est à la fois un invariant de $(G^{(n)})$ et du système (Γ), et prend par conséquent la même valeur quand on remplace $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}$ d'abord par les coordonnées de l'élément d'ordre n commun à (c_0) et (γ), puis par celles de l'élément commun à (c) et (γ). Nous n'avons fait aucune hypothèse particulière sur le choix de (c), (c_0), (γ); nous devons en conclure que deux éléments quelconques d'ordre n d'une caractéristique du système (Γ) sont homologues.

Les équations

$$(22) \qquad X_1^{(n)}F = 0, \qquad X_2^{(n)}F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n-1}^{(n)}F = 0$$

admettent quatre intégrales distinctes qui sont les invariants de $(G^{(n)})$; φ_1, φ_2, $\dfrac{\dfrac{d\varphi_2}{dy}}{\dfrac{d\varphi_1}{dy}}$ sont trois d'entre elles; appelons φ_4 la dernière; d'après ce qui précède, φ_4 prend la même valeur quand on y remplace les variables par les coordonnées de deux éléments d'une caractéristique (Γ); φ_4 est un invariant de ce système, qui ne peut d'ailleurs posséder deux invariants d'ordre n, φ_4 est un troisième invariant d'ordre inférieur à n; signalons, en passant, que cela implique l'existence d'une relation linéaire entre $X_1^{(n-1)}F$, $X_2^{(n-1)}F$, $\ldots$, $X_{2n-1}^{(n-1)}F$.

Il y a donc trois invariants dont les ordres ne dépassent pas $n-1$; nous pouvons achever en faisant un raisonnement presque identique à celui qui a déjà été exposé (n° 4). Si n dépasse trois, l'existence de deux invariants d'ordre $n-2$ est impossible, — une caractéristique d'ordre $n-2$ du système (C) n'aurait que ∞^{2n-3} transformées —; d'autre part, la théorie générale nous apprend que (Γ) ne saurait admettre deux invariants d'ordre $n-1$, à moins que n ne soit égal à deux ou à trois, on trouve les mêmes équations que dans le paragraphe déjà cité.

Pour terminer, nous montrerons que, exception faite pour les équations précédentes, le système

$$X_1^{(n-1)}F = 0, \qquad X_2^{(n-1)}F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n-1}^{(n-1)}F = 0$$

est formé d'équations indépendantes. En effet, si ce système comprenait moins de $2n-1$ équations distinctes, $(G^{(n-1)})$ posséderait trois invariants $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; à chaque intégrale de (ε) correspondrait une relation entre ces invariants à laquelle satisferaient également les ∞^{2n-1} intégrales homologues de l'intégrale considérée. Les intégrales communes à (ε) et à une équation où figurent seulement x, y, z et les dérivées de z d'ordre inférieur à n ne peuvent dépendre de $2n-1$ paramètres sans que les deux équations soient en involution; deux invariants de $(G^{(n-1)})$ seraient alors des invariants de l'un des systèmes de caractéristiques; on retrouve la question qui vient d'être étudiée.

8. Pour former le système (16), nous avons associé aux équations (22) l'équation

$$A_n F = 0;$$

à la place de cette dernière nous aurions évidemment pu prendre l'équation

$$B_n F = \frac{\partial F}{\partial p_{0,n}} - \mu \frac{\partial F}{\partial p_{1,n-1}} = 0. \tag{23}$$

Les équations (22) et (23) admettent trois intégrales distinctes Φ_1, Φ_2, Φ_3, en posant

$$\left\{\begin{array}{l} x'' = \Phi_1(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}), \\ y'' = \Phi_2(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}), \\ z'' = \Phi_3(x, y, z, p\ \ q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}); \end{array}\right. \tag{24}$$

on fait correspondre à chaque intégrale de (ε) une intégrale d'une équation de Monge-Ampère (ε''). Des équations (24) on déduit

$$p'' = \Psi_1(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n}, p_{0,n+1}),$$
$$q'' = \Psi_2(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n}, p_{0,n+1});$$

Ψ_1 et Ψ_2 ayant des expressions analogues à celles de ψ_1 et ψ_2, il suffirait de remplacer $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ par Φ_1, Φ_2, Φ_3.

Les dix fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Psi_1, \Psi_2$ sont des intégrales du système

$$X_1^{(n+1)} F = 0, \qquad X_2^{(n+1)} F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n-1}^{(n+1)} F = 0;$$

ces $2n-1$ équations sont indépendantes et contiennent $2n+5$

variables, elles ne peuvent admettre plus de six intégrales distinctes; par conséquent, les dix fonctions que nous avons énumérées sont liées par quatre relations. On peut donc établir, entre les éléments du premier ordre de coordonnées (x', y', z', p', q'), $(x'', y'', z'', p'', q'')$, une correspondance définie analytiquement par quatre équations; (ε') et (ε'') peuvent être déduites l'une de l'autre à l'aide d'une transformation de Bäcklund. Cette transformation est de première espèce; à une intégrale de (ε') correspondent ∞^{2n-1} intégrales de (ε) qui forment un ensemble invariant relativement au groupe (G); à ces intégrales de (ε) il ne correspond qu'une intégrale de (ε''), les intégrales de (ε') et (ε'') se correspondent une à une.

II.

9. Dans cette seconde Partie nous étudierons quelques propriétés des transformations que nous venons de définir : pour abréger le langage, quand il conviendra de préciser, nous appellerons *transformations de première classe* celles qui correspondent à un groupe d'ordre pair, *transformations de seconde classe* celles qui correspondent à un groupe d'ordre impair; dans ce dernier cas, nous devons distinguer les transformations obtenues en associant au système (22) l'une des équations

$$A_n F = 0, \qquad B_n F = 0;$$

la première sera dite déduite du système de caractéristiques (C), l'autre du système (Γ).

Nous avons déjà indiqué (n^{os} 2 et 5) que les multiplicités transformées des caractéristiques de l'équation donnée sont les caractéristiques de la transformée; la démonstration de la proposition réciproque ne présente aucune difficulté.

En opérant comme nous avons fait pour trouver les expressions ψ_1, ψ_2, ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3 des dérivées premières et secondes de z' considérée comme fonction de x', y', nous pouvons calculer les dérivées d'ordre plus élevé. Montrons que $p'_{1,k-1}$, $p'_{0,k}$ sont égales, quel que soit k, à des fonctions de x, y, z et des dérivées de z jusqu'à l'ordre $n+k$; le résultat a été vérifié pour les dérivées des deux premiers ordres;

admettons qu'on ait une égalité telle que

$$p'_{0,k-1} = \rho(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n+k-2}, p_{0,n+k-1});$$

en différentiant, nous obtenons

$$p'_{1,k-1}\,dx' + p'_{0,k}\,dy' = \frac{d\rho}{dx}\,dx + \frac{d\rho}{dy}\,dy;$$

si nous remplaçons dx' et dy' par $d\varphi_1$ et $d\varphi_2$, il vient deux équations qui donnent pour $p'_{1,k-1}$, $p'_{0,k}$ des expressions de la forme indiquée. Ces expressions sont des invariants du groupe $(G^{(n+k)})$ formé en prolongeant (G) jusqu'à l'ordre $n+k$; on s'en assure en répétant la démonstration faite pour les dérivées des deux premiers ordres.

On vérifie également, en raisonnant de proche en proche, que les dérivées $(n+k)^{\text{ièmes}}$ de z ne figurent dans les expressions de $p'_{1,k-1}$, $p'_{0,k}$ que par la combinaison $p_{1,n+k-1} + mp_{0,n+k}$ si la transformation considérée est une transformation de seconde classe déduite du système (C) de caractéristiques.

Remarquons encore que, si l'élément $(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n+k-1}, p_{0,n+k})$ décrit une caractéristique du système (Γ), l'élément correspondant $(x', y', z', p', q', \ldots, p'_{1,k-1}, p'_{0,k})$ décrit une caractéristique de (Γ'); en remplaçant dans la dernière égalité dy et dy' par $\mu\,dx$ et $\mu'\,dx'$ (1), respectivement il vient

$$\left(\frac{d\varphi_1}{dx} + \mu\frac{d\varphi_1}{dy}\right)(p'_{1,k-1} + \mu' p'_{0,k}) = \frac{d\rho}{dx} + \mu\frac{d\rho}{dy}.$$

Il suffit de développer le second membre pour voir que $p'_{1,k-1} + \mu' p'_{0,k}$ s'exprime en fonction de x, y, z, des dérivées de z dont l'ordre ne dépasse pas $n+k-1$ et de $p_{1,n+k-1} + \mu p_{0,n+k}$; de plus, le coefficient de cette dernière quantité est nul dans le cas d'une transformation de seconde classe déduite du système (C).

---

(1) μ' a toujours la valeur indiquée précédemment (n° 5) :

$$\mu' = \frac{\dfrac{d\varphi_2}{dx} + \mu\dfrac{d\varphi_2}{dy}}{\dfrac{d\varphi_1}{dx} + \mu\dfrac{d\varphi_1}{dy}}.$$

Si l'une des équations (ε), (ε') est intégrable par la méthode de M. Darboux, il en est de même de l'autre.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de la transformation de première classe définie par les équations (5) et que l'un des systèmes de caractéristiques de (ε'), par exemple le système (C') qui correspond à (C), possède un invariant d'ordre k; en y substituant à $x', y', z', p', q', \ldots, p'_{1,k-1}, p'_{0,k}$ leurs expressions, on obtient évidemment une fonction de $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n+k-1}, p_{0,n+k}$ qui ne change pas de valeur quand on remplace successivement ces quantités par les coordonnées de deux éléments du système (C), cette fonction est un invariant du système (C) de caractéristiques; l'ordre de cet invariant ne peut dépasser $n+k$; à chaque invariant du système (C') correspond ainsi un invariant de (C). Au contraire, si l'on sait seulement qu'il existe un invariant pour l'un des systèmes de caractéristiques de (ε), (C) pour fixer les idées, il n'est pas permis d'en déduire l'existence d'un invariant pour (C'). Supposons maintenant que (C) possède deux invariants; une intégrale quelconque de (ε) satisfait alors à une équation

$$(25) \qquad F(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,l-1}, p_{0,l}) = 0,$$

si l désigne le plus élevé des ordres des deux invariants, le premier membre de (25) est une fonction de ces invariants. L'intégrale considérée satisfait aussi aux équations obtenues en dérivant

$$(26) \qquad \frac{dF}{dy} = 0, \qquad \frac{d^2 F}{dy^2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^{2n} F}{dy^{2n}} = 0.$$

En même temps que les équations (25) et (26), imaginons écrites les formules qui donnent $x', y', z', p', q', \ldots, p'_{1,n+l-1}, p'_{0,n+l}$; nous constituons ainsi un système de $4n+2l+4$ équations entre lesquelles on peut éliminer les quantités $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,2n+l-1}, p_{0,2n+l}$ qui sont au nombre de $4n+2l+3$; nous obtenons ainsi une équation d'ordre $n+l$ au plus, à laquelle satisfont toutes les intégrales de (ε') qui sont les transformées des intégrales communes à (ε) et à (25). On en déduit que (C') possède au moins deux invariants dont l'ordre ne dépasse pas $n+l$.

Étudions la même question dans le cas de la transformation de seconde classe déduite du système (C), qui est définie par les équations (17). A un invariant d'ordre k du système (C') correspond un invariant de (C) dont l'ordre est $n+k-1$ ou un nombre plus petit; en effet, le raisonnement déjà développé montre encore qu'il correspond à l'invariant de (C') un invariant de (C) d'ordre $n+k$ au plus; les dérivés d'ordre $n+k$ disparaissent d'ailleurs, d'après la remarque faite sur l'expression de $p'_{1,k-1}+\mu' p'_{0,k}$. La fonction transformée d'un invariant d'ordre k du système (Γ') est un invariant de (Γ) d'ordre inférieur ou égal à $n+k$.

Comme dans le cas d'une transformation de première classe, l'existence d'un invariant pour l'un des systèmes de caractéristiques de (ε) n'entraîne pas nécessairement l'existence d'un invariant pour le système correspondant de caractéristiques de (ε'). Si le système (C) possède deux invariants dont l'ordre ne dépasse pas l, en répétant le raisonnement fait dans le cas d'une transformation de première classe, on voit que (C') admet deux invariants d'ordre $n+l$ ou d'ordre moindre. Imaginons maintenant que le système (Γ) admette deux invariants d'ordre l au plus; une intégrale quelconque de (ε) satisfait encore à une équation telle que (25). Dérivons $2n-1$ fois; il vient les équations

$$\frac{dF}{dy}=0, \qquad \frac{d^2F}{dy^2}=0, \qquad \dots, \qquad \frac{d^{2n-1}F}{dy^{2n-1}}=0,$$

auxquelles satisfait l'intégrale de (ε) considérée; écrivons aussi les formules qui donnent $x', y', z', p', q', \dots, p'_{1,n+l-2}, p'_{0,n+l-1}$; nous avons ainsi $4n+2l+1$ équations, entre lesquelles on peut éliminer les $4n+2l$ quantités

$$x,\quad y,\quad z,\quad p,\quad q,\quad \dots,\quad p_{1,2n+l-3},\quad p_{0,2n+l-2},\quad p_{1,2n+l-2}+mp_{0,2n+l-1}.$$

On en conclut qu'il existe au moins deux invariants de (Γ) dont les ordres sont inférieurs ou égaux à $n+l-1$.

10. Le théorème que nous allons établir dans ce paragraphe nous permettra de montrer la possibilité de décomposer dans certains cas une transformation de première ou de seconde classe et de la remplacer par une suite de transformations plus simples.

Pour fixer les idées, considérons une transformation de première classe, désignons par j un nombre entier positif et supposons que le groupe (G) engendré par les transformations infinitésimales

$$X_1F, \quad X_2F, \quad \ldots, \quad X_{2n}F \tag{27}$$

soit un sous-groupe invariant d'un groupe (Ξ) d'ordre $2n+j$ pour lequel (ε) reste invariante. Appelons

$$Y_1F, \quad Y_2F, \quad \ldots, \quad Y_jF \tag{28}$$

les transformations infinitésimales de contact qui, avec les transformations (27), engendrent (Ξ). Appliquons à la fonction φ_1 les transformations précédentes ou, plus exactement, les transformations précédentes prolongées jusqu'à l'ordre n; les transformations (27) ne changent pas φ_1; les résultats des transformations (28) peuvent être représentés par

$$Y_1^{(n)}\varphi_1, \quad Y_2^{(n)}\varphi_1, \quad \ldots, \quad Y_j^{(n)}\varphi_1,$$

en employant toujours les mêmes notations pour les transformations infinitésimales prolongées. Considérons par exemple $Y_1^{(n)}\varphi_1$; puisque (G) est un sous-groupe invariant de (Ξ), il existe une relation

$$X_1^{(n)}(Y_1^{(n)}\varphi_1) - Y_1^{(n)}(X_1^{(n)}\varphi_1) = e_1X_1^{(n)}\varphi_1 + e_2X_2^{(n)}\varphi_1 + \ldots + e_{2n}X_{2n}^{(n)}\varphi_1, \tag{29}$$

où $e_1, e_2, \ldots, e_{2n}$ sont des constantes; d'ailleurs, en tenant compte des égalités

$$X_1^{(n)}\varphi_1 = X_2^{(n)}\varphi_1 = \ldots = X_{2n}^{(n)}\varphi_1 = 0,$$

la relation (29) donne

$$X_1^{(n)}(Y_1^{(n)}\varphi_1) = 0$$

et les égalités

$$X_2^{(n)}(Y_1^{(n)}\varphi_1) = \ldots = X_{2n}^{(n)}(Y_1^{(n)}\varphi_1) = 0$$

s'établissent de la même manière. On en déduit que $Y_1^{(n)}\varphi_1$ peut s'exprimer à l'aide de $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ seulement; écrivons

$$Y_1^{(n)}\varphi_1 = \xi_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

et les deux égalités analogues

$$Y_1^{(n)}\varphi_2 = \eta_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \qquad Y_1^{(n)}\varphi_3 = \zeta_1(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3),$$

qu'on démontre par un raisonnement identique.

Désignons par U une fonction quelconque de x', y', z' et posons

$$Y'_1 U = \xi_1(x', y', z') \frac{\partial U}{\partial x'} + \eta_1(x', y', z') \frac{\partial U}{\partial y'} + \zeta_1(x', y', z') \frac{\partial U}{\partial z'};$$

$Y'_1 U$ est le symbole d'une transformation ponctuelle infinitésimale qui correspond à $Y_1 F$: d'une manière plus précise, nous pouvons remarquer qu'on a identiquement

$$Y_1^{(n)} U = Y'_1 U, \tag{30}$$

si dans le second membre x', y', z' sont remplacés par φ_1, φ_2, φ_3. La transformation infinitésimale $Y'_1 U$ ne se réduit d'ailleurs jamais à la transformation identique, puisque, d'après (30), on aurait alors

$$Y_1^{(n)} U = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation

$$Y_1^{(n)} F = 0$$

admettrait toutes les solutions du système

$$X_1^{(n)} F = X_2^{(n)} F = \ldots = X_{2n}^{(n)} F = 0.$$

Les transformations infinitésimales $X_1 F, X_2 F, \ldots, X_{2n} F, Y_1 F$ engendrent un groupe du $(2n+1)^{\text{ième}}$ ordre; par conséquent toute équation telle que (4) aurait ∞^{2n+1} intégrales communes avec (ε) dès qu'elle en aurait une, (ε) et (4) formeraient un système en involution; l'un des systèmes de caractéristiques de (ε) posséderait deux invariants d'ordre n qui seraient en même temps des invariants différentiels de ce groupe d'ordre $2n+1$; nous avons reconnu que cela est impossible en dehors d'un cas très particulier que nous n'étudions pas.

Nous pouvons considérer $Y_2 F, \ldots, Y_j F$ aussi bien que $Y_1 F$, et nous voyons qu'aux transformations (28) correspondent j transformations infinitésimales ponctuelles

$$Y'_1 U, \quad Y'_2 U, \quad \ldots, \quad Y'_j U, \tag{31}$$

qui ne changent pas (ε); en effet, l'une quelconque de ces transformations remplace les ∞^{2n} surfaces intégrales communes à (ε) et à une équation telle que (4) par ∞^{2n} surfaces déduites des précédentes à l'aide de la transformation (28) correspondante, c'est-à-dire par ∞^{2n} nouvelles intégrales de (ε).

Ces transformations (31) engendrent un groupe d'ordre j; pour le montrer, prenons les deux premières Y'_1U, Y'_2U et développons l'expression

$$Y'_1(Y'_2U)-Y'_2(Y'_1U)=(Y'_1\xi_2-Y'_2\xi_1)\frac{\partial U}{\partial x'}+(Y'_1\eta_2-Y'_2\eta_1)\frac{\partial U}{\partial y'}+(Y'_1\zeta_2-Y'_2\zeta_1)\frac{\partial U}{\partial z'},$$

ξ_2, η_2, ζ_2 étant des fonctions de x', y', z' formées comme ξ_1, η_1, ζ_1 en considérant Y_2F au lieu de Y_1F. D'après (30) et les égalités analogues obtenues en changeant l'indice, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}Y'_1\xi_2-Y'_2\xi_1&=Y_1^{(n)}(Y_2^{(n)}\varphi_1)-Y_2^{(n)}(Y_1^{(n)}\varphi_1)\\&=\lambda_1X_1^{(n)}\varphi_1+\lambda_2X_2^{(n)}\varphi_1+\ldots+\lambda_{2n}X_{2n}^{(n)}\varphi_1+\mu_1Y_1^{(n)}\varphi_1+\ldots+\mu_jY_j^{(n)}\varphi_1,\end{aligned}$$

où λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_{2n}, μ_1, $\ldots$, μ_j sont des coefficients constants, puisque Y_1F et Y_2F sont deux transformations infinitésimales de (Ξ), nous supposons toujours que dans le premier membre on ait remplacé x', y', z' par φ_1, φ_2, φ_3. En faisant le changement inverse après avoir remarqué que φ_1 est un invariant de (G), il vient

$$Y'_1\xi_2-Y'_2\xi_1=\mu_1Y'_1x'+\ldots+\mu_jY'_jx'=\mu_1\xi_1+\ldots+\mu_j\xi_j,$$

et cette égalité subsiste quand on substitue à ξ_1, ξ_2 les fonctions η_1, η_2, puis ζ_1, ζ_2. On a donc

$$(32)\qquad Y'_1(Y'_2U)-Y'_2(Y'_1U)=\mu_1Y'_1U+\mu_2Y'_2U+\ldots+\mu_jY'_jU.$$

Au lieu de Y'_1, Y'_2, on peut associer deux quelconques des transformations Y'_1, Y'_2, $\ldots$, Y'_j, on trouve ainsi $\frac{j(j-1)}{2}$ égalités telles que (32), ce qui signifie que les transformations infinitésimales (31) engendrent un groupe.

Le raisonnement précédent s'étend, presque sans modification, au cas où (G) est un groupe d'ordre impair; il faut seulement tenir compte du fait que l'équation

$$A_nF=0$$

est invariante relativement à l'une quelconque des transformations $Y_1F, Y_2F, \ldots, Y_jF$ (n° 1).

En résumé, si l'équation (ε) admet un groupe (Ξ) de transformations de contact qui contienne un sous-groupe invariant (G) d'ordre supérieur à l'unité, l'équation de Monge-Ampère, déduite de (ε) par la transformation qui correspond au groupe (G), admet un groupe de transformations de contact dont l'ordre est égal à la différence des ordres des groupes (Ξ) et (G).

Les transformations de contact que nous venons de signaler ne sont pas nécessairement les seules qui laissent l'équation (ε') invariante.

11. Lorsque l'équation (ε) satisfait aux conditions indiquées dans l'énoncé précédent, on peut évidemment en déduire deux équations de Monge-Ampère (ε') et (ε''); les surfaces intégrales de la première sont engendrées par le point de coordonnées

$$\begin{aligned}
x' &= \varphi_1(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}),\\
y' &= \varphi_2(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}),\\
z' &= \varphi_3(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n-1}, p_{0,n}),
\end{aligned}$$

où φ_1, φ_2, φ_3 sont définies comme nous l'avons expliqué (n^{os} 2 et 5); suivant que (G) est d'ordre pair ou impair, les intégrales de (ε'') s'obtiennent d'une manière analogue en considérant (Ξ) au lieu de (G) : nous nous proposons de montrer que (ε'') dérive de (ε') par une transformation de première classe si j est pair et de seconde classe si j est impair.

Généralisons d'abord l'égalité (30) : si nous prolongeons la transformation Y'_1U jusqu'à un ordre quelconque l, en l'appliquant seulement aux éléments qui appartiennent à (ε'), nous obtenons une nouvelle transformation infinitésimale que nous représenterons par $Y_1'^{(l)}U$, U désignant une fonction de $x', y', z', p', q', \ldots, p'_{1,l-1}, p'_{0,l}$; nous avons

$$Y_1^{(n+l)}U = Y'^{(l)}U, \tag{33}$$

à condition de remplacer les quantités qui figurent dans le second membre par leurs expressions en fonction de $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n+l-1}, p_{0,n+l}$. Par la substitution que nous venons d'indiquer, $Y_1'^{(l)}U$

devient, en effet, une transformation infinitésimale des quantités $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n+l-1}, p_{0,n+l}$ qui ne peut être que $Y_1^{(n+l)}U$, puisque les $2n+1$ premiers termes de cette transformation constituent le développement de $Y_1^{(n)}U$; l'égalité (33) est établie.

Pour démontrer la proposition énoncée au début de ce paragraphe, nous distinguerons plusieurs cas d'après la parité des ordres de (Ξ) et (G).

En premier lieu, supposons ces deux ordres pairs; l'ordre de (G) est égal à $2n$, j est un nombre pair; nous mettrons ce dernier point en évidence en remplaçant j par $2i$. L'équation (ε') admet un groupe d'ordre $2i$ engendré par les transformations $Y'_1U, Y'_2U, \ldots, Y'_{2i}U$; appelons $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3$ trois intégrales distinctes du système

$$Y_1'^{(i)}U = 0, \qquad Y_2'^{(i)}U = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_{2i}'^{(i)}U = 0,$$

et posons

$$(34) \qquad \begin{cases} x'_1 = \varphi'_1(x', y', z', p', q', \ldots, p'_{1,i-1}, p'_{0,i}), \\ y'_1 = \varphi'_2(x', y', z', p', q', \ldots, p'_{1,i-1}, p'_{0,i}), \\ z'_1 = \varphi'_3(x', y', z', p', q', \ldots, p'_{1,i-1}, p'_{0,i}); \end{cases}$$

z'_1, considérée comme fonction de x'_1, y'_1, satisfait à une équation de Monge-Ampère. Imaginons que dans $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3$ nous substituions à $x', y', z', p', q', \ldots, p'_{1,i-1}, p'_{0,i}$ leurs expressions en fonction des coordonnées des éléments de (ε); après cette opération les seconds membres de (34) contiennent x, y, z et les dérivées de z dont l'ordre ne dépasse pas $n+i$, et ce sont trois invariants différentiels de (Ξ) : nous avons en effet déjà remarqué que les quantités $x', y', z', p', q', \ldots, p'_{1,i-1}, p'_{0,i}$ sont égales à des invariants de $(G^{(n+i)})$, que toute fonction de ces quantités satisfait par conséquent à

$$(35) \qquad X_1^{(n+i)}U = 0, \qquad X_2^{(n+i)}U = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n}^{(n+i)}U = 0;$$

par hypothèse, nous avons

$$Y_1'^{(i)}\varphi'_1 = 0, \qquad Y_2'^{(i)}\varphi'_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_{2i}'^{(i)}\varphi'_1 = 0$$

et, d'après (33) et les identités analogues,

$$(36) \qquad Y_1^{(n+i)}\varphi'_1 = 0, \qquad Y_2^{(n+i)}\varphi'_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_{2i}^{(n+i)}\varphi'_1 = 0;$$

φ'_2, φ'_3 satisfont naturellement aux mêmes équations.

De (35) et (36) nous concluons que φ'_1, φ'_2, φ'_3, exprimées en fonction des coordonnées des éléments d'ordre $n+i$ de (ε), sont des invariants de ($\Xi^{(n+i)}$), c'est-à-dire que l'équation de Monge-Ampère à laquelle satisfait $z'_1(x'_1, y'_1)$ ne peut différer de (ε'') que par une transformation ponctuelle.

Il est commode d'appeler *ordre d'une transformation de première* ou *de seconde classe* le plus élevé des ordres des dérivées de z que contiennent les expressions des coordonnées d'un point d'une intégrale de la transformée : dans le cas précédent on peut énoncer le résultat auquel nous sommes parvenus en disant que la transformation de première classe et du $(n+i)^{\text{ième}}$ ordre qui permet de passer de (ε) à (ε'') équivaut à deux transformations de première classe d'ordres n et i effectuées successivement.

Nous devons maintenant étudier la même question en supposant que l'un au moins des groupes (G), (Ξ) est d'ordre impair : les raisonnements qui vont suivre présenteront sur certains points de très grandes analogies avec le précédent, ce qui nous permettra d'abréger.

Supposons l'ordre de (G) pair, le nombre j impair : $2n$ désignera encore l'ordre de (G) et nous remplacerons j par $2i-1$. L'équation (ε') admet le groupe engendré par les transformations infinitésimales

$$Y'_1 U, \quad Y'_2 U, \quad \ldots, \quad Y'_{2i-1} U,$$

et il lui correspond deux équations de Monge-Ampère; considérons, par exemple, celle qui est déduite du système (C') des caractéristiques transformées des caractéristiques du système (C) de (ε). Une intégrale de cette dernière équation de Monge-Ampère (ε'') est engendrée par le point de coordonnées φ'_1, φ'_2, φ'_3 [formules (34)], où l'on remplace z' par une intégrale de (ε') : φ'_1, φ'_2, φ'_3 représentent trois intégrales distinctes du système

$$Y_1''^{(i)} U = 0, \qquad Y_2''^{(i)} U = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_{2i-1}''^{(i)} U = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial p'_{0,i}} - m' \frac{\partial U}{\partial p'_{1,i-1}} = 0;$$

la dernière équation montre que φ'_1, φ'_2, φ'_3 dépendent de x', y', z', des dérivées de z' d'ordre moindre que i et de $p'_{1,i-1} + m' p'_{0,i}$ (1); d'après

(1) Cette remarque subsiste même quand i est égal à deux, parce que m', comme μ', dépend seulement de x', y', z', p', q'.

des remarques antérieures (n° 8), quand on remplace ces quantités par leurs expressions, φ'_1, φ'_2, φ'_3 deviennent des fonctions de $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n+i-2}, p_{0,n+i-1}, p_{1,n+i-1} + m p_{0,n+i}$, c'est-à-dire des intégrales de

$$\frac{\partial F}{\partial p_{0,n+i}} - m \frac{\partial F}{\partial p_{1,n+i-1}} = 0;$$

le raisonnement fait dans le premier cas montre encore que ces fonctions satisfont aussi aux équations (35) et (36). La conclusion est évidente : chacune des deux transformations de seconde classe et d'ordre $n+i$ qui correspondent au groupe (Ξ) peut être remplacée par une transformation de première classe et du $n^{\text{ième}}$ ordre suivie d'une transformation de seconde classe et du $i^{\text{ième}}$ ordre.

Passons au cas où (G) est un groupe d'ordre impair, ainsi que (Ξ) : nous conserverons les notations déjà employées, $2n - 1$ sera l'ordre de (G), et nous écrirons encore $2i$ au lieu de j. La transformation définie par les équations (17) remplace l'équation proposée par une équation de Monge-Ampère (ε') qui admet les transformations infinitésimales $Y'_1 U$, $Y'_2 U$, $\ldots$, $Y'_{2i} U$, et nous en déduirons une nouvelle équation de Monge-Ampère (ε'') à l'aide des formules (34), où φ'_1, φ'_2, φ'_3 désignent trois intégrales indépendantes de

$$Y'^{(i)}_1 U = 0, \qquad Y'^{(i)}_2 U = 0, \qquad \ldots, \qquad Y'^{(i)}_{2i} U = 0.$$

Exprimons φ'_1, φ'_2, φ'_3 en fonction de x, y, z et des dérivées de z; elles deviennent des intégrales du système

$$X^{(n+i)}_1 F = 0, \qquad \ldots, \qquad X^{(n+i)}_{2n} F = 0, \qquad Y^{(n+i)}_1 F = 0, \qquad \ldots, \qquad Y^{(n+i)}_{2i} F = 0;$$

x'_1, y'_1, z'_1 sont donc égales à des invariants de ($\Xi^{(n+i)}$) qui satisfont de plus à

$$\frac{\partial F}{\partial p_{0,n+i}} - m \frac{\partial F}{\partial p_{1,n+i-1}} = 0,$$

car les expressions de x', y', z' et de toutes les dérivées de z' dont l'ordre ne dépasse pas i satisfont à cette équation (n° 8). Le raisonnement s'achève comme les précédents : chacune des transformations de seconde classe et d'ordre $n+i$ qui correspondent au groupe (Ξ) équivaut à une transformation de seconde classe et d'ordre n, suivie d'une transformation de première classe et d'ordre i.

Il reste à examiner le cas où l'ordre de (G) et j sont des nombres impairs, $2n-1$ et $2i-1$; (Ξ) a pour ordre $2(n+i-1)$. Appelons toujours (ε') l'équation obtenue en appliquant à (ε) la transformation (17); elle admet un groupe d'ordre impair de transformations de contact; considérons la transformation de seconde classe déduite du système (Γ') de caractéristiques; elle est définie par les équations (34), où φ'_1, φ'_2, φ'_3 représentent maintenant trois intégrales distinctes du système

$$Y_1'^{(i)}U = 0, \qquad Y_2'^{(i)}U = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_{2i-1}'^{(i)}U = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial p'_{0,i}} - \mu' \frac{\partial U}{\partial p'_{1,i-1}} = 0.$$

φ'_1, φ'_2, φ'_3 sont des fonctions de

$$x', \quad y', \quad z', \quad p', \quad q', \quad \ldots, \quad p'_{1,i-2}, \quad p'_{0,i-1}, \quad p'_{1,i-1} + \mu' p'_{0,i};$$

nous avons montré (n° 8) que cette dernière quantité, exprimée en fonction de x, y, z et des dérivées de z, ne contient pas de dérivées d'ordre supérieur à $n+i-1$; il en est naturellement de même pour φ'_1, φ'_2, φ'_3, qui sont égales, après la substitution, à des invariants de $(\Xi^{(n+i-1)})$. La transformation de première classe et d'ordre $n+i-1$ qui correspond au groupe (Ξ) se trouve ainsi décomposée, pour ainsi dire, en deux transformations de seconde classe d'ordres n et i, mais cette décomposition peut se faire de deux manières distinctes : dans le raisonnement que nous venons d'esquisser, nous avons supposé la transformation appliquée à (ε) déduite du système (C) et la transformation appliquée à (ε') déduite du système (Γ'); nous aurions pu, au contraire, imaginer en premier lieu (ε) remplacée par une équation de Monge-Ampère à l'aide d'une transformation déduite de (Γ), puis effectuer une transformation déduite du système des caractéristiques de cette dernière équation qui correspondent à (C).

Nous avons ainsi étudié toutes les circonstances qui peuvent se présenter.

12. Les transformations que nous avons définies dans la première Partie ne s'appliquent qu'aux équations qui restent invariantes pour les transformations de contact d'un groupe d'ordre supérieur à l'unité : étant donnée une équation (ε) qui admet une seule transformation infinitésimale de contact, on ne peut en général effectuer une transfor-

mation de seconde classe; les raisonnements que nous avons faits (n° 5) sont en défaut; la quantité que nous avons désignée par m dépend de s, t en même temps que de x, y, z, p, q.

Il y a cependant un cas à signaler; si (ε) possède un système de caractéristiques du premier ordre et s'il existe un groupe à un paramètre de transformations de contact qui ne changent pas cette équation, elle dérive d'une transformation de Bäcklund de deuxième espèce qui lui fait correspondre une équation de Monge-Ampère. Les transformations (B_2) jouissent de propriétés analogues à celles que nous avons étudiées (nos 8 et 9) et dont nous avons déduit les résultats démontrés dans le paragraphe précédent; ces résultats subsistent quand on considère — en supposant naturellement la chose possible — une transformation (B_2) au lieu d'une transformation de seconde classe.

Nous indiquerons seulement un exemple très simple :

L'équation

$$3rt^3+1=0 \tag{37}$$

admet le groupe engendré par les transformations infinitésimales ponctuelles

$$\frac{\partial F}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial z},\quad x\frac{\partial F}{\partial z},$$

q, s, t sont quatre invariants de ce groupe; les équations

$$x'=s+\frac{1}{t},\qquad y'=s-\frac{1}{t},\qquad z'=q$$

définissent une transformation de première classe et du second ordre, la transformée est l'équation linéaire

$$s'-\frac{p'x'^2-q'y'^2}{x'y'(x'-y')}=0. \tag{38}$$

Au lieu d'opérer ainsi, nous pouvons remarquer que les transformations infinitésimales $\frac{\partial F}{\partial z}$, $x\frac{\partial F}{\partial z}$ engendrent un sous-groupe invariant du précédent. A ce sous-groupe, dont x, y, q sont des invariants, correspond une transformation de première classe et du premier ordre; on vérifie immédiatement que la fonction q de x et y satisfait à une équation linéaire; nous n'écrirons pas cette équation linéaire; nous supposerons qu'on l'ait mise sous la forme ordinaire à l'aide d'une transformation de contact ([1]); on trouve ainsi

$$s_1 - \frac{p_1 - q_1}{x_1 - y_1} = 0; \tag{39}$$

x_1, y_1, z_1 sont tels que

$$x_1 = s + \frac{1}{t}, \qquad y_1 = s - \frac{1}{t}, \qquad z_1 = q - sx - ty.$$

Cette équation admet un groupe à deux paramètres dont les transformations infinitésimales sont

$$(x_1 + y_1)\frac{\partial U}{\partial z_1}, \qquad \frac{1}{x_1 - y_1}\frac{\partial U}{\partial z_1};$$

une transformation de première classe définie par les équations

$$x' = x_1, \qquad y' = y_1, \qquad z' = z_1 - p_1 y_1 - q_1 x_1$$

permet de passer de (39) à (38), mais on peut arriver au même résultat en prenant successivement, comme nouvelle fonction inconnue, les variables indépendantes étant conservées,

$$z_2 = z_1 - (x_1 + y_1)p_1,$$
$$z' = z_2 - \frac{x_1 - y_1}{2} q_2.$$

On effectue ainsi sur l'équation (39) deux transformations de M. Lucien Lévy.

13. Nous avons indiqué (n° 11) des cas de décomposition d'une transformation en transformations d'ordres moindres; nous démontrerons encore, pour terminer ce travail, un résultat analogue.

Supposons que l'équation (ε) reste invariante pour les transformations de contact d'un groupe (Ξ) et que ce groupe contienne un sous-

---

([1]) Dans les applications, il peut y avoir intérêt à combiner les transformations précédemment étudiées avec des transformations de contact.

groupe (G) dont l'ordre soit inférieur d'une unité à celui de (Ξ) [1]; considérons en premier lieu le cas où (G) est un groupe d'ordre pair $2n$ engendré par les transformations infinitésimales

$$X_1F, \quad X_2F, \quad \ldots, \quad X_{2n}F;$$

appelons (ε') l'équation de Monge-Ampère déduite de (ε) comme nous avons expliqué (n° 2).

Désignons par

$$X_1F, \quad X_2F, \quad \ldots, \quad X_{2n}F, \quad X_{2n+1}F$$

les transformations infinitésimales qui engendrent (Ξ), et appelons σ_1, σ_2, σ_3 trois intégrales distinctes du système

$$X_1^{(n+1)}F = 0, \qquad X_2^{(n+1)}F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n+1}^{(n+1)}F = 0, \qquad A_{n+1}F = 0;$$

les équations

$$\begin{aligned} x'' &= \sigma_1(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n}, p_{0,n+1}), \\ y'' &= \sigma_2(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n}, p_{0,n+1}), \\ z'' &= \sigma_3(x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n}, p_{0,n+1}) \end{aligned}$$

définissent une transformation de seconde classe déduite du système (C) qui remplace (ε) par une équation de Monge-Ampère (ε''); imaginons écrites les expressions de $x', y', z', p', q', x'', y'', z'', p'', q''$, ces fonctions de $x, y, z, p, q, \ldots, p_{1,n+1}, p_{0,n+2}$ satisfont aux $2n+1$ équations

$$X_1^{(n+2)}F = 0, \qquad X_2^{(n+2)}F = 0, \qquad \ldots, \qquad X_{2n}^{(n+2)}F = 0, \qquad A_{n+2}F = 0,$$

qui ne peuvent posséder plus de six intégrales distinctes : $x', y', z', p', q', x'', y'', z'', p'', q''$ sont donc liées par quatre relations. Une transformation de Bäcklund permet de passer de (ε') à (ε''). C'est évidemment une transformation (B_2); à une intégrale de (ε') correspond une intégrale de (ε''), et chaque intégrale de (ε'') correspond à ∞^1 intégrales de (ε').

Nous pouvons faire un raisonnement tout semblable quand l'ordre de (G) est un nombre impair que nous représenterons par $2n-1$ $(n \geqq 2)$,

---

[1] Nous ne supposons plus que (G) soit un sous-groupe invariant.

en conservant les notations déjà employées (n° 5). x', y', z', p', q' sont des fonctions de x, y, z, p, q, ..., $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$ qui satisfont aux équations

$$X_1^{(n+1)}F = 0, \quad X_2^{(n+1)}F = 0, \quad \ldots, \quad X_{2n-1}^{(n+1)}F = 0, \quad A_{n+1}F = 0.$$

Appelons $X_{2n}F$ la transformation infinitésimale qui, avec $X_1F, X_2F, \ldots, X_{2n-1}F$, engendre (Ξ); une transformation de première classe fait correspondre à (ε) une équation (ε'') dont les intégrales sont engendrées par l'élément de coordonnées x'', y'', z'', p'', q''; ces coordonnées peuvent être exprimées en fonction de x, y, z, p, q, ..., $p_{1,n}$, $p_{0,n+1}$ (n° 2) et sont des intégrales du système

$$X_1^{(n+1)}F = 0, \quad X_2^{(n+1)}F = 0, \quad \ldots, \quad X_{2n-1}^{(n+1)}F = 0, \quad X_{2n}^{(n+1)}F = 0.$$

Les équations

$$X_1^{(n+1)}F = 0, \quad X_2^{(n+1)}F = 0, \quad \ldots, \quad X_{2n-1}^{(n+1)}F = 0$$

n'ont que six intégrales distinctes; il en résulte encore qu'une transformation (B_2) remplace (ε') par (ε''), et inversement.