ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MAURICE FRÉCHET

Sur les fonctionnelles continues

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 27 (1910), p. 193-216
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__193_0>

SUR LES FONCTIONNELLES CONTINUES [1],

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Développement de fonctionnelles continues en série d'intégrales multiples.

1. *Les fonctionnelles continues.* — Nous dirons qu'*une fonctionnelle* est définie dans un ensemble C si à tout élément A de C correspond un nombre déterminé U_A qui sera la valeur de la fonctionnelle. Nous nous bornerons dans ce qui suit au cas où C est un ensemble de fonctions réelles continues d'une variable réelle x variant dans un intervalle fini J et nous supposerons aussi réelles les valeurs U_f de la fonctionnelle correspondant à ces éléments $f(x)$.

Nous dirons que la fonctionnelle est *continue dans* C si $f_n(x)$ et $f(x)$ appartenant à C, la quantité $|U_{f_n} - U_f|$ tend toujours vers zéro quand $f_n(x)$ tend *uniformément* vers $f(x)$ dans l'intervalle J. Appelons *écart* de f_n et de f et *désignons par la notation* (f_n, f) le maximum de $|f_n(x) - f_n(x)|$ dans J. Dire que U_f est continue dans C, c'est dire que U_{f_n} tend vers U_f quand f restant fixe, l'écart (f, f_n) tend vers zéro. Nous serons alors amené naturellement à dire que U_f est *uniformément continue* dans C, si à tout nombre $\varepsilon > 0$ correspond un nombre η tel que l'inégalité $(f, \varphi) < \eta$ entraîne $|U_f - U_\varphi| < \varepsilon$, quelles que soient les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ dans C.

Pour plus de simplicité, nous supposerons que l'intervalle J de variation de x est l'intervalle $(0, \pi)$. On voit alors que si $F(x)$ est la fonction continue de période 2π égale à $f(x)$ dans J et à $f(-x)$ dans

(1) Le présent travail est le développement de deux Notes insérées aux *Comptes rendus*, le 18 janvier 1909 et le 1er février 1909. *Voir* aussi une Note du 16 mai 1910 parue pendant l'impression de ce Mémoire.

$(0, -\pi)$, la série de Fourier de $F(x)$ sera de la forme

$$\frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots,$$

avec

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\pi f(x)\,dx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx\,dx. \tag{1}$$

Je rappelle alors les propositions suivantes :

1° *Non seulement la fonction continue $f(x)$ détermine les constantes a, mais si les constantes a correspondent à une fonction continue, elles correspondent à une seule.* On représente cette correspondance d'après la notation de M. Hurwitz

$$f(x) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots; \tag{2}$$

2° M. Fejer a démontré que l'*expression*

$$\sigma_{n,f}(x) = \frac{n\dfrac{a_0}{\sqrt{2}} + (n-1)a_1 \cos x + \ldots + (n-p)a_p \cos px + \ldots + a_{n-1}\cos(n-1)x}{n} \tag{3}$$

[déterminée par n et $f(x)$] *tend uniformément vers $f(x)$ dans l'intervalle* $(0, \pi)$;

3° Enfin, d'après Parseval, *si l'on a, outre* (2),

$$\varphi(x) \sim \frac{a'_0}{\sqrt{2}} + a'_1 \cos x + a'_2 \cos 2x + \ldots, \tag{4}$$

on peut écrire

$$a_0 a'_0 + a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + \ldots = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, \varphi(x)\,dx. \tag{5}$$

De cette égalité on déduit facilement la remarque suivante :

4° *Si* $P(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ *est un polynome homogène et de degré p par rapport à* l'ensemble des $n+1$ variables $x_0, \ldots, x_n$, *on peut lui faire correspondre une fonction* $K(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ *continue par rapport à* l'ensemble de ses p variables $x_1, \ldots, x_p$, *telle que pour toute fonction continue* $f(x)$, *on ait*

$$(6)\quad \begin{aligned} &P(a_0, a_1, \ldots, a_n) \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi K(x_1, x_2, \ldots, x_p) f(x_p) f(x_{p-1}) \ldots f(x_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_p, \end{aligned}$$

les a étant définis par (2).

Il suffit, en développant P sous la forme

$$P(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \sum A\, a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n} \qquad \text{avec} \qquad \alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = p,$$

de prendre

$$(7)\quad \begin{aligned} &K(x_1, \ldots, x_p) \\ &\equiv \sum A \left(\frac{2}{\pi}\right)^p \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\alpha_0} \cos x_{\alpha_0+1} \ldots \cos x_{\alpha_0+\alpha_1} \cos 2 x_{\alpha_0+\alpha_1+1} \ldots \\ &\qquad \times \cos 2 x_{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2} \cos 3 x_{\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+1} \ldots \cos n x_p. \end{aligned}$$

2. *Développement des fonctionnelles continues.* — Soit maintenant U_f une fonctionnelle continue dans l'ensemble total des fonctions continues dans $(0, \pi)$. D'après le théorème de Fejer et la définition de la continuité de U_f, on aura

$$(8)\qquad U_f = \lim_{n=\infty} U_{\sigma_{n.f}(x)},$$

$\sigma_{n.f}(x)$ étant défini par (3). Or si l'on pose

$$\varphi_n(x, y_0, y_1, \ldots, y_n) = \frac{n \dfrac{y_0}{\sqrt{2}} + (n-1) y_1 \cos x + \ldots + y_{n-1} \cos(n-1) x}{n},$$

où $y_0, \ldots, y_n$ sont des constantes arbitraires, la valeur de U qui correspond à la fonction φ_n de x ne dépend que de ces constantes. On peut écrire

$$U_{\varphi_n(x, y_0, \ldots, y_n)} \equiv \Phi_n(y_0, \ldots, y_n),$$

et la fonction $\Phi_n(y_0, \ldots, y_n)$ est même une fonction continue de l'ensemble de ses $(n+1)$ variables. Car, si n restant fixe, on a

$$(9)\qquad |y_0 - z_0| < \varepsilon, \qquad \ldots, \qquad |y_n - z_n| < \varepsilon,$$

on en déduit

$$(10)\qquad |\varphi_n(x, y_0, \ldots, y_n) - \varphi_n(x, z_0, \ldots, z_n)| < \varepsilon\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(n-1)}{2}\right],$$

et quand ε tend vers zéro $\varphi_n(x, z_0, \ldots, z_n)$ tend uniformément vers $\varphi_n(x, y_0, \ldots, y_n)$, donc $\Phi_n(z_0, \ldots, z_n)$ tend vers $\Phi_n(y_0, \ldots, y_n)$.

D'après le théorème de Weierstrass, on peut considérer $\Phi_n(y_0, \ldots, y_n)$ comme la limite d'un polynome en $y_0, \ldots, y_n$, avec convergence uniforme dans tout domaine fini. En particulier, pour toute valeur fixe de l'entier n, on pourra faire correspondre à chaque nombre $M_n > 0$ un polynome P_n, tel qu'on ait

$$(11)\qquad |P_n(y_0, y_1, \ldots, y_n) - \Phi_n(y_0, \ldots, y_n)| < \frac{1}{n^2}$$

pour

$$|y_0| < M_n, \qquad |y_1| < M_n, \qquad \ldots, \qquad |y_n| < M_n.$$

Mais si l'on prend pour M_n une valeur quelconque supérieure à $M\sqrt{2}$, M désignant le maximum de $f(x)$ dans $(0, \pi)$, on aura

$$(a_i)^2 \leqq a_0^2 + a_1^2 + \ldots + a_i^2 + \ldots \leqq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi [f(x)]^2\, dx \leqq 2M^2 < M_n^2,$$

quel que soit i et par suite

$$(12)\qquad |\Phi_n(a_0, a_1, \ldots, a_n) - P_n(a_0, \ldots, a_n)| < \frac{1}{n^2}.$$

Cette inégalité jointe à (8) qui peut s'écrire

$$(8')\qquad U_f = \lim_{n=\infty} \Phi_n(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

donne

$$(13)\qquad U_f = \lim_{n=\infty} P_n(a_0, a_1, \ldots, a_n),$$

où P_n est un polynome (d'un degré quelconque r_n). Cette égalité est intéressante en ce qu'elle rattache l'étude des fonctionnelles continues à celles des fonctions d'une infinité de variables. Mais nous allons la transformer au moyen de la remarque 4°. En effet, appelons $P_{n.p}$ l'ensemble des termes de P_n homogène et de degré p. Il lui correspond, d'après 4°, une fonction continue $K_n^{(p)}(x_1, \ldots, x_p)$ donnant lieu à une identité analogue à (6). De sorte qu'on aura maintenant

$$(14)\quad U_f = \lim_{n=\infty} \Big[K_n^{(0)} + \int_0^\pi K_n^{(1)}(x_1) f(x_1)\, dx_1 + \ldots + \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi K_n^{(r_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_{r_n}) f(x_{r_n}) \ldots f(x_2) f(x_1)\, dx_1 \ldots dx_{r_n} \Big].$$

Dans cette formule, les fonctions K sont continues; mais ce ne sont pas les seules qui puissent donner lieu à l'identité (14), et l'on peut en profiter pour les remplacer par des polynomes. Nous pouvons toujours en effet, par une nouvelle application du théorème de Weierstrass, faire correspondre à chacune des fonctions continues $K_n^{(p)}$ un polynome $Q_n^{(p)}$ tel qu'on ait

$$(15)\qquad |Q_n^{(p)}(x_1, x_2, \ldots, x_p) - K_n^{(p)}(x_1, x_2, \ldots, x_p)| < \frac{1}{n^2 p!},$$

pour

$$0 \leqq x_1 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq x_2 \leqq \pi, \qquad \ldots, \qquad 0 \leqq x_p \leqq \pi.$$

Or, la différence de l'accolade de (14) avec la valeur Q_n qu'elle prend quand on y remplace les $K_n^{(p)}$ par les $Q_n^{(p)}$ est en valeur absolue

$$(16)\qquad |P_n - Q_n| \leqq \frac{1}{n^2}\left[M\pi + \frac{M^2\pi^2}{2!} + \ldots + \frac{(M\pi)^{r_n}}{r_n!}\right] < \frac{1}{n^2} e^{M\pi},$$

M désignant le maximum de $f(x)$ dans $(0, \pi)$. Elle tend bien vers zéro et par conséquent Q_n tend aussi vers U_f.

En résumé, TOUTE FONCTIONNELLE U_f CONTINUE DANS LE CHAMP DES FONCTIONS $f(x)$ CONTINUES DANS UN INTERVALLE (a, b) PEUT ÊTRE REPRÉSENTÉE SOUS LA FORME

$$(\mathrm{A})\quad \left\{ \begin{aligned} U_f = \lim_{n=\infty} \Big[& u_n^{(0)} + \int_a^b u_n^{(1)}(x_1) f(x_1)\, dx_1 \\ & + \int_a^b \int_a^b u_n^{(2)}(x_1, x_2) f(x_2) f(x_1)\, dx_1\, dx_2 + \ldots \\ & + \int_a^b \ldots \int_a^b u_n^{(r_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_{r_n}) f(x_{r_n}) \ldots f(x_2) f(x_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{r_n} \Big], \end{aligned} \right.$$

OU LES $u_n^{(p)}$ SONT DES FONCTIONS CONTINUES (*ou même, si l'on veut, des poly-*

nomes) *qui sont déterminées par la fonctionnelle* U indépendamment de la fonction $f(x)$.

3. Nous voyons ainsi s'offrir une représentation analytique pour des expressions qui *a priori* paraissaient en être complètement dépourvues. *Il est assez curieux par exemple de pouvoir exprimer approximativement par une somme d'intégrales telle que celle du second membre de l'égalité* (A), *la fonctionnelle*

$$(17) \qquad V_f = [\text{minimum de } |f(x)| \text{ dans } (a, b)],$$

qui est évidemment une fonctionnelle continue [1].

4. Ce résultat cependant une fois obtenu, on pourrait se demander s'il ne serait pas possible de le simplifier et d'arriver à remplacer le développement (A) par un développement où les indices inférieurs des fonctions $u_n^{(p)}$ seraient supprimées; où par conséquent U_f serait la somme d'une série d'intégrales multiples d'ordre croissant. La réponse à cette question est négative. En effet, si nous remplaçons dans (A) $f(x)$ par $cf(x)$, c étant une constante réelle, nous voyons que si $f(x)$ est fixe, $U_{cf(x)}$ s'exprime par la formule (A) comme limite de polynomes en c, tandis que si la modification proposée était légitime, $U_{cf(x)}$ serait la somme d'une série entière en c [2]. Or, si $U_{cf(x)}$ est évidemment une fonction continue en c (par suite limite de polynomes en c), il n'y a aucune raison pour qu'elle soit analytique. Il suffit pour le voir de reprendre l'exemple (17). Dans cet exemple, on a évidemment

$$V_{cf} = |c| V_f,$$

et l'on sait que la fonction $|c|$ n'est pas holomorphe pour $c = 0$.

5. *Convergence uniforme du développement* (A). — Nous venons de remarquer que la formule (A) fournit une expression de la fonction continue de c, $U_{cf(x)}$, comme limite d'un polynome en c. Mais la convergence de ce polynome est-elle uniforme? D'après le théorème de

---

(1) En écrivant $U_f =$ [borne inférieure de $|f(x)|$ dans (a, b)], on voit même que cette fonctionnelle est définie et continue pour *toute* fonction $f(x)$ continue ou discontinue.

(2) D'ailleurs, nous verrons plus loin que cette condition nécessaire n'est pas suffisante.

Weierstrass, on sait seulement qu'on peut représenter une fonction continue comme limite de polynomes convergeant uniformément *dans tout intervalle fini*. Si maintenant, procédant par analogie, nous considérons le développement de U_f lui-même en faisant varier la forme de la fonction $f(x)$, il apparait que ce développement ne sera pas nécessairement uniformément convergent dans tout le champ des fonctions continues, mais qu'il l'est peut-être dans un ensemble de fonctions jouant le rôle de l'intervalle limité.

L'idée la plus naturelle consisterait à faire jouer ce rôle aux fonctions continues bornées dans leur ensemble. J'ai montré dans ma Thèse qu'il ne fallait pas voir là la véritable généralisation des ensembles ponctuels limités. Il vaut mieux partir de ce fait qu'on peut définir un ensemble ponctuel limité comme un ensemble ponctuel tel que de toute infinité de points de l'ensemble on puisse extraire une suite ayant un point limite.

La notion correspondante dans la théorie des ensembles de fonctions sera celle d'ensemble compact. Nous dirons ici qu'un ensemble E de fonctions est *compact* (¹) si de toute infinité de fonctions de l'ensemble on peut tirer une suite de fonctions qui convergent uniformément vers une fonction limite (appartenant ou non à E). Cette définition est celle qui se prête le mieux aux généralisations de la théorie des ensembles ponctuels limités. Pour reconnaître pratiquement si un ensemble est compact, il est cependant utile de savoir qu'un ensemble compact de fonctions continues est un ensemble de fonctions bornées dans leur ensemble et *également* continues (²).

Nous allons maintenant démontrer que LE DÉVELOPPEMENT (A) EST UNIFORMÉMENT CONVERGENT DANS TOUT ENSEMBLE compact DE FONCTIONS CONTINUES.

6. Dans ce but, nous établirons d'abord quelques propositions intéressantes par elles-mêmes.

Tout d'abord, nous avons remarqué que si $f(x)$ est une fonction

(¹) Cette définition se généralise dans le cas des ensembles abstraits. *Voir* ma Thèse : *Sur quelques points du Calcul fonctionnel* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXII, 1906, p. 6).

(²) Ce théorème est dû à Arzelà; je l'ai généralisé dans ma Thèse dans le cas des ensembles abstraits. *Voir* p. 30, 37.

continue de o à π et $\sigma_{n,f}(x)$ la somme de Fejer définie par (3), la quantité

$$(f, \sigma_{n,f}) = [\text{maximum dans } (0, \pi) \text{ de } |f(x) - \sigma_{n,f}(x)|],$$

tend vers zéro quand n croît indéfiniment. Je dis que la *convergence est uniforme dans tout ensemble compact de fonctions continues de* o *à* π. Autrement dit, si C est un tel ensemble et ε un nombre positif donné, on peut trouver un nombre p tel que pour $n > p$ on ait

$$|f(x) - \sigma_{n,f}(x)| < \varepsilon,$$

quel que soit x dans $(0, \pi)$ et *quelle que soit la fonction* $f(x)$ de C. En effet, dans le cas contraire, il y aurait une valeur de $\varepsilon > 0$, telle que pour toute valeur de l'entier i, il existe un entier $n_i > i$, un nombre x_i de $(0, \pi)$ et une fonction $f_i(x)$ de C pour lesquels on ait

$$|f_i(x_i) - \sigma_{n_i, f_i}(x_i)| \geqq \varepsilon. \tag{18}$$

Or C étant compact, on peut supposer que f_i tend uniformément vers une fonction $f(x)$ (en remplaçant au besoin la suite des f_i par une suite extraite des f_i). En posant $\varphi_i(x) \equiv f_i(x) - f(x)$, $\varphi_i(x)$ tendra uniformément vers zéro. Or, d'après la définition des sommes de Fejer, on a

$$\sigma_{n_i,\varphi_i} \equiv \sigma_{n_i,f_i} - \sigma_{n_i,f},$$

d'où

$$|f_i - \sigma_{n_i,f_i}| \leqq |\varphi_i - \sigma_{n_i,\varphi_i}| + |f - \sigma_{n_i,f}|.$$

On sait que le deuxième terme du second membre tend uniformément vers zéro ; il suffit donc de démontrer que le premier terme tend aussi uniformément vers zéro pour prouver que l'inégalité (18) est impossible. Or on sait que les sommes de Fejer d'une fonction continue restent toujours comprises entre le maximum et le minimum de cette fonction [1]. Puisque φ_i tend uniformément vers zéro, ce maximum et ce minimum tendent vers zéro et par suite σ_{n_i,φ_i} tend uniformément vers zéro, donc $|\varphi_i - \sigma_{n_i,\varphi_i}|$ tend uniformément vers zéro.

7. Nous allons maintenant prouver que *si* C *est un ensemble compact de fonctions* $f(x)$ *continues dans* $(0, \pi)$, *il reste compact quand on lui*

---

[1] *Voir* par exemple, Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, p. 98.

adjoint toutes les sommes de Fejer $\sigma_{n,f}(x)$ [où n est un entier quelconque et $f(x)$ une quelconque des fonctions de C]. Il faut montrer que si σ_{n_1,f_1}, σ_{n_2,f_2}, ... est une suite infinie de ces sommes de Fejer, on peut en extraire une suite uniformément convergente. L'ensemble C étant compact, on peut supposer comme précédemment que la suite f_1, f_2, ... converge uniformément vers une fonction continue $\varphi(x)$. Alors deux cas se présentent :

1° Ou bien les entiers n_1, n_2, ... sont tous inférieurs à un même entier N; il y en a donc une infinité qui sont égaux à un même nombre $n \leqq N$. En extrayant de la suite des σ une suite convenable, on sera ramené au cas où ils sont *tous* égaux à n. Alors l'expression (3) des sommes de Fejer montre que cette suite convergera uniformément vers $\sigma_{n,\varphi}$.

2° Ou bien en extrayant de la suite des σ une suite convenable, on pourra supposer que n_i croît constamment. Or, d'après la proposition précédemment démontrée, on peut faire correspondre à tout entier k un entier q_k tel qu'on ait

$$|\sigma_{n,f}(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

pour $n > q_k$, x quelconque dans $(0, \pi)$, $f(x)$ quelconque dans C. Si maintenant n_{p_k} est le premier des nombres n_1, n_2, ..., qui est supérieur à q_k et à k, on aura, quel que soit k,

$$|\sigma_{n_{p_k},f_{p_k}}(x) - f_{p_k}(x)| < \frac{1}{k},$$

et comme f_{p_k} tend uniformément vers $f(x)$, il en sera de même de $\sigma_{n_{p_k},f_{p_k}}$. Dans les deux cas, on a bien extrait de la suite des σ une suite uniformément convergente.

7 *bis*. De même un ensemble compact reste compact (et devient fermé) quand on lui adjoint tous ses éléments limites.

8. Enfin, on démontre facilement qu'une fonctionnelle U_f continue dans un ensemble *compact* et *fermé* est *uniformément* continue dans cet ensemble [1].

[1] *Voir* par exemple ma Thèse, p. 29.

9. Appliquons maintenant ces remarques à la démonstration de la convergence uniforme de la formule (A). Soit C un ensemble compact de fonctions continues dans $(0, \pi)$. Soit D l'ensemble obtenu en adjoignant aux fonctions de C leurs sommes de Fejer $\sigma_{n,f}$. On a vu que D est aussi compact. Soit D_1 l'ensemble obtenu en adjoignant à D tous ses éléments limites; D_1 est compact et fermé; donc, la fonctionnelle U_f continue dans D_1 y sera uniformément continue (n° 8). Dès lors, à tout nombre $\varepsilon > 0$ on pourra faire correspondre un nombre η tel que l'inégalité

$$(f, \sigma_{n,f}) < \eta, \tag{19}$$

vérifiée pour une valeur arbitraire de l'entier n et une fonction $f(x)$ quelconque dans C, entraîne

$$|U_f - U_{\sigma_{n,f}}| < \varepsilon. \tag{20}$$

Or (n° 6), on peut trouver un entier q tel l'inégalité $n > q$ entraîne (19) et par suite (20) *quelle que soit* la fonction $f(x)$ de C. Par suite la convergence de (8) ou encore de (8′) est uniforme dans C. Mais il faut arriver à celle de (13), c'est-à-dire de (14), ou mieux de (A).

Le champ C étant compact, ses fonctions sont bornées dans leur ensemble [n° 5, note (²)]. Si nous prenons pour la quantité M définie précédemment (n° 2) la borne supérieure L des maxima de $|f(x)|$ dans C, l'inégalité (12) se trouvera vérifiée pour toute fonction de C et par conséquent la convergence de (13) et (14) se trouvera assurée uniformément dans C. Enfin, l'inégalité (16) pourra s'écrire

$$|P_n - Q_n| < \frac{1}{n^2} e^{L\pi},$$

où L est indépendant de $f(x)$ dans C, d'où découle l'uniformité dans C de la convergence de la formule (A) quand on passe au cas d'un intervalle (a, b) quelconque.

Les fonctionnelles d'ordre entier.

10. Pour obtenir un résultat plus précis que celui qui est donné par la formule (A), nous allons sacrifier un peu de sa généralité et voir ce qu'il devient quand on l'applique aux fonctionnelles les plus simples.

Une classe très intéressante de fonctionnelles a été étudiée par Pincherle et Bourlet. Je veux parler de celles qui possèdent la propriété de distributivité

$$U_{f_1+f_2} = U_{f_1} + U_{f_2}.$$

En ajoutant la condition qu'elles soient continues, on obtient les fonctionnelles que M. Hadamard appelle *linéaires* et au sujet desquelles il a démontré un théorème dont la formule (A) réalise l'extension aux fonctionnelles continues quelconques.

Les fonctionnelles linéaires peuvent être comparées aux polynomes homogènes du premier degré en ce sens que, d'après Cauchy, la fonction réelle continue $f(x)$ la plus générale telle qu'on ait

$$f(c_1 + c_2) \equiv f(c_1) + f(c_2) \tag{21}$$

est de la forme

$$f(x) \equiv A x.$$

Je me suis donc proposé de définir et d'étudier des fonctionnelles qui correspondent de la même manière aux polynomes d'un ordre quelconque. Cette définition est toute naturelle quand on part du théorème suivant : *La fonction réelle continue la plus générale $\varphi(x)$ telle qu'on ait*

$$\begin{aligned} \varphi(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n+1}) &- \sum_n \varphi(y_{i_1} + y_{i_2} + \ldots + y_{i_n}) \\ &+ \sum_{n-1} \varphi(y_{i_1} + y_{i_2} + \ldots + y_{i_{n-1}}) - \ldots \\ &+ (-1)^n \sum_1 \varphi(y_{i_1}) + (-1)^{n+1} \varphi(0) \equiv 0 \end{aligned} \tag{22}$$

$\Big[\sum_k$ indiquant qu'on doit faire la somme de tous les termes obtenus en remplaçant $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ par une combinaison quelconque des $(n+1)$ premiers entiers k à $k\Big]$, *quels que soient les nombres réels $y_1, \ldots, y_{n+1}$, est le polynome le plus général de degré n au plus* (¹).

De ce théorème nous déduirons la définition suivante. *Nous appel-*

(¹) *Voir* M. Fréchet, *Une définition fonctionnelle des polynomes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, mars 1909). Au lieu de supposer la fonction $\varphi(x)$ continue, il suffit même de supposer qu'elle soit mesurable au sens de Lebesgue.

lerons fonctionnelle d'ordre entier n toute fonctionnelle continue U_f *vérifiant l'identité*

$$\text{(B)}\quad \left\{\begin{aligned} & U_{f_1+f_2+\ldots+f_{n+1}} - \sum_n U_{f_{i_1}+f_{i_2}+\ldots+f_{i_n}} + \sum_{n-1} U_{f_{i_1}+f_{i_2}+\ldots+f_{i_{n-1}}} - \ldots \\ & \qquad + (-1)^n \sum_1 U_{f_{i_1}} + (-1)^{n+1} U_0 = 0, \end{aligned}\right.$$

quelles que soient les $(n+1)$ *fonctions réelles* $f_1(x), \ldots, f_{n+1}(x)$, *continues dans un intervalle fixe* (a, b).

11. Il est bien facile de former des exemples de fonctionnelles d'ordre entier. Telles sont, par exemple,

$$(23)\qquad U_f = \left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]^n,$$

$$(24)\qquad U_f = \int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b K(x_1, \ldots, x_n) f(x_n) \ldots f(x_2) f(x_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

où K est une fonction continue quelconque indépendante de la fonction $f(x)$. En effet, ces deux fonctionnelles sont évidemment continues; si l'on substitue la première dans le premier membre de (B), celui-ci devient le premier membre de (22) si l'on a soin de poser

$$\varphi(x) \equiv x^n \qquad \text{et} \qquad y_i = f_i\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad [i = 1, 2, \ldots, (n+1)];$$

il est donc nul d'après le théorème énoncé plus haut.

Pour opérer de même avec la seconde fonctionnelle, il est nécessaire de se servir de la généralisation suivante de ce théorème : *La fonction réelle la plus générale d'un nombre quelconque p de variables* $\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ *qui est continue par rapport à l'ensemble de ses variables et vérifie l'identité*

$$\begin{aligned} (25)\quad & \varphi(y_1^{(1)}+y_1^{(2)}+\ldots+y_1^{(n+1)}, y_2^{(1)}+y_2^{(2)}+\ldots+y_2^{(n+1)}, \ldots, y_p^{(1)}+y_p^{(2)}+\ldots+y_p^{(n+1)}) \\ & \quad - \sum_n \varphi(y_1^{(i_1)}+\ldots+y_1^{(i_n)}, \ldots, y_p^{(i_1)}+\ldots+y_p^{(i_n)}) \\ & \quad + \sum_{n-1} \varphi(y_1^{(i_1)}+\ldots+y_1^{(i_{n-1})}, \ldots, y_p^{(i_1)}+\ldots+y_p^{(i_{n-1})}) - \ldots \\ & \quad + (-1)^n \sum_1 \varphi(y_1^{(i_1)}, \ldots, y_p^{(i_1)}) + (-1)^{n+1}\varphi(0, \ldots, 0) \equiv 0, \end{aligned}$$

quels que soient les $(n+1)p$ *nombres réels* $y_1^{(1)}, \ldots, y_p^{(n+1)}$, *est le polynome le plus général qui est de degré n au plus par rapport à l'ensemble de ses p variables* ([1]). Substituons maintenant la fonctionnelle (24) dans le premier membre de (B) ; il prendra la forme

$$\int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{R}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

où R est ce que devient le premier membre de (25) quand on y pose

$$p = n, \qquad \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_p) \equiv y_1 y_2 \ldots y_n, \qquad y_i^{(k)} = f_k(x_i)$$
$$[i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots, (n+1)].$$

Il est donc aussi nul.

Nous avons ainsi deux exemples très différents de fonctionnelles d'ordre n dont aucun ne représente la forme générale de ces fonctionnelles d'ordres entiers.

12. Indiquons d'abord une propriété importante des fonctionnelles d'ordre entier. *Si* U_f *est une fonctionnelle d'ordre n et si* $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x), \ldots, f^{(p)}(x)$ *sont des fonctions continues quelconques dans* (a, b), *l'expression*

$$(26) \qquad \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_p) \equiv \mathrm{U}_{y_1 f^{(1)}(x) + y_2 f^{(2)}(x) + \ldots + y_p f^{(p)}(x)},$$

où $y_1, \ldots, y_p$ *sont des constantes arbitraires, est, lorsque* $f_1, \ldots, f_p$ *sont déterminées, un polynome en* $y_1, \ldots, y_p$ *d'ordre n au plus par rapport à leur ensemble.* En effet, U étant d'ordre n, l'identité (B) est en particulier vérifiée quand on y prend pour les $f_i(x)$ les fonctions

$$f_i(x) \equiv y_1^{(i)} f^{(1)}(x) + \ldots + y_p^{(i)} f^{(p)}(x),$$

où les $y_k^{(i)}$ sont des constantes arbitraires. Or, en opérant cette substitution, l'identité (B) donne l'identité (25). Comme d'après (26) $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ est une fonction continue, ce sera bien un polynome de degré au plus égal à n.

13. En particulier, on voit que si nous reprenons l'intervalle $(0, \pi)$ pour (a, b) la quantité

$$\Phi_n(a_0, a_1, \ldots, a_n) \equiv \mathrm{U}_{\sigma_{n,f}}$$

([1]) M. Fréchet, *Une définition fonctionnelle des polynomes* (*loc. cit.*).

est un polynome de degré p si U est une fonctionnelle d'ordre p. Par suite, dans le raisonnement qui a fourni la formule (A), on pourra prendre

$$P_n(a_0, \ldots, a_n) \equiv \Phi_n(a_0, \ldots, a_n).$$

Il en résulte que le degré r_n de P_n sera constamment égal à p. Ainsi, *lorsque* U_f *est d'ordre entier* p, *une première simplification de la formule* (A) *consistera à prendre toujours* $r_n = p$. Mais ce n'est pas tout.

14. Introduisons les fonctionnelles homogènes.

D'après ce qui précède, si U_f est d'ordre n, U_{cf} est un polynome en c de degré n au plus. *Nous dirons que* U_f *est homogène et d'ordre* n si U_f est d'ordre n et tel que

$$U_{cf} \equiv c^n U_f, \tag{27}$$

quelles que soient la constante c et la fonction continue $f(x)$ (¹). On voit immédiatement que si, dans (26), U est une fonctionnelle homogène, $\varphi(y_1, \ldots, y_p)$ sera un polynome homogène par rapport à l'ensemble de ses variables.

Si maintenant U_f est une fonctionnelle quelconque d'ordre p, on aura

$$U_{cf} \equiv u_0 + cu_1 + \ldots + c^p u_p,$$

quand f restant déterminé, c varie, les quantités $u_0, \ldots, u_p$ restant fixes.

Nous aurons donc

$$U_{if} = u_0 + iu_1 + \ldots + i^p u_p \qquad (i = 1, 2, \ldots, p+1).$$

Si donc on désigne par $A_i^{(k)}$ des nombres bien déterminés (indépendants de k, f, U) solutions des équations linéaires

$$A_1^k + 2^i A_2^{(k)} + \ldots + (p+1)^i A_{p+1}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq i, \\ 1 & \text{si} \quad k = i, \end{cases} \tag{28}$$

on aura

$$u_k = A_1^{(k)} U_f + A_2^{(k)} U_{2f} + \ldots + A_{p+1}^{(k)} U_{(p+1)f}. \tag{29}$$

(¹) Les fonctionnelles homogènes d'ordre 1 sont les fonctionnelles linéaires de M. Hadamard.

D'après cette formule u_k est une fonctionnelle évidemment continue de f, $u_k = H_f^{(k)}$, et si on la substitue à U_f dans (B) où l'on remplace n par p, on obtiendra évidemment un résultat identiquement nul. Donc

$$U_{cf} \equiv H_f^{(0)} + c H_f^{(1)} + \ldots + c^p H_f^{(p)}, \tag{30}$$

où $H_f^{(k)}$ est une fonctionnelle d'ordre p au plus, indépendante de c. Enfin on aura évidemment, quelle que soit la constante y,

$$H_f^{(0)} + c y H_f^{(1)} + \ldots + c^p y^p H_f^{(p)} \equiv U_{(cy)f} \equiv U_{y(cf)} \equiv H_{cf}^{(0)} + y H_{cf}^{(1)} + \ldots + y^p H_{cf}^{(p)}.$$

En identifiant les deux polynomes en y, on a

$$H_{cf}^{(k)} \equiv c^k H_f^{(k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, p). \tag{31}$$

15. *Développement des fonctionnelles d'ordre entier.* — Si maintenant nous appliquons à $H_f^{(k)}$ la méthode qui fournit le développement (A), nous voyons que la fonction

$$\Phi_n^{(k)}(a_0, a_1, \ldots, a_n) \equiv H_{\sigma_n, f}^{(k)}$$

sera d'abord de degré p au plus puisque $H_f^{(k)}$ est d'ordre p au plus; elle sera en outre telle que

$$\Phi_n^{(k)}(ca_0, ca_1, \ldots, ca_n) = H_{\sigma_n, cf}^{(k)} = H_{c(\sigma_n, f)}^{(k)} = c^k H_{\sigma_n, f}^{(k)} = c^k \Phi_n^{(k)}(a_0, \ldots, a_n).$$

Donc Φ_n^k est homogène et de degré k exactement. Par suite, dans le développement (A) de $H_f^{(k)}$, ne figure qu'*une* intégrale multiple de l'ordre fixe k pour chaque valeur de n,

$$H_f^{(k)} = \lim_{n=\infty} \int_a^b \cdots \int_a^b u_n^{(k)}(x_1, \ldots, x_k) f(x_k) \ldots f(x_2) f(x_1)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k. \tag{32}$$

De sorte que nous obtenons cette nouvelle simplification de la formule (A) : *Si* U_f *est d'ordre entier* p, *on pourra dans la formule* (A) *prendre la somme des limites des intégrales* (au lieu de prendre la limite de la somme sans savoir si chaque intégrale a ou non une limite).

En résumé, nous obtenons le résultat suivant : *Si* U_f *est une* *fonctionnelle d'ordre entier p, on peut la représenter sous la forme :*

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{U}_f = \mathrm{U}_0 &+ \lim_{n=\infty}\left[\int_a^b u_n^{(1)}(x) f(x_1)\,dx_1\right] + \ldots \\ &+ \lim_{n=\infty}\left[\int_a^b \ldots \int_a^b u_n^{(p)}(x_1, \ldots, x_p) f(x_p) \ldots f(x_1)\,dx_1 \ldots dx_p\right], \end{aligned}\right.$$

où les $u_n^{(k)}$ sont des polynomes indépendants de la fonction $f(x)$.

(Dans le cas où U_f est homogène et d'ordre 1, on obtient le théorème de M. Hadamard.)

16. *Propriétés des fonctionnelles d'ordre entier.* — Remarquons maintenant que dans (32) l'intégrale qui figure au second membre, vérifiant quel que soit n la condition fonctionnelle (B), où l'on a remplacé n par k, il en sera de même de sa limite $\mathrm{H}_f^{(k)}$ et, comme celle-ci est continue, elle sera d'ordre $\leqq k$ (et non pas seulement d'ordre $\leqq p$). Cette remarque jointe à (31) montre que $\mathrm{H}_f^{(k)}$ est homogène et d'ordre k; ainsi *toute fonctionnelle d'ordre entier p peut être décomposée* (¹) *en une somme de fonctionnelles homogènes $\mathrm{H}_f^{(k)}$ d'ordre k croissant jusqu'à p*

$$(\mathrm{D})\qquad \mathrm{U}_f \equiv \mathrm{U}_0 + \mathrm{H}_f^{(1)} + \ldots + \mathrm{H}_f^{(p)} \quad (^2).$$

Il est utile ici de faire remarquer que nous avons dû *démontrer* que l'identité $\mathrm{H}_{cf}^{(k)} \equiv c^k\,\mathrm{H}_f^{(k)}$ étant vérifiée, $\mathrm{H}^{(k)}$ était d'ordre k. C'est qu'en effet

---

(¹) *Une telle décomposition est unique.* Car s'il y en avait deux distinctes, en y remplaçant f par cf, on aurait deux polynomes en c équivalents sans être identiques.

(²) La proposition actuelle permet de simplifier l'expression générale (C) d'une fonctionnelle d'ordre entier en généralisant un théorème de F. Riesz qui a été publié pendant que ce Mémoire était sous presse.

M. Riesz démontre que toute fonctionnelle *linéaire* U_f peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{U}_f = \int_a^b f(x)\,du(x)$$

$u(x)$ étant une fonction à variation bornée indépendante de $f(x)$ et l'intégrale étant définie au sens de Stieltjes, c'est-à-dire étant la limite de $\sum f(x_i)\,[u(x_{i+1}) - u(x_i)]$. On peut obtenir par la même méthode l'expression d'une fonctionnelle *homogène* d'ordre entier et en faisant usage de la décomposition du n° 16, l'expression d'une fonctionnelle d'ordre entier quelconque : TOUTE FONCTIONNELLE D'ORDRE ENTIER n EST DE LA FORME

$$\begin{aligned} \mathrm{U}_f = \mathrm{U}_0 &+ \int_a^b f(x_1)\,du_1(x_1) + \int_a^b f(x_1)\,d_{x_1}\int_a^b f(x_2)\,d_{x_2}u_2(x_1, x_2) + \ldots \\ &+ \int_a^b f(x_1)\,d_{x_1}\int_a^b f(x_2)\,d_{x_2} \ldots \int_a^b f(x_n)\,d_{x_n}u_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

ceci ne serait plus vrai si on l'appliquait à une fonctionnelle continue quelconque. Pour en donner un exemple, considérons la fonctionnelle

$$U_f = [\text{maximum de } f(x) \text{ dans } (a, b)] + [\text{minimum de } f(x) \text{ dans } (a, b)].$$

Il est facile de voir que *cette fonctionnelle est continue et telle que*

$$U_{cf} \equiv c\, U_f,$$

quelle que soit la constante c. Cependant U_f *n'est pas du premier ordre.* On n'a pas toujours

$$U_{f+g} - U_f - U_g + U_0 \equiv 0.$$

Par exemple, si l'on prend $f \equiv x^2$, $g = 1 - 2x$, $a = 0$, $b = 2$, le premier membre devient

$$1 - 4 - (-2) + 0 \neq 0.$$

17. Si U_f, V_f, W_f sont trois fonctionnelles d'ordres p, q, r respectivement, et A, B, C trois constantes, la fonctionnelle

$$AU_f + BV_f + CW_f$$

sera évidemment d'ordre entier au plus égal au plus grand des trois nombres p, q, r.

18. De plus, la fonctionnelle

$$T_f \equiv AU_f V_f W_f$$

sera une fonctionnelle d'ordre entier égal à $p + q + r$ et, si U_f, V_f, W_f sont homogènes, elle sera aussi homogène. Il suffit de démontrer la

---

OU $u_1, u_2, \ldots, u_n$ SONT DES FONCTIONS INDÉPENDANTES DE LA FONCTION $f(x)$ (la notation d_{x_i} indiquant qu'on prend l'intégrale au sens de Stieltjes en considérant x_i comme variant seul). Au contraire, on n'a aucun avantage à se servir de cette forme pour simplifier le développement (A) d'une fonctionnelle continue quelconque. En revenant aux fonctionnelles linéaires, on peut déduire de l'expression de M. F. Riesz, une forme

$$U_f = \int_a^b f(x)\, dv(x) + \Sigma A_i f(x_i),$$

où $v(x)$ est non seulement à variation bornée, mais continue, et où la fonction $v(x)$ et les constantes A_i, x_i sont indépendantes de la fonction $f(x)$, la série ΣA_i étant absolument convergente. Cette expression, étant seule de son espèce, met en évidence ce qu'on pourrait appeler des résidus (les A_i) et des points singuliers fixes (les x_i) de la fonctionnelle linéaire U_f.

proposition dans ce cas. Or T_f est évidemment continue ; et l'on a

$$= A\left[\lim_{n=\infty}\int_a^b\cdots\int_a^b u_n(x_1,\ldots,x_p)f(x_p)\ldots f(x_1)\,dx_1\ldots dx_p\right]$$
$$\times\left[\lim_{n=\infty}\int_a^b\cdots\int_a^b v_n(x_{p+1},\ldots,x_{p+q})f(x_{p+q})\ldots f(x_{p+1})\,dx_{p+1}\ldots dx_{p+q}\right]$$
$$\times\left[\lim\int_a^b\cdots\int_a^b w_n(x_{p+q+1},\ldots,x_{p+q+r})f(x_{p+q+r})\ldots f(x_{p+q+1})\,dx_{p+q+1}\ldots dx_{p+q+r}\right],$$

d'où

$$T_f = A\lim_{n=\infty} T_f^{(n)}$$

avec

$$T_f^{n} = \int_a^b\cdots\int_a^b [u_n(x_1,\ldots,x_p)v_n(x_{p+1},\ldots,x_{p+q})w_n(x_{p+q+1},\ldots,x_{p+q+r})]$$
$$\times f(x_{p+q+r})\ldots f(x_1)\,dx_1\ldots dx_{p+q+r},$$

$T_f^{(n)}$ est évidemment d'ordre $p+q+r$. Elle vérifie donc (B) où n est remplacé par $p+q+r$ et en passant à la limite T_f vérifie aussi (B). Donc T_f est d'ordre $p+q+r$.

19. Des deux propositions précédentes, on déduit facilement que *si U_f est une fonctionnelle d'ordre n et si $\varphi(y)$ est un polynome de degré q, $\varphi(U_f)$ est une fonctionnelle d'ordre nq.*

20. De même *si U_f est une fonctionnelle d'ordre n et si $f(x, c)$ est un polynome de degré q en c et continu par rapport à x, l'expression $U_{f(x,c)}$ est un polynome en c de degré nq.* Car si

$$f(x,c) \equiv f^{(0)}(x) + cf^{(2)}(x) + \ldots + c^2 f^{(q)}(x),$$

nous savons que la fonction

$$\varphi(y_0, y_1, \ldots, y_q) \equiv U_{y_0 f^{(0)}+\ldots+y_q f^{(q)}}$$

est un polynome de degré n. Par suite, la fonction

$$U_{f(x,c)} \equiv \varphi(1, c, c^2, \ldots, c^q)$$

sera un polynome de degré nq.

Soit U_f une fonctionnelle d'ordre n, je dis que si $\varphi(x)$ est une fonction continue déterminée, $U_{f+\varphi}$ est aussi une fonctionnelle d'ordre n par rapport à $f(x)$. Il suffit pour cela de prouver que

$$U_{f+\varphi} - U_f - U_\varphi + U_0 = V_f$$

est une fonctionnelle d'ordre $n-1$. Or, c'est ce qu'on voit immédiatement en appelant f_{n+1} la fonction φ et en formant l'expression

$$V_{f_1+\ldots+f_n}-\sum_{n-1} V_{f_{j_1}+\ldots+f_{j_{n-1}}}+\sum_{n-2} V_{f_{j_1}+\ldots+f_{j_{n-2}}}-\ldots+(-1)^{n-1}\sum V_{f_{j_1}}+(-1)^n V_0$$

(où $j_1, \ldots, j_n$ ne peuvent prendre que les valeurs $1, 2, \ldots, n$ et non pas $n+1$). On constate alors que cette expression se réduit au premier membre de (B) qui est nul par hypothèse. Comme V_f est évidemment continue, elle est bien d'ordre $n-1$. Donc

$$U_{f+\varphi}=U_f+U_\varphi-U_0+V_f$$

est d'ordre n en f.

21. Il est maintenant bien facile d'obtenir la généralisation de la formule de Taylor. En effet, si U_f est homogène et d'ordre n, $U_{cf+d\varphi}$ est un polynome homogène et d'ordre n par rapport aux constantes arbitraires c, d,

$$U_{cf+d\varphi}\equiv c^n u_0+c^{n-1}d u_1+\ldots+d^n u_n.$$

Mais $U_{f+\varphi}$ étant d'ordre n par rapport à f quand φ est déterminé, on a vu que

$$U_{cf+\varphi}=U_\varphi+cH_f^{(1)}+\ldots+c^n H_f^{(n)},$$

où, quand φ est déterminé, $H_f^{(k)}$ est homogène et d'ordre n en f.

Donc

$$c^n u_0+c^{n-1}u_1+\ldots+u_n\equiv U_\varphi+cH_f^{(0)}+\ldots+c^n H_f^{(n)};$$

par suite u_k est $\equiv H_f^{(n-k)}$ homogène et d'ordre $(n-k)$ en f. De même u_k est homogène et d'ordre k en φ. En sorte qu'on pourra écrire

$$U_{f+\varphi}\equiv U_\varphi+\Delta_f^{(1)}U_\varphi+\ldots+\Delta_f^{(n)}U_\varphi,$$

où $\Delta_f\, U_f$ doit être considéré comme un tout représentant une fonctionnelle homogène et d'ordre k par rapport à f, homogène et d'ordre $(n-k)$ par rapport à φ.

Si l'on passe au cas d'une fonction non homogène au moyen du théorème du n° 16, on arrive au résultat annoncé :

Si U_f désigne une fonctionnelle d'ordre entier n, on a

$$U_{f+\varphi}\equiv U_\varphi+\Delta_f^{(1)}U_\varphi+\ldots+\Delta_f^{(n)}U_\varphi, \tag{33}$$

où $\Delta_f^{(k)} U_\varphi$ représente une fonctionnelle d'ordre $n-k$ par rapport à φ, homogène et d'ordre k par rapport à f.

22. On a d'ailleurs une signification simple de $\Delta_f^{(1)} U_\varphi$ par exemple en considérant le cas où $\varphi(x)$ dépend d'un paramètre α et admet une dérivée en α uniformément continue par rapport à x et α. Alors cherchons la dérivée de $U_{\varphi(x,\alpha)}$ par rapport à α. Si $\beta - \alpha$ est très petit,

$$\varphi(x, \beta) = \varphi(x, \alpha) + (\beta - \alpha)\, \varphi'_\alpha(x, \gamma),$$

γ étant compris entre α et β. Donc, d'après (33),

$$\frac{U_{\varphi(x,\beta)} - U_{\varphi(x,\alpha)}}{\beta - \alpha} = \Delta^{(1)}_{\varphi'_\alpha(x,\gamma)} U_\varphi + (\beta - \alpha) \Delta^{(2)}_{\varphi'(x,\gamma)} U_\varphi + \ldots + (\beta - \alpha)^{n-1} \Delta^{(n)}_{\varphi'(x,\gamma)} U_\varphi.$$

De sorte qu'à la limite

$$\Delta^{(1)}_{\varphi'_\alpha} U_\varphi = \lim_{\beta=\alpha} \left(\frac{U_{\varphi(x,\beta)} - U_{\varphi(x,\alpha)}}{\beta - \alpha} \right) = \frac{d}{d\alpha} U_{\varphi(x,\alpha)}.$$

Avec les notations du *Calcul des variations*,

$$\partial U_\varphi = \Delta^{(1)}_{\partial\varphi} U_\varphi, \tag{34}$$

autrement dit *la variation d'une fonctionnelle d'ordre n : U_φ est une fonctionnelle d'ordre $n-1$ par rapport à φ et* linéaire (*c'est-à-dire homogène et d'ordre* 1) *par rapport à $\partial\varphi$*. Ce dernier résultat satisfait à la condition que M. Hadamard considère comme seule essentielle quand on veut étendre aux fonctionnelles les méthodes du Calcul différentiel ([1]).

23. Enfin considérons des séries de fonctionnelles. On démontre facilement que si une série de fonctionnelles continues est uniformément convergente dans tout ensemble compact de fonctions continues, sa somme est une fonctionnelle continue. On peut même démontrer que si chacun des termes de la série est une fonctionnelle d'ordre au plus égal au nombre fixe n, la somme de la série est une fonctionnelle qui est d'ordre entier au plus égal à n. Il suffit de remarquer que l'égalité (B) se conserve à la limite.

Les fonctionnelles analytiques.

24. La formule (A) peut s'exprimer de la façon suivante : la somme

---

([1]) *Voir* J. Hadamard, *Leçons sur le Calcul des variations*, p. 283.

des intégrales multiples qui figurent dans le second membre est, d'après les remarques faites précédemment, une fonctionnelle d'ordre r_n, $V_f^{(r_n)}$. Posons

$$U_f^{(0)} = V_f^{(r_0)}, \qquad U_f^{(1)} = V_f^{(r_1)} - V_f^{(r_0)}, \qquad \ldots, \qquad U_f^{(n)} = V_f^{(r_n)} - V_f^{(r_{n-1})}, \qquad \ldots.$$

Les $V_f^{(n)}$ seront des fonctionnelles d'ordre entier et l'on aura

$$(D) \qquad U_f = U_f^{(0)} + U_f^{(1)} + \ldots + U_f^{(n)} + \ldots.$$

On obtient alors un *théorème qui correspond complètement au théorème de Weierstrass* [toute fonction continue peut être représentée par une série de polynomes qui converge uniformément dans tout ensemble compact de points ([1])] à savoir :

TOUTE FONCTIONNELLE CONTINUE PEUT ÊTRE REPRÉSENTÉE PAR UNE SÉRIE DE FONCTIONNELLES D'ORDRES ENTIERS, SÉRIE DONT LA CONVERGENCE EST UNIFORME DANS TOUT ENSEMBLE COMPACT DE FONCTIONS CONTINUES ([2]).

La formule (A) fournit même un résultat plus précis puisqu'on peut même prendre pour $U_f^{(n)}$ dans le développement (D), une somme d'intégrales multiples qui donne une fonctionnelle d'ordre entier d'espèce particulière.

25. Le développement (D) sera souvent utile en permettant de remplacer approximativement une fonctionnelle continue quelconque par une fonctionnelle d'ordre entier.

Mais il présente l'inconvénient de ne pas être seul de son espèce pour une fonctionnelle U_f déterminée. Il n'en est pas de même pour une classe particulière de fonctionnelles que nous allons maintenant étudier en poursuivant l'analogie avec les fonctions d'une variable. Nous partirons pour cela des deux propriétés suivantes :

26. *Si une fonctionnelle* U_f *peut être représentée par une série convergente de fonctionnelles* homogènes *d'ordres entiers croissants, elle ne peut l'être que d'une seule façon.*

([1]) *Dans le cas* des ensembles linéaires, nous avons remarqué que les notions d'ensemble compact et d'ensemble limité se confondent.

([2]) C'est-à-dire tout ensemble de fonctions bornées dans leur ensemble et également continues.

En effet, supposons que les deux séries de fonctionnelles homogènes d'ordres indiqués par leurs indices

$$(35) \qquad H_f^{(0)} + H_f^{(1)} + \ldots + H_f^{(n)} + \ldots, \qquad K_f^{(0)} + K_f^{(1)} + \ldots + K_f^{(n)} + \ldots,$$

soient convergentes et de même somme. Notre raisonnement supposera même seulement cette condition réalisée dans un domaine borné D_μ. [Nous appellerons ainsi l'ensemble de toutes les fonctions continues dont le maximum des valeurs absolues dans (a, b) est inférieur à un même nombre μ.] Si le maximum M de $|f(x)|$ dans (a, b) est inférieur à μ, il en sera de même de celui de $|cf(x)|$ où c est une constante telle que $|c| < \frac{\mu}{M}$. Par suite, on aura

$$H_f^{(0)} + cH_f^{(1)} + \ldots + c^n H_f^{(n)} + \ldots = K_f^{(0)} + cK_f^{(1)} + \ldots + c^n K_f^{(n)} + \ldots,$$

pour $|c| < \frac{\mu}{M}$. Les deux membres sont deux fonctions holomorphes en c égales dans l'intervalle $\left(\pm \frac{\mu}{M}\right)$. Leurs coefficients sont donc égaux. Les deux séries (35) sont donc non seulement équivalentes, mais identiques terme à terme dans D_μ. Si les deux séries étaient équivalentes dans D_∞, c'est-à-dire pour toute fonction $f(x)$ continue, elles seraient partout identiques.

27. *Si l'une des séries* (35) *est convergente dans tout l'ensemble* D_μ, *elle sera* absolument *convergente dans tout cet ensemble*, car d'après ce qui précède la série

$$H_f^{(0)} + cH_f^{(1)} + \ldots + c^n H_f^{(n)} + \ldots,$$

par exemple, est convergente pour $|c| < \frac{\mu}{M}$; elle est, par suite, aussi absolument convergente pour $|c| < \frac{\mu}{M}$ et en particulier pour $c = 1$.

28. Nous généralisons maintenant la notion de fonction analytique de la manière suivante :

Nous dirons qu'*une fonctionnelle* U_f *est holomorphe pour* $f \equiv \varphi$ *s'il existe un nombre* $\mu > 0$ *tel qu'on ait dans tout l'ensemble* D_μ *des fonctions continues* $f(x)$ *pour lesquelles* $|f(x) - \varphi(x)| < \mu$ *dans* (a, b)

$$(36) \qquad U_f = H_{(f-\varphi)}^{(0)} + H_{(f-\varphi)}^{(1)} + \ldots + H_{(f-\varphi)}^{(n)} + \ldots,$$

$H_f^{(n)}$ *étant une fonctionnelle homogène d'ordre n et la série convergeant* uniformément *dans* tout *ensemble compact formé de fonctions $f(x)$ de l'ensemble* D_μ.

D'après ce qui précède, *la série convergera absolument dans* E, *y représentera une fonctionnelle continue et y sera représentable sous la forme* (36) *d'une seule manière.*

29. Il est facile de donner des exemples de fonctionnelles analytiques. Tout d'abord, d'après la formule (33), toute fonctionnelle d'ordre entier est holomorphe près de toute fonction continue $\varphi(x)$. On peut aussi donner des exemples de fonctionnelles analytiques qui ne sont pas d'ordre entier. Telle est, par exemple, la fonctionnelle

$$U_f = e^{f\left(\frac{a+b}{2}\right)},$$

qui est aussi holomorphe près de toute fonction continue, ainsi que la fonctionnelle plus générale

$$U_f = a_1 f(\alpha_1) + \frac{a_2}{2!}[f(\alpha_2)]^2 + \ldots + \frac{a_n}{n!}[f(\alpha_n)]^n + \ldots,$$

où les α_i sont compris dans (a, b), et les a_i bornés en valeur absolue dans leur ensemble. Une forme très générale de fonctionnelle analytique sera la suivante :

$$(37)\quad \begin{aligned} U_f = u_0 &+ \int_a^b u_1(x_1) f(x_1)\, dx_1 + \ldots \\ &+ \int_a^b \ldots \int_a^b u_n(x_1, \ldots, x_n) f(x_n) \ldots f(x_1)\, dx_1 \ldots dx_2 + \ldots, \end{aligned}$$

où les u_n sont des fonctions continues telles que, par exemple,

$$|u_n(x_1, \ldots, x_n)| < \frac{K}{n!},$$

pour

$$a \leqq x_i \leqq b \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

K étant un nombre fixe.

Une telle série est absolument et uniformément convergente dans tout domaine borné ; elle représente une fonctionnelle holomorphe près de toute fonction continue de x. Une telle expression a déjà été considérée par M. Volterra qui la considère comme la fonctionnelle analytique la plus générale en partant d'un point de vue différent du nôtre (*voir* la note (¹) du n° 31).

30. On voit facilement que si U_f est holomorphe près de la fonction $\varphi(x)$, l'expression $U_{\varphi(x)+cf(x)}$ [où $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont deux fonctions continues déterminées et c une constante arbitraire] est une fonction holomorphe de c. *La réciproque n'est pas vraie.* Par exemple, la fonctionnelle U_f définie au n° 16 est telle que $U_{cf} = c\,U_f$. Cependant, elle n'est pas analytique, car elle serait alors nécessairement d'ordre 1, ce qui n'est pas comme nous l'avons vu.

31. Si U_f, V_f, W_f sont trois fonctionnelles holomorphes près de la même fonction $\varphi(x)$, on voit immédiatement qu'il en est de même de $U_f + V_f + W_f$ et de $AU_fV_fW_f$, A étant une constante quelconque. Si $F(c)$ est un polynome en c, on voit que $F(U_f)$ sera aussi une fonctionnelle holomorphe. Il en serait encore de même si $F(c)$ était une fonction holomorphe près de U_0.

Inversement si $\varphi(x, \lambda)$ est une fonction uniformément continue par rapport à l'ensemble des variables x et λ, et qui est holomorphe en λ, et si U_f est une fonctionnelle holomorphe de f, $U_{\varphi(x,\lambda)}$ sera une fonction holomorphe en λ (¹).

(¹) D'après la note (²) du n° 16, on voit que toute fonctionnelle holomorphe près de zéro (par exemple) pourra s'écrire sous la forme

$$U_f = U_0 + \int_a^b f(x_1)\,du_1(x_1) + \ldots$$
$$+ \int_a^b f(x_1)\,d_{x_1} \int_a^b f(x_2)\,d_{x_2} \ldots \int_a^b f(x_n)\,d_{x_n} u_n(x_1, \ldots, x_n) + \ldots$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, sont des fonctions indépendantes de f. Cette expression est plus générale que (37).