ELIE CARTAN

Les systèmes de Pfaff, à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 27 (1910), p. 109-192
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__109_0>

LES

SYSTÈMES DE PFAFF A CINQ VARIABLES

ET LES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE,

Par M. E. CARTAN.

I. — Introduction.

1. Le but de ce Mémoire est d'abord l'étude des invariants d'un système de deux ou de trois équations aux différentielles totales à cinq variables vis-à-vis du groupe général des transformations à cinq variables; ensuite, l'application des résultats obtenus à la théorie de l'intégration des systèmes en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de deux variables indépendantes, ainsi qu'à la théorie de l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre dont les deux familles de caractéristiques sont confondues et auxquelles s'applique la méthode d'intégration de M. Darboux.

Sauf en certains cas particuliers, qu'une première étude indique immédiatement, tout système de deux équations de Pfaff à cinq variables admet un système covariant de trois équations, et réciproquement. Dans ce cas général, je démontre l'existence de deux formes quadratiques covariantes, l'une binaire $\mathcal{F}$, l'autre ternaire $\mathcal{G}$. Si la forme $\mathcal{F}$ n'est pas un carré parfait, ou ne contient aucun facteur linéaire triple, j'indique comment on peut former le système complet des invariants cherchés; ils se déduisent tous de la considération de 27 *invariants fondamentaux* et de *cinq paramètres différentiels linéaires*. Les covariants tels qu'ils sont indiqués sont *algébriques*, mais il ne serait pas difficile de former le système des invariants *rationnels*.

Dans le cas où la forme biquadratique $\mathcal{F}$ est identiquement nulle, ou est un carré parfait, ou contient un facteur linéaire triple, les résultats précédents tombent en défaut, les paramètres différentiels linéaires dont il est question plus haut n'existant plus. L'étude détaillée de tous les cas particuliers qui peuvent se présenter serait très longue et très fastidieuse. Je me suis contenté de rechercher tous les cas où il est impossible, aussi loin qu'on prolonge les calculs, de déterminer cinq paramètres différentiels linéaires indépendants. J'indiquerai tout à l'heure les résultats auxquels je suis arrivé à ce point de vue.

2. Voici maintenant quels sont les rapports entre les recherches précédentes et la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre.

On sait que les systèmes *en involution* de deux équations aux dérivées partielles du second ordre jouissent de la propriété que les surfaces intégrales sont engendrées par des *multiplicités caractéristiques* du second ordre dépendant seulement de cinq *constantes* arbitraires (¹). Une fois déterminées les caractéristiques, l'intégration du système est achevée si toutefois l'on sait de quelle manière on doit associer les caractéristiques pour engendrer une surface intégrale. Pour cela, il suffit d'établir entre les cinq paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_5$, dont dépendent les caractéristiques, quatre relations de manière à satisfaire à un certain système de trois équations aux différentielles totales en x_1, $x_2, \ldots, x_5$.

Ce système de Pfaff n'est d'ailleurs pas autre chose que le système

$$(1)\qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0, \end{cases}$$

(¹) *Voir* en particulier E. Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, chap. VI, p. 40-49. Paris, 1898.

où l'on suppose x, y, z, p, q, r, s, t liées par les deux relations qui définissent le système en involution ; bien qu'on ait en apparence *six* variables indépendantes, on peut, par un changement de variables, faire en sorte qu'il ne reste plus trace, dans les équations de Pfaff considérées, de la sixième variable; les cinq variables restantes sont tout simplement les paramètres des caractéristiques et le système de Pfaff indique comment ces caractéristiques doivent être associées pour engendrer une surface intégrale.

A tout système en involution correspond ainsi un système de trois équations de Pfaff à cinq variables, et réciproquement tout système de trois équations de Pfaff à cinq variables (non complètement intégrable) peut être regardé comme provenant d'un système en involution (et même d'une infinité).

Nous dirons que deux systèmes en involution sont *équivalents* ou appartiennent à la même *classe* si l'on peut par un changement de variables passer du système de Pfaff, correspondant à l'un des systèmes donnés, au système de Pfaff correspondant à l'autre; autrement dit, si l'on peut établir entre les caractéristiques des deux systèmes une correspondance telle qu'aux caractéristiques qui engendrent une surface intégrale quelconque du premier système correspondent des caractéristiques engendrant également une surface intégrale du second système.

Pour que deux systèmes en involution soient *équivalents*, il faut et il suffit qu'on puisse passer de l'un à l'autre par une transformation de contact.

La recherche des invariants d'un système de trois équations de Pfaff à cinq variables fournit donc une théorie des invariants d'un système en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre vis-à-vis du groupe des transformations de contact de l'espace.

3. Mais cette recherche a des conséquences bien autrement intéressantes au point de vue de l'intégration elle-même des systèmes en involution, ou d'une manière plus précise au point de vue de la détermination des caractéristiques. Les invariants du système de Pfaff vis-à-vis du groupe des transformations à cinq variables sont évidemment les mêmes que les invariants du système (1) vis-à-vis du groupe des

transformations à six variables; autrement dit, la détermination des invariants n'exige pas la connaissance préalable des caractéristiques; et comme chacun d'eux est une fonction des seuls paramètres des caractéristiques, on arrive au résultat suivant :

Tout invariant du système (1) *vis-à-vis d'un changement de variables quelconque est une intégrale première du système différentiel des caractéristiques.*

D'une manière encore plus précise :

On peut, en général, par des différentiations, déterminer cinq intégrales premières du système différentiel des caractéristiques. Dans tous les cas, on peut, par des opérations rationnelles, déterminer la structure du plus grand groupe de transformations de contact qui laissent invariant un système en involution donné. Si ce groupe se réduit à la transformation identique, les caractéristiques sont connues sans intégration. Si ce groupe ne se réduit pas à la transformation identique, la détermination des caractéristiques est ramenée à l'intégration de systèmes auxiliaires dont la nature ne dépend que de sa structure.

Si le système en involution est linéaire, il peut appartenir à deux classes distinctes, suivant qu'il admet ou non une intégrale intermédiaire du premier ordre dépendant d'une constante arbitraire. Dans les deux cas il admet un groupe infini de transformations de contact, et les caractéristiques s'obtiennent par des opérations d'ordres

$$1, 3, 1 \quad \text{pour la première classe,}$$

ou

$$3, 1 \quad \text{pour la deuxième classe.}$$

4. Si le système en involution n'est pas linéaire, il admet au plus un groupe fini de transformations de contact, et ce groupe est à 14 ou 7 ou moins de 7 paramètres.

Tous les systèmes en involution admettant un groupe à quatorze paramètres appartiennent à la même classe et sont réductibles au système

$$s = \frac{1}{2}t^2, \qquad r = \frac{1}{3}t^3.$$

La réduction d'un système quelconque de cette classe à la forme précédente exige l'intégration d'un système d'équations différentielles de Lie associé au groupe simple à quatorze paramètres dont M. Engel et moi avons signalé l'existence. Si l'on connaît une solution particulière de ce système différentiel, la solution générale est donnée par l'intégration d'une équation de Riccati et des quadratures.

L'intégration de ce système différentiel opère la réduction et donne du même coup les caractéristiques ainsi que la surface intégrale la plus générale. Les équations de cette surface contiennent un paramètre α, une fonction arbitraire $f(\alpha)$, ses deux premières dérivées et l'intégrale indéfinie $\int f''^2(\alpha)\,d\alpha$.

Si un système en involution admet un groupe à sept paramètres, ce groupe est intégrable; il y a une infinité de classes correspondantes, dépendant d'une constante arbitraire. Rentrent dans ce cas les systèmes

$$s = t^m, \qquad r = \frac{m^2}{2m-1}\,t^{2m-1} \qquad \left(m \neq 2, -1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Les équations générales des surfaces intégrales peuvent, par des quadratures, être obtenues sous une forme qui contienne un paramètre α, une fonction arbitraire $f(\alpha)$, ses deux dérivés $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$ et l'intégrale

$$\int [f''^2(\alpha) + af'^2(\alpha) + bf^2(\alpha)]\,d\alpha$$

où a et b sont des constantes.

Si un système en involution admet un groupe à six paramètres, ce groupe peut être intégrable ou non.

Si le groupe est intégrable, le système admet un invariant fondamental I et un paramètre différentiel linéaire permettant de déduire de I le système complet des invariants. On peut, par des quadratures, écrire les équations générales des surfaces intégrales au moyen de α, $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$ et

$$\int [f''^2(\alpha) + \mathrm{A}f'^2(\alpha) + \mathrm{B}f^2(\alpha)]\,d\alpha,$$

A et B désignant des fonctions connues de α. Rentrent dans ce cas les systèmes en involution pour lesquels r et s sont des fonctions de t seulement.

Si le groupe à six paramètres n'est pas intégrable, les caractéristiques s'obtiennent soit par l'intégration de deux équations de Riccati, soit par l'intégration d'une équation de Riccati et des quadratures. Si en particulier le groupe est isomorphe au groupe des déplacements de l'espace euclidien, *on peut, par une équation de Riccati et des quadratures, ramener l'intégration du système à la recherche des courbes gauches de torsion égale à* 1; dans ce cas les équations générales de la surface intégrale dépendent de α, $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$ et $\int \cos^2\beta\, d\alpha$, où β est lié à α par la relation

$$\beta + \sin\beta\cos\beta = f''(\alpha) + f(\alpha).$$

5. Dans tous les autres cas, le groupe est à cinq paramètres au plus et l'on peut former un système de cinq paramètres différentiels linéaires indépendants. L'intégration du système différentiel des caractéristiques revient à des quadratures et, au plus, une équation de Ricatti. Plus, d'ailleurs, les caractéristiques s'obtiennent facilement, plus il est difficile d'associer ces caractéristiques pour engendrer une surface intégrale. Néanmoins, si le système admet un groupe à un paramètre au moins, on peut toujours représenter la surface intégrale générale par des formules contenant α, $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$ et une intégrale indéfinie portant sur une fonction *déterminée* de α, $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$; mais, pour obtenir ces formules, il peut être nécessaire, une fois les caractéristiques obtenues, d'intégrer, en outre, un système d'équations différentielles du même degré de généralité que celui qui donne les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Dans les cas signalés tout à l'heure, où le système en involution admet un groupe à quatorze paramètres, à sept paramètres ou à six paramètres intégrable, la forme biquadratique covariante $\mathfrak{F}$ est respectivement identiquement nulle, quatrième puissance parfaite, carré parfait.

6. Tout ce qui précède s'étend presque sans modification aux équa-

tions aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques confondues dépendant seulement de constantes arbitraires. Ces équations ont fait l'objet des recherches de M. Goursat [1]. Ce qui les rapproche des systèmes en involution, c'est que, comme pour eux, et cela semble n'avoir pas été suffisamment remarqué, il suffit de déterminer les caractéristiques (du second ordre), pour en déduire immédiatement, par l'application d'un procédé dû à Cauchy, les équations générales de la surface intégrale sous une forme qui contienne un paramètre arbitraire α, deux fonctions arbitraires $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ et leurs dérivées $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$.

Ces équations peuvent s'obtenir, comme l'a montré M. Goursat, en éliminant λ entre l'équation

$$r + 2\lambda s + \lambda^2 t + 2\psi = 0 \tag{2}$$

et sa dérivée; ψ désigne une fonction de x, y, z, p, q, λ satisfaisant à une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre (les variables indépendantes étant x, y, z, p, q, λ). L'intégration de ces équations est absolument équivalente à celle du système de deux équations de Pfaff

$$\left\{\begin{aligned} &dz - p\,dx - q\,dy = 0,\\ &dp - \lambda\,dq + \left(2\psi - \lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)dx + \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}dy = 0; \end{aligned}\right. \tag{3}$$

ce système contient six variables; mais on peut faire un changement de variables tel qu'il ne reste plus trace dans les équations de Pfaff de la sixième variable; les cinq variables restantes sont alors tout simplement les paramètres des caractéristiques de l'équation.

Réciproquement, tout système (non intégrable) de deux équations de Pfaff à cinq variables peut être regardé comme provenant d'une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques confondues.

7. On peut définir comme plus haut l'équivalence de deux de ces équations, et en déduire les mêmes conséquences.

---

(1) *Acta mathematica*, t. XIX, p. 285-340.

Celles des équations précédentes qui sont des équations de Monge-Ampère appartiennent toutes à la même classe; elles sont bien connues.

Les autres, que j'appellerai *équations de M. Goursat*, jouissent de la propriété remarquable suivante :

A toute équation de M. Goursat correspond un système en involution non linéaire et réciproquement; la correspondance est telle qu'une équation de M. Goursat et le système en involution correspondant ont les mêmes caractéristiques.

La correspondance est d'ailleurs très simple. Pour obtenir une équation de M. Goursat, on élimine λ entre l'équation (2) et sa dérivée; pour obtenir le système en involution correspondant, on élimine λ entre l'équation (2) et ses deux premières dérivées.

Les résultats énoncés plus haut sur les systèmes en involution non linéaires qui admettent un groupe de transformations à 14, 7 ou 6 paramètres, s'étendent donc d'eux-mêmes aux équations de M. Goursat, sans qu'il soit besoin de les énoncer de nouveau.

8. Les considérations précédentes s'étendent facilement à des systèmes différentiels plus généraux. En particulier, *si le système est un de ceux qui admettent des caractéristiques ne dépendant que de constantes arbitraires, la détermination de ces caractéristiques ne dépend que de la structure du plus grand groupe qui laisse invariante la manière dont il faut associer ces caractéristiques pour engendrer une multiplicité intégrale; la structure de ce groupe peut toujours être déterminée par des différentiations. Si le groupe est fini, les caractéristiques dépendent d'équations différentielles de Lie (quadratures, équations de Riccati, etc.). Si le groupe se réduit à la transformation identique, les caractéristiques sont connues par des différentiations.*

Je citerai comme exemple les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre à une fonction inconnue de n variables indépendantes, admettant une famille double de caractéristiques linéaires, lorsque les équations aux différentielles totales qui définissent ces caractéristiques (du second ordre) sont complètement intégrables. Ces équations dépendent d'une fonction ψ de $3n$ arguments assujettie à satisfaire à un certain système d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Si n est supérieur à 3, ces équations admettent un système de

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$

invariants différentiels du troisième ordre, tandis que pour $n=2$ l'invariant différentiel d'ordre minimum est du septième ordre.

9. Les résultats obtenus dans ce Mémoire se rattachent encore à un autre point de vue à la théorie générale de l'intégration des équations aux dérivées partielles à n variables indépendantes. L'équation aux dérivées partielles du second ordre à six variables indépendantes à laquelle satisfait la fonction ψ de la formule (2) peut en effet être intégrée, comme l'avait déjà fait implicitement M. Goursat (¹), par un procédé particulier, en ce sens qu'en se donnant une fonction arbitraire de cinq arguments, on obtient une infinité d'intégrales de l'équation par la réduction à sa forme canonique d'une équation de Pfaff à six variables. Je montre que ce procédé peut être envisagé d'une certaine manière comme une généralisation de la méthode classique de M. Darboux. Cette équation aux dérivées partielles de la fonction ψ mérite donc, je crois, une attention toute particulière au point de vue du problème général de l'intégration des équations aux dérivées partielles à plus de deux variables indépendantes.

Dans ce Mémoire je fais usage des notations et des méthodes que j'ai employées dans les Mémoires précédents (²).

II. — Première classification des systèmes de deux ou trois équations de Pfaff à cinq variables.

10. Considérons d'abord un système de trois équations aux diffé-

---

(¹) *Acta mathematica*, t. XIX, p. 331 et suiv.

(²) *Voir*, surtout au point de vue des méthodes, le Mémoire ayant pour titre : *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Chap. I (*Ann. de l'École Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XXV, 1908, p. 57).

rentielles totales à cinq variables

$$(1) \qquad \begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = 0, \\ \omega_3 = 0. \end{cases}$$

Les covariants bilinéaires ω'_1, ω'_2, ω'_3 de ω_1, ω_2, ω_3, dépendent, lorsqu'on y tient compte des équations (1), de deux expressions ω_4, ω_5 choisies sous la seule condition d'être linéairement indépendantes entre elles et indépendantes de ω_1, ω_2, ω_3. Cela étant, deux cas peuvent se présenter :

1° Les covariants ω'_1, ω'_2, ω'_3 sont tous nuls en tenant compte de (1); le système (1) est complètement intégrable et peut se ramener à la forme

$$\text{I.} \qquad \begin{cases} dx_1 = 0, \\ dx_2 = 0, \\ dx_3 = 0; \end{cases}$$

2° Les covariants ω'_1, ω'_2, ω'_3 ne sont pas tous nuls et l'on a

$$\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv A\omega_4\omega_5 \\ \omega'_2 &\equiv B\omega_4\omega_5 \qquad (\bmod\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3), \\ \omega'_3 &\equiv C\omega_4\omega_5 \end{aligned}$$

les coefficients A, B, C n'étant pas tous nuls. Si C, par exemple, n'est pas nul, on peut remplacer le système (1) par un système équivalent de manière que A et B deviennent nuls et C égal à 1. Il suffit pour cela de prendre pour nouveaux premiers membres des équations

$$\omega_1 - \frac{A}{C}\omega_3, \qquad \omega_2 - \frac{A}{C}\omega_3, \qquad \frac{A}{C}\omega_3.$$

On a donc les formules

$$(2) \qquad \begin{cases} \omega'_1 \equiv 0 \\ \omega_2 \equiv 0 \\ \omega'_3 \equiv \omega_4\omega_5 \end{cases} \qquad (\bmod\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3).$$

Dans ce cas là le système formé des deux premières équations est manifestement *covariant* au système donné. En tenant compte de ces deux premières équations on aura

$$\left.\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv A\ \omega_3\omega_4 + B\ \omega_3\omega_5 \\ \omega'_2 &\equiv A'\omega_3\omega_4 + B'\omega_3\omega_5 \end{aligned}\right\} \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2).$$

Plusieurs cas sont à distinguer :

a. Les coefficients A, B, A′, B′ *sont tous nuls;* le système covariant $\omega_1 = \omega_2 = 0$ est complètement intégrable ; le système donné peut, par un changement de variables, se ramener à la forme

$$\text{II.} \qquad \begin{cases} dx_1 = 0, \\ dx_2 = 0, \\ dx_3 + x_4\, dx_5 = 0. \end{cases}$$

b. Les coefficients A, B, A′, B′ *ne sont pas tous nuls, mais le déterminant* AB′ − BA′ *est nul.* Dans ce cas on peut choisir ω_1 et ω_2 de manière à avoir

$$\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv 0 && (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2), \\ \omega'_2 &\equiv \omega_3\omega_4 && (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2), \\ \omega'_3 &\equiv \omega_4\omega_5 && (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3). \end{aligned}$$

Le système covariant ne dépend que de quatre variables et l'on peut toujours le ramener à l'une des formes

$$\begin{aligned} &dx_1 = 0, \\ &dx_2 + x_3\, dx_4 = 0, \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} &dx_1 + x_2\, dx_4 = 0, \\ &dx_2 + x_3\, dx_4 = 0. \end{aligned}$$

Dans chacun des deux cas ω_3 est une combinaison linéaire de dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 et par suite la troisième équation du système peut toujours se mettre sous la forme

$$dx_3 + x_5\, dx_4 = 0.$$

On a donc les deux nouvelles formes suivantes :

$$\text{III.} \qquad \begin{cases} dx_1 = 0, \\ dx_2 + x_3\, dx_4 = 0, \\ dx_3 + x_5\, dx_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{IV.} \qquad \begin{cases} dx_1 + x_2\, dx_4 = 0, \\ dx_2 + x_3\, dx_4 = 0, \\ dx_3 + x_5\, dx_4 = 0. \end{cases}$$

c. Enfin le déterminant $AB' - BA'$ *n'est pas nul.* Dans ce cas on peut, et d'une infinité de manières, choisir ω_1, ω_2, ω_4, ω_5, de manière à avoir

$$\text{V.} \qquad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \omega_3 \omega_4 & (\text{mod}\ \omega_1,\ \omega_2), \\ \omega'_2 \equiv \omega_3 \omega_5 & (\text{mod}\ \omega_1,\ \omega_2), \\ \omega'_3 \equiv \omega_4 \omega_5 & (\text{mod}\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3). \end{cases}$$

C'est le cas général que nous examinerons plus loin.

11. Considérons maintenant un système de deux équations aux différentielles totales à cinq variables,

$$(3) \qquad \begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = 0. \end{cases}$$

On a des équations de la forme

$$\begin{matrix} \omega'_1 \equiv A\ \omega_3 \omega_4 + B\ \omega_3 \omega_5 + C\ \omega_4 \omega_5 \\ \omega'_2 \equiv A' \omega_3 \omega_4 + B' \omega_3 \omega_5 + C' \omega_4 \omega_5 \end{matrix} \qquad (\text{mod}\ \omega_1,\ \omega_2).$$

1° *Si tous les coefficients* A, B, C, A', B', C' *sont nuls*, le système (3) est complètement intégrable et peut se ramener à la forme

$$\text{I}'. \qquad \begin{cases} dx_1 = 0, \\ dx_2 = 0. \end{cases}$$

2° *Si les déterminants* $BC' - CB'$, $CA' - AC'$, $AB' - BA'$ *sont tous nuls* sans que tous leurs éléments soient nuls, on peut choisir ω_1 de manière à avoir

$$A = B = C = 0;$$

de plus on peut choisir ω_3, ω_4, ω_5 de manière à avoir

$$\omega'_2 \equiv \omega_3 \omega \qquad (\text{mod}\ \omega_1,\ \omega_2).$$

On a alors un système de deux équations qui ne dépend plus essentiellement que de quatre variables et l'on peut le mettre sous l'une des deux formes

$$\text{II}'. \qquad \begin{cases} dx_1 = 0, \\ dx_2 + x_3\, dx_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{III}'. \qquad \begin{cases} dx_1 + x_2\, dx_4 = 0, \\ dx_2 + x_3\, dx_4 = 0. \end{cases}$$

3° *Si l'un des déterminants* BC′ — CB′, CA′ — AC′, AB′ — BA′ *n'est pas nul*, par exemple AB′ — BA′, on peut choisir d'une infinité de manières ω_3, ω_4, ω_5 de manière qu'on ait

$$\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv \omega_3\omega_4 \\ \omega'_2 &\equiv \omega_3\omega_5 \end{aligned} \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2).$$

Alors le système

$$(4) \qquad \begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = 0, \\ \omega_3 = 0 \end{cases}$$

est un système covariant du système donné, et deux cas sont encore à distinguer :

a. Le système (4) *est complètement intégrable.* Si alors x_1, x_2, x_3 sont ses intégrales, le système donné est de la forme

$$\text{IV}'. \qquad \begin{cases} dx_1 + x_4\, dx_3 = 0, \\ dx_2 + x_5\, dx_3 = 0. \end{cases}$$

b. Le système (4) *n'est pas complètement intégrable.* Alors on a

$$\omega'_3 \equiv \mathrm{H}\omega_4\omega_5 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \omega_3) \qquad (\mathrm{H} \neq 0)$$

et l'on peut choisir ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 de manière à avoir $\mathrm{H} = 1$. On se ramène aux formules déjà obtenues

$$\text{V}. \qquad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \omega_3\omega_4 & (\text{mod } \omega_1, \omega_2), \\ \omega'_2 \equiv \omega_3\omega_5 & (\text{mod } \omega_1, \omega_2), \\ \omega'_3 \equiv \omega_4\omega_5 & (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \omega_3). \end{cases}$$

Dans ce cas général, il y a correspondance univoque entre les deux systèmes covariants

$$\begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = 0, \\ \omega_3 = 0. \end{cases}$$

III. — Les systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre.

12. Considérons un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre

$$r = \mathrm{R}(x, y, z, p, q, t), \qquad s = \mathrm{S}(x, y, z, p, q, t). \tag{1}$$

Un tel système peut être remplacé par le système d'équations aux différentielles totales

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= dz - p\,dx - y\,dy = 0, \\ \omega_2 &= dp - \mathrm{R}\,dx - \mathrm{S}\,dy = 0, \\ \omega_3 &= dq - \mathrm{S}\,dx - t\,dy = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Cherchons dans quel cas les covariants bilinéaires ω'_1, ω'_2, ω'_3 peuvent s'exprimer au moyen de ω_1, ω_2, ω_3 et *deux* autres combinaisons linéaires indépendantes de dx, dy, dz, dp, dq, dt. On a

$$\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \omega_3), \\ \omega'_2 &\equiv dx\,d\mathrm{R} + dy\,d\mathrm{S} \equiv dx\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}dt + \frac{d\mathrm{R}}{dy}dy\right) + dy\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t}dt + \frac{d\mathrm{S}}{dx}dx\right), \\ \omega'_3 &\equiv dx\,d\mathrm{S} + dy\,dt \equiv dx\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t}dt + \frac{d\mathrm{S}}{dy}dy\right) + dy\,dt. \end{aligned}$$

On a posé dans ces formules

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + \mathrm{R}\frac{\partial f}{\partial p} + \mathrm{S}\frac{\partial f}{\partial q}, \\ \frac{df}{dy} &= \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + \mathrm{S}\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}. \end{aligned}$$

En simplifiant, on a donc

$$\left\{\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv 0 \\ \omega'_2 &\equiv \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial t}dx\,dt + \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t}dy\,dt + \left(\frac{d\mathrm{R}}{dy} - \frac{d\mathrm{S}}{dx}\right)dx\,dy \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \omega_3). \\ \omega'_3 &\equiv \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial t}dx\,dt + dy\,dt + \frac{d\mathrm{S}}{dy}dx\,dy \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Pour que les seconds membres puissent s'exprimer au moyen de deux combinaisons linéaires ω_4, ω_5 de dx, dy, dt, il faut et il suffit que ces seconds membres soient proportionnels, ce qui donne

$$\frac{\dfrac{\partial R}{\partial t}}{\dfrac{\partial S}{\partial t}} = \frac{\dfrac{\partial S}{\partial t}}{1} = \frac{\dfrac{dR}{dy} - \dfrac{dS}{dx}}{\dfrac{dS}{dy}}. \tag{4}$$

On retrouve les conditions qui expriment que le système (1) est en involution. En posant

$$\omega_4 = dy + \frac{\partial S}{\partial t} dx,$$
$$\omega_5 = dt - \frac{dS}{dy} dx,$$

on a

$$\left.\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv 0 \\ \omega'_2 &\equiv \frac{\partial S}{\partial t}\omega_4\omega_5 \\ \omega'_3 &\equiv \omega_4\omega_5 \end{aligned}\right\} \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

et les caractéristiques du système (1) sont données par le système

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0; \tag{5}$$

il y a manifestement en effet, pour toute surface intégrale, une relation de la forme $\omega_5 = \lambda\omega_4$, ce qui prouve que toute surface intégrale est engendrée par une infinité de courbes satisfaisant au système (5).

13. Appliquons maintenant la méthode de réduction employée dans le paragraphe I. En changeant les rotations et posant

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= dz - p\,dx - q\,dy, \\
\omega_2 &= dp - R\,dx - S\,dy - \frac{\partial S}{\partial t}(dq - S\,dx - t\,dy), \\
\omega_3 &= dq - S\,dx - t\,dy, \\
\omega_4 &= dy + \frac{\partial S}{\partial t} dx, \\
\omega_5 &= dt - \frac{dS}{dy} dx,
\end{aligned}$$

on a les formules [II (2)]

$$\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv 0 \\ \omega'_2 &\equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \omega_3), \\ \omega'_3 &\equiv \omega_4\omega_5 \end{aligned}$$

avec le système covariant

$$\omega_1 = \omega_2 = 0. \tag{6}$$

Il faut voir maintenant comment, en tenant compte de $\omega_1 = \omega_2 = 0$, ω'_1 et ω'_2 dépendent de ω_3, ω_4, ω_5. D'abord le système (6) n'est pas complètement intégrable, à cause de la présence dans ω'_1 du terme $dy\,dq$ qui ne peut se réduire avec aucun autre. Deux cas seulement pourront donc se présenter : ou bien ω'_1 et ω'_2 seront proportionnels ou bien ils ne le seront pas. Or, ω'_1 ne contient pas dt ; quant à ω'_2, dt entre dans les termes suivants :

$$dt\left[-\frac{\partial R}{\partial t}dx - \frac{\partial S}{\partial t}dy - \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}(dq - S\,dx - t\,dy) + \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{\partial S}{\partial t}dy\right]$$
$$= \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}(dq - S\,dx - t\,dy)\,dt.$$

1° Si $\dfrac{\partial^2 S}{\partial t^2}$ *est nul*, ω'_1 et ω'_2 ne pourront contenir chacun que ω_3 et ω_4 ; le système (6) pourra s'exprimer au moyen de quatre variables seulement et le système donné sera réductible à l'une des deux formes

$$\begin{aligned} &dx_1 = 0, & & dx_1 + x_2\,dx_4 = 0, \\ &dx_2 + x_3\,dx_4 = 0, &\quad \text{ou} \quad & dx_2 + x_3\,dx_4 = 0, \\ &dx_3 + x_5\,dx_4 = 0, & & dx_3 + x_5\,dx_4 = 0. \end{aligned}$$

Ce cas se présente lorsque S et par suite R sont *linéaires* en t, toutes les fois donc qu'on a un système en involution de deux équations linéaires

$$s = \alpha t + \beta,$$
$$r = \alpha s + \gamma,$$

α, β, γ étant trois fonctions de x, y, z, p, q liées par deux relations.

Le système (6) devient, dans ce cas,

$$(6') \qquad \begin{cases} \omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \omega_2 = dp - \alpha\,dq - \gamma\,dx - \beta\,dy = 0. \end{cases}$$

Les coefficients de $dy\,dq$ dans ω'_1 et ω'_2 sont, en exprimant dz et dp au moyen de dx, dy, dq, les suivants :

$$\omega'_1 = dy\,dq + \ldots,$$
$$\omega'_2 = \left(\frac{\partial\beta}{\partial q} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial p} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} - q\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial p}\right) dy\,dq + \ldots.$$

Par suite, la réduction du système donné à sa forme canonique dépendra de la réduction à sa forme canonique de l'équation

$$(7) \qquad \omega_2 - \left(\frac{\partial\beta}{\partial q} + \alpha\frac{\partial\beta}{\partial p} - \frac{\partial\alpha}{\partial y} - q\frac{\partial\alpha}{\partial z} - \beta\frac{\partial\alpha}{\partial p}\right)\omega_1 = 0.$$

a. Si cette équation (7) *est complètement intégrable*, c'est qu'il existe une fonction $F(x, y, z, p, q)$ qui reste constante pour toute intégrale du système donné et, par suite, le système est équivalent à l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = a.$$

En tenant compte de cette équation on réduira l'équation

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

à sa forme normale, et l'on aura donc achevé l'intégration du système donné par une opération d'ordre 1, suivie d'une opération d'ordre 3 et une opération d'ordre 1. Le système donné sera en même temps mis sous la forme

$$dx_1 = 0,$$
$$dx_2 + x_3\,dx_4 = 0,$$
$$dx_3 + x_5\,dx_4 = 0,$$

de sorte que l'équation générale des surfaces intégrales contiendra un paramètre x_4, une constante x_1, une fonction arbitraire $x_2 = f(x_4)$ et ses deux premières dérivées

$$-x_3 = f'(x_4) \qquad \text{et} \qquad x_5 = f''(x_4).$$

b. Si l'équation (7) *n'est pas complètement intégrable*, il suffira de la réduire à sa forme normale

$$dx_1 + x_2\, dx_4 = 0,$$

par deux opérations d'ordre 3 et 1; on mettra alors par des différentiations, les équations du système sous la forme

$$dx_2 + x_3\, dx_4 = 0,$$
$$dx_3 + x_5\, dx_4 = 0;$$

l'équation générale des surfaces intégrales contiendra un paramètre x_4, une fonction arbitraire $x_1 = f(x_4)$ et ses trois premières dérivées

$$-x_2 = f'(x_4), \qquad x_3 = f''(x_4), \qquad -x_5 = f'''(x_4).$$

En résumé, *tout système en involution d'équations linéaires du second ordre à une fonction inconnue z de deux variables indépendantes x, y peut appartenir à deux types distincts :*

I. *Ou bien ce système provient d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre dépendant d'une constante arbitraire, en éliminant cette constante entre les deux équations obtenues en dérivant par rapport à x et par rapport à y. Dans ce cas l'intégration complète du système est ramenée à une opération d'ordre* 1, *suivie d'une opération d'ordre* 3 *et d'une opération d'ordre* 1 ;

II. *Ou bien, s'il n'en est pas ainsi, l'intégration complète du système est ramenée seulement à une opération d'ordre* 3 *et une opération d'ordre* 1 ; *c'est-à-dire est de la même nature que l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.*

Dans les deux cas on peut diriger les opérations de manière à avoir, en même temps que les caractéristiques, et cela sans intégration ultérieure, la manière la plus générale de les assembler de manière à obtenir une surface intégrale.

2° *Si* $\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$ *n'est pas nul*, c'est-à-dire si le système en involution n'est pas linéaire, on a des formules de la forme

$$\text{V.}\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv \omega_3\omega_4 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2),\\ \omega'_2 &\equiv \omega_3\omega_5 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2),\\ \omega'_3 &\equiv \omega_4\omega_5 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3).\end{aligned}\right.$$

Le système donné (2) rentre dans le cas général d'un système de trois équations de Pfaff réductibles à cinq variables.

14. L'intégration du système en involution, d'après la méthode classique de Cauchy généralisée, s'obtient en intégrant d'abord le système (5) d'équations différentielles des caractéristiques. Si, alors, on choisit les cinq intégrales premières qui, lorsqu'on donne à x une valeur fixe x_0, se réduisent aux valeurs initiales y_0, z_0, p_0, q_0, t_0 de y, z, p, q, t, le système de Pfaff se réduit à

$$\begin{aligned} &dz_0 - q_0\,dy_0 = 0,\\ &dp_0 - \mathrm{S}(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ t_0)\,dy_0 = 0,\\ &dq_0 - t_0\,dy_0 = 0.\end{aligned}$$

Il faut établir, entre ces cinq fonctions de x, y, z, p, q, t, quatre relations de manière à satisfaire de la manière la plus générale aux équations précédentes. On peut y arriver en posant

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha,\\ z_0 &= f(\alpha),\\ q_0 &= f'(\alpha),\\ t_0 &= f''(\alpha);\end{aligned}$$

p_0 est alors donné en fonction du paramètre α par l'équation différentielle

$$\frac{dp_0}{d\alpha} = \mathrm{S}[x_0,\ \alpha,\ f(\alpha),\ p_0,\ f'(\alpha),\ f''(\alpha)];$$

dès qu'on se donne la fonction arbitraire $f(\alpha)$, il faut encore intégrer une équation différentielle ordinaire.

Cette équation peut dans certains cas s'intégrer par une quadrature. Prenons comme exemple le système suivant, où r, s, t sont exprimés en fonction d'un même paramètre λ :

$$(8)\quad \begin{cases} r+2\psi(\lambda)-2\lambda\psi'(\lambda)+\lambda^2\psi''(\lambda)=0, \\ s+\psi'(\lambda)-\lambda\psi''(\lambda)=0, \\ t+\psi''(\lambda)=0, \end{cases}$$

où $\psi(\lambda)$ est une fonction donnée de λ. Le système de Pfaff correspondant peut se mettre sous la forme

$$(9)\quad \begin{cases} d\left(z-px-qy-\overline{\psi-\lambda\psi'+\frac{1}{2}\lambda^2\psi''}\,x^2-\overline{\psi'-\lambda\psi''}\,xy-\frac{1}{2}\psi''\,y^2\right) \\ \qquad +(y-\lambda x)\,d(q+\overline{\psi'-\lambda\psi''}\,x+\psi''y)-\frac{1}{2}\psi'''(y-\lambda x)^2\,d\lambda=0, \\ d(p+\lambda q+\overline{2\psi-\lambda\psi'}\,x+\psi'y)-(q+\overline{\psi'-\lambda\psi''}\,x+\psi''y)\,d\lambda=0, \\ d(q+\overline{\psi'-\lambda\psi''}\,x+\psi''y)-\psi'''(y-\lambda x)\,d\lambda=0. \end{cases}$$

On satisfait de la manière la plus générale à ce système en posant

$$(10)\quad \begin{cases} p+\lambda q+[2\psi(\lambda)-\lambda\psi'(\lambda)]x+\psi'(\lambda)y=f(\lambda), \\ q+[\psi'(\lambda)-\lambda\psi''(\lambda)]x+\psi''(\lambda)y=f'(\lambda), \\ \psi'''(\lambda)(y-\lambda x)=f''(\lambda), \\ z-px-qy-\left[\psi(\lambda)-\lambda\psi'(\lambda)+\frac{1}{2}\psi''^2(\lambda)\right]x^2 \\ \qquad -[\psi'(\lambda)-\lambda\psi''(\lambda)]xy-\frac{1}{2}\psi''(\lambda)y^2=-\frac{1}{2}\int\frac{f''^2(\lambda)}{\psi'''(\lambda)}\,d\lambda. \end{cases}$$

La surface intégrale la plus générale est l'enveloppe de la surface du second ordre

$$\begin{aligned} z+[\lambda f'(\lambda)-f(\lambda)]x-f'(\lambda)y+\left[\psi(\lambda)-\lambda\psi'(\lambda)+\tfrac{1}{2}\psi''^2(\lambda)\right]x^2 \\ +[\psi'(\lambda)-\lambda\psi''(\lambda)]xy+\tfrac{1}{2}\psi''(\lambda)y^2+\tfrac{1}{2}\int\frac{f''^2(\lambda)}{\psi'''(\lambda)}\,d\lambda=0, \end{aligned}$$

quand on fait varier le paramètre λ.

Nous étudierons ce système plus loin.

IV. — Les équations aux dérivées partielles du second ordre à une famille unique de caractéristiques dépendant de constantes arbitraires.

15. Toute équation aux dérivées partielles du second ordre est équivalente à un système de trois équations de Pfaff de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &dz - p\,dx - q\,dx = 0,\\ &dp - r\,dx - s\,dy = 0,\\ &dq - s\,dx - t\,dy = 0, \end{aligned}\right.$$

les huit quantités x, y, z, p, q, r, s, t étant liées par une relation. En désignant par ω_1, ω_2, ω_3 les premiers membres des équations (1), par ω_4, ω_5, ω_6, ω_7 quatre combinaisons linéaires des différentielles indépendantes entre elles et indépendantes de ω_1, ω_2, ω_3, on a des formules

$$\begin{aligned} &\omega'_1 \equiv 0\\ &\omega'_2 \equiv A\,\omega_4\omega_5 + B\,\omega_4\omega_6 + C\,\omega_4\omega_7 + D\,\omega_5\omega_6 + E\,\omega_5\omega_7 + F\,\omega_6\omega_7 \qquad (\bmod\, \omega_1, \omega_2, \omega_3).\\ &\omega'_3 \equiv A'\omega_4\omega_5 + B'\omega_4\omega_6 + C'\omega_4\omega_7 + D'\omega_5\omega_6 + E'\omega_5\omega_7 + F'\omega_6\omega_7 \end{aligned}$$

Les caractéristiques s'obtiennent en cherchant les combinaisons linéaires $u\omega_2 + v\omega_3$ telles que le covariant bilinéaire $u\omega'_2 + v\omega'_3$ s'exprime, en tenant compte des équations (1), au moyen de *deux* combinaisons linéaires seulement de ω_4, ω_5, ω_6, ω_7. On obtient ainsi l'équation

$$\begin{aligned} (uA + vA')(uF + vF') - (uB + vB')(uE + vE')&\\ + (uC + vC')(uD + vD') &= 0. \end{aligned}$$

Si cette équation du second degré en $\frac{v}{u}$ a deux racines distinctes, on peut choisir ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6, ω_7 de manière à avoir

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\omega'_1 \equiv 0\\ &\omega'_2 \equiv \omega_4\omega_5\\ &\omega'_3 \equiv \omega_6\omega_7 \end{aligned}\right\} \qquad (\bmod\, \omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Les deux familles de caractéristiques (du second ordre) sont données par les deux systèmes d'équations de Pfaff

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0,$$
$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_6 = \omega_7 = 0.$$

Si l'équation du second degré en $\frac{v}{u}$ a une racine double, on peut s'arranger de manière à obtenir les formules suivantes :

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv 0 \\ \omega'_2 &\equiv \omega_4\omega_5 \\ \omega'_3 &\equiv \omega_4\omega_6 + \omega_5\omega_7 \end{aligned}\right\} \qquad (\bmod\, \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3),$$

et la famille unique des caractéristiques est donnée par le système

$$(4)\qquad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0.$$

C'est à ce cas que nous allons nous limiter.

16. On sait que l'équation aux dérivées partielles donnée s'intègre par des équations différentielles ordinaires lorsque le système (4) admet deux combinaisons intégrables indépendantes entre elles et indépendantes des équations (1). Pour toute solution du système (1), en effet, ω_4, ω_5 sont des combinaisons linéaires des différentielles dx, dy telles que leur produit symbolique $\omega_4\omega_5$ soit identiquement nul, puisque ω_2 étant identiquement nul, son covariant ω'_2 l'est aussi. On a donc pour toute solution de (1) une relation de la forme

$$\omega_5 = \lambda\omega_4,$$

λ étant une certaine fonction de x et de y. Or, si le système (4) admet deux combinaisons intégrables, rien n'empêche de supposer que ce sont les équations

$$(5)\qquad \omega_4 = \omega_5 = 0,$$

puisque ω_4 et ω_5 ne sont, dans les formules (3), définies qu'à des combinaisons linéaires près de ω_1, ω_2, ω_3. La relation

$$\omega_5 = \lambda\omega_4$$

exprime alors que les deux intégrales du système complètement intégrable (5) sont liées par une relation. Si l'on se donne cette relation, les formules (3) se réduisent à

$$(6) \qquad \left.\begin{cases} \omega_1' \equiv 0 \\ \omega_2' \equiv 0 \\ \omega_3' \equiv \omega_4(\omega_6 + \lambda\omega_7) \end{cases}\right\} \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3),$$

qui montrent que les équations (1) peuvent s'exprimer au moyen de cinq quantités seulement. Ces cinq quantités doivent être liées par quatre relations, c'est-à-dire qu'on peut se donner arbitrairement une relation entre elles; le système (1) devient un système d'équations différentielles ordinaires entre trois fonctions inconnues d'une variable indépendante.

En réalité, l'intégration est beaucoup plus simple que ce qui précède ne semble l'indiquer. Remarquons, en effet, que si le système (4) admet deux combinaisons intégrables, il est lui-même complètement intégrable; en effet, ω_4' et ω_5' s'annulent par hypothèse en tenant compte des équations (5); les formules (3) montrent de plus que ω_1', ω_2', ω_3' s'annulent en tenant compte des équations (4). Donc les covariants des premiers membres de (4) s'annulant en tenant compte de (4), ce système (4) est complètement intégrable.

17. Il résulte de cette propriété la conséquence importante suivante :

Le système

$$(7) \qquad \begin{cases} \omega_1 = 0, \\ \omega_2 = 0 \end{cases}$$

peut s'exprimer au moyen des seules intégrales premières du système différentiel des caractéristiques; autrement dit ω_1' *et* ω_2', *lorsqu'on tient compte des équations* (7), *ne dépendent que de* ω_3, ω_4, ω_5.

On a, en effet, en vertu des équations (3)

$$(8) \qquad \left.\begin{cases} \omega_1' \equiv \omega_3(\alpha\omega_4 + \beta\omega_5 + \gamma\omega_6 + \delta\omega_7) \\ \omega_2' \equiv \omega_4\omega_5 + \omega_3(\alpha'\omega_4 + \beta'\omega_5 + \gamma'\omega_6 + \delta'\omega_7) \end{cases}\right\} \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_1,\ \omega_2).$$

Appliquons aux deux formules précédentes l'*identité fondamentale*, en ne conservant que les termes en $\omega_4\,\omega_6\,\omega_7$ et $\omega_5\,\omega_6\,\omega_7$, et en remarquant que, par hypothèse, les coefficients de $\omega_6\,\omega_7$ dans ω'_4 et ω'_5 sont nuls. On obtient immédiatement

$$\gamma = \delta = \gamma' = \delta' = 0.$$

Réciproquement, si le système (7) peut s'exprimer au moyen de cinq variables seulement, les seconds membres des formules (8) ne doivent dépendre que de trois combinaisons linéaires de $\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_7$. Or, les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ne sont pas tous nuls, sinon l'équation $\omega_1 = 0$ pourrait se ramener à la forme

$$dx_2 - x_3\,dx_1 = 0,$$

ce qui n'est pas. Les dérivées partielles de ω'_1 et ω'_2 par rapport à $\omega_3, \ldots, \omega_7$ ne devant être qu'au nombre de trois indépendantes, il faut qu'on ait

$$\gamma = \delta = \gamma' = \delta' = 0;$$

et les cinq variables au moyen desquelles s'exprime le système (7) sont les intégrales du système (4), qui est, par suite, complètement intégrable.

La condition nécessaire et suffisante pour que les équations différentielles des caractéristiques soient complètement intégrables est donc que les équations du système

$$\omega_1 = \omega_2 = 0$$

puissent, par un changement de variables, être amenées à ne plus dépendre que de cinq variables.

18. Le théorème précédent va nous permettre de déterminer toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre qui admettent une famille unique de caractéristiques dépendant de constantes arbitraires. On a, en effet,

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_1 &= dz - p\,dx - q\,dy = 0,\\ \omega_2 &= dp + u\,dq + v\,dx + w\,dy = 0,\end{aligned}\right.$$

avec l'identité

$$(10)\quad dp + u\,dp + v\,dx + w\,dy = dp - r\,dx - s\,dy + u(dq - s\,dx - t\,dy);$$

u, v, w sont donc certaines fonctions de x, y, z, p, q, r, s, t. Nous pouvons, pour la commodité des raisonnements, supposer exprimés u, v, w en fonction de x, y, z, p, q et de deux autres quantités λ, μ. Calculons ω'_1 et ω'_2 en tenant compte des équations (7). Nous avons

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &\equiv u\,dx\,dq - w\,dx\,dy + dy\,dq,\\
\omega'_2 &\equiv d\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial\lambda}dq + \frac{\partial v}{\partial\lambda}dx + \frac{\partial w}{\partial\lambda}dy\right) + d\mu\left(\frac{\partial u}{\partial\mu}dq + \frac{\partial v}{\partial\mu}dx + \frac{\partial w}{\partial\mu}dy\right)\\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} - v\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial q} + u\frac{\partial v}{\partial p}\right)dx\,dq\\
&\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + p\frac{\partial w}{\partial z} - u\frac{\partial w}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial y} - q\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial v}{\partial p}\right)dx\,dy\\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} - w\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial w}{\partial q} + u\frac{\partial w}{\partial p}\right)dy\,dq.
\end{aligned}$$

Pour que les seconds membres ne dépendent que de *trois* combinaisons linéaires de dx, dy, dq, $d\lambda$, $d\mu$, il faut et il suffit que les produits (symboliques) $\omega'_1\,\omega'_2$, $\omega'_2\,\omega'_2$ soient tous nuls. On s'en rend compte immédiatement en se reportant aux formules (8). Cela donne, en considérant $\omega'_1\,\omega'_2$,

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
&u\frac{\partial w}{\partial\lambda} - w\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{\partial v}{\partial\lambda} = 0,\\
&u\frac{\partial w}{\partial\mu} - w\frac{\partial u}{\partial\mu} + \frac{\partial v}{\partial\mu} = 0.
\end{aligned}\right.$$

En considérant $\omega'_2\,\omega'_2$, on obtient d'abord, en prenant les termes en $d\lambda\,d\mu\,dx\,dy$, $d\lambda\,d\mu\,dx\,dq$, $d\lambda\,d\mu\,dy\,dq$,

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial\lambda}}{\dfrac{\partial u}{\partial\mu}} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial\lambda}}{\dfrac{\partial v}{\partial\mu}} = \frac{\dfrac{\partial w}{\partial\lambda}}{\dfrac{\partial w}{\partial\mu}},$$

ce qui permet de supposer que u, v, w *ne dépendent que d'un paramètre* λ; on obtient ensuite

$$(12)\qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z} - v\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial q} + u\frac{\partial v}{\partial p}\right)\\
&\quad - \frac{\partial u}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + p\frac{\partial w}{\partial z} - u\frac{\partial w}{\partial p} - \frac{\partial v}{\partial y} - q\frac{\partial v}{\partial z} + w\frac{\partial v}{\partial p}\right)\\
&\quad\quad - \frac{\partial v}{\partial\lambda}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z} - w\frac{\partial u}{\partial p} - \frac{\partial w}{\partial q} + u\frac{\partial w}{\partial p}\right) = 0.
\end{aligned}$$

S'il en est ainsi on voit de plus que chacun des covariants ω'_1, ω'_2 peut être regardé comme le produit de

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} dq + \frac{\partial v}{\partial \lambda} dx + \frac{\partial w}{\partial \lambda} dy$$

par une autre expression de Pfaff. Le système covariant de trois équations est donc

$$(13) \qquad \begin{cases} \omega_1 = dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ \omega_2 = dp + u\,dq + v\,dx + w\,dy = 0, \\ \omega_3 = \dfrac{\partial u}{\partial \lambda} dq + \dfrac{\partial v}{\partial \lambda} dx + \dfrac{\partial w}{\partial \lambda} dy = 0. \end{cases}$$

Pour rester dans le cas général, supposons que $\dfrac{\partial u}{\partial \lambda}$ ne soit pas nul; alors rien n'empêche de supposer $u = \lambda$; les équations (11) peuvent alors être vérifiées en prenant

$$(14) \qquad \begin{cases} u = \lambda, \\ w = \psi'(\lambda), \\ v = 2\psi(\lambda) - \lambda\psi'(\lambda), \end{cases}$$

$\psi(\lambda)$ dépendant aussi de x, y, z, p, q. Les équations (12) deviennent dans ces équations

$$(15) \qquad \begin{cases} 2\dfrac{\partial \psi}{\partial y} + 2q\dfrac{\partial \psi}{\partial z} - 2(\psi' - \lambda\psi'')\dfrac{\partial \psi}{\partial p} - 2\psi''\dfrac{\partial \psi}{\partial q} \\ \quad = \dfrac{\partial \psi'}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \psi'}{\partial y} + (p + \lambda q)\dfrac{\partial \psi'}{\partial z} - (2\psi - \lambda\psi')\dfrac{\partial \psi'}{\partial p} - \psi'\dfrac{\partial \psi'}{\partial q}. \end{cases}$$

Les équations (14) et (15) donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système (9) puisse être amené à ne plus contenir que cinq variables.

19. Si maintenant on suppose ces conditions réalisées, le système (9) s'intégrera en établissant quatre relations entre ces cinq nouvelles variables, c'est-à-dire encore entre les variables anciennes x, y, z, p, q, λ. On aura donc y, z, p, q, λ exprimées en fonctions de x et y. L'équation $\omega_1 = 0$ montre que p et q seront les dérivées partielles du premier ordre de la fonction z, et l'équation $\omega_2 = 0$ montre qu'on

aura

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + u\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + v = 0,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + u\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + w = 0,$$

ce qui donne, en éliminant λ, une relation bien déterminée entre x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{dx^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Toutes les surfaces intégrales du système (9) satisfont donc à une équation aux dérivées partielles du second ordre bien déterminée et l'identité (10) montre que cette équation aux dérivées partielles n'est autre que l'équation donnée.

THÉORÈME. — *L'intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre admettant une famille unique de caractéristiques dépendant de constantes arbitraires revient à l'intégration d'un système de deux équations de Pfaff*

$$(9)\qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp + \lambda\,dq + [2\psi(\lambda) - \lambda\psi'(\lambda)]\,dx + \psi'(\lambda)\,dy = 0, \end{cases}$$

où $\psi(\lambda)$ est une fonction de x, y, z, p, q, λ satisfaisant à la relation (15). *De plus l'équation aux dérivées partielles s'obtient en éliminant λ entre les deux équations*

$$r + \lambda s + 2\psi(\lambda) - \lambda\psi'(\lambda) = 0,$$
$$s + \lambda t + \psi'(\lambda) = 0,$$

ou encore entre l'équation

$$r + 2\lambda s + \lambda^2 t + 2\psi(\lambda) = 0$$

et sa dérivée prise par rapport à λ.

20. *Lorsqu'on a déterminé les caractéristiques, on peut avoir les équations générales de la surface intégrale sous une forme qui contienne, d'une manière déterminée, un paramètre α, deux fonctions arbitraires $f(\alpha)$ et $\varphi(\alpha)$ et leurs dérivées $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$.* Si, en effet, on désigne par y_0, z_0, p_0, q_0, λ_0 les valeurs initiales, pour une valeur donnée x_0 de x, des fonctions y, z, p, q, λ de x qui déterminent la caractéris-

tique la plus générale, ces quantités y_0, z_0, p_0, q_0, λ_0, peuvent être regardées comme cinq intégrales premières du système différentiel des caractéristiques. On sait que le système (9) ne dépend que de ces cinq intégrales; il peut donc s'écrire, en faisant, dans les équations (3), $x = x_0$,

$$dz_0 - q_0\,dy_0 = 0,$$
$$dp_0 + \lambda_0\,dq_0 + \psi'(\lambda_0)\,dy_0 = 0,$$

et l'on aura la solution la plus générale de ce système en posant

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha, \\ z_0 &= f(\alpha), \\ q_0 &= f'(\alpha), \\ p_0 &= \varphi(\alpha), \end{aligned}$$
$$\varphi'(\alpha) + \lambda_0 f''(\alpha) + \psi'[\lambda_0, x_0, \alpha, f(\alpha), \varphi(\alpha), f'(\alpha)] = 0.$$

L'élimination de p, q, λ entre ces cinq équations donnera deux équations où entreront $x, y, z, \alpha, f(\alpha), \varphi(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha), \varphi'(\alpha)$.

L'intégration de l'équation aux dérivées partielles donnée revient donc uniquement à l'intégration du système différentiel des caractéristiques; cette intégration étant effectuée, on sait toujours associer les caractéristiques de manière qu'elles engendrent la surface intégrale la plus générale. Cette méthode est la généralisation de celle de Cauchy pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

21. Il y a évidemment une infinité de manières autres que celle qui a été indiquée plus haut pour représenter la surface intégrale la plus générale au moyen de $\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha), \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)$. Mais toutes reviennent au fond à mettre le système (9) sous la forme réduite

$$(16)\qquad \left\{ \begin{aligned} & dx_2 - x_3\,dx_1 = 0, \\ & dx_4 + A(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\,dx_3 + B(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\,dx_1 = 0; \end{aligned} \right.$$

sous cette forme on peut, en effet, poser

$$\begin{aligned} x_2 &= f(x_1), \\ x_3 &= f'(x_1), \\ x_4 &= \varphi(x_1), \end{aligned}$$
$$\varphi'(x_1) + A f''(x_1) + B = 0.$$

Supposons par exemple qu'on ait, par un procédé quelconque, trouvé une combinaison linéaire des équations (9) qui puisse se mettre sous la forme réduite

$$dx_2 - x_3\,dx_1 = 0.$$

Dans ce cas x_1, x_2, x_3 sont trois intégrales premières du système des caractéristiques; l'autre équation du système (9) ne pouvant, en effet, établir de relation linéaire entre dx_1, dx_2, dx_3, sans quoi le système (9) pourrait être ramené à ne plus dépendre que de quatre variables, le covariant de $dx_2 - x_3\,dx_1$ est

$$dx_1\,dx_3 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2),$$

et le système des caractéristiques contient, par suite, les équations

$$dx_1 = dx_3 = dx_2 - x_3\,dx_1 = 0.$$

L'autre équation du système, si l'on y regarde x_1, x_2, x_3 comme des constantes, est nécessairement complètement intégrable et, par suite, le système peut être mis sous la forme (16). Les intégrales du système des caractéristiques sont alors x_1, x_2, x_3, x_4, A (ou B), et la réduction à cette forme (16) exige trois opérations d'ordre 3, 1, 1.

Prenons comme exemple le cas où la fonction $\psi(\lambda)$ ne dépend pas de x, y, z, p, q, cas étudié par M. Goursat. La deuxième équation (9) peut s'écrire

$$d(p + \lambda q + \overline{2\psi - \lambda\psi'}\,x + \psi' y) - (q + \overline{\psi' - \lambda\psi''}\,x + \psi'' y)\,d\lambda = 0,$$

et la première s'écrit, en tenant compte de la précédente,

$$\begin{aligned} d&\left(z - px - qy - \overline{\psi - \lambda\psi' + \tfrac{1}{2}\lambda^2\psi''}\,x^2 - \overline{\psi' - \lambda\psi''}\,xy - \tfrac{1}{2}\psi'' y^2\right) \\ &+ (y - \lambda x)\,d(q + \overline{\psi' - \lambda\psi''}\,x + \psi'' y) - \tfrac{1}{2}\psi'''(y - \lambda x)^2\,d\lambda = 0. \end{aligned}$$

Les équations générales de surfaces intégrales sont

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} &z - xf(\lambda) - (y - \lambda x)f'(\lambda) \\ &\quad + \left(\psi - \lambda\psi' + \tfrac{1}{2}\lambda^2\psi''\right)x^2 + (\psi' - \lambda\psi'')xy + \tfrac{1}{2}\psi'' y^2 = \varphi(\lambda), \end{aligned} \right.$$

$$(18)\qquad \varphi'(\lambda) + (y - \lambda x)f''(\lambda) - \tfrac{1}{2}(y - \lambda x)^2\psi''' = 0,$$

où $f(\lambda)$ et $\varphi(\lambda)$ sont deux fonctions arbitraires de λ. La seconde équation se déduisant de la première en dérivant par rapport à λ, la surface intégrale est l'enveloppe de la surface du second degré (17) lorsqu'on fait varier le paramètre λ.

22. On peut remarquer, et ceci est à rapprocher de la méthode d'intégration indiquée par M. Goursat [1], que la réduction du système (9) à la forme (16) peut toujours être effectuée par trois opérations d'ordres 5, 3, 1. En effet, désignons par ρ une nouvelle variable auxiliaire et considérons l'équation

$$\omega_1 + \rho\omega_2 = 0,$$

dont le premier membre dépend des sept variables $x, y, z, p, q, \lambda, \rho$. Cette équation, d'après la forme de son covariant bilinéaire, est toujours réductible à la forme

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0;$$

on a, en effet,

$$\left.\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv \overline{\omega_3\omega_4} \\ \omega'_2 &\equiv \overline{\omega_3\omega_5} \end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_1, \omega_2),$$

et, par suite,

$$(\omega_1 + \rho\omega_2)' = \omega'_1 + \rho\omega'_2 + d\rho\,\omega_2 \equiv \overline{\omega_3}(\overline{\omega_4} + \rho\overline{\omega_5}) + \omega_2\varpi \qquad (\mathrm{mod}\,\omega_1 + \rho\omega_2),$$

ϖ désignant une combinaison linéaire de $d\rho$, ω_2, $\overline{\omega_3}$, $\overline{\omega_4}$, $\overline{\omega_5}$. Or, le système

$$dX = dY = dZ = dP = dQ = 0$$

est équivalent au système

$$\omega_1 + \rho\omega_2 = \omega_2 = \varpi = \overline{\omega_3} = \overline{\omega_4} + \rho\overline{\omega_5} = 0;$$

par suite, ω_2 est une combinaison linéaire de dX, dY, dZ, dP, dQ.

Le système donné est donc de lui-même mis sous la forme

$$\begin{aligned} dZ - P\,dX - Q\,dY \qquad\qquad &= 0, \\ dP + U\,dQ + V\,dX + W\,dY &= 0. \end{aligned}$$

---

[1] E. Goursat, *Leçons sur l'intégration*, etc., t. I, nos 94 et suiv., p. 208.

Supposons par exemple que X dépende effectivement de ρ et choisissons pour ρ une fonction de x, y, z, p, q, λ qui annule X; soient Y_0, Z_0, P_0, Q_0, U_0, W_0 ce que deviennent les fonctions Y, Z, P, Q, U, W. Le système (9), avec ce choix de ρ, est bien mis sous la forme

$$\begin{aligned} &dZ_0 - Q_0\,dY_0 = 0, \\ &dP_0 + U_0\,dQ_0 + W_0\,dY_0 = 0, \end{aligned}$$

identique à la forme (16).

Il résulterait donc de là, que l'*intégration du système différentiel des caractéristiques et la détermination de la loi suivant laquelle doivent être associées les caractéristiques, exigent au plus trois opérations d'ordre* 5, 3, 1, *c'est-à-dire un problème du même ordre de difficulté que l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre à trois variables indépendantes.*

23. En réalité, la détermination des caractéristiques peut *toujours* être ramenée à des opérations plus simples, *en général*, même elle ne dépend que de *différentiations*. Mais il est nécessaire auparavant d'établir, conformément à ce qui a été fait au paragraphe I, une première classification des équations en question.

Il résulte de la forme du système (9) et de ce qui a été vu au paragraphe I, qu'on a à distinguer d'abord deux grandes catégories, suivant que le système (9) peut se ramener à la forme IV′ ou non (§ I).

1° *Équations de Monge-Ampère.* — Pour que le système (9) soit réductible à la forme IV, il faut et il suffit que le système covariant (13) soit complètement intégrable, et pour cela il faut et il suffit que le covariant $\overline{\omega_3'}$ ne dépende pas de $d\lambda$; or

$$\begin{aligned} \overline{\omega_3} &= dq + (\psi' - \lambda\psi'')\,dx + \psi''\,dy, \\ \overline{\omega_3'} &= \psi'''\,d\lambda(dy - \lambda\,dx) + \ldots. \end{aligned}$$

Le système rentrera donc dans cette première catégorie si $\psi(\lambda)$ est un polynome entier en λ du second degré au plus

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{2}C\lambda^2 + B\lambda + \frac{1}{2}A,$$

où A, B, C sont des fonctions de x, y, z, p, q satisfaisant à certaines conditions fournies par les formules (15).

Dans ce cas l'équation aux dérivées parallèles est de la forme

$$(r+A)(t+C)-(s+B)^2=0;$$

c'est une équation de Monge-Ampère. L'intégration du système complètement intégrable (13)

$$\begin{aligned} dz-p\,dx-q\,dy&=0,\\ dp+A\,dx+B\,dy&=0,\\ dq+B\,dx+C\,dy&=0 \end{aligned}$$

permet, par des différentiations, de mettre le système (9) sous la forme

$$\begin{aligned} dx_2-x_4\,dx_1&=0,\\ dx_3-x_5\,dx_1&=0, \end{aligned}$$

et les équations générales de la surface intégrale sont

$$\begin{aligned} x_2&=f(x_1), & x_4&=f'(x_1),\\ x_3&=\varphi(x_1), & x_5&=\varphi'(x_1). \end{aligned}$$

On a donc ici trois opérations d'ordre 3, 2, 1.

2° *Cas général.* — Si $\psi'''(\lambda)$ n'est pas nul, on a une équation qui n'est pas de la forme dite de *Monge-Ampère*, et les covariants des premiers membres du système (13) sont de la forme

$$\begin{aligned} \omega'_1&\equiv\overline{\omega_3\omega_4} & &(\bmod\,\omega_1,\omega_2),\\ \omega'_2&\equiv\overline{\omega_3\omega_5} & &(\bmod\,\omega_1,\omega_2),\\ \overline{\omega'_3}&\equiv\overline{\omega_4\omega_5} & &(\bmod\,\omega_1,\omega_2,\omega_3). \end{aligned}$$

Nous appellerons ces équations les *équations de M. Goursat.*

Dans ce cas, comme la suite du Mémoire le montrera, l'intégration du système différentiel des caractéristiques exige au plus l'intégration de systèmes d'équations différentielles de Lie, dont la solution générale se déduit d'une solution particulière quelconque par les transformations d'un groupe fini, et ce groupe est au plus à quatorze paramètres.

Dans le cas général les caractéristiques sont connues par de simples différentiations.

24. Remarquons enfin que, dans le cas général, le système covariant

$$\begin{aligned} &dz - p\,dx - q\,dy && = 0, \\ &dp + \lambda\,dq + (2\psi - \lambda\psi')\,dx + \psi'\,dy && = 0, \\ &dq + (\psi' - \lambda\psi'')\,dx + \psi''\,dy && = 0 \end{aligned}$$

est équivalent à un système en involution non linéaire de deux équations aux dérivées partielles du second ordre. Ce système s'obtient en éliminant λ entre l'équation

$$r + 2\lambda s + \lambda^2 t + 2f(\lambda) = 0$$

et ses deux premières dérivées. C'est d'ailleurs le système en involution non linéaire le plus général.

Nous avons donc ainsi établi une correspondance entre les équations de M. Goursat, de Monge-Ampère et les systèmes en involution non linéaires de deux équations du second ordre. Géométriquement, la correspondance est simple. Si l'on regarde, en effet, x, y, z, p, q comme des paramètres ; r, s, t comme les coordonnées rectilignes d'un point, les équations aux dérivées partielles du second ordre de M. Goursat représentent des surfaces développables ; les systèmes en involution correspondants en représentent les arêtes de rebroussement. Les caractéristiques sont les mêmes pour une équation de M. Goursat et le système en involution correspondant.

V. — Équivalence des systèmes en involution et des équations de M. Goursat.

25. Dans les deux paragraphes précédents nous avons montré que tout système en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre pouvait se ramener à un système de trois équations de Pfaff à cinq variables de l'un des types III, IV, V (§ II). Nous avons montré, de même, que toute équation à une seule famille de caractéristiques dépendant de constantes arbitraires pouvait se ramener à

un système de deux équations de Pfaff à cinq variables de l'un des types IV', V (§ II). Dans les deux cas les cinq variables sont les paramètres des caractéristiques.

Ces théorèmes admettent des réciproques.

Prenons d'abord un système de trois équations de Pfaff à cinq variables x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 de l'un des types III, IV ou V. On a

$$\left.\begin{array}{l} \omega'_1 \equiv 0 \\ \omega'_2 \equiv 0 \\ \omega'_3 \equiv \omega_4\omega_5 \end{array}\right\} \quad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

Introduisons une variable auxiliaire x_6 et considérons l'équation

$$(1) \qquad \omega_1 + x_6\omega_2 = 0.$$

Comme par hypothèse le système $\omega_1 = \omega_2 = 0$ n'est pas complètement intégrable (sans quoi on serait dans le type II), l'équation (1) est réductible à la forme normale

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

où x, y, z, p, q sont des fonctions de $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. Or, la forme du covariant bilinéaire de $\omega_1 + x_6\omega_2$ montre que le système

$$dx = dy = dz = dp = dq = 0,$$

est équivalent au système

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \overline{\omega_4} = dx_6 + \ldots = 0;$$

par suite, les équations $\omega_2 = \omega_3 = 0$ peuvent être mises sous la forme

$$\begin{array}{l} dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s'\,dx - t\,dy = 0, \end{array}$$

et l'on a $s' = s$ sans quoi le covariant bilinéaire de $\omega_1 + x_6\omega_2$ ne serait pas nul en tenant compte de $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$.

Comme r, s, t sont des fonctions de $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, on voit que les huit quantités x, y, z, p, q, r, s, t sont liées par deux relations.

Le système donné, qui a été mis sous la forme

$$(2)\qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp - r\,dx - s\,dy = 0, \\ dq - s\,dx - t\,dy = 0, \end{cases}$$

est donc équivalent à un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre et ce système (2) est évidemment en involution puisqu'on peut, par un changement de variables, le ramener à ne contenir que cinq variables.

Prenons de même un système quelconque de deux équations de Pfaff à cinq variables de l'un des types IV′ ou V. Le même raisonnement montre que l'équation

$$\omega_1 + x_6\omega_2 = 0$$

peut être ramenée à la forme normale

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

et que le système peut être mis sous la forme

$$\begin{aligned} &dz - p\,dx - q\,dy &&= 0, \\ &dp + u\,dq + v\,dx + w\,dy &&= 0, \end{aligned}$$

où x, y, z, p, q, u, v, w sont des fonctions de $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$. On retrouve bien le système de Pfaff associé à une équation aux dérivées partielles du second ordre à une famille unique de caractéristiques dépendant de constantes arbitraires.

26. *Convenons d'appeler* équivalents *deux systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre* si l'on peut passer du système de Pfaff correspondant au premier au système de Pfaff correspondant au second par un changement de variables; autrement dit *si l'on peut établir entre les caractéristiques (du second ordre) de l'un des systèmes et les caractéristiques de l'autre une correspondance telle qu'à toute famille de caractéristiques du premier système engendrant une surface intégrale corresponde une famille de caractéristiques du second système engendrant également une surface intégrale.*

Nous allons démontrer le théorème important suivant :

THÉORÈME. — *Pour que deux systèmes en involution soient équivalents il faut et il suffit qu'on puisse passer de l'un à l'autre par une transformation de contact. De plus, si une correspondance entre les caractéristiques des deux systèmes assure l'équivalence de ces deux systèmes, elle est fournie par une transformation de contact bien déterminée transformant les deux systèmes l'un dans l'autre et réciproquement.*

Il est bien évident d'abord que si une transformation de contact transforme deux systèmes en involution l'un dans l'autre, ces deux systèmes sont équivalents et la transformation de contact établit entre leurs caractéristiques une correspondance jouissant de la propriété indiquée.

Inversement soient deux systèmes équivalents. A chacun d'eux correspond un système de trois équations de Pfaff à cinq variables, lequel admet lui-même un système covariant de deux équations de Pfaff à cinq (ou quatre) variables. Soit

$$(3)\qquad \begin{cases} \omega_1 \equiv a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_5\,dx_5 = 0, \\ \omega_2 \equiv b_1\,dx_1 + b_2\,dx_2 + \ldots + b_5\,dx_5 = 0, \\ \omega_3 \equiv c_1\,dx_1 + c_2\,dx_2 + \ldots + c_5\,dx_5 = 0 \end{cases}$$

le système de Pfaff correspondant au premier système en involution, le système

$$(3')\qquad \omega_1 = \omega_2 = 0$$

étant covariant. Soit, de même,

$$(4)\qquad \begin{cases} \Omega_1 \equiv A_1\,dX_1 + A_2\,dX_2 + \ldots + A_5\,dX_5 = 0, \\ \Omega_2 \equiv B_1\,dX_1 + B_2\,dX_2 + \ldots + B_5\,dX_5 = 0, \\ \Omega_3 \equiv C_1\,dX_1 + C_2\,dX_2 + \ldots + C_5\,dX_5 = 0 \end{cases}$$

le système de Pfaff correspondant au second système en involution, le système

$$(4')\qquad \Omega_1 = \Omega_2 = 0$$

étant covariant.

Par hypothèse il existe une transformation

$$X_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5), \tag{5}$$

faisant passer des équations (3) aux équations (4) et, par suite, aussi des équations (3′) aux équations (4′).

Cela étant, on a deux identités de la forme

$$\begin{aligned} dz - p\,dx - q\,dy &\equiv u\omega_1 + v\omega_2, \\ dZ - P\,dX - Q\,dY &\equiv U\Omega_1 + V\Omega_2. \end{aligned}$$

La quantité $\frac{v}{u}$ est une fonction de x, y, z, p, q, t, et cette fonction est indépendante de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; sinon, en effet, x, y, z, p, q seraient des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_5$, c'est-à-dire des intégrales premières du système différentiel des caractéristiques.

De même $X_1, X_2, \ldots, X_5, \frac{V}{U}$ sont des fonctions indépendantes de X, Y, Z, P, Q, T.

Il en résulte que la transformation définie par les formules

$$\left\{ \begin{aligned} & X_i = f_i(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \qquad (i = 1, 2, \ldots, 5), \\ & \frac{V}{U} = \frac{v}{u}, \end{aligned} \right. \tag{6}$$

transforme l'équation

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

dans l'équation

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = 0.$$

Les formules (6) donnent donc pour X, Y, Z, P, Q des fonctions des seules quantités x, y, z, p, q, et ces fonctions définissent une *transformation de contact* transformant entre eux les deux systèmes en involution et établissant entre leurs caractéristiques la correspondance considérée (5).

C. Q. F. D.

27. En particulier, le groupe des transformations effectuées sur l'ensemble des caractéristiques d'un système en involution donné et qui laissent invariante la loi suivant laquelle il faut associer ces caracté-

ristiques pour engendrer une surface intégrale, est *isomorphe* au groupe des transformations de contact qui laissent invariant le système donné.

Nous avons vu au paragraphe II que les systèmes de Pfaff, correspondant à un système en involution *linéaire*, admettaient seulement deux formes réduites III et IV (§ II).

Par suite, *tous les systèmes en involution linéaires qui admettent une intégrale intermédiaire du premier ordre, dépendant d'une constante arbitraire, dérivent de l'un d'entre eux par une infinité de transformations de contact.*

Tous les systèmes en involution linéaire qui ne rentrent pas dans le type précédent se ramènent à l'un d'entre eux par des transformations de contact, et chacun d'entre eux admet un groupe de transformations de contact isomorphe au groupe des transformations de contact du plan.

Au contraire, comme nous le verrons plus loin, un système en involution non linéaire ne peut admettre qu'un groupe fini de transformations de contact, dépendant de quatorze paramètres au plus.

28. Ce qui vient d'être dit pour les systèmes en involution peut s'étendre aux équations du second ordre à une famille unique de caractéristiques dépendant de constantes arbitraires. L'équivalence se définit de la même manière et le théorème d'après lequel l'équivalence peut toujours être considérée comme fournie par une transformation de contact est encore vrai et s'établit d'une manière identique.

Il en résulte que *deux équations de Monge-Ampère dont les caractéristiques (du second ordre) confondues dépendent de constantes arbitraires sont toujours transformables l'une dans l'autre par une transformation de contact, chacune d'elles admettant un groupe de transformations de contact isomorphe au groupe général des transformations ponctuelles de l'espace.*

Les équations de M. Goursat n'admettent jamais, comme les systèmes en involution qui leur sont associés, qu'un groupe fini de transformation de contact.

Remarquons, en terminant ce sujet, que dans d'autres cas plus généraux on peut avoir *équivalence*, au sens indiqué plus haut, sans que cette équivalence puisse toujours être fournie par une transformation de contact. C'est ainsi que les deux systèmes en involution

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = 0$$

et

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} = 0$$

sont *équivalents* sans qu'on puisse passer de l'un à l'autre par une transformation de contact.

VI. — Les systèmes généraux de deux ou trois équations de Pfaff à cinq variables. Les formes biquadratiques covariantes.

29. Soient maintenant trois expressions de Pfaff ω_1, ω_2, ω_3 à cinq ou même un plus grand nombre de variables, satisfaisant aux conditions

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \omega'_1 \equiv \omega_3\omega_4 & (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2), \\ \omega'_2 \equiv \omega_3\omega_5 & (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2), \\ \omega'_3 \equiv \omega_4\omega_5 & (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \omega_3), \end{array}\right.$$

où ω_4, ω_5 désignent deux nouvelles expressions de Pfaff indépendantes entre elles et indépendantes de ω_1, ω_2, ω_3. En général, deux systèmes de cette nature ne sont pas équivalents, c'est-à-dire qu'il est impossible de passer de l'un à l'autre par un changement de variables. Nous nous proposons de chercher les conditions d'équivalence de deux de ces systèmes, ou, ce qui revient au même, d'établir le système complet des invariants du système donné.

Conformément à la méthode générale que j'ai exposée dans un Mémoire précédent, nous considérerons cinq expressions $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}_3$, $\overline{\omega}_4$, $\overline{\omega}_5$, qui se déduiront de ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 par la substitution linéaire la plus générale qui laisse invariante les formules (1). Supposons, en particulier, qu'on ait

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\omega}_4 \equiv u_1\omega_4 + u_2\omega_5 \\ \overline{\omega}_5 \equiv u_3\omega_4 + u_4\omega_5 \end{array}\right\} \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

on aura

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \overline{\omega}_3 &= (u_1 u_4 - u_2 u_3)\,\omega_3 + u_5\omega_1 + u_6\omega_2,\\ \overline{\omega}_1 &= (u_1 u_4 - u_2 u_3)(u_1\omega_1 + u_2\omega_2),\\ \overline{\omega}_2 &= (u_1 u_4 - u_2 u_3)(u_3\omega_1 + u_4\omega_2). \end{aligned}\right.$$

On aura, par suite, en prenant les covariants bilinéaires, des formules telles que les suivantes :

$$\begin{aligned} \overline{\omega}'_1 &= \overline{\omega}_1(2\varpi_1 + \varpi_4) + \overline{\omega}_2\varpi_2 + \overline{\omega}_3\overline{\omega}_4,\\ \overline{\omega}'_2 &= \overline{\omega}_1\varpi_3 + \overline{\omega}_2(\varpi_1 + 2\varpi_4) + \overline{\omega}_3\overline{\omega}_5,\\ \overline{\omega}'_3 &= \overline{\omega}_1\varpi_5 + \overline{\omega}_2\varpi_6 + \overline{\omega}_4\overline{\omega}_5 + \mathrm{A}\,\overline{\omega}_3\overline{\omega}_4 + \mathrm{B}\,\overline{\omega}_3\overline{\omega}_5 + \overline{\omega}_3(\varpi_1 + \varpi_4), \end{aligned}$$

où ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3, ϖ_4, ϖ_5, ϖ_6 sont six nouvelles expressions de Pfaff linéaires en du_1, du_2, $\ldots$, du_6, $\overline{\omega}_1$, $\ldots$, $\overline{\omega}_5$, et où les coefficients des termes non écrits en $\overline{\omega}_i\,\overline{\omega}_k$ ont été réduits à zéro par un choix convenable des ϖ. Quant aux coefficients A et B on peut aussi les supposer réduits à zéro en prenant $\overline{\omega}_4 + \mathrm{B}\overline{\omega}_3$, $\overline{\omega}_5 - \mathrm{A}\overline{\omega}_3$ pour nouvelles expressions $\overline{\omega}_4$ $\overline{\omega}_5$.

En enlevant les traits horizontaux qui surmontent les ω, on a donc les formules

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_1(2\varpi_1 + \varpi_4) + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\omega_4,\\ \omega'_2 &= \omega_1\varpi_3 + \omega_2(\varpi_1 + 2\varpi_4) + \omega_3\omega_5,\\ \omega'_3 &= \omega_1\varpi_5 + \omega_2\varpi_6 + \omega_3(\varpi_1 + \varpi_4) + \omega_4\omega_5. \end{aligned}\right.$$

30. En appliquant l'identité fondamentale aux formules précédentes, à savoir

$$\begin{aligned} &\omega'_1(2\varpi_1 + \varpi_4) + \omega'_2\varpi_2 + \omega'_3\omega_4 - \omega_1(2\varpi'_1 + \varpi'_4) - \omega_2\varpi'_2 - \omega_3\omega'_4 &&= 0,\\ &\omega'_1\varpi_3 + \omega'_2(\varpi_1 + 2\varpi_4) + \omega'_3\omega_5 - \omega_1\varpi'_3 - \omega_2(\varpi'_1 + 2\omega'_4) - \omega_3\omega'_5 &&= 0,\\ &\omega'_1\varpi_5 + \omega'_2\varpi_6 + \omega'_3(\varpi_1 + \varpi_4) - \omega_1\varpi'_5 - \omega_2\varpi'_6 - \omega_3(\varpi'_1 + \varpi'_4) + \omega'_4\omega_5 - \omega_4\omega'_5 &&= 0, \end{aligned}$$

on obtient, en particulier,

$$(3')\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_4 &= \omega_1\varpi_7 + \omega_2\varpi_8 + \frac{4}{3}\omega_3\varpi_6 + \omega_4\varpi_1 + \omega_5\varpi_2 + \alpha\omega_3\omega_4 + \beta\omega_3\omega_5,\\ \omega'_5 &= \omega_1\varpi_9 + \omega_2\varpi_{10} - \frac{4}{3}\omega_3\varpi_5 + \omega_4\varpi_3 + \omega_5\varpi_4 + \gamma\omega_3\omega_4 - \alpha\omega_3\omega_5. \end{aligned}\right.$$

On vérifie sans peine que si l'on prend $\omega_4 - \frac{3}{10}\alpha\omega_1 - \frac{3}{10}\beta\omega_2$ et

$\omega_5 - \frac{3}{10}\gamma\omega_1 + \frac{3}{10}\alpha\omega_2$ pour nouvelles expressions ω_4 et ω_5 et si l'on modifie en conséquence les ϖ, les nouveaux coefficients α et β deviennent nuls. On peut donc supposer qu'on a, en même temps que les formules (3), les formules suivantes :

$$(4) \quad \begin{cases} \omega'_4 = \omega_1\varpi_7 + \omega_2\varpi_8 + \frac{4}{3}\omega_3\varpi_6 + \omega_4\varpi_1 + \omega_5\varpi_2, \\ \omega'_5 = \omega_1\varpi_9 + \omega_2\varpi_{10} - \frac{4}{3}\omega_3\varpi_5 + \omega_4\varpi_3 + \omega_5\varpi_4. \end{cases}$$

L'identité fondamentale appliquée aux formules (3) donne

$$\left.\begin{array}{ll} 2\varpi'_1 + \varpi'_4 & \equiv \varpi_3\varpi_2 - \omega_4\varpi_5 + \omega_3\varpi_7 \\ \varpi'_2 & \equiv \varpi_2(\varpi_1 - \varpi_4) - \omega_4\varpi_6 + \omega_3\varpi_8 \\ \varpi'_3 & \equiv (\varpi_1 - \varpi_4)\varpi_3 - \omega_5\varpi_5 + \omega_3\varpi_9 \\ \varpi'_1 + 2\varpi'_4 & \equiv \varpi_2\varpi_3 - \omega_5\varpi_6 + \omega_3\varpi_{10} \end{array}\right\} \quad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2),$$

$$\varpi'_5 \equiv \varpi_1\varpi_5 + \varpi_3\varpi_6 + \omega_4\varpi_9 - \omega_5\varpi_7 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

$$\varpi'_6 \equiv \varpi_2\varpi_5 + \varpi_4\varpi_6 + \omega_4\varpi_{10} - \omega_5\varpi_8 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \omega_3).$$

De ces formules on déduit, en appliquant l'identité fondamentale aux formules (4) et y négligeant les termes en ω_1 et ω_2,

$$\omega_3\omega_4(\varpi_7 - \varpi_{10}) + 2\omega_3\omega_5\varpi_8 \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2),$$

$$2\omega_3\omega_4\varpi_9 + \omega_3\omega_5(\varpi_{10} - \varpi_7) \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2).$$

On déduit de là que $\varpi_7, \varpi_{10}, \varpi_8, \varpi_9$ sont des combinaisons linéaires des ω, et l'on vérifie sans peine qu'on peut, en ajoutant au besoin à $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4, \varpi_5, \varpi_6, \varpi_7$ des combinaisons linéaires des ω, faire en sorte qu'on ait

$$\varpi_8 = \varpi_9 = 0, \qquad \varpi_{10} = \varpi_7.$$

31. On a finalement les formules suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} \omega'_1 = \omega_1(2\varpi_1 + \varpi_4) + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\omega_4, \\ \omega'_2 = \omega_1\varpi_3 + \omega_2(\varpi_1 + 2\varpi_4) + \omega_3\omega_5, \\ \omega'_3 = \omega_1\varpi_5 + \omega_2\varpi_6 + \omega_3(\varpi_1 + \varpi_4) + \omega_4\omega_5, \\ \omega'_4 = \omega_1\varpi_7 + \frac{4}{3}\omega_3\varpi_6 + \omega_4\varpi_1 + \omega_5\varpi_2, \\ \omega'_5 = \omega_2\varpi_7 - \frac{4}{3}\omega_3\varpi_5 + \omega_4\varpi_3 + \omega_5\varpi_4, \end{cases}$$

où les ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 se déduisent des anciennes expressions données par la substitution linéaire la plus générale d'un groupe à sept paramètres. A chacune des expressions ϖ correspond une transformation infinitésimale de ce groupe, de sorte que les transformations infinitésimales sont exprimées par les formules suivantes :

$$
(6)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\delta\omega_1 &= (2e_1 + e_4)\omega_1 + e_2\omega_2,\\
\delta\omega_2 &= e_3\omega_1 + (e_1 + 2e_4)\omega_2,\\
\delta\omega_3 &= e_5\omega_1 + e_6\omega_2 + (e_1 + e_4)\omega_3,\\
\delta\omega_4 &= e_7\omega_1 + \frac{4}{3}e_6\omega_3 + e_1\omega_4 + e_2\omega_5,\\
\delta\omega_5 &= e_7\omega_2 - \frac{4}{3}e_5\omega_3 + e_3\omega_4 + e_4\omega_5.
\end{aligned}
\right.
$$

Toute transformation infinitésimale de ce groupe, effectuée sur les ω, a comme conséquence une transformation infinitésimale effectuée sur les ϖ, et l'on a

$$
(7)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\delta\varpi_1 &= -de_1 + e_2\varpi_3 - e_3\varpi_2 + \frac{1}{3}e_7\omega_3 - \frac{2}{3}e_5\omega_4 + \frac{1}{3}e_6\omega_5 + \eta_1\omega_1,\\
\delta\varpi_2 &= -de_2 + (e_1 - e_4)\varpi_2 - e_2(\varpi_1 - \varpi_4) - e_6\omega_4 + \eta_2\omega_1,\\
\delta\varpi_3 &= -de_3 + (e_4 - e_1)\varpi_3 - e_3(\varpi_4 - \varpi_1) - e_5\omega_5 + \eta_1\omega_2,\\
\delta\varpi_4 &= -de_4 + e_3\varpi_2 - e_2\varpi_3 + \frac{1}{3}e_7\omega_3 + \frac{1}{3}e_5\omega_4 - \frac{2}{3}e_6\omega_5 + \eta_2\omega_2,\\
\delta\varpi_5 &= -de_5 + e_5\varpi_1 - e_1\varpi_5 + e_6\varpi_3 - e_3\varpi_6 - e_7\omega_5 + \eta_1\omega_3,\\
\delta\varpi_6 &= -de_6 + e_5\varpi_2 - e_2\varpi_5 + e_6\varpi_4 - e_4\varpi_6 + e_7\varpi_4 + \eta_2\omega_3,\\
\delta\varpi_7 &= -de_7 + e_7(\varpi_1 + \varpi_4) - (e_1 + e_4)\varpi_7\\
&\quad + \frac{4}{3}e_6\varpi_5 - \frac{4}{3}e_5\varpi_6 + \eta_1\omega_4 + \eta_2\omega_5.
\end{aligned}
\right.
$$

La présence, dans les seconds membres des formules (7), des termes en η_1 et η_2 provient de ce qu'on peut, sans changer les formules (5), remplacer respectivement

$$\varpi_1,\quad \varpi_2,\quad \varpi_3,\quad \varpi_4,\quad \varpi_5,\quad \varpi_6,\quad \varpi_7$$

par

$$\varpi_1 + v_1\omega_1,\quad \varpi_2 + v_2\omega_1,\quad \varpi_3 + v_1\omega_2,\quad \varpi_4 + v_2\omega_2,$$
$$\varpi_5 + v_1\omega_3,\quad \varpi_6 + v_2\omega_3,\quad \varpi_7 + v_1\omega_4 + v_2\varpi_5.$$

Ce sont d'ailleurs ces dernières quantités, dépendant des arbitraires v_1 et v_2, que nous désignerons par les lettres ϖ.

32. Si l'on applique l'identité fondamentale aux formules (5), on obtient des identités qui permettent de calculer les sept covariants ϖ' au moyen des ω, des ϖ et de deux nouvelles expressions de Pfaff χ_1 et χ_2 dépendant de dv_1, de dv_2, des ω et des ϖ.

On obtient, après un calcul un peu long, mais qui n'offre aucune difficulté,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}
\varpi'_1 &= \varpi_3\varpi_2 + \frac{1}{3}\omega_3\varpi_7 - \frac{2}{3}\omega_4\varpi_5 + \frac{1}{3}\omega_5\varpi_6 + \omega_1\chi_1 + 2B_2\omega_1\omega_3 + B_3\omega_2\omega_3\\
&\qquad + 2A_2\omega_1\omega_4 + 2A_3\omega_1\omega_5 + A_3\omega_2\omega_4 + A_4\omega_2\omega_5,\\
\varpi'_2 &= \varpi_2(\varpi_1 - \varpi_4) - \omega_4\varpi_6 + \omega_1\chi_2 + B_4\omega_2\omega_3 + A_4\omega_2\omega_4 + A_5\omega_2\omega_5,\\
\varpi'_3 &= \varpi_3(\varpi_4 - \varpi_1) - \omega_5\varpi_5 + \omega_2\chi_1 - B_1\omega_1\omega_3 - A_1\omega_1\omega_4 - A_2\omega_1\omega_5,\\
\varpi'_4 &= \varpi_2\varpi_3 + \frac{1}{3}\omega_3\varpi_7 + \frac{1}{3}\omega_4\varpi_5 - \frac{2}{3}\omega_5\varpi_6 + \omega_2\chi_2 - B_2\omega_1\omega_3 - 2B_3\omega_2\omega_3\\
&\qquad - A_2\omega_1\omega_4 - A_3\omega_1\omega_5 - 2A_3\omega_2\omega_4 - 2A_4\omega_2\omega_5,\\
\varpi'_5 &= \varpi_1\varpi_5 + \varpi_3\varpi_6 - \omega_5\varpi_7 + \omega_3\chi_1 + \frac{9}{32}D_1\omega_1\omega_2 + \frac{9}{8}C_1\omega_1\omega_3 + \frac{9}{8}C_2\omega_2\omega_3\\
&\qquad + A_2\omega_3\omega_4 + A_3\omega_3\omega_5 + \frac{3}{4}B_1\omega_1\omega_4 + \frac{3}{4}B_2(\omega_1\omega_5 + \omega_2\omega_4) + \frac{3}{4}B_3\omega_2\omega_5,\\
\varpi'_6 &= \varpi_2\varpi_5 + \varpi_4\varpi_6 + \omega_4\varpi_7 + \omega_3\chi_2 + \frac{9}{32}D_2\omega_1\omega_2 + \frac{9}{8}C_2\omega_1\omega_3 + \frac{9}{8}C_3\omega_2\omega_3\\
&\qquad - A_3\omega_3\omega_4 - A_4\omega_3\omega_5 + \frac{3}{4}B_2\omega_1\omega_4 + \frac{3}{4}B_3(\omega_1\omega_5 + \omega_2\omega_4) + \frac{3}{4}B_4\omega_2\omega_5,\\
\varpi'_7 &= \frac{4}{3}\varpi_5\varpi_6 + (\varpi_1 + \varpi_4)\varpi_7 + \omega_4\chi_1 + \omega_5\chi_2 + \frac{9}{64}E\omega_1\omega_2 - \frac{3}{8}D_1\omega_1\omega_3\\
&\qquad - \frac{3}{8}D_2\omega_2\omega_3 + 2A_3\omega_4\omega_5 - B_2\omega_3\omega_4 + B_3\omega_3\omega_5.
\end{aligned}\right.$$

Les coefficients A, B, C, D, E qui s'introduisent ainsi dans ces formules sont des fonctions des variables primitives, des sept paramètres u et des deux paramètres v. Quand on effectue sur les ω et les ϖ la substitution linéaire la plus générale du groupe défini par les formules (6) et (7), ces coefficients sont transformés par un groupe isomorphe et l'on obtient sans difficulté les formules suivantes, qui donnent les transformations infinitésimales de ce groupe :

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\delta A_1 &= -4e_1A_1 - 4e_3A_2,\\
\delta A_2 &= -\ e_2A_1 - (3e_1+e_4)A_2 - 3e_3A_3,\\
\delta A_3 &= -2e_2A_2 - 2(e_1+e_4)A_3 - 2e_3A_4,\\
\delta A_4 &= -3e_2A_3 - (e_1+3e_4)A_4 - e_3A_5,\\
\delta A_5 &= -4e_2A_4 - 4e_4A_5,\\
\delta B_1 &= -(4e_1+e_4)B_1 - 3e_3B_2 - \frac{4}{3}e_6A_1 + \frac{4}{3}e_5A_2,\\
\delta B_2 &= -e_2B_1 - (3e_1+2e_4)B_2 - 2e_3B_3 - \frac{4}{3}e_6A_2 + \frac{4}{3}e_5A_3,\\
\delta B_3 &= -2e_2B_2 - (2e_1+3e_4)B_3 - e_3B_4 - \frac{4}{3}e_6A_3 + \frac{4}{3}e_5A_4,\\
\delta B_4 &= -3e_2B_3 - (e_1+4e_4)B_4 - \frac{4}{3}e_6A_4 + \frac{4}{3}e_5A_5;\\
\delta C_1 &= -2(2e_1+e_4)C_1 - 2e_3C_2 - \frac{8}{3}e_6B_1 + \frac{8}{3}e_5B_2,\\
\delta C_2 &= -e_2C_1 - 3(e_1+e_4)C_2 - e_3C_3 - \frac{8}{3}e_6B_2 + \frac{8}{3}e_5B_3,\\
\delta C_3 &= -2e_2C_2 - 2(e_1+2e_4)C_3 - \frac{8}{3}e_6B_3 + \frac{8}{3}e_5B_4,\\
\delta D_1 &= -(4e_1+3e_4)D_1 - e_3D_2 - 4e_6C_1 + 4e_5C_2,\\
\delta D_2 &= -e_2D_1 - (3e_1+4e_4)D_2 - 4e_6C_2 + 4e_5C_3,\\
\delta E\ &= -4(e_1+e_4)E + \frac{16}{3}e_6D_1 - \frac{16}{3}e_5D_2.
\end{aligned}\right.$$

33. Ces formules montrent en particulier que A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 sont transformés entre eux et l'on vérifie sans peine que *la forme biquadratique binaire*

$$\mathcal{F}(\omega_4, \omega_5) = A_1\omega_4^4 + 4A_2\omega_4^3\omega_5 + 6A_3\omega_4^2\omega_5^2 + 4A_4\omega_4\omega_5^3 + A_5\omega_5^4$$

est *covariante* (mod. ω_1, ω_2, ω_3). Cela veut dire que si deux systèmes sont équivalents et si les deux formes correspondantes sont $\mathcal{F}(\omega_4, \omega_5)$ et $\mathcal{F}(\overline{\omega}_4, \overline{\omega}_5)$, on passe de l'une à l'autre par une substitution linéaire effectuée sur ω_4 et ω_5, à des termes près qui s'annulent avec ω_1, ω_2, ω_3.

Plus généralement la forme biquadratique ternaire

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(\omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5) = {} & A_1\omega_4^4 + 4A_2\omega_4^3\omega_5 + 6A_3\omega_4^2\omega_5^2 + 4A_4\omega_4\omega_5^3 + A_5\omega_5^4\\ & + 4(B_1\omega_4^3 + 3B_2\omega_4^2\omega_5 + 3B_3\omega_4\omega_5^2 + B_4\omega_5^3)\,\omega_3\\ & + 6(C_1\omega_4^2 + 2C_2\omega_4\omega_5 + C_3\omega_5^2)\,\omega_3^2\\ & + 4(D_1\omega_4 + D_2\omega_5)\,\omega_3^3\\ & + E\omega_3^4\end{aligned}$$

est covariante $(\bmod\,\omega_1,\ \omega_2)$ vis-à-vis du groupe de substitutions linéaires

$$\begin{aligned}\omega_4 &= \alpha\overline{\omega_4} + \beta\overline{\omega_5} + \lambda\overline{\omega_3},\\ \omega_5 &= \gamma\overline{\omega_4} + \delta\overline{\omega_5} + \mu\overline{\omega_3},\\ \omega_3 &= (\alpha\delta - \beta\gamma)\,\overline{\omega_3}.\end{aligned}$$

Nous appellerons $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ *les formes biquadratiques, binaire et ternaire, covariantes*.

Leurs coefficients sont des fonctions *rationnelles* des coefficients des équations aux différentielles totales données, ainsi que de leurs dérivées partielles.

VII. — Les invariants fondamentaux. Les cinq paramètres différentiels.

34. Plaçons-nous d'abord dans le cas général où les deux invariants relatifs fondamentaux de la forme $\mathcal{F}$ ne sont pas tous nuls, c'est-à-dire dans le cas où la forme $\mathcal{F}$ n'est pas un carré parfait et ne contient aucun facteur linéaire triple.

On peut alors, par une substitution linéaire convenable, faire en sorte que la forme $\mathcal{F}(\omega_4,\ \omega_5)$ soit égale à

$$\mathcal{F}(\omega_4\omega_5) = 4\omega_4^3\omega_5 + 6A\omega_4^2\omega_5^2 + 4\omega_4\omega_5^3; \tag{1}$$

le coefficient A est un invariant *algébrique* lié d'une manière simple au rapport anharmonique des racines de l'équation $\mathcal{F}(x,\ 1) = 0$.

Si donc on choisit, de la manière la plus générale possible, les ω de façon que $\mathcal{F}$ ait la forme précédente, on peut encore effectuer sur les ω un groupe de substitutions linéaires, mais on a

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 0,$$

c'est-à-dire que les expressions $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_4$ sont des combinaisons linéaires des ω.

Prenons, en particulier, l'expression $\varpi_1 + \varpi_4$. On a [II (7)]

$$\delta(\varpi_1+\varpi_4) = \frac{2}{3}e_7\omega_3 - \frac{1}{3}e_5\omega_4 - \frac{1}{3}e_6\omega_5 + \eta_1\omega_1 + \eta_2\omega_2$$

En posant

$$\varpi_1+\varpi_4 = \alpha_1\omega_1+\alpha_2\omega_2+\alpha_3\omega_3+\alpha_4\omega_4+\alpha_5\omega_5$$

et en tenant compte des formules [VI (6)], on obtient, pour les accroissements infiniment petits des α,

$$\begin{aligned}
\delta\alpha_1 &= \eta_1 - e_5\alpha_3 - e_7\alpha_4,\\
\delta\alpha_2 &= \eta_2 - e_6\alpha_3 - e_7\alpha_5,\\
\delta\alpha_3 &= \frac{2}{3}e_7 - \frac{4}{3}e_6\alpha_4 + \frac{4}{3}e_5\alpha_5,\\
\delta\alpha_4 &= -\frac{1}{3}e_5,\\
\delta\alpha_5 &= -\frac{1}{3}e_6.
\end{aligned}$$

Ces formules montrent qu'on peut choisir $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ de manière qu'on ait successivement

$$\alpha_4 = \alpha_5 = \alpha_3 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\varpi_1+\varpi_4 = 0$$

et l'on a alors

$$e_5 = e_6 = e_7 = \eta_1 = \eta_2 = 0.$$

Autrement dit, *sans introduire d'irrationnalités nouvelles,* on peut supposer choisies les expressions ω de manière à avoir

$$\varpi_1+\varpi_4 = 0 \tag{2}$$

et cela *d'un nombre fini de manières.* Les expressions ω ainsi obtenues sont donc *cinq expressions covariantes.*

35. Ces cinq expressions donnent naissance à *cinq paramètres différentiels linéaires.* En effet, de tout invariant I on peut déduire par

différentiation cinq nouveaux invariants $I_1, I_2, \ldots, I_5$, par la formule

$$dI = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3 + I_4\omega_4 + I_5\omega_5;$$

$I_1, I_2, \ldots, I_5$ sont des combinaisons linéaires des dérivées partielles du premier ordre de I. Nous les appellerons les invariants *dérivés* de I.

Les expressions ϖ sont aussi covariantes et, par suite, si l'on pose

$$\varpi_i = \alpha_{i1}\omega_1 + \alpha_{i2}\omega_2 + \alpha_{i3}\omega_3 + \alpha_{i4}\omega_4 + \alpha_{i5}\omega_5,$$

les coefficients α_ik sont des invariants.

En tenant compte de la formule (2), on arrive ainsi à un système de $6 \times 5 = 30$ invariants. Ce nombre doit cependant être réduit; l'équation

$$\varpi'_1 + \varpi'_4 = 0$$

montre en effet, en tenant compte des formules [VI (8)], qu'on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha_{74} &= -\frac{1}{2}\alpha_{53}, \\ \alpha_{75} &= -\frac{1}{2}\alpha_{63}, \\ \alpha_{64} &= \alpha_{55}. \end{aligned}\right.$$

Il reste donc un système de vingt-sept invariants. Ce sont les *invariants fondamentaux*, en ce sens qu'on obtient le système complet des invariants en calculant les invariants dérivés de tous les ordres de ces vingt-sept invariants.

Les coefficients A, $B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2, C_3, D_1, D_2$, E sont aussi des invariants, de même que les coefficients β_{1i} et β_{2i} des ω_i dans les expressions χ_1 et χ_2. Mais ces invariants s'expriment au moyen des invariants fondamentaux et de leurs dérivés du premier ordre. Les expressions $\varpi_1, \varpi_2, \varpi_3, \varpi_5, \varpi_6, \varpi_7$ doivent, en effet, avoir des covariants bilinéaires satisfaisant aux formules [VI (8)]. On obtient ainsi, par exemple,

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}\omega'_1 + \alpha_{12}\omega'_2 + \alpha_{13}\omega'_3 + \alpha_{14}\omega'_4 + \alpha_{15}\omega'_5 + d\alpha_{11}\omega_1 \\ &\quad + d\alpha_{12}\omega_2 + d\alpha_{13}\omega_3 + d\alpha_{14}\omega_4 + d\alpha_{15}\omega_5 \\ &= \varpi_3\varpi_2 + \frac{1}{3}\omega_3\varpi_7 - \frac{2}{3}\omega_4\varpi_5 + \frac{1}{3}\omega_5\varpi_6 + \omega_1\chi_1 + 2B_2\omega_1\omega_3 + B_3\omega_2\omega_3 \\ &\quad + 2\omega_1\omega_4 + 2A\omega_1\omega_5 + A\omega_2\omega_4 + \omega_2\omega_5, \end{aligned}$$

égalité qui se décompose en quinze autres en égalant dans les deux membres les coefficients des $\omega_i \omega_k$.

Ces formules et les formules analogues qu'on obtient en considérant $\varpi'_2, \ldots, \varpi'_7$ établissent en outre des relations entre les invariants dérivés du premier ordre des α_{ik} et les α_{ik} eux-mêmes.

Remarquons de plus qu'entre les vingt-cinq invariants dérivés du second ordre d'un invariant donné I, il existe quinze relations indépendantes. De l'égalité

$$dI = I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 + I_3 \omega_3 + I_4 \omega_4 + I_5 \omega_5$$

on déduit, en effet,

$$I_1 \omega'_1 + I_2 \omega'_2 + I_3 \omega'_3 + I_4 \omega'_4 + I_5 \omega'_5 + \sum (I_{ki} - I_{ik}) \omega_i \omega_k = 0,$$

formule qui permet d'exprimer les différences $I_{ik} - I_{ki}$ au moyen des I_λ et des α_{ik}.

Il est à remarquer enfin que les invariants fondamentaux sont *algébriques;* mais on pourrait évidemment construire un système d'invariants fondamentaux *rationnels*.

Dans le cas où nous nous sommes placés, le système donné admet au plus un groupe fini à cinq paramètres; le groupe ne peut d'ailleurs être à cinq paramètres que si tous les invariants fondamentaux sont constants. Si deux systèmes sont équivalents, on passe de l'un à l'autre au plus, par une équation de Riccati et des quadratures.

VIII. — Les systèmes pour lesquels la forme biquadratique binaire covariante est identiquement nulle.

36. Si la forme $\mathcal{F}$ est identiquement nulle, c'est-à-dire si les cinq coefficients sont nuls, les résultats du numéro précédent tombent naturellement en défaut. Nous allons démontrer que dans ce cas *la forme $\mathcal{G}$ est aussi identiquement nulle, que tous les systèmes pour lesquels cela a lieu sont équivalents et que chacun d'eux admet un groupe fini simple à quatorze paramètres.*

Supposons d'abord la forme biquadratique ternaire $\mathcal{G}$ identiquement nulle. En appliquant aux formules [VI (8)] l'identité fondamentale, on obtient pour les covariants bilinéaires des expressions χ_1 et χ_2 les formules

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \chi_1' &= \varpi_5\varpi_7 + (2\varpi_1 + \varpi_4)\chi_1 + \varpi_3\chi_2, \\ \chi_2' &= \varpi_6\varpi_7 + \varpi_2\chi_1 + (\varpi_1 + 2\varpi_4)\chi_2. \end{aligned} \right.$$

L'identité fondamentale appliquée aux formules précédentes ne donne que des identités vérifiées d'elles-mêmes.

Les expressions des quatorze covariants bilinéaires des quatorze expressions de Pfaff ω, ϖ, χ covariants, dans lesquels tous les coefficients sont constants, montrent que les quatorze expressions sont laissées invariantes par un groupe à quatorze paramètres dont la structure est précisément déterminée par les formules [VI (5)], [VI (8)], [VII (1)]. Ce groupe est simple; il a été signalé simultanément par M. Engel et par moi en 1894.

Si les quantités A, B, C, D, E ne sont pas toutes nulles, les covariants χ_1' et χ_2' peuvent toujours se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \chi_1' &= \varpi_5\varpi_7 + (2\varpi_1 + \varpi_4)\chi_1 + \varpi_3\chi_2 + X_1, \\ \chi_2' &= \varpi_6\varpi_7 + \varpi_2\chi_1 + (\varpi_1 + 2\varpi_4)\chi_2 + X_2. \end{aligned}$$

Si l'on désigne de plus par Π_i l'ensemble des termes de ϖ_i' qui sont de la forme $\omega_i\omega_k$, l'identité fondamentale appliquée aux ω' peut se simplifier. C'est ainsi, par exemple, qu'en l'appliquant à ϖ_1' on obtient

$$\begin{aligned} \Pi_3\varpi_2 - \varpi_3\Pi_2 - \frac{1}{3}\omega_3\Pi_7 + \frac{2}{3}\omega_4\Pi_5 - \frac{1}{3}\omega_5\Pi_6 - \omega_1 X_1 & \\ + 2B_2(\omega_1'\omega_3 - \omega_1\omega_3') + 2\,dB_2\,\omega_1\omega_3 + \ldots &= 0. \end{aligned}$$

Les termes non écrits sont en effet ceux qu'on obtiendrait en supposant tous les A, B, C, D, E nuls ainsi que X_1 et X_2, et dans ce cas nous savons que les identités fondamentales sont vérifiées d'elles-mêmes.

37. Cela étant, supposons tous les A nuls. Appliquons l'identité fondamentale à ϖ_1 en ne prenant que les termes en $\omega_1\omega_4\omega_5$, et ensuite à ϖ_3' en ne prenant que les termes en $\omega_2\omega_4\omega_5$. Nous

obtenons

$$-\frac{1}{2}B_2 - \frac{1}{4}B_2 - \frac{\partial X_1}{\partial(\omega_4\omega_5)} - 2B_2 = 0,$$

$$\frac{3}{4}B_2 - \frac{\partial X_1}{\partial(\omega_4\omega_5)} = 0.$$

ce qui montre que B_2 est nul. De même l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_2 donne, en ne prenant que les termes en $\omega_2\omega_4\omega_5$,

$$-\frac{3}{4}B_4 - B_4 = 0.$$

On montrerait de même que B_3 et B_1 sont nuls; donc

$$B_1 = B_2 = B_3 = B_4 = 0.$$

Appliquons maintenant l'identité fondamentale à ϖ'_1 en ne prenant que les termes en $\omega_2\omega_3\omega_4$; nous obtenons

$$\frac{3}{4}C_2 = 0,$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_2, en ne prenant que les termes en $\omega_2\omega_3\omega_4$, donne $C_3 = 0$, et l'on a aussi, par raison de symétrie, $C_1 = 0$. Donc

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Appliquons maintenant l'identité fondamentale à ϖ'_3, en ne prenant que les termes en $\omega_1\omega_2\omega_5$, et à ϖ'_5, en ne prenant que les termes en $\omega_1\omega_3\omega_5$; il vient

$$\frac{9}{32}D_1 + \frac{\partial X_1}{\partial(\omega_1\omega_5)} = 0,$$

$$-\frac{3}{8}D_1 + \frac{\partial X_1}{\partial(\omega_1\omega_5)} - \frac{9}{32}D_1 = 0,$$

ce qui entraîne $D_1 = 0$ et aussi par raison de symétrie $D_2 = 0$.

Enfin, l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_5, en ne prenant que les termes en $\omega_1\omega_2\omega_5$, donne

$$E = 0,$$

Il est donc complètement démontré que si $\mathcal{F}$ est identiquement nulle, il en est de même de $\mathcal{G}$, et que, par suite, tous les systèmes pour lesquels $\mathcal{F}$ est nulle sont équivalents.

38. On obtiendra évidemment un système particulier jouissant de la propriété précédente en prenant cinq expressions linéaires ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5 telles qu'on ait

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= \omega_3\omega_4, \\ \omega'_2 &= \omega_3\omega_5, \\ \omega'_3 &= \omega_4\omega_5, \\ \omega'_4 &= 0, \\ \omega'_5 &= 0, \end{aligned}$$

car en posant alors

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_7 = \chi_1 = \chi_2 = 0,$$

les formules [VI (5), (8)] et [VIII (1)] sont vérifiées. Il suffit de prendre

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_1 &= dx_1 + \left(x_3 + \frac{1}{2}x_4x_5\right)dx_4, \\ \omega_2 &= dx_2 + \left(x_3 - \frac{1}{2}x_4x_5\right)dx_5, \\ \omega_3 &= dx_3 + \frac{1}{2}x_4\,dx_5 - \frac{1}{2}x_5\,dx_4, \\ \omega_4 &= dx_4, \\ \omega_5 &= dx_5. \end{aligned}\right.$$

La solution générale du système $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ est donnée par les formules

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= f(\alpha), \\ x_2 &= -f''(\alpha)\left[f'(\alpha) - \frac{1}{2}\alpha f''(\alpha)\right] + \frac{1}{2}\int f''^2(\alpha)\,d\alpha, \\ x_3 &= -f'(\alpha) + \frac{1}{2}\alpha f''(\alpha), \\ x_4 &= \alpha, \\ x_5 &= -f''(\alpha), \end{aligned}\right.$$

où $f(\alpha)$ est une fonction arbitraire du paramètre α.

Les formules (3) fournissent la manière la plus générale d'associer les caractéristiques des systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre qui correspondent à la classe considérée. On obtiendra un de ces systèmes en réduisant l'équation

$$\omega_1 + u\omega_2 = 0$$

à la forme

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Il suffit pour cela de poser

$$(4)\qquad \begin{cases} x = u \\ y = x_4 + u x_5, \\ z = x_1 + u x_2 - \frac{1}{2} u x_4 x_5^2 - \frac{1}{6} u^2 x_5^3, \\ p = x_2 + x_3 x_5 + \frac{1}{6} u x_5^3, \\ q = - x_3 - \frac{1}{2} x_4 x_5 - \frac{1}{2} u x_5^2. \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \omega_1 + u\omega_2 &= dz - p\,dx - q\,dy, \\ \omega_2 &= dp + x_5\,dq + \frac{1}{2} x_5^2\,dy - \frac{1}{6} x_5^3\,dx, \\ \omega_3 &= - dq - x_5\,dy + \frac{1}{2} x_5^2\,dx, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$r = -\frac{1}{3} x_5^3, \qquad s = \frac{1}{2} x_5^2, \qquad t = - x_5,$$

ou, enfin,

$$(5)\qquad s = \frac{1}{2} t^2, \qquad r = \frac{1}{3} t^3.$$

Les paramètres des caractéristiques sont

$$\begin{aligned} x_1 &= z - px + qtx + \frac{1}{6} t^3 x^2, \\ x_2 &= p - qt + \frac{1}{2} t^2 y + \frac{1}{6} t^3 x, \\ x_3 &= - q + \frac{1}{2} t y, \\ x_4 &= y + t x, \\ x_5 &= - t, \end{aligned}$$

et les équations générales des surfaces intégrales sont données par les formules (3) et (4), d'où l'on tire

$$(6)\qquad \begin{cases} y = \alpha - x f''(\alpha), \\ z = f(\alpha) - x f'(\alpha) f''(\alpha) + \dfrac{1}{6} x^2 f''^3(\alpha) + \dfrac{1}{2} x \displaystyle\int f''^2(\alpha)\, d\alpha. \end{cases}$$

L'équation de M. Goursat, correspondante, s'obtient en éliminant x_5 entre les deux équations

$$(7)\qquad \begin{cases} r - x_5 s - \dfrac{1}{6} x_5^3 = 0; \\ s + x_5 t + \dfrac{1}{2} x_5^2 = 0, \end{cases}$$

ou encore en exprimant que l'équation du troisième degré en x_5,

$$x_5^3 + 3 t x_5^2 + 6 s x_5 + 3 r = 0,$$

a une racine double. Elle rentre dans le type étudié plus haut (§ IV) en donnant à $\psi(\lambda)$ la valeur $\frac{1}{6}\lambda^3$ et son intégrale générale est [IV (27)] l'enveloppe de la surface

$$z = \varphi(\lambda) + [f(\lambda) - \lambda f'(\lambda)] x + f'(\lambda) y - \frac{1}{6}\lambda^3 x^2 + \frac{1}{2}\lambda^2 x y - \frac{1}{2}\lambda y^2.$$

39. Le système en involution (5) ainsi que l'équation (7) admet donc un groupe de transformations de contact fini à quatorze paramètres. Si un système en involution se ramène au système (5) par une transformation de contact, la réduction dépend de l'intégration d'un système d'équations différentielles de Lie à cinq fonctions inconnues et qui jouit de propriétés analogues à l'équation de Riccati, mais sur lesquelles nous ne pouvons pas insister ici. Contentons-nous de dire que, si l'on connaît une solution particulière de cette équation, la solution générale est donnée par l'intégration d'une équation de Riccati et par des quadratures.

A un autre point de vue la connaissance d'une intégrale première particulière des équations différentielles des caractéristiques entraîne des simplifications notables; l'intégration s'achevant au plus par des équations de Riccati et des quadratures.

IX. — Les systèmes pour lesquels la forme biquadratique binaire covariante est une quatrième puissance parfaite.

40. Nous ne voulons pas entrer dans la discussion complète de tous les cas qui peuvent se présenter comme intermédiaires entre le cas général et le cas particulier où la forme $\mathcal{F}$ est identiquement nulle. Nous allons simplement rechercher tous les cas dans lesquels il est impossible de trouver cinq expressions de Pfaff covariantes ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_5$, ou, autrement dit, tous les cas dans lesquels il est impossible de former cinq paramètres différentiels linéaires indépendants.

Il est nécessaire pour cela que la forme $\mathcal{F}$ contienne ou un facteur linéaire triple ou deux facteurs linéaires doubles, ou un facteur linéaire quadruple. C'est par ce dernier cas que nous commencerons.

41. Si $\mathcal{F}(\omega_4, \omega_5)$ est la quatrième puissance d'un facteur linéaire on peut, par l'extraction d'une racine 4^e, faire en sorte qu'on ait

$$\mathcal{F}(\omega_4, \omega_5) \equiv \omega_5^4, \tag{1}$$

c'est-à-dire

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0, \qquad A_5 = 1.$$

Les formules [VI (9)] montrent alors qu'on a

$$e_3 = e_4 = 0,$$

c'est-à-dire qu'en faisant la réduction de $\mathcal{F}$ à la forme (1), les expressions ϖ_3 et ϖ_4 sont devenues des combinaisons linéaires des ω.

Nous allons montrer que la forme ternaire $\mathcal{G}$ a ici une forme simple. Appliquons, en effet, l'identité fondamentale à ϖ'_3 en considérant les termes en $\omega_1\omega_4\omega_5$; nous obtenons

$$B_1 = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_3, en prenant les termes en $\omega_2\omega_4\omega_5$, donne

$$\frac{\partial X_1}{\partial(\omega_4\omega_5)} = \frac{3}{4} B_2;$$

appliquée à ϖ'_1, en prenant les termes en $\omega_1\omega_4\omega_5$, elle donne

$$\frac{\partial X_1}{\partial(\omega_4\omega_5)} = -\frac{11}{4}B_2,$$

d'où

$$B_2 = 0.$$

Appliquée à ϖ'_3, en prenant les termes en $\omega_1\omega_3\omega_5$, elle donne

$$C_1 = 0.$$

Appliquée à ϖ'_3, en prenant les termes en $\omega_2\omega_3\omega_4$, elle donne

$$\frac{\partial X_1}{\partial(\omega_3\omega_4)} = 3B_3\frac{\partial\varpi_3}{\partial\omega_4};$$

appliquée à ϖ'_1, en prenant les termes en $\omega_2\omega_4\omega_5$, elle donne

$$\frac{\partial\varpi_3}{\partial\omega_4} = \frac{7}{4}B_3;$$

enfin, appliquée à ϖ'_1, en prenant les termes en $\omega_1\omega_3\omega_4$ et tenant compte des deux formules précédentes, elle donne

$$-7B_3^2 = 0.$$

Appliquée à ϖ'_1, en prenant les termes en $\omega_2\omega_3\omega_4$, elle donne

$$C_2 = 0.$$

Enfin appliquée à ϖ'_3, en prenant les termes en $\omega_1\omega_2\omega_5$, et à ϖ'_5, en prenant les termes en $\omega_1\omega_3\omega_5$, elle donne

$$\frac{\partial X_1}{\partial(\omega_1\omega_5)} = -\frac{9}{32}D_1,$$
$$\frac{\partial X_1}{\partial(\omega_1\omega_5)} = \frac{21}{32}D_1,$$

d'où l'on tire

$$D_1 = 0.$$

Finalement la forme biquadratique $\mathcal{G}$ est égale à

$$\mathcal{G}(\omega_3, \omega_4, \omega_5) = \omega_5^4 + 4B_4\omega_3\omega_5^3 + 9C_3\omega_3^2\omega_5^2 + 4D_2\omega_3^3\omega_5 + E\omega_3^4. \tag{2}$$

42. Ce qui précède suppose simplement que la forme $\mathcal{F}$ soit une quatrième puissance parfaite. Les formules [VI (9)] donnent maintenant

$$\delta B_4 = - \quad e_1 B_4 + \frac{4}{3} e_5,$$

$$\delta C_3 = - 2 e_1 C_3 + \frac{8}{3} e_5 B_4;$$

d'où l'on déduit

$$\delta(C_3 - B_4^2) = - 2 e_1 (C_3 - B_4^2).$$

Cela étant nous allons distinguer deux cas :

I. $C_3 - B_4^2 \neq 0$. — Dans ce cas, on peut encore particulariser le choix des ω de manière à rendre $C_3 - B_4^2$ égal à 1, et cela par l'extraction d'une racine carrée. On a alors

$$e_1 = e_3 = e_4 = 0.$$

Considérons l'expression $\varpi_1 + \varpi_4$, qui est une combinaison linéaire des ω. On a [form. IV (7)]

$$\delta(\varpi_1 + \varpi_4) = \frac{2}{3} e_7 \omega_3 - \frac{1}{3} e_5 \omega_4 - \frac{1}{3} e_6 \omega_5 + \eta_1 \omega_1 + \eta_2 \omega_2$$

et l'on montre, comme au n° 5, qu'on peut, par des opérations rationnelles, supposer

$$\varpi_1 + \varpi_4 = 0 \tag{3}$$

avec

$$e_1 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = e_7 = = \eta_1 = \eta_2 = 0.$$

Cela étant, $\varpi_3, \varpi_4, \varpi_5, \varpi_6, \varpi_7, \chi_1, \chi_2$ sont des combinaisons linéaires des ω et l'on a ici, d'après les formules [IV (6) et (7)],

$$\begin{aligned} &\delta\omega_1 = e_2 \omega_2, && \delta\omega_4 = \quad e_2 \omega_5, \\ &\delta\varpi_4 = - e_2 \varpi_3, && \delta\varpi_6 = - e_2 \varpi_5; \end{aligned}$$

$$\delta\omega_2 = \delta\omega_3 = \delta\omega_5 = 0,$$

$$\delta\varpi_3 = \delta\varpi_5 = \delta\varpi_7 = 0.$$

Si l'une des expressions $\varpi_3\ \varpi_5$, ϖ_7 contenait un terme en ω_1 ou ω_4, on pourrait réduire à zéro le terme en ω_2 ou ω_5, ce qui réduirait e_2 à zéro et les cinq expressions ω_i seraient covariantes, cas que nous voulons écarter.

On a donc

$$\begin{aligned}\varpi_3 &= \alpha_3\omega_2 + \beta_3\omega_3 + \gamma_3\omega_5,\\ \varpi_5 &= \alpha_5\omega_2 + \beta_5\omega_3 + \gamma_5\omega_5,\\ \varpi_7 &= \alpha_7\omega_2 + \beta_7\omega_3 + \gamma_7\omega_5.\end{aligned}$$

La formule $\delta\varpi_4 = -e_2\varpi_3$ montre, par un procédé analogue, qu'on doit avoir

$$\begin{aligned}&\beta_3 = 0,\\ &\varpi_4 = -\alpha_3\omega_1 + \alpha_4\omega_2 + \beta_4\omega_3 - \gamma_3\omega_4 + \gamma_4\omega_5.\end{aligned}$$

Enfin, la formule $\delta\varpi_6 = -e_2\varpi_5$ donne

$$\begin{aligned}&\beta_5 = 0,\\ &\varpi_6 = -\alpha_5\omega_1 + \alpha_6\omega_2 + \beta_6\omega_3 - \gamma_5\omega_4 + \gamma_6\omega_5.\end{aligned}$$

Les coefficients α, β, γ sont des invariants. Remarquons d'ailleurs que si I est un invariant et si l'on pose

$$d\mathrm{I} = \mathrm{I}_1\omega_1 + \mathrm{I}_2\omega_2 + \mathrm{I}_3\omega_3 + \mathrm{I}_4\omega_4 + \mathrm{I}_5\omega_5,$$

les coefficients I_1 et I_4 doivent être nuls; sinon, en effet, on pourrait choisir les ω de manière à annuler I_2 ou I_5 et l'on aurait $e_2 = 0$.

En écrivant d'abord qu'on a

$$\varpi'_1 + \varpi'_4 = 0,$$

on obtient, en tenant compte des expressions de ϖ_5, ϖ_6, ϖ_7,

$$\begin{aligned}&\gamma_5 = \beta_6 + 2\gamma_7 = 0,\\ &\chi_1 = \frac{1}{3}\alpha_5\omega_5 + \lambda\omega_1 + \mu\omega_2,\\ &\chi_2 = \frac{2}{3}\alpha_7\omega_3 - \frac{1}{3}\alpha_5\omega_4 - \frac{1}{3}\alpha_6\omega_5 + \mu\omega_1 + \nu\omega_2.\end{aligned}$$

En formant ensuite ϖ'_3 et prenant les termes en $\omega_4\,\omega_5$, on trouve

$$d\gamma_3 = 2\gamma_3^2\omega_4 + \ldots;$$

ce qui, d'après une remarque faite plus haut, exige qu'on ait

$$\gamma_3 = 0.$$

Les termes en $\omega_3 \omega_5$ donnent alors

$$\alpha_3 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\varpi_3 = 0,$$

ce qui donne enfin

$$\alpha_5 = 0, \qquad \lambda = 0.$$

Appliquons maintenant l'identité fondamentale à ϖ'_2 en prenant les termes en $\omega_2 \omega_4 \omega_5$; on trouve

$$B_4 = 0;$$

puis, en prenant les termes en $\omega_2 \omega_3 \omega_4$, on trouve

$$C_3 = 0,$$

Ces résultats sont contraires à l'hypothèse $C_3 - B_4^2 = 1$.

II. $C_3 - B_4^2 = 0$. — Comme on a

$$\delta B_4 = - e_1 B_4 + \frac{4}{3} e_5,$$

on peut supposer B_4 nul, avec

$$e_5 = 0.$$

L'identité fondamentale appliquée à ϖ'_2, en prenant les termes en $\omega_1 \omega_2 \omega_4$, et à ϖ'_6, en prenant les termes en $\omega_2 \omega_3 \omega_4$, donne

$$\frac{\partial \varpi_3}{\partial \omega_1} = \frac{15}{16} D_2;$$

appliquée à ϖ'_1, en prenant les termes en $\omega_1 \omega_2 \omega_5$, et à ϖ'_5 en prenant les termes en $\omega_2 \omega_3 \omega_5$, elle donne

$$\frac{\partial \varpi_3}{\partial \omega_1} = - \frac{15}{32} D_2;$$

on a donc

$$D_2 = 0.$$

Enfin l'identité fondamentale appliquée à ϖ'_5, en prenant les termes en $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$, donne

$$E = 0.$$

43. *L'hypothèse* $C_3 - B_4^2 = 0$ *entraîne donc, comme consequence, la possibilité de réduire la forme* $\mathcal{G}$ *à* ω_3^4, et l'on a alors

$$e_3 = e_4 = e_5 = 0.$$

En appliquant les identités fondamentales à $\varpi'_1, \varpi'_2, \ldots, \varpi'_7$, on trouve

$$\begin{aligned}
\varpi_3 &= \alpha_1\omega_2 + \alpha_2\omega_5,\\
\varpi_4 &= \alpha_3\omega_1 + \alpha_4\omega_2 + \alpha_5\omega_3 + \frac{1}{4}\alpha_2\omega_4 + \alpha_6\omega_5,\\
\varpi_5 &= \alpha_7\omega_2 + (\alpha_1 - 4\alpha_3)\omega_3 - 3\alpha_5\omega_5,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\delta\varpi_3 &= -e_1\varpi_3 + \eta_1\omega_2,\\
\delta\varpi_4 &= -e_2\varpi_3 + \eta_2\omega_2 + \frac{1}{3}e_7\omega_3 - \frac{2}{3}e_6\omega_5,\\
\delta\varpi_5 &= -e_1\varpi_5 + e_6\varpi_3 + \eta_1\omega_3 - e_7\omega_5.
\end{aligned}$$

Remarquons que si I est un invariant quelconque et si l'on pose

$$dI = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + I_3\omega_3 + I_4\omega_4 + I_5\omega_5,$$

le coefficient I_4 doit être nul; sinon, en effet, on pourrait choisir les ω de manière à avoir

$$dI = \omega_4 + I_2\omega_2$$

avec

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = e_7 = 0;$$

on aurait donc pour $\omega_1, \ldots, \omega_5$ cinq expressions invariantes, ce que nous écartons.

En calculant ϖ'_3, et considérant les termes en $\omega_4\,\omega_5$ on trouve alors

$$\alpha_2 = 0;$$

comme on a d'autre part

$$\delta\alpha_1 = \eta_1 - 2e_1\alpha_1,$$

on peut supposer

$$\varpi_3 = 0 \qquad \text{avec} \qquad \eta_1 = 0;$$

l'expression de ϖ_3' donne alors

$$\alpha_3 = 0,$$
$$\chi_1 = -\alpha_7\omega_5 + \lambda\omega_2.$$

On trouve ensuite

$$\delta\alpha_5 = \frac{1}{3}e_7 - e_1\alpha_5,$$

ce qui permet de supposer

$$\alpha_5 = 0 \qquad \text{avec} \qquad e_7 = 0.$$

Les termes en $\omega_3\,\omega_5$ dans $\varpi_5' = \alpha_7\,\omega_2' + d\alpha_7\,\omega_2$ donnent alors

$$\alpha_7 = 0,$$
$$\varpi_3 = \varpi_5 = 0.$$

On a enfin

$$\delta\alpha_4 = \eta_2 - e_1\alpha_4,$$
$$\delta\alpha_6 = -\frac{2}{3}e_6,$$

ce qui permet de supposer

$$\varpi_4 = 0 \qquad \text{avec} \qquad e_6 = \eta_2 = 0.$$

On a donc finalement

$$\varpi_3 = \varpi_4 = \varpi_5 = 0 \qquad \text{avec} \qquad e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = e_7 = \eta_1 = \eta_2 = 0.$$

En exprimant que ϖ_4' et ϖ_5' sont nuls, on obtient

$$\varpi_7 = \beta_1\omega_5,$$
$$\varpi_6 = \beta_2\omega_2 - \frac{1}{2}\beta_1\omega_3 + \beta_3\omega_5,$$
$$\chi_1 = 0,$$
$$\chi_2 = \beta_4\omega_2 - \frac{2}{3}\beta_2\omega_5.$$

Prenons dans ϖ_6' les termes en $\omega_4\,\omega_5$; on obtient, en remarquant que β_3 est un invariant et que $d\beta_3$ ne peut pas contenir de termes en ω_4,

$$\beta_1 = 0.$$

En exprimant que ϖ'_7 est nul, on obtient ensuite

$$\beta_4 = 0.$$

Les termes en $\omega_3\,\omega_5$ dans ϖ'_6 donnent

$$d\beta_3 = -\frac{5}{3}\beta_2\,\omega_3 + \gamma_1\,\omega_1 + \gamma_2\,\omega_2 + \gamma_3\,\omega_3;$$

d'où l'on tire, en prenant dans les covariants bilinéaires les termes en $\omega_4\,\omega_5$,

$$d\gamma_6 = \frac{5}{3}\beta_2\,\omega_4 + \ldots,$$

ce qui exige

$$\beta_2 = 0.$$

44. Finalement on obtient

$$\varpi_3 = \varpi_4 = \varpi_5 = \varpi_7 = \chi_1 = \chi_2 = 0,$$
$$\varpi_6 = \mathrm{I}\,\omega_5$$

avec

$$e_3 = e_4 = e_5 = e_6 = e_7 = \eta_1 = \eta_2 = 0.$$

En remplaçant dans les expressions de $\omega'_1, \ldots, \omega'_5, \varpi'_1, \varpi'_2$, on obtient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}
\omega'_1 &= 2\,\omega_1\,\varpi_1 + \omega_2\,\varpi_2 + \omega_3\,\omega_4,\\
\omega'_2 &= \omega_2\,\varpi_1 + \omega_3\,\omega_5,\\
\omega'_3 &= \mathrm{I}\,\omega_2\,\omega_5 + \omega_3\,\varpi_1 + \omega_4\,\omega_5,\\
\omega'_4 &= \frac{4}{3}\mathrm{I}\,\omega_3\,\omega_5 + \omega_4\,\varpi_1 + \omega_5\,\varpi_2,\\
\omega'_5 &= 0,\\
\varpi'_1 &= 0,\\
\varpi'_2 &= \varpi_2\,\varpi_1 - \mathrm{I}\,\omega_4\,\omega_5 + \omega_2\,\omega_5.
\end{aligned}\right.$$

On a enfin

$$d\mathrm{I} = \mathrm{I}'\,\omega_5.$$

Il y a un invariant fondamental I, un paramètre différentiel linéaire provenant de ω_5; tous les invariants sont des fonctions de I.

Si I est une constante, c'est le seul invariant. Deux systèmes pour lesquels I a la même valeur sont équivalents, et chacun d'eux admet un groupe à sept paramètres dont la structure est définie par les formules (4); ce groupe est intégrable. La réduction de ces systèmes à une forme normale donnée n'exige donc que des quadratures.

Si I n'est pas constant, tous les systèmes pour lesquels I′ est la même fonction de I sont équivalents; chacun d'eux admet un groupe à six paramètres dont on obtient la structure en supprimant dans les formules (4), les termes en ω_5 et donnant à I une valeur constante, par exemple zéro. Cette structure est donc

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &= 2\omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\omega_4,\\ \omega'_2 &= \omega_2\varpi_1,\\ \omega'_3 &= \omega_3\varpi_1,\\ \omega'_4 &= \omega_4\varpi_1,\\ \varpi'_1 &= 0,\\ \varpi'_2 &= \varpi_2\varpi_1. \end{aligned}\right.$$

Il est bon de remarquer qu'on est arrivé à l'invariant I par des extractions de racine 4^e et de racine carrée, de sorte qu'en réalité ce n'est pas I lui-même qui est un invariant, mais une de ses puissances. De même ω_5 n'est déterminé que par sa puissance 4^e; on trouve que I *n'est déterminé que par son carré;* si l'on multiplie ω_5 par une racine 4^e de l'unité, I est multiplié par le carré de cette racine 4^e. En définitive donc, si l'on désigne par $I^{(n)}$ le dérivé $n^{\text{ième}}$ de I, les invariants *rationnels* sont

$$I^2,\qquad \frac{I'^2}{I},\qquad I^{(4n-2)},\qquad I' I^{(4n-1)},\qquad I I^{(4n)},\qquad \frac{I^{(4n+1)}}{I'}\qquad (n \geqq 1).$$

45. On peut satisfaire aux formules (4) en prenant

$$(5')\qquad \left\{\begin{aligned} \omega_1 &= dx_1 + \frac{7}{3} I x_3\,dx_2 + x_4\,dx_3 - \left[\frac{1}{2}x_4^2 + \frac{2}{3} I x_3^2 - \frac{1}{2}(1 + I^2 - I'')x_2^2\right] dx_5,\\ \omega_2 &= dx_2 - x_3\,dx_5,\\ \omega_3 &= -dx_3 + x_4\,dx_5,\\ \omega_4 &= dx_4 - I\,dx_2,\\ \omega_5 &= dx_5,\\ \varpi_1 &= 0,\\ \varpi_2 &= -I'\,dx_2 - \frac{4}{3} I\,dx_3 + \left[(1 + I^2 - I'')x_2 - \frac{4}{3} I' x_3 - I x_4\right] dx_5. \end{aligned}\right.$$

La solution générale du système $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ est donnée par les formules

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
x_2 &= f(x_5),\\
x_3 &= f'(x_5),\\
x_4 &= f''(x_5),\\
x_1 &= -\frac{1}{2}\int\left[f''^2(x_5) + \frac{5}{6}\mathrm{I}f'^2(x_5) + (1 + \mathrm{I}^2 - \mathrm{I}'')f^2(x_5)\right]dx_5,
\end{aligned}
\right.
$$

où I désigne une fonction donnée de x_5, I″ sa dérivée seconde.

46. Si le système de trois équations aux différentielles totales, fourni par un système en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre, est de la forme (4), les formules (6) indiquent comment doivent être associées les caractéristiques pour engendrer une surface intégrale. On a, par des *quadratures*, les expressions de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 en fonctions de x, y, z, p, q, t, et par suite l'intégration complète du système.

Nous trouverons plus loin (§ XII) toute une classe de systèmes rentrant dans le type précédent.

X. — Les systèmes pour lesquels la forme biquadratique binaire covariante a un facteur linéaire triple.

47. On peut dans ce cas, par l'extraction d'une racine 4ᵉ, faire en sorte qu'on ait

$$\mathcal{F}(\omega_4, \omega_5) = 4\omega_4\omega_5^3,$$

avec

$$e_2 = e_3 = e_1 + 3e_4 = 0.$$

On peut d'abord montrer, comme on l'a fait dans les numéros précédents, qu'on a nécessairement, dans ce cas,

$$\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}_2 = \mathrm{C}_1 = 0.$$

On a, d'autre part,

$$\delta(\varpi_1 + 3\varpi_4) = \frac{4}{3}e_7\omega_3 + \frac{1}{3}e_5\omega_4 - \frac{5}{3}e_6\omega_5 + \eta_1\omega_1 + 3\eta_2\omega_2;$$

et l'on peut supposer qu'on a

$$\varpi_1 + 3\varpi_4 = 0$$

avec

$$e_2 = e_3 = e_1 + 3e_4 = e_5 = e_6 = e_7 = \eta_1 = \eta_2 = 0.$$

On a, d'autre part,

$$\delta\omega_1 = -5e_4\omega_1, \quad \delta\omega_2 = -e_4\omega_2, \quad \delta\omega_3 = -2e_4\omega_3, \quad \delta e_4 = -3e_4\omega_4, \quad \delta\omega_5 = e_4\omega_5;$$
$$\delta\varpi_2 = -4e_4\varpi_2, \quad \delta\varpi_3 = 4e_4\varpi_3, \quad \delta\varpi_5 = 3e_4\varpi_5, \quad \delta\varpi_6 = -e_4\varpi_6, \quad \delta\varpi_7 = 2e_4\varpi_7.$$

On ne doit pas pouvoir faire de réduction entraînant $e_4 = 0$; par suite, on a

$$\varpi_2 = \varpi_3 = \varpi_5 = \varpi_7 = 0,$$
$$\varpi_6 = \alpha\omega_2.$$

Les termes en $\omega_2\omega_4$ dans $\varpi'_2 = 0$ donnent

$$\alpha = -1;$$

ceux en $\omega_1\omega_5$ donnent

$$\frac{\partial\chi_2}{\partial\omega_5} = 0.$$

Les termes en $\omega_2\omega_5$ dans $\varpi'_1 + 3\varpi'_4 = 0$ donnent alors

$$\frac{\partial\chi_2}{\partial\omega_5} = \frac{22}{3},$$

ce qui est impossible.

Si la forme $\mathfrak{F}$ contient un facteur linéaire triple, on arrive donc nécessairement à un moment donné à cinq expressions invariantes ω_1, ω_2, ..., ω_5.

XI. — Les systèmes pour lesquels la forme biquadratique binaire covariante est un carré parfait.

48. On peut toujours, par l'extraction d'une racine 4e et d'une racine carrée, faire en sorte qu'on ait

$$\mathfrak{F}(\omega_4, \omega_5) = 6\,\omega_4^2\,\omega_5^2 \tag{1}$$

avec

$$e_1 + e_4 = e_2 = e_3 = 0.$$

On peut ensuite, comme il a été montré plusieurs fois, supposer qu'on a

$$\varpi_1 + \varpi_4 = 0 \tag{2}$$

avec

$$e_5 = e_6 = e_7 = \eta_1 = \eta_2 = 0.$$

On a alors

$$\delta\omega_1 = e_1\omega_1, \quad \delta\omega_2 = -e_1\omega_2, \quad \delta\omega_3 = 0, \quad \delta\omega_4 = e_1\omega_4, \quad \delta\omega_5 = -e_1\omega_5;$$
$$\delta\varpi_2 = 2e_1\varpi_2, \quad \delta\varpi_3 = -2e_1\varpi_3, \quad \delta\varpi_5 = -e_1\varpi_5, \quad \delta\varpi_6 = e_1\varpi_6, \quad \delta\varpi_7 = 0.$$

Si l'on ne veut pas arriver à trouver cinq expressions ω covariantes, on doit avoir

$$\left\{\begin{aligned} &\varpi_2 = \varpi_3 = 0, \\ &\varpi_5 = \alpha\omega_2 + \beta\omega_5, \\ &\varpi_6 = \alpha'\omega_1 + \beta'\omega_4, \\ &\varpi_7 = \gamma\omega_3, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

et les cinq coefficients α, β, α', β', γ sont des invariants.

En exprimant que ϖ'_2 et ϖ'_3 sont nuls, on obtient

$$B_1 = B_4 = 0,$$
$$\chi_1 = -\alpha\omega_5 + \lambda\omega_2,$$
$$\chi_2 = -\alpha'\omega_4 + \mu\omega_1.$$

En exprimant ensuite que $\varpi'_1 + \varpi'_4$ est nul, on obtient

$$B_2 = B_3 = 0,$$
$$\mu = \lambda, \qquad \beta' = \beta,$$
$$\alpha = -\alpha' = \frac{3}{4};$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \varpi_5 &= \frac{3}{4}\omega_2 + \beta\omega_5, \\ \varpi_6 &= -\frac{3}{4}\omega_1 + \beta\omega_4, \\ \chi_1 &= -\frac{3}{4}\omega_5 + \lambda\omega_2, \\ \chi_2 &= \frac{3}{4}\omega_4 + \lambda\omega_1. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Remarquons maintenant que si I est un invariant quelconque, on a nécessairement

$$dI = J\,\omega_3,$$

sinon, en effet, on pourrait réduire à l'unité l'un des coefficients de ω_1, ω_2, ω_4, ω_5, avec $e_1 = 0$. Mais d'autre part, on doit avoir

$$J\,\omega_3' + dJ\,\omega_3 = 0,$$

ce qui est impossible si I n'est pas nul, à cause du terme $I\omega_4\omega_5$ qui ne peut se réduire. Donc il ne peut exister que des invariants constants.

Calculons ϖ_5' et ϖ_6' en tenant compte des formules (4); nous obtenons

$$C_1 = C_3 = D_1 = D_2 = 0,$$
$$\lambda = \frac{9}{8}C_2 - \beta(\gamma + 1),$$
$$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{4}{3}\beta^2.$$

Le calcul de ϖ_7' donne ensuite

$$C_2 = \frac{16}{9}\beta, \qquad E = -\frac{128}{9}\beta^2 = -\frac{9}{2}C_2^2,$$
$$\lambda = \beta\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\beta^2\right).$$

49. On a finalement les formules suivantes :

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
\omega_1' &= \omega_1\varpi_1 + \omega_3\omega_4,\\
\omega_2' &= \omega_2\varpi_1 + \omega_3\omega_5,\\
\omega_3' &= \frac{3}{2}\omega_1\omega_2 + \beta\omega_1\omega_5 + \beta\omega_2\omega_4 + \omega_4\omega_5,\\
\omega_4' &= \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\beta^2\right)\omega_1\omega_3 + \frac{4}{3}\beta\omega_3\omega_4 + \omega_4\varpi_1,\\
\omega_5' &= \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\beta^2\right)\omega_2\omega_3 - \frac{4}{3}\beta\omega_3\omega_5 - \omega_5\varpi_1,\\
\varpi_1' &= \beta\left(\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\beta^2\right)\omega_1\omega_2 + \frac{3}{2}\omega_1\omega_5 + \frac{3}{2}\omega_2\omega_4 - \beta\omega_4\omega_5,
\end{aligned}\right.$$

qui définissent la structure d'un groupe fini à six paramètres. Les systèmes correspondants dépendent d'un seul invariant constant β, ou plutôt de son carré β^2.

On peut mettre les formules précédentes sous une forme plus simple. Posons

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega_4 + \rho\omega_1, & \Pi_1 &= \omega_4 + \sigma\omega_1, \\ \Omega_2 &= \omega_5 - \rho\omega_2, & \Pi_2 &= \omega_5 - \sigma\omega_2, \\ \Omega_3 &= \varpi_1 + \sigma\omega_3, & \Pi_3 &= \varpi_1 + \rho\omega_3, \end{aligned}$$

en désignant par ρ et σ les deux racines de l'équation

$$\rho^2 + \frac{4}{3}\beta\rho + \frac{3}{2} - \frac{4}{3}\beta^2 = 0 \qquad [(\rho + 3\sigma)(3\rho + \sigma) = 6].$$

On a

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Omega'_1 &= \quad \Omega_1\Omega_3, & \Pi'_1 &= \quad \Pi_1\Pi_3, \\ \Omega'_2 &= -\Omega_2\Omega_3, & \Pi'_2 &= -\Pi_2\Pi_3, \\ \Omega'_3 &= \frac{3\rho + 7\sigma}{4}\Omega_1\Omega_2, & \Pi'_3 &= \frac{3\sigma + 7\rho}{4}\Pi_1\Pi_2. \end{aligned} \right.$$

On remarquera d'abord qu'aucune des deux quantités $\rho + 3\sigma$, $\sigma + 3\rho$ ne doit être nulle. Si une de ces quantités était nulle, le système

$$\Omega_1 - \Pi_1 = \Omega_2 - \Pi_2 = \Omega_3 - \Pi_3 = 0$$

admettrait évidemment un groupe à six paramètres se décomposant en deux groupes simples à trois paramètres, *mais ce ne serait pas le plus grand groupe qu'il admet;* par suite, *il admettrait certainement un groupe à quatorze paramètres.*

On voit ensuite qu'il y a plusieurs cas à distinguer.

50. 1° $(3\rho + 7\sigma)(3\sigma + 7\rho)(\rho - \sigma) \neq 0$. Dans ce cas, on a un groupe se décomposant en deux groupes simples à trois paramètres.

On aura un système en involution de deux équations aux dérivées partielles du second ordre correspondant à ce cas en partant de l'équation

$$(7) \qquad \begin{aligned} &rx^2\cos^2 u + 2sxy\cos u\cos v \\ &\quad + ty^2\cos^2 v + mx\sin u\cos u + ny\sin v\cos v = 0, \end{aligned}$$

où u et v sont deux paramètres liés par la relation

$$(8)\qquad mu + nv = px + qy - z,$$

et en dérivant deux fois de suite cette équation (7) par rapport au paramètre u, v étant regardé comme une fonction de u définie par la relation (8). Les quantités m et n sont deux constantes telles qu'on ait

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{3\sigma + 7\rho}{3\rho + 7\sigma}\right)^2.$$

Les caractéristiques sont données par les équations

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x \sin u = x_1, & p + m\dfrac{\operatorname{cotang} u}{x} = x_3 \\ y \sin v = x_2, & q + n\dfrac{\operatorname{cotang} v}{y} = x_4 \end{array}\right\} \qquad \frac{y(1 - \cos v)}{x(1 - \cos u)} = x_5,$$

où x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sont des constantes arbitraires.

Les équations aux différentielles totales qui indiquent comment doivent être associées les caractéristiques sont

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} dx_3 + x_5\, dx_4 = 0, \\ n\, dx_2 + m\, x_5\, dx_1 + \dfrac{1}{2} x_2^2\, dx_4 + \dfrac{1}{2} x_1^2 x_5\, dx_3 = 0, \\ \dfrac{dx_5}{x_5} - \dfrac{x_1}{m}\, dx_3 + \dfrac{x_2}{n}\, dx_4 = 0. \end{array}\right.$$

Il est possible d'y satisfaire en exprimant x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 au moyen d'un paramètre α, d'une fonction arbitraire de α, de ses deux premières dérivées et d'une intégrale indéfinie portant sur une fonction déterminée de ces quantités; mais je ne suis pas arrivé à cet égard à une solution simple.

Le cas où $\frac{m}{n} = 81$ ou $\frac{1}{81}$ est à part; dans ce cas on peut associer les caractéristiques comme il a été dit au paragraphe VI.

51. 2° $3\sigma + 7\rho = 0$. — Dans ce cas, le groupe (6) se décompose en deux groupes à trois paramètres, l'un simple l'autre intégrable.

On aura un système en involution correspondant à ce cas en partant de l'équation

$$rx^2\cos^2 u - 2sxy\cos u + ty^2 + u - \sin u\cos u + px + qy - z = 0,$$

et en éliminant u entre cette équation et celles qu'on obtient en la dérivant deux fois de suite. On a ainsi

$$(11)\quad \begin{cases} r = -\dfrac{\operatorname{cotang} u}{x^2}, \\ s = -\dfrac{1}{xy\sin u}, \\ t = \dfrac{z - px - qy - u - \operatorname{cotang} u}{y^2}. \end{cases}$$

Les caractéristiques sont

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{ll} x\sin u = x_1, & p - \dfrac{\operatorname{cotang}\frac{u}{2}}{x} = x_3 \\ y(z - px - qy - u) = x_2, & \dfrac{z - px + qy - u}{y} = x_4 \end{array} \right\} \quad \frac{x(1-\cos u)}{y} = x_5,$$

et l'on doit avoir les trois équations aux différentielles totales

$$(13)\quad \begin{cases} dx_4 + x_5\,dx_3 = 0, \\ 2\,dx_1 - x_1^2\,dx_3 - x_5\,dx_2 = 0, \\ dx_5 - x_1x_5\,dx_3 = 0. \end{cases}$$

Ce système est vérifié de la manière la plus générale en posant

$$(14)\quad \begin{cases} x_4 = \alpha, \\ x_3 = f(\alpha), \\ x_5 = -\dfrac{1}{f'(\alpha)}, \\ x_1 = -\dfrac{f''(\alpha)}{f'^2(\alpha)}, \\ x_2 = \displaystyle\int \frac{2f'(\alpha)f'''(\alpha) - 3f''^2(\alpha)}{f'^2(\alpha)}\,d\alpha. \end{cases}$$

L'équation générale des surfaces intégrales est

$$
(15)\quad \begin{cases}
x = -\dfrac{f''(\alpha)}{f'^2(\alpha)\sin u}, \\
y = \dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\operatorname{tang}\dfrac{u}{2}, \\
z = u + 2\operatorname{cotang}\dfrac{u}{2} - \dfrac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'^2(\alpha)\sin u} \\
\qquad + \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)}\operatorname{tang}\dfrac{u}{2} - \dfrac{f'(\alpha)}{2f''(\alpha)}\operatorname{cotang}\dfrac{u}{2}\displaystyle\int\dfrac{f''^2(\alpha)}{f'^2(\alpha)}\,d\alpha,
\end{cases}
$$

u et α désignant deux paramètres variables.

52. 3° $\rho = \sigma$. — Dans ce cas les formules (6) ne sont plus applicables. Si l'on pose

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \omega_4 + \frac{8}{3}\beta\omega_1, &\qquad \Pi_1 &= \omega_4 - \frac{2}{3}\beta\omega_1, \\
\Omega_2 &= \omega_5 - \frac{8}{3}\beta\omega_2, & \Pi_2 &= \omega_5 + \frac{2}{3}\beta\omega_2, \\
\Omega_3 &= \omega_3, & \Pi_3 &= \varpi_1 - \frac{2}{3}\beta\omega_3,
\end{aligned}
$$

on a

$$
\begin{aligned}
\Omega'_1 &= \Omega_1\Pi_3 + \frac{10}{3}\beta\Omega_3\Pi_1, \\
\Omega'_2 &= -\Omega_2\Pi_3 - \frac{10}{3}\beta\Omega_3\Pi_2, \\
\Omega'_3 &= \frac{1}{2}\Omega_1\Pi_2 - \frac{1}{2}\Omega_2\Pi_1, \\
\Pi'_1 &= \Pi_1\Pi_3, \\
\Pi'_2 &= -\Pi_2\Pi_3, \\
\Pi'_3 &= -\frac{5}{3}\beta\Pi_1\Pi_2,
\end{aligned}
$$

et l'on reconnaît la structure du groupe des mouvements de l'espace euclidien.

Comme exemple d'un système de trois équations de Pfaff à cinq variables rentrant dans ce type, signalons le système

$$
(16)\quad \begin{cases}
d\xi = b\,dc - c\,db, \\
d\eta = c\,da - a\,dc, \\
d\zeta = a\,db - b\,da;
\end{cases}
$$

où les trois variables a, b, c sont liées par la relation

$$a^2+b^2+c^2=1.$$

C'est le système qu'on rencontre quand on cherche les courbes gauches de torsion égale à 1. Le point (ξ, η, ζ) décrit la courbe et a, b, c sont les cosinus directeurs de la binormale de cette courbe.

On peut satisfaire aux équations (16) de la manière la plus générale en posant

$$\begin{aligned}
a &= \cos\beta\cos\alpha,\\
b &= \cos\beta\sin\alpha,\\
c &= \sin\beta,\\
\xi &= -f'(\alpha)\cos\alpha+[\beta-f(\alpha)]\sin\alpha,\\
\eta &= -f'(\alpha)\sin\alpha+[f(\alpha)-\beta]\cos\alpha,\\
\zeta &= \int\cos^2\beta\,d\alpha,
\end{aligned}$$

où β est lié au paramètre α par la relation

$$\beta+\sin\beta\cos\beta=f''(\alpha)+f(\alpha).$$

53. On aura un système en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre correspondant au type considéré en prenant, par exemple, le système

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned}
r &= u+\sin u\cos u-z,\\
s &= -\sin^2 u\sin^2 x-\frac{1}{2}\frac{\cos^2 x}{\sin x}+q\frac{\cos x}{\sin x},\\
t &= (u-\sin u\cos u)\sin^2 x-z\sin^2 x-p\sin x\cos x;
\end{aligned}\right.$$

où u est un paramètre variable.

Les caractéristiques sont données par les formules

$$\begin{aligned}
\xi &= (z-u)\sin x\sin y-\operatorname{cotang}x\cos y+p\cos x\sin y+\frac{q\cos y}{\sin x},\\
\eta &= -(z-u)\sin x\cos y-\operatorname{cotang}x\sin y-p\cos x\cos y+q\frac{\sin y}{\sin x},\\
\zeta &= (z-u)\cos x-p\sin x,\\
a &= \sin u\cos y-\cos u\cos x\sin y,\\
b &= \sin u\sin y+\cos u\cos x\cos y,\\
c &= \cos u\sin x,
\end{aligned}$$

où les constantes ξ, η, ζ, a, b, c sont liées par le système (16).

Il y a donc correspondance entre les surfaces intégrales du système (17) et les courbes à torsion constante.

Dans le cas général où β a une valeur constante quelconque, les systèmes de trois équations de Pfaff peuvent aussi être ramenés à celui qui donne les courbes gauches de torsion constante dans un espace à courbure constante égale à 1. Dans le cas où cette torsion est égale à 2 ou $\frac{1}{2}$, le système admet un groupe à quatorze paramètres; dans les autres cas il admet le groupe à six paramètres des mouvements de l'espace considéré.

Il serait intéressant, pour les courbes de torsion constante 2, de faire la réduction de leurs équations différentielles à la forme simple indiquée plus haut [VII (2)]. Il faudrait pour cela intégrer un système d'équations différentielles de Lie correspondant au groupe simple à quatorze paramètres dont il est question au paragraphe VII.

XII. — Les invariants d'une catégorie particulière d'équations de M. Goursat.

54. Nous avons déjà considéré les équations aux dérivées partielles du second ordre obtenues en éliminant λ entre l'équation

$$r + 2\lambda s + \lambda^2 t + 2\psi(\lambda) = 0$$

et sa dérivée, où $\psi(\lambda)$ désigne une fonction du seul argument λ. Nous allons appliquer à cette équation, ou plutôt au système de deux équations de Pfaff qui lui correspond, les méthodes indiquées dans les paragraphes précédents, chercher dans laquelle des catégories précédemment trouvées rentre ce système et former tous ses invariants.

Ce système s'écrit

$$\begin{gathered} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp + \lambda\,dq + [2\psi(\lambda) - \lambda\psi'(\lambda)]\,dx + \psi'(\lambda)\,dy = 0. \end{gathered}$$

Posons d'abord

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} \omega_1 &= -dz + p\,dx + q\,dy, \\ \omega_2 &= \psi'''(\lambda) \{ dp + \lambda\,dq + [2\psi(\lambda) - \lambda\psi'(\lambda)]\,dx + \psi'(\lambda)\,dy \}, \\ \omega_3 &= dq + [\psi'(\lambda) - \lambda\psi''(\lambda)]\,dx + \psi''(\lambda)\,dy, \\ \omega_4 &= dy - \lambda\,dx, \\ \omega_5 &= -\psi'''(\lambda)\,d\lambda. \end{aligned} \right.$$

On obtient, sans difficulté,

$$\begin{aligned}
\omega'_1 &= \frac{1}{\psi'''(\lambda)}\omega_2\,dx + \omega_3\omega_4,\\
\omega'_2 &= \frac{\psi^{\text{IV}}(\lambda)}{\psi'''^2(\lambda)}\omega_2\omega_5 + \omega_3\omega_5,\\
\omega'_3 &= \omega_4\omega_5.
\end{aligned}$$

Posons, pour simplifier,

$$\frac{1}{\psi'''(\lambda)} = A.$$

Les formules précédentes deviennent

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}
\omega'_1 &= \omega_1(2\varpi_1 + \varpi_4) + \omega_2\varpi_2 + \omega_3\omega_4,\\
\omega'_2 &= \omega_1\varpi_3 + \omega_2(\varpi_1 + 2\varpi_4) + \omega_3\omega_5,\\
\omega'_3 &= \omega_1\varpi_5 + \omega_2\varpi_6 + \omega_3(\varpi_1 + \varpi_4) + \omega_4\omega_5 + \frac{1}{3}A'\omega_3\omega_5,
\end{aligned}\right.$$

en posant

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\varpi_1 = \frac{1}{3}A'\omega_5, \qquad \varpi_2 = A\,dx, \qquad \varpi_3 = 0, \qquad \varpi_4 = -\frac{2}{3}A'\omega_5,\\
&\qquad\qquad \varpi_5 = 0, \qquad \varpi_6 = 0.
\end{aligned}\right.$$

Pour obtenir les formules [V(3)], on n'a qu'à prendre comme nouvelle expression $\overline{\omega_4}$ l'expression $\omega_4 + \frac{1}{3}A'\omega_3$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\omega'_3 &= \omega_1\varpi_5 + \omega_2\varpi_6 + \omega_3(\varpi_1 + \varpi_4) + \overline{\omega_4}\omega_5,\\
\overline{\omega'_4} &= A\,\omega_5\,dx + \frac{3AA'' - A'^2}{9}\omega_3\omega_5 + \frac{1}{3}A'\overline{\omega_4}\omega_5,\\
\omega'_5 &= 0.
\end{aligned}$$

En mettant ces formules sous la forme [V(3′)], on obtient

$$\alpha = \gamma = 0, \qquad \beta = \frac{3AA'' - A'^2}{9}.$$

Posons alors

$$\overline{\omega_4} - \frac{3}{10}\beta\omega_2 = \overline{\omega_4} + \frac{A'^2 - 3AA''}{30}\omega_2 = \overline{\overline{\omega_4}}.$$

Nous obtenons

$$
(10)\quad \begin{cases}
\omega'_1 = A\omega_2\,dx + \dfrac{A'^2 - 3AA''}{30}\omega_2\omega_3 + \omega_3\overline{\overline{\omega_4}}, \\
\omega'_2 = -A'\omega_2\omega_5 + \omega_3\omega_5, \\
\omega'_3 = -\dfrac{A'^2 - 3AA''}{30}\omega_2\omega_5 - \dfrac{1}{3}A'\omega_3\omega_5 + \overline{\overline{\omega_4}}\omega_5, \\
\overline{\overline{\omega'_4}} = A\omega_5\,dx + \dfrac{7(3AA'' - A'^2)}{90}\omega_3\omega_5 \\
\qquad - \dfrac{9A^2A''' - 9AA'A'' + 4A'^3}{90}\omega_2\omega_5 + \dfrac{1}{3}A'\overline{\overline{\omega_4}}\omega_5, \\
\omega'_5 = 0.
\end{cases}
$$

Ces formules ont la forme [V(7)], en posant

$$
(11)\quad \begin{cases}
\varpi_1 = \dfrac{1}{3}A'\omega_5, \\
\varpi_2 = A\,dx + \dfrac{A'^2 - 3AA''}{30}\omega_3 + \dfrac{9A^2A''' - 9AA'A'' + 4A'^3}{90}\omega_2, \\
\varpi_3 = 0, \\
\varpi_4 = -\dfrac{2}{3}A'\omega_5, \\
\varpi_5 = 0, \\
\varpi_6 = \dfrac{3AA'' - A'^2}{30}\omega_5, \\
\varpi_7 = 0.
\end{cases}
$$

Si l'on calcule maintenant, d'après les formules [V(8)], les valeurs des coefficients de la forme biquadratique ternaire $\mathcal{G}$, on trouve que tous ces coefficients sont nuls, sauf A_5. La forme $\mathcal{G}$ se réduit donc à $H\omega_5^4$ et l'on trouve

$$
(12)\qquad H = \frac{10A^3A^{\text{IV}} - 10A^2A'A''' - 11A^2A''^2 + 24AA'^2A'' - 9A'^4}{100}.
$$

55. Si H est nul, on a un système admettant un groupe à quatorze paramètres.

Si H n'est pas nul, désignons par K une de ses racines 4^{es}.

Pour réduire la forme $\mathcal{G}$ à ω_5^4, il suffit de poser

$$
\overline{\omega_1} = K\omega_1, \qquad \overline{\omega_2} = K^2\omega_2, \qquad \overline{\omega_3} = K\omega_3, \qquad \overline{\omega_5} = K\omega_5.
$$

ce qui donne

$$\overline{\varpi}_1 = \varpi_1, \qquad \overline{\varpi}_2 = \frac{1}{K}\varpi_2, \qquad \overline{\varpi}_3 = K\varpi_3, \qquad \overline{\varpi}_4 = \varpi_4 - \frac{dK}{K}, \qquad \overline{\varpi}_5 = \varpi_5,$$
$$\overline{\varpi}_6 = \frac{1}{K}\varpi_6, \qquad \overline{\varpi}_7 = \frac{1}{K}\varpi_7.$$

On a donc les nouvelles formules

$$\begin{aligned}
\overline{\varpi}_1 &= \frac{A'}{3K}\overline{\omega}_5,\\
\overline{\varpi}_2 &= \frac{A}{K}dx + \frac{A'^2 - 3AA''}{30K}\overline{\omega}_3 + \frac{9A^2A''' - 9AA'A'' + 4A'^3}{90K^2}\overline{\omega}_2,\\
\overline{\varpi}_3 &= 0,\\
\overline{\varpi}_4 &= \left(\frac{AK'}{K^2} - \frac{2}{3}\frac{A'}{K}\right)\overline{\omega}_5,\\
\overline{\varpi}_5 &= 0,\\
\overline{\varpi}_6 &= \frac{3AA'' - A'^2}{30K^2}\overline{\omega}_5,\\
\overline{\varpi}_7 &= 0.
\end{aligned}$$

Pour réduire $\overline{\varpi}_4$ à zéro, effectuons sur les $\overline{\omega}$ la transformation infinitésimale e_6. Ce groupe s'écrit

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\omega}}_1 &= \overline{\omega}_1,\\
\overline{\overline{\omega}}_2 &= \overline{\omega}_2,\\
\overline{\overline{\omega}}_3 &= \overline{\omega}_3 + t\overline{\omega}_2,\\
\overline{\overline{\omega}}_4 &= \overline{\overline{\omega}}_4 + \frac{4}{3}t\overline{\omega}_3 + \frac{2}{3}t^2\overline{\omega}_2,\\
\overline{\overline{\omega}}_5 &= \overline{\omega}_5,
\end{aligned}$$

et l'on en déduit

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\varpi}}_1 &= \overline{\varpi}_1 + \frac{1}{3}t\overline{\omega}_5,\\
\overline{\overline{\varpi}}_2 &= \overline{\varpi}_2 - t\overline{\overline{\omega}}_4 - \frac{2}{3}t^2\overline{\omega}_3 - \frac{2}{9}t^3\overline{\omega}_2,\\
\overline{\overline{\varpi}}_3 &= \overline{\varpi}_3,\\
\overline{\overline{\varpi}}_4 &= \overline{\varpi}_4 - \frac{2}{3}t\overline{\omega}_5,\\
\overline{\overline{\varpi}}_5 &= \overline{\varpi}_5 + t\overline{\varpi}_3,\\
\overline{\overline{\varpi}}_6 &= \overline{\varpi}_6 + t\overline{\varpi}_4 - \frac{1}{3}t^2\overline{\omega}_5 - dt,\\
\overline{\overline{\varpi}}_7 &= \overline{\varpi}_7 + \frac{4}{3}t\overline{\varpi}_5 + \frac{2}{3}t^2\overline{\varpi}_3.
\end{aligned}$$

Il suffit, pour que $\overline{\overline{\varpi_4}}$ soit nul, de prendre

$$t = \frac{2}{2}\,\frac{AK'}{K^2} - \frac{A'}{K} = -\left(A'L + \frac{3}{2}AL'\right),$$

en désignant par L l'inverse de K.

On aura alors

$$\overline{\overline{\varpi_6}} = I\,\overline{\overline{\omega_5}}, \qquad \overline{\overline{\varpi_3}} = \overline{\overline{\varpi_4}} = \overline{\overline{\varpi_5}} = \overline{\overline{\varpi_7}} = 0,$$

en posant

$$(13) \qquad I = -\frac{3}{2}A^2LL'' + \frac{3}{4}A^2L'^2 - \frac{3}{2}AA'LL' + \frac{3}{10}(A'^2 - AA'')L^2.$$

On est donc dans le cas d'un système admettant un groupe à sept ou six paramètres.

En supprimant les traits horizontaux, on a finalement

$$(14) \qquad \left\{\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{L}(p\,dx + q\,dy - dz),\\
\omega_2 &= \frac{1}{AL^2}[dp + \lambda\,dq + (2\psi - \lambda\psi')\,dx + \psi'\,dy],\\
\omega_3 &= \frac{1}{L}[dq + (\psi' - \lambda\psi'')\,dx + \psi''\,dy] - \frac{2A'L + 3AL'}{2AL^2}\\
&\quad \times [dp + \lambda\,dq + (2\psi - \lambda\psi')\,dx + \psi'\,dy],\\
\omega_4 &= dy - \lambda\,dx - \frac{A'L + 2AL'}{L}[dq + (\psi' - \lambda\psi'')\,dx + \psi''\,dy]\\
&\quad + \left[\frac{(3AL' + 2A'L)^2}{6AL^2} + \frac{A'^2 - 3AA''}{30A}\right]\\
&\quad \times [dp + \lambda\,dq + (2\psi - \lambda\psi')\,dx + \psi'\,dy],\\
\omega_5 &= -\frac{1}{AL}\,d\lambda
\end{aligned}\right.$$

avec l'invariant fondamental I et le paramètre différentiel linéaire

$$-AL\frac{dI}{d\lambda}.$$

On vérifie facilement sur la formule (13) que $\frac{I}{L^2}$ est une fonction *rationnelle* de A et de ses dérivées jusqu'au sixième ordre. En réalité l'invariant fondamental est I^2.

Tous les systèmes pour lesquels I^2 a la même valeur constante sont équivalents et admettent un groupe intégrable à sept paramètres.

Tous les systèmes pour lesquels I^2 n'est pas constant et pour lesquels $\frac{A^2L^2I'^2}{I}$ est la même fonction de I^2 sont équivalents et admettent un groupe à six paramètres.

Si l'on fait en particulier le calcul pour $A=\lambda^{m+2}$, on trouve

$$H=\frac{1}{L^4}=\frac{(m^2-4)(4m^2-1)}{100}\lambda^{4m+4},$$
$$I^2=\frac{9(m^2+1)^2}{4(m^2-4)(4m^2-1)}.$$

Deux valeurs de m égales et de signes contraires, ou inverses, donnent le même invariant.

56. Dans le cas général le groupe de transformations de contact qui laisse invariant le système considéré s'obtient en cherchant toutes les transformations qui laissent invariantes les sept expressions de Pfaff :

$$\overline{\omega_1}=u^2\omega_1+uv\omega_2,\qquad \overline{\omega_2}=u\omega_2,\qquad \overline{\omega_3}=u\omega_3,\qquad \overline{\omega_4}=u\omega_4+v\omega_5,\qquad \overline{\omega_5}=\omega_5,$$
$$\overline{\varpi_1}=-\frac{du}{u}+\varpi_1,\qquad \overline{\varpi_2}=-dv+v\frac{du}{u}-v\varpi_1+u\varpi_2,$$

u et v désignant deux variables auxiliaires, ϖ_1 et ϖ_2 les expressions désignées plus haut par $\overline{\overline{\varpi_1}}$ et $\overline{\overline{\varpi_2}}$, c'est-à-dire

$$\varpi_1=-\frac{1}{2}AL'\omega_5=\frac{1}{2}\frac{L'}{L}d\lambda,$$
$$\begin{aligned}\varpi_2={}&AL\,dx-\left(A'L+\frac{3}{2}AL'\right)(dy-\lambda\,dx)\\&+\left[\frac{A'^2-3AA''}{30}-\frac{\frac{1}{3}A'^2L^2+\frac{3}{2}AA'LL'+\frac{3}{2}A^2L'^2}{L}\right]\\&\quad\times[dq+(\psi'-\lambda\psi'')\,dx+\psi''\,dy]\\&+\frac{1}{A}\left[\frac{9A^2A'''-9AA'A''+4A'^3}{90}\right.\\&\qquad\left.+\frac{(A'^2-3AA'')\left(A'L+\frac{3}{2}AL'\right)}{30}+\frac{2}{9}\frac{\left(A'L+\frac{3}{2}AL'\right)^3}{L^2}\right]\\&\quad\times[dp+\lambda\,dq+(2\psi-\lambda\psi')\,dx+\psi'\,dy].\end{aligned}$$

Comme l'équation

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

s'écrit ici

$$\overline{\omega_1} - \varphi\overline{\omega_2} = 0,$$

il faudra ajouter la condition que φ reste invariante.

En désignant les variables transformées par des grandes lettres, on aura donc le groupe cherché en intégrant le système

$$U^2\Omega_1 = u^2\omega_1, \qquad U\Omega_2 = u\omega_2, \qquad U\Omega_3 = u\omega_3, \qquad U\Omega_4 = u\omega_4, \qquad \Omega_5 = \omega_5,$$
$$-\frac{dU}{U} + \Pi_1 = -\frac{du}{u} + \varpi_1, \qquad U\Pi_2 = u\varpi_2.$$

Prenons, par exemple,

$$\psi(\lambda) = -\frac{\lambda^{1-m}}{m(m^2-1)}, \qquad A = \lambda^{m+2}.$$

L'équation

$$\Omega_5 = \omega_5$$

donne

$$\Lambda = a^2\lambda;$$

l'équation

$$-\frac{dU}{U} + \Pi_1 = -\frac{du}{u} + \varpi_1$$

donne ensuite

$$U = \frac{u}{a^{m+1}b}.$$

Enfin, on trouve pour x, y, z, p, q les formules de transformation

$$\left\{\begin{array}{l} X = a^{m-1}bx + c_1, \\ Y = a^{m+1}by + c_2, \\ P = a^{1-m}bp + c_3, \\ Q = a^{-m-1}bq + c_4, \\ Z = z + a^{m-1}bc_3x - 1\,a^{m+1}bc_4y + c_5, \end{array}\right.$$

les sept paramètres du groupe étant

$$a, \quad b, \quad c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad c_4, \quad c_5.$$

Si I n'est pas constant le groupe des transformations de contact à six paramètres qui laisse le système invariant est simplement

$$\begin{aligned} X &= bx + c_1, \\ Y &= by + c_2, \\ P &= bp + c_3, \\ Q &= bq + c_4, \\ Z &= z + bc_3 x + bc_4 y + c_5. \end{aligned}$$

57. Nous pouvons, au sujet des systèmes que nous venons d'étudier, énoncer le théorème suivant :

Pour qu'une équation de M. Goursat puisse, par une transformation de contact, être ramenée à une équation pour laquelle la fonction ψ ne dépend que de λ, il faut et il suffit qu'elle admette un groupe de transformations de contact intégrable à six paramètres. Si elle admet un groupe de transformations de contact à 7 paramètres elle est réductible à une équation pour laquelle $\psi(\lambda)$ est une puissance de λ.

XIII. — Les systèmes en involution dont l'intégrale générale ne contient qu'une intégrale indéfinie comme signe d'intégration.

58. Les systèmes dont il est question sont manifestement ceux pour lesquels le système de trois équations de Pfaff correspondant peut se ramener à la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} d\beta - \beta'\,d\alpha = 0, \\ d\beta' - \beta''\,d\alpha = 0, \\ d\gamma - P(\alpha, \beta, \beta', \beta'')\,d\beta'' - B(\alpha, \beta, \beta', \beta'')\,d\alpha = 0. \end{cases}$$

Il est bien évident qu'un tel système admet au moins un groupe à un paramètre, à savoir celui qui laisse invariants α, β, β', β'' et qui reproduit γ à une constante additive près.

Réciproquement, supposons qu'un système de trois équations de Pfaff à cinq variables admette un groupe à un paramètre. On peut ramener la transformation infinitésimale de ce groupe à la forme $\frac{\partial f}{\partial x_5}$.

Les équations du système sont donc de la forme

$$
\begin{aligned}
dx_3 + A_3\,dx_1 + B_3\,dx_2 &= 0,\\
dx_4 + A_4\,dx_1 + B_4\,dx_2 &= 0,\\
dx_5 + A_5\,dx_1 + B_5\,dx_2 &= 0,
\end{aligned}
$$

les A et les B ne dépendant que de x_1, x_2, x_3, x_4, mais pas de x_5. Les deux premières équations étant à quatre variables, on peut les réduire à la forme

$$
\begin{aligned}
dx_3 - x_4\,dx_1 &= 0,\\
dx_4 - x_2\,dx_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

et l'on satisfait au système en posant

$$
x_1 = \alpha, \qquad x_3 = f(\alpha), \qquad x_4 = f'(\alpha), \qquad x_2 = f''(\alpha),
$$

$$
x_5 = -\int \Big\{ A_5[\alpha, f''(\alpha), f(\alpha), f'(\alpha)] + B_5[\alpha, f''(\alpha), f(\alpha), f'(\alpha)]\,f'''(\alpha) \Big\}\,d\alpha
$$

et l'on peut facilement, en intégrant par partie, ne laisser, sous le signe $\int$, que α, $f(\alpha)$, $f(\alpha)$ et $f''(\alpha)$.

XIV. — Intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à six variables indépendantes.

59. Il s'agit de l'équation (15) du paragraphe II,

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & 2\frac{\partial\psi}{\partial y} + 2q\frac{\partial\psi}{\partial z} - 2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \lambda\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial p} - 2\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial q}\\
&= \frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial x} + \lambda\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial y} + (p+\lambda q)\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial z} - \left(2\psi - \lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial q}
\end{aligned}
$$

à une fonction inconnue ψ des six variables indépendantes

$$
x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ \lambda.
$$

Les développements des paragraphes II et III nous permettent d'intégrer complètement cette équation, au sens où l'on entend ce mot dans la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre.

L'équation (1) exprime en effet que le système de Pfaff

$$(2) \qquad \begin{cases} dz - p\,dx - q\,dy = 0, \\ dp + \lambda\,dq + \left(2\psi - \lambda\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)dx + \dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}dy = 0 \end{cases}$$

peut être ramené à ne contenir que cinq variables; comme nous l'avons fait remarquer, ce système pourra se mettre sous la forme

$$(3) \qquad \begin{cases} dz_0 - q_0\,dy_0 = 0, \\ dp_0 + \lambda_0\,dq_0 + \left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_0 dy_0 = 0, \end{cases}$$

en désignant par $\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)$ ce que devient $\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}$ quand on y remplace x, y, z, p, q, λ par $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, \lambda_0$. On désigne par x_0 une constante numérique, par $y_0, z_0, p_0, q_0, \lambda_0$ cinq fonctions convenablement choisies de x, y, z, p, q, λ.

Réciproquement, tout système de la forme (3), où $\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)_0$ désigne une fonction *arbitraire* de $y_0, z_0, p_0, q_0, \lambda_0$, provient d'une infinité de systèmes (2), où ψ satisfait à l'équation (1); et nous avons vu comment on pouvait obtenir tous ces systèmes.

En définitive, pour obtenir l'intégrale générale de l'équation (1), on se donne une *fonction arbitraire de cinq arguments* $\varphi(y_0, z_0, p_0, q_0, \lambda_0)$; on réduit l'équation

$$(4) \qquad dp_0 + \lambda_0\,dq + \varphi\,dy_0 + u(dz_0 - q_0\,dy_0) = 0$$

à la forme

$$(5) \qquad dZ - P\,dX - Q\,dY = 0;$$

le système

$$(6) \qquad \begin{cases} dz_0 - q_0\,dy_0 = 0, \\ dp_0 + \lambda_0\,dq_0 + \varphi\,dy_0 = 0 \end{cases}$$

peut alors s'écrire

$$(7) \qquad \begin{cases} dZ - P\,dX - Q\,dY = 0, \\ dP + \lambda\,dQ + \left(2\psi - \lambda\dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)dX + \dfrac{\partial\psi}{\partial\lambda}dY = 0; \end{cases}$$

la fonction $\psi(X, Y, Z, P, Q, \lambda)$ qui s'introduit ainsi est la solution générale de l'équation (1).

La réduction de l'équation (4) à la forme (5) introduit une fonction arbitraire de cinq arguments, de sorte que finalement la solution générale de l'équation (1) dépend de deux fonctions arbitraires de cinq arguments.

Une même solution de l'équation (1) peut évidemment être fournie par deux fonctions φ distinctes. Pour que deux fonctions φ fournissent les mêmes solutions, il faut et il suffit que les deux systèmes (6) soient *équivalents;* le problème de reconnaître cette équivalence a été résolu précédemment.

60. Le procédé d'intégration précédent, qui ne diffère pas au fond de celui indiqué par M. Goursat pour la même équation, ne semble se rattacher à aucune méthode d'intégration générale. Néanmoins les considérations suivantes montreront que ce procédé n'est pas si *singulier* qu'il le paraît au premier abord.

Si l'on cherche, en effet, à exprimer que deux systèmes de Pfaff de la forme (2) sont équivalents, on n'a qu'à former les invariants dont il a été question au paragraphe VI. Parmi tous ces invariants il suffit d'en considérer un certain nombre indépendants

$$I_1, \quad I_2, \quad \ldots, \quad I_5; \qquad I_6, \quad \ldots, \quad I_p$$

et d'exprimer que pour les deux systèmes donnés, les invariants I_6, $I_7, \ldots, I_p$ sont les mêmes fonctions de $I_1, \ldots, I_5$.

Or, ces invariants I sont des fonctions déterminées de x, y, z, p, q, λ, ψ et des dérivées partielles de ψ [parmi lesquelles on peut d'ailleurs supposer toujours éliminées, d'après l'équation (1), la quantité $\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\,\partial x}$ et ses dérivées].

Cela étant il existe donc p quantités I formées avec les variables indépendantes, la fonction inconnue ψ et ses dérivées partielles, et telles que, pour avoir les relations les plus générales entre ces p quantités, il suffise d'intégrer un certain système différentiel à cinq variables indépendantes et $p - 5$ fonctions inconnues. Ce système différentiel auxiliaire une fois intégré, à chacune de ses solutions correspondent pour l'équation (1) une infinité de solutions, mais qui ne dépendent plus que d'une fonction arbitraire de cinq arguments (puisque les équations de M. Goursat correspondantes se déduisent de l'une d'entre elles par une transformation de contact arbitraire).

L'équation (1) *peut donc, après intégration d'un système auxiliaire à cinq variables indépendantes dont les variables (indépendantes et dépendantes) sont des fonctions déterminées des variables primitives, de la fonction inconnue et de ses dérivées, être ramenée à un nouveau système différentiel à cinq variables indépendantes.*

Or, c'est précisément par un procédé identique qu'on intègre les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre à une fonction inconnue z de deux variables indépendantes x et y, lorsque la méthode de M. Darboux est applicable.

Remarquons, d'ailleurs, que l'intégration du système auxiliaire est rendue inutile si l'on se donne les conditions initiales, au sens de Cauchy, en *particulier* si l'on se donne pour $x = x_0$ la valeur de $\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}$ en fonction de y, z, p, q, λ. Les p quantités I deviennent alors des fonctions *connues* de y, z, p, q, λ et l'on en déduit immédiatement la forme générale des $p - 5$ relations qui doivent les relier entre elles.

61. L'équation aux dérivées partielles (1) est une de ces équations dont M. Goursat s'est occupé [1] et qui admettent des multiplicités caractéristiques linéaires. Les deux familles de multiplicités caractéristiques sont définies respectivement par les équations

$$dx = dy = dz = dp = dq = 0$$

et par les équations

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\lambda} = \frac{dz}{p + \lambda q} = \frac{-dp}{2\psi - \lambda\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}} = \frac{-dq}{\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}} = \frac{d\lambda}{2\left(\frac{\partial\psi}{\partial q} - \lambda\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)}.$$

Or, ces dernières équations sont précisément celles qui définissent

[1] *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXVII, 1899, p. 1.

les caractéristiques de l'équation de M. Goursat obtenue en éliminant λ entre les deux équations

$$r + 2\lambda s + \lambda^2 t + 2\psi = 0,$$
$$s + \lambda t + \frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = 0.$$

Donc, *sur les caractéristiques de la seconde famille de l'équation aux dérivées partielles* (1) *les quantités* $I_1, I_2, \ldots, I_p$ *restent constantes. On pourrait donc les obtenir en cherchant les combinaisons intégrables des équations différentielles des multiplicités caractéristiques de la seconde famille prolongées jusqu'à un ordre suffisamment élevé.* Autrement dit, *on peut intégrer l'équation* (1) *en appliquant la méthode de M. Darboux généralisée à la seconde famille des caractéristiques de cette équation.*

L'équation (1) présente donc un intérêt tout à fait singulier au point de vue de la théorie générale d'intégration des équations aux dérivées partielles à n variables indépendantes.

Sans vouloir entrer ici dans l'étude de cette importante question, on peut remarquer cependant qu'étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre à n variables indépendantes, la formation d'un système auxiliaire à $n - 1$ variables indépendantes de la nature de celui dont il est question plus haut, n'est possible que si l'équation possède des caractéristiques linéaires; de plus les variables de ce système s'obtiennent nécessairement en cherchant les combinaisons intégrables des équations différentielles de l'une des familles de caractéristiques, prolongées jusqu'à un ordre suffisamment élevé, comme on le fait dans la méthode de M. Darboux.