ÉMILE PICARD

Sur une formule relative au potentiel de simple couche et son application à la recherche des fonctions harmoniques, satisfaisant à certaines conditions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 503-508

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__503_0>

SUR UNE FORMULE RELATIVE

AU

POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE

ET SON APPLICATION A LA

RECHERCHE DES FONCTIONS HARMONIQUES,

SATISFAISANT A CERTAINES CONDITIONS,

PAR M. ÉMILE PICARD.

1. Envisageons un potentiel de simple couche relatif à une surface fermée S

$$V = \int\int \frac{\rho}{r}\, d\sigma,$$

$d\sigma$ étant l'élément de surface, ρ la densité et r représentant la distance à $d\sigma$ du point A pour lequel on prend le potentiel. Les dérivées dans le sens de la normale jouissent de propriétés intéressantes. Soit m un point de la surface et menons la normale en ce point. En désignant par n la direction de la normale intérieure, on peut considérer les valeurs limites, que nous appellerons

$$\frac{dV}{dn} \quad \text{et} \quad \frac{dV'}{dn},$$

des dérivées de V prises suivant la direction n en un point *intérieur* et en un point *extérieur* de la surface infiniment voisins de m sur la normale.

On a les deux formules

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dV'}{dn} - \dfrac{dV}{dn}\right) = 2\pi\rho_m, \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dV'}{dn} + \dfrac{dV}{dn}\right) = \displaystyle\int\!\!\int \rho\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\sigma, \end{cases}$$

l'angle ψ représentant l'angle que fait la droite joignant m à l'élément $d\sigma$ avec la normale intérieure à la surface en m.

La première de ces formules est classique. La seconde étant moins connue, je me propose d'en indiquer ici tout d'abord une démonstration très simple d'un caractère géométrique [1].

2. Pour plus de simplicité, je supposerai que la surface est régulière et convexe au point m. Soit m_1 un point sur la normale mn en m et à l'intérieur de S.

Considérons, sur la surface autour de m, une aire Σ très petite, mais qui va rester fixe dans les raisonnements une fois qu'elle aura été choisie. La composante suivant mm_1 de l'attraction exercée sur le point m est

$$(1)\qquad \int\!\!\int \rho\frac{\cos\psi}{r^2}\,d\sigma,$$

où ψ est l'angle que fait avec mm_1 la droite joignant m à $d\sigma$.

Pareillement l'intégrale

$$(2)\qquad \int\!\!\int \rho\frac{\cos\psi_1}{r_1^2}\,d\sigma$$

représente la projection sur m_1m de l'attraction exercée par la couche sur le point m_1, en désignant manifestement par ψ_1 l'angle avec m_1m de la droite joignant m_1 à $d\sigma$ et r_1 désignant la distance de ces deux points. Cette intégrale a la valeur

$$-\frac{dV}{dn}$$

au point m_1.

---

(1) Dans un excellent Mémoire sur les fonctions harmoniques (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. XV, Jahrgang 1904) M. Plemelj établit cette formule par un calcul assez long.

Faisons la somme des expressions (1) et (2). Pour l'évaluer, partageons les intégrales en deux parties, l'une relative à l'aire $S-\Sigma$, l'autre à l'aire Σ comprenant le point m. Pour la première, la somme est très petite si $m_1 m$ est très petit, car il y a continuité, m étant en dehors de l'aire $S-\Sigma$.

Pour la seconde, nous allons partager l'aire Σ elle-même en deux portions. A cet effet, donnons-nous une quantité positive η, choisie aussi petite que l'on voudra, mais qui va rester fixe une fois choisie. Considérons alors un cône C de révolution ayant pour sommet m_1 et pour axe $m_1 m$ avec le demi-angle au sommet égal à $\frac{\pi}{2}-\eta$; ce cône découpe sur Σ (si m_1 est assez voisin de m) une aire très petite Σ' intérieure à Σ et comprenant le point m. Pour un élément $d\sigma$ de Σ', formons le rapport

$$\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi} \tag{3}$$

en désignant par φ l'angle que fait la droite joignant $d\sigma$ à m_1 avec la normale intérieure à la surface en $d\sigma$. Il est clair que, si m_1 est suffisamment rapproché de m, le rapport (3) sera très voisin de *un*.

Écrivons alors l'intégrale (2) sous la forme

$$\int\int \rho \frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi}\,\frac{\cos\varphi}{r_1^2}\,d\sigma. \tag{2)'$$

Il est maintenant facile d'évaluer la somme de (1) et de (2)' relative à Σ'. La première intégrale est très petite si m_1 est très voisin de m, et la seconde diffère très peu de

$$\int\int \rho \frac{\cos\varphi}{r_1^2}\,d\sigma$$

et, par suite, de

$$\rho_m \int\int \frac{\cos\varphi}{r_1^2}\,d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$2\pi\rho_m(1-\sin\eta).$$

La somme des intégrales (1) et (2)' relatives à l'aire $\Sigma-\Sigma'$ s'évalue aussi facilement. Elle est très petite; ceci est évident pour (1), puisque Σ a été supposé très petit. Quant à $(2)'$ on remarque que la valeur de

$$\frac{\cos\psi_1}{\cos\varphi}$$

est finie (et même petite) pour ses éléments, l'angle ψ_1 ne différant que peu d'un droit pour un point de $\Sigma - \Sigma'$, et l'angle sous lequel de m_1 est vue l'aire $\Sigma - \Sigma'$ étant évidemment petit si η et l'aire Σ sont petits.

3. Ceci posé, nous concluons de l'addition de (1) et (2) la formule, quand m_1 se rapproche indéfiniment de m,

$$\iint \rho \frac{\cos\psi}{r^2} d\sigma - \frac{dV}{dn} = 2\pi\rho_m. \tag{4}$$

C'est *une formule fondamentale* (¹).

4. Une analyse toute semblable peut être développée, en supposant le point m_1 toujours situé sur la normale en m, mais extérieur à la surface. Dans ce calcul, ψ garde la même signification; il faut introduire l'angle ψ_1 que fait avec la direction $m_1 m$ (qui est alors la direction de la normale intérieure), et l'angle φ' qui est l'angle fait par la direction joignant m_1 à $d\sigma$ avec la normale extérieure à la surface. On trouve alors la formule

$$-\iint \rho \frac{\cos\psi}{r^2} d\sigma + \frac{dV'}{dn} = 2\pi\rho_m. \tag{5}$$

Il suffit d'additionner et de retrancher les formules (4) *et* (5) *pour obtenir les formules* (α).

5. Nous ferons une application intéressante de la formule (4) à un problème relatif aux fonctions harmoniques.

(¹) Je me suis inspiré dans cette démonstration du raisonnement fait par Robin pour obtenir son équation fonctionnelle relative au problème de la distribution de l'électricité (*voir* le Tome I de mon *Traité d'Analyse*, 2ᵉ édition, p. 203). Le raisonnement de Robin était trop sommaire; il a besoin d'être complété par l'introduction de l'aire Σ' intérieure à Σ. L'équation fonctionnelle de Robin se déduit de (4) en faisant $\frac{dV}{dn} = 0$.

Proposons-nous de *trouver une fonction harmonique* V *continue à l'intérieur de* S *et telle que l'on ait sur* S

$$aV + b\frac{dV}{dn} = F \qquad \text{(fonction donnée sur S)}$$

où a *et* b *sont des fonctions du point sur la surface.*

Cherchons à exprimer la fonction harmonique V par un potentiel de simple couche; l'inconnue sera la densité ρ. Nous aurons donc

$$V = \int\int \rho \frac{d\sigma}{r}.$$

Exprimant alors $\frac{dV}{dn}$ à l'aide de la formule (4), nous obtenons pour ρ l'équation fonctionnelle

$$a\int\int \rho\frac{d\sigma}{r} + b\left(\int\int \rho \frac{\cos\psi}{r^2}d\sigma - 2\pi\rho\right) = F.$$

Supposons maintenant que *b ne s'annule pas sur la surface.* On a alors

$$(6) \qquad \rho - \int\int \rho\left(\frac{a}{b}\frac{1}{2\pi r} + \frac{\cos\psi}{2\pi r^2}\right)d\sigma = \text{fonction donnée sur S.}$$

C'est une équation fonctionnelle rentrant dans le type de l'équation de Fredholm [1]. Il pourra arriver que l'on se trouve dans le *cas singulier* où le problème n'aura pas de solution si la fonction donnée ne satisfait pas à certaines conditions.

Arrêtons-nous sur le cas où b et a auraient toujours les mêmes signes sur la surface, *ces signes étant contraires.* Il est alors facile de voir que l'on n'est pas dans un cas singulier. En effet, si l'on était dans un cas singulier, on pourrait satisfaire à l'équation (6) en mettant *zero* dans le second membre, sans que ρ soit identiquement nul. On pourrait donc, dans cette hypothèse, avoir une fonction harmonique,

---

[1] Dans un article récent des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (t. XXII, 1906), j'ai eu l'occasion de rappeler les résultats essentiels dus à Fredholm sur son équation fonctionnelle.

non nulle identiquement, satisfaisant sur la surface à la condition

$$a\mathrm{V} + b\frac{d\mathrm{V}}{dn} = 0.$$

Mais cela est impossible. On aurait, en effet,

$$\int\!\!\int\!\!\int\left[\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dy\,dz = -\int\!\!\int \mathrm{V}\frac{d\mathrm{V}}{dn}\,d\sigma = \int\!\!\int \frac{a}{b}\mathrm{V}^2\,d\sigma;$$

d'où se déduirait que V est identiquement nul, le rapport $\frac{a}{b}$ étant négatif.

Le cas où b peut changer de signe est plus difficile; je me propose de l'étudier ailleurs.

6. La théorie analytique de la chaleur fournit un exemple rentrant dans le problème précédent. *Considérons un corps en équilibre de température avec rayonnement.* En désignant par V la température, cette fonction est harmonique à l'intérieur du corps, et l'on a, en chaque point m de sa surface S,

$$-\frac{d\mathrm{V}}{dn} = k(\mathrm{V}_e - \mathrm{V}),$$

k étant une fonction *positive* du point m de la surface, et V_e une fonction donnée sur la surface, représentant en chaque point de celle-ci la température *extérieure*. Nous avons donc à trouver une fonction harmonique telle que sur S l'expression

$$\frac{d\mathrm{V}}{dn} - k\mathrm{V}$$

soit égale à une fonction donnée. C'est le problème précédent et nous ne sommes pas dans un cas singulier puisque $b = 1$ et $a = -k$.