ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

J. BOUSSINESQ

Propagation du mouvement autour d'un centre, dans un milieu élastique, homogène et isotrope

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 225-261

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__225_0>

PROPAGATION DU MOUVEMENT
AUTOUR D'UN CENTRE,
DANS UN MILIEU ÉLASTIQUE, HOMOGÈNE ET ISOTROPE;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SOMMAIRE : § I. Objet et résultats de ce Mémoire. — § II. Équations du mouvement et marche à suivre pour les intégrer; calcul de la dilatation cubique θ. — § III. Solution particulière, exprimant des déplacements sans rotation moyenne et producteurs de la dilatation cubique effective. — § IV. Solution complémentaire, qui exprime des déplacements s'effectuant sans changements de densité, mais offrant les rotations moyennes effectives. — § V. Caractères et équations de l'onde totale. — § VI. Loi d'appel vers les vides, analogue à celle de l'attraction newtonienne.

§ I. — Objet et résultats de ce Mémoire.

1. Poisson [1] et Ortrogradsky [2] ont étudié les premiers, vers 1830, le mouvement que fait naître, au sein d'un solide élastique indéfini, homogène et isotrope, une rupture instantanée de l'équilibre, limitée initialement à une petite sphère dite *région d'ébranlement*, dont ε désignera ici le rayon. Ils trouvèrent que ce mouvement consiste, après quelques instants employés à le régulariser, en une onde sphérique mobile, ayant pour centre le centre même de la région d'ébranlement, et pour rayons tant intérieur qu'extérieur, uniformément croissants comme son épaisseur, les produits respectifs, par le

(1) *Voir*, aux Tomes VIII (1829) et X (1831) des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, l'*Addition* (du 24 novembre 1828) *au Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques* et surtout (t. X, p. 578 à 605) le Mémoire *Sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques*, du 11 octobre 1830.

(2) *Sur l'intégration des équations aux différences partielles, relatives aux petites vibrations d'un milieu élastique* (20 juin 1829), aux *Mémoires de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg* (t. I, 1831, p. 455 à 461).

temps écoulé t, de deux *vitesses de propagation* constantes, appelées ci-après, l'une des deux, A, l'autre, a, uniquement fonctions de la nature du milieu, avec addition de ε au plus grand de ces deux produits et de $-\varepsilon$ au plus petit.

Poisson reconnut, de plus, que le mouvement s'y trouve, presque en entier, localisé dans les deux couches, d'une épaisseur 2ε chacune, limitant l'onde totale; et que, *longitudinal*, c'est-à-dire normal aux sphères concentriques, dans la couche de rayon moyen At, comme chez l'onde que propagerait un fluide élastique, il est, au contraire, *transversal*, c'est-à-dire tangent aux sphères, dans l'autre couche extrême, de rayon moyen at, comme chez l'onde que comportait l'éther imaginé, quelques années auparavant, par Fresnel, pour l'explication des phénomènes lumineux de polarisation.

Le rapport entre les deux coefficients d'élasticité appelés actuellement λ, μ, qui résultait des hypothèses faites par Poisson et Ostrogradsky sur les actions intermoléculaires du milieu, donnait $\sqrt{3}$ comme quotient de A par a; et c'est, en effet, celui que réalisent à peu près les corps durs. Mais ce quotient de A par a devient infini pour les fluides où $a = 0$, et il paraît s'annuler pour l'éther, où tout le monde admet aujourd'hui l'hypothèse $A = 0$; de sorte qu'on peut le supposer, suivant les cas, variable entre les limites les plus larges (¹).

En résumé, les ondes sphériques antérieurement connues ou soupçonnées comme se produisant, *séparément*, dans les deux milieux élastiques les plus simples, d'ailleurs aussi opposés que possible, les *fluides* et l'*éther* vibrant lumineusement, Poisson les retrouvait, *à la fois*, dans tout solide homogène et isotrope indéfini, avec un intervalle, entre elles, occupé par des couches concentriques de plus en plus nombreuses, revenues *presque* à l'état naturel de repos après le

---

(¹) Dans les corps réductibles en fragments *dont chacun puisse subsister isolément sans pression extérieure*, comme sont les solides et les liquides fixes, la stabilité de la contexture exige, il est vrai, que le *potentiel d'élasticité* soit essentiellement positif, ce qui entraîne une valeur supérieure à zéro pour l'expression $\frac{\lambda}{\mu} + \frac{2}{3}$ et rend le rapport $\frac{A}{a}$ plus grand que $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Mais rien n'indique qu'il doive en être de même dans un milieu *sans limites précises*, tel que l'éther.

passage de l'onde la plus rapide, pour en être de nouveau tirées par l'onde la plus lente, mais y retourner ensuite complètement.

2. Depuis, plusieurs géomètres, parmi lesquels je me contenterai de citer Stokes ([1]) et M. Love ([2]), ont repris et éclairci sur bien des points cette question capitale. Aussi ai-je longtemps hésité à publier la manière ([3]) dont je la traite, depuis une quinzaine d'années au moins, dans mon cours de la Sorbonne. Il me semble cependant que cette méthode, tout à fait directe et naturelle, apporte encore quelques simplifications utiles; et je me décide à la faire connaître, avec les résultats qu'elle donne presque immédiatement.

Résumons ces derniers, pour montrer l'intérêt des calculs qui les établiront aux paragraphes suivants.

3. Et d'abord, dans l'onde à mouvements longitudinaux, le petit déplacement éprouvé par chaque particule, dirigé à très peu près suivant le rayon R joignant à la situation naturelle de celle-ci l'origine des coordonnées (centre de la région d'ébranlement), égale très sensiblement le quotient, par R, d'une fonction de $At - R$ et des cosinus directeurs du rayon; en sorte que toutes ses valeurs successives se transmettent de particule à particule, le long d'un même rayon R prolongé, avec la *célérité* ou vitesse de propagation A, mais en éprouvant le lent décroissement exprimé par l'inverse de la distance R. Et comme, suivant chaque rayon, la fonction de $At - R$ prend toutes ses valeurs sensibles dans la petite épaisseur 2ε de l'onde, tandis que le changement d'orientation du rayon serait insignifiant le long d'un chemin 2ε normal à R, le déplacement particulaire peut être censé ne dé-

---

([1]) Mémoire de novembre 1849 intitulé *On the dynamical Theory of diffraction* (§ II : *Propagation of an arbitrary disturbance en an elastic medium*, p. 11 à 27), aux *Transactions de la Société philosophique de Cambridge*, t. IX, 1856.

([2]) *The propagation of wave-motion in an isotropic elastic solide medium*, Mémoire publié dans les *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2e série, Vol. I, 4e et 5e parties.

([3]) Nettement ébauchée déjà dans ma Note du 19 juin 1882 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XCIV, p. 1648) et, plus complètement, aux pages 352 à 356 et 692 à 694 de mon Volume intitulé *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques, avec des Notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse.*

pendre, à première approximation, que de la variable $At - R$. Enfin, la moyenne de ses valeurs en chaque point, durant le passage de l'onde, est sensiblement nulle, de même que la moyenne de ses valeurs, à un moment donné quelconque, le long de toute normale 2ε commune aux deux faces de l'onde, ou allant de $R = At - \varepsilon$ à $R = At + \varepsilon$.

Pareillement, dans l'onde à mouvements transversaux, les trois composantes ξ, η, ζ du déplacement sont, à très peu près, les quotients, par R, de trois fonctions de $at - R$ et des cosinus directeurs du rayon R. Il y a donc propagation, avec la célérité a, de chaque valeur de ξ, η, ζ le long du rayon R prolongé, sauf encore le lent décroissement impliqué par la proportionnalité à l'inverse de R; et ξ, η, ζ ne varient rapidement qu'avec $at - R$. D'ailleurs, la somme des produits des trois fonctions de $at - R$ par les cosinus directeurs correspondants de R est nulle, à raison de la transversalité; mais les valeurs moyennes de chaque déplacement, soit en un même point durant le passage de l'onde, soit, à un même instant, le long d'une normale 2ε commune aux deux faces $R = at \pm \varepsilon$, paraissent différer généralement de zéro, contrairement à ce qui arrive dans l'onde à mouvements longitudinaux.

4. La dilatation cubique et la rotation moyenne sont identiquement nulles, la première, en dehors de l'onde à mouvements longitudinaux, la seconde, en dehors de l'onde à mouvements transversaux; de sorte qu'elles se réduisent l'une et l'autre à zéro dans l'intervalle des deux ondes. Toutefois, généralement, les particules, dans cet intervalle, ne se trouvent pas à l'état naturel, mais se meuvent *uniformément* en sens divers, *suivant des lignes droites,* avec vitesses de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{R^3}$ et, par conséquent, négligeables à côté de leurs vitesses soit antérieures, soit ultérieures, dans les deux ondes. Elles sont même nulles quand la rupture initiale de l'équilibre a consisté en de petits déplacements donnés ξ_0, η_0, ζ_0, *sans impulsions,* c'est-à-dire sans accompagnement de vitesses $\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0$; et alors, dans l'intervalle des deux ondes, les déplacements ξ, η, ζ, invariables en chaque point, ne se trouvent comparables qu'à l'inverse

de R^3, c'est-à-dire au cube de ce que sont ξ, η, ζ dans les deux ondes, au lieu de l'être à leurs carrés.

Dans les fluides et dans l'éther lumineux, où la plus lente des deux ondes reste fixée à la région d'ébranlement, la matière doit donc, généralement, à l'arrière de l'autre onde, qui se propage, être animée de petites vitesses constantes, ou ne pas revenir tout à fait à l'état naturel (1). En réalité, de petites résistances, négligées dans les équations du mouvement parce qu'elles sont ordinairement insensibles, y font sans doute évanouir peu à peu ξ, η, ζ (2).

On voit aussi que, dans les milieux solides homogènes, mais hétérotropes, où un ébranlement local fait naître, comme on sait, trois ondes animées de *célérités* distinctes et à vibrations finalement rectilignes, les deux intervalles, d'épaisseur croissante, séparant ces trois ondes, doivent être le siège d'une faible agitation, analogue aux lents mouvements uniformes signalés ici, et qui en constituent un cas limite, savoir, celui où deviennent égales deux des trois vitesses de propagation et où, par conséquent, l'un des deux intervalles s'évanouit.

5. Ce Mémoire se termine par la démonstration d'une loi d'*appel vers les vides*, qui se déduit des mêmes formules et qui est analogue à celle de l'attraction newtonienne. Je l'avais remarquée d'abord (en 1870) chez les liquides, dans la question de l'écoulement par les orifices dont elle fournit une solution partielle; et j'ai reconnu ultérieurement (en 1882) qu'elle s'étend non seulement aux gaz, mais encore aux solides élastiques isotropes.

---

(1) Comme paraît bien l'avoir remarqué pour les fluides Poisson, dans la première Partie de son Mémoire de 1830 cité plus haut.

(2) On peut voir, touchant la dissipation graduelle de ces petits mouvements et surtout de l'onde fixe, dans l'éther, la note des pages 330, 331, au Tome II de mes Leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la lumière,* et une note des pages 51, 52 du Tome I. Dans les fluides, les frottements ou des forces analogues produisent également, à la longue, cette dissipation. J'entends par les mots *forces analogues* la partie des pressions, pareille en tous sens, qui dépend, dans les fluides naturels, de la vitesse avec laquelle se produisent les contractions et dilatations *cubiques*. Cette partie des pressions intervient, par exemple, à l'avant des ondes aériennes dues à une explosion, pour y réduire la pression ou rendre moins *abrupte* la tête de l'onde, comme on peut voir au n° VI d'un Mémoire que j'ai publié en juillet 1891 dans le *Journal de Physique théorique et appliquée* (2e série, t. X).

§ II. — Équations du mouvement et marche à suivre pour les intégrer; calcul de la dilatation cubique θ.

6. Les équations indéfinies des petits mouvements pour le milieu élastique isotrope sont, comme on sait, avec les deux constantes a, A (racines carrées positives des quotients de μ, $\lambda + 2\mu$ par la densité ρ),

$$(1) \qquad \frac{d^2(\xi, \eta, \zeta)}{dt^2} - a^2 \Delta_2(\xi, \eta, \zeta) = (\mathrm{A}^2 - a^2)\frac{d\theta}{d(x, y, z)},$$

où θ, dilatation cubique, a l'expression $\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$, et où Δ_2 désigne le symbole opératoire $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}$.

Il faut y joindre, comme conditions d'*état initial*, que, pour $t = 0$, ξ, η, ζ et $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ se réduisent à six fonctions de x, y, z nulles hors de la petite sphère d'ébranlement, mais arbitrairement données dans cette sphère, *sous la réserve* de la continuité en x, y, z nécessaire, même à l'instant $t = 0$, pour que les équations (1) y aient un sens.

Les trois inconnues ξ, η, ζ ne sont pas séparées dans le système (1). Mais, si l'on pouvait déterminer préalablement la dilatation cubique θ, les seconds membres de (1) deviendraient des fonctions explicites de x, y, z, t; et l'on aurait alors, pour chaque déplacement ξ, η, ζ considéré en particulier, une équation linéaire *à second membre*, dont l'intégrale générale comprendrait, avec une quelconque de ses intégrales particulières, l'intégrale générale de la même équation *prise sans second membre* ou, dès lors, identique à *celle du son*, qu'on sait intégrer.

7. Or les équations (1), différentiées en x, y, z et ajoutées, donnent, comme on sait,

$$(2) \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathrm{A}^2 \Delta_2 \theta.$$

D'ailleurs, les valeurs initiales de θ et de sa dérivée première en t, nulles hors de la sphère d'ébranlement, sont, dans cette sphère, deux fonctions connues, $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, sommes des dérivées respectives en x, y, z des trois déplacements initiaux donnés ξ_0, η_0, ζ_0 ou de trois vitesses initiales analogues, également données. L'expression de θ, que nous écrirons explicitement $\theta(x, y, z, t)$, sera donc, d'après l'intégrale classique due à Poisson pour l'équation du son, et en employant la notation simple des *potentiels sphériques* (1),

$$(3) \qquad \theta(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi A^2} \frac{d}{dt} \int_\sigma \frac{f(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma}{t} + \frac{1}{4\pi A^2} \int_\sigma \frac{F(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma}{t};$$

σ y désigne la surface, $4\pi r^2$ ou $4\pi A^2 t^2$, de la sphère, d'un rayon r égal à At, décrite autour du point (x, y, z) comme centre; $d\sigma$ est un quelconque de ses éléments, à coordonnées x_1, y_1, z_1; et $\int_\sigma$ exprime des sommes étendues à toute l'aire σ, mais réductibles, vu les facteurs $f(x_1, y_1, z_1)$, $F(x_1, y_1, z_1)$, à leurs éléments concernant les parties de la sphère situées dans la région des ébranlements.

J'appellerai R la distance du point considéré (x, y, z) à l'origine.

S'il appartient à la région d'ébranlement, on aura $R < \varepsilon$; et les sphères $4\pi r^2$, tout entières comprises dans cette région pour r ou At moindre que $\varepsilon - R$, conserveront une partie commune avec elle jusqu'à ce que r ou At excède la somme $\varepsilon + R$.

Si, au contraire, le point (x, y, z) est extérieur à la région d'ébranlement, ou que l'on ait $R > \varepsilon$, les sphères $4\pi r^2$ couperont la région d'ébranlement quand r ou At sera compris entre les deux limites $R \mp \varepsilon$; et θ différera de zéro, en (x, y, z), dès que At sera plus grand que $R - \varepsilon$, pour s'annuler de nouveau (définitivement) quand At atteindra la valeur $R + \varepsilon$. Ce qu'on peut appeler l'*onde des dilatations cubiques* θ emploiera donc le temps $\frac{2\varepsilon}{A}$ à *franchir* le point (x, y, z); et, à un moment t donné, elle comprendra la couche sphérique, d'épaisseur 2ε, ayant, autour de l'origine, les rayons intérieur et extérieur $R = At \mp \varepsilon$.

---

(1) *Voir* le Tome II (*Calcul intégral*) de mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique*, second fascicule (*Compléments*), p. 195* à 198* et 444* à 447*.

8. Pour les points (x, y, z) alignés sur un même rayon vecteur issu de l'origine, l'expression (3) de θ prend une forme approchée simple, aux distances R très grandes par rapport au rayon ε de la région d'ébranlement. Alors les sphères $4\pi r^2$ n'ont de commun avec cette région que de petites calottes, ne se distinguant pas $\left(\text{à des écarts près, dans l'espace, évanouissants comme l'inverse } \frac{1}{R}\right)$ des sections planes de la sphère d'ébranlement normales au rayon vecteur considéré. Or ces diverses sections planes sont complètement définies, tant en situation qu'en grandeur, par leur distance δ à l'origine, distance variable de $-\varepsilon$ à ε quand r croît de $R-\varepsilon$ à $R+\varepsilon$, et mesurée sur le prolongement du rayon fixe R en deçà de l'origine. Par suite, les deux intégrales $\int_\sigma f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma$, $\int_\sigma F(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma$, évaluées sur ces sections planes, sont deux fonctions déterminées de δ, que nous pouvons appeler respectivement, *pour une même orientation donnée du rayon vecteur* R, $\psi(\delta)$, $\Psi(\delta)$, en posant ainsi

$$(4) \qquad \int_\sigma f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma = \psi(\delta), \qquad \int_\sigma F(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma = \Psi(\delta).$$

Quand δ approche des limites $\mp\varepsilon$, ces deux fonctions ψ, Ψ tendent vers zéro comme le carré $(\delta \pm \varepsilon)^2$; car, tant les sections planes de la sphère d'ébranlement (ou même les calottes voisines découpées à son intérieur par les sphères $4\pi r^2$ de rayon $R+\delta$) que, par raison de continuité à cette limite, les valeurs de f ou de F, y deviennent comparables à la différence $\delta \pm \varepsilon$.

Au delà des limites $\delta = \mp\varepsilon$, les intégrales constituant les premiers membres de (4) n'ont plus d'éléments différents de zéro; et $\psi(\delta)$, $\Psi(\delta)$ restent nuls.

9. Grâce aux valeurs (4) des deux intégrales, valeurs approchées sauf erreur de l'ordre de $\frac{1}{R}$, et où δ désigne la différence $At - R$, le second membre de (3) sera donc

$$\frac{1}{4\pi A}\left[\frac{d}{dt}\,\frac{\psi(At-R)}{At} + \frac{\Psi(At-R)}{At}\right],$$

avec erreur comparable à l'inverse de $\mathrm{A}t\mathrm{R}$, c'est-à-dire à l'inverse de R^2, puisque $\mathrm{A}t$, compris entre $\mathrm{R}-\varepsilon$ et $\mathrm{R}+\varepsilon$ tant que ψ, Ψ diffèrent de zéro, est alors voisin de R. Or les deux produits de $\psi(\mathrm{A}t-\mathrm{R})$, $\Psi(\mathrm{A}t-\mathrm{R})$ par l'inverse de $\mathrm{A}t$ ont leur facteur ψ ou Ψ rapidement changeant avec la variable $\mathrm{A}t$, qui lui fait prendre toutes ses valeurs sensibles dans un intervalle 2ε, mais, leur autre facteur, presque confondu avec l'inverse de R et à dérivée très faible (de l'ordre du carré de cet inverse). On peut donc, encore sauf erreur comparable à l'inverse de R^2, réduire à R les dénominateurs $\mathrm{A}t$, et, par suite, la formule (3), à

$$(5)\quad \left(\text{pour } \frac{\mathrm{R}}{\varepsilon} \text{ très grand}\right) \qquad \theta(x, y, z, t) = \frac{\mathrm{A}\psi'(\delta)+\Psi(\delta)}{4\pi\mathrm{AR}}, \quad \text{où} \quad \delta = \mathrm{A}t-\mathrm{R}.$$

Les fonctions $\psi(\delta)$, $\Psi(\delta)$ et leur dérivée première, nulles aux deux limites $\delta=\mp\varepsilon$ et hors de ces limites, varient non seulement avec δ, c'est-à-dire avec $\mathrm{A}t$ et avec R, mais, en outre, avec la direction du rayon vecteur R, auquel sont perpendiculaires les sections planes considérées de la sphère d'ébranlement. Seulement, tandis que ces fonctions changent vite avec δ, elles changent, aux grandes distances R de l'origine, très lentement d'un rayon vecteur à ses voisins, les dérivées en x, y, z des cosinus directeurs de R étant visiblement comparables à l'inverse de R. Et il suit de là que, à des termes près en $\frac{1}{\mathrm{R}^2}$, que l'on convient de négliger, l'expression (5) de θ peut être censée avoir, d'une part, son dénominateur constant, d'autre part, son numérateur, quand il n'est pas nul, variable seulement avec la différence $\delta=\mathrm{A}t-\mathrm{R}$. Ainsi, *le long d'un même rayon* R *prolongé, toutes les dilatations cubiques* θ *existant, à chaque instant, aux divers points de l'épaisseur* 2ε *de l'onde, se transmettent de plus en plus loin de la région d'ébranlement avec la vitesse de propagation* A, *tout en s'affaiblissant, peu à peu, comme l'inverse de la distance* R *au centre.*

10. On remarquera que la sphère d'ébranlement, décomposée en tranches minces perpendiculaires au rayon vecteur R, aurait pour éléments $d\varpi$ de volume les produits, $d\sigma\, d\delta$, des divers éléments $d\sigma$ de ses sections planes, par leur espacement mutuel $d\delta$; en sorte que les

deux intégrales $\int f(x_1, y_1, z_1)\,d\varpi$, $\int \mathrm{F}(x_1, y_1, z_1)\,d\varpi$, étendues à toute la région d'ébranlement, donneraient d'abord, pour une tranche, les sommes partielles

$$(d\delta)\int f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma, \qquad (d\delta)\int \mathrm{F}(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma,$$

c'est-à-dire

$$\psi(\delta)\,d\delta, \qquad \Psi(\delta)\,d\delta,$$

et, ensuite, pour toutes les tranches, les deux intégrales $\int \psi(\delta)\,d\delta$, $\int \Psi(\delta)\,d\delta$, prises entre les limites $\delta = \mp \varepsilon$. L'on a donc

$$(6) \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \psi(\delta)\,d\delta = \int_{\varpi} f(x_1, y_1, z_1)\,d\varpi, \qquad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Psi(\delta)\,d\delta = \int_{\varpi} \mathrm{F}(x_1, y_1, z_1)\,d\varpi,$$

quantités évidemment indépendantes de l'orientation du rayon R. Et, vu (5), il résulte, en particulier, de la seconde de ces formules, à raison de ce que $\psi(\mp\varepsilon) = 0$:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \int_{\frac{\mathrm{R}-\varepsilon}{\mathrm{A}}}^{\frac{\mathrm{R}+\varepsilon}{\mathrm{A}}} \theta(x, y, z, t)\,dt &= \frac{1}{4\pi \mathrm{A}^2 \mathrm{R}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [\mathrm{A}\,\psi'(\delta) + \Psi(\delta)]\,d\delta \\ &= \frac{1}{4\pi \mathrm{A}^2 \mathrm{R}} \int_{\varpi} \mathrm{F}(x_1, y_1, z_1)\,d\varpi. \end{aligned} \right.$$

C'est dire que *la dilatation cubique* θ *en chaque point, pendant le temps constant* $\frac{2\varepsilon}{\mathrm{A}}$ *où elle y diffère de zéro, a sa valeur moyenne inverse de la distance* R *au centre et la même le long de tous les rayons vecteurs*.

11. Dans l'hypothèse, faite ici, où non seulement la dilatation cubique *initiale* θ_0 et la dérivée *initiale* de θ en t, mais même les déplacements initiaux ξ_0, η_0, ζ_0 et les vitesses initiales correspondantes, n'ont différé de zéro qu'à l'intérieur de la sphère d'ébranlement, il est aisé de reconnaître que les valeurs moyennes de $f(x, y, z)$ et $\mathrm{F}(x, y, z)$ y sont nulles. Car, vu l'égalité de θ à la somme des trois

dérivées respectives de ξ, η, ζ en x, y, z, une conversion familière d'intégrales prises dans toute la région ϖ d'ébranlement en intégrales relatives à sa surface σ, donne immédiatement, si α, β, γ désignent les trois cosinus directeurs de la normale infiniment petite dn aboutissant de l'intérieur à l'élément quelconque $d\sigma$ de cette surface limite,

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\varpi f(x,y,z)\,d\varpi \\ \text{ou} \\ \displaystyle\int_\varpi \left(\frac{d\xi_0}{dx}+\frac{d\eta_0}{dy}+\frac{d\zeta_0}{dz}\right)d\varpi = \int_\sigma (\xi_0\alpha+\eta_0\beta+\zeta_0\gamma)\,d\sigma = 0. \end{cases}$$

Et, en effet, la matière qui occupe la région d'ébranlement, à l'époque $t=0$ où ξ, η, ζ s'annulent sur toute l'étendue de la limite σ, a même surface et, par suite, même volume *total* qu'à l'état naturel. Donc ses divers éléments matériels, qui sont $d\varpi$ à l'état naturel, mais $(1+\theta_0)\,d\varpi$ dans l'état initial, donnent sommes pareilles $\int d\varpi$, $\int (1+\theta_0)\,d\varpi$; et l'on a bien $\int \theta_0\,d\varpi = 0$.

De même

$$(9)\quad \int_\varpi \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 d\varpi = \int_\sigma \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_0\alpha+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0\beta+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0\gamma\right]d\sigma = 0.$$

Or, on déduit aisément de ces deux formules (8), (9) et de l'équation indéfinie (2), une valeur constamment nulle pour l'intégrale $\int \theta\,d\varpi$, étendue à l'espace ϖ, toujours fini d'après (3), où la dilatation cubique θ diffère alors de zéro et aux limites duquel cette expression (3) la fait annuler. En d'autres termes, *la dilatation cubique* est constamment nulle *en moyenne* dans l'étendue, sans cesse finie, où elle ne l'est pas identiquement.

Afin de le reconnaître, appelons ϖ un espace assez grand pour que, de $t=0$ à $t=t$, l'onde des dilatations cubiques θ n'en sorte pas; et, σ désignant sa surface, dn la normale à un élément $d\sigma$ de celle-ci, intégrons terme à terme, dans toute l'étendue ϖ, l'équation indéfinie (2) multipliée par $d\varpi$. La même conversion, dans le second membre, d'intégrales de volume en intégrales de surface donnera successivement

$$(10) \quad \frac{d^2}{dt^2}\int_\varpi \theta\, d\varpi = \mathrm{A}^2 \int_\sigma \left(\frac{d\theta}{dx}\alpha + \frac{d\theta}{dy}\beta + \frac{d\theta}{dz}\gamma\right) d\sigma = \mathrm{A}^2 \int_\sigma \frac{d\theta}{dn}\, d\sigma = 0.$$

Donc la somme $\int \theta\, d\varpi$ a sa dérivée seconde en t identiquement nulle; et comme, tant sa valeur initiale (8), que sa dérivée en t initiale (9), sont nulles aussi, il vient bien

$$\int \theta\, d\varpi = 0.$$

Le dernier membre de (7), en particulier, étant nul, les dilatations cubiques successives, θ, observées en chaque point (x, y, z) très distant de l'origine comparativement au rayon ε de la sphère d'ébranlement, auront leur valeur moyenne sensiblement nulle; et il en sera, par suite, de même à tout instant, d'après (5), le long de toute normale 2ε commune aux deux faces intérieure et extérieure de l'onde de ces dilatations cubiques θ.

§ III. — Solution particulière exprimant des déplacements sans rotation moyenne et producteurs des dilatations cubiques effectives.

12. Maintenant que les seconds membres de (1) sont connus, formons une intégrale particulière ξ_1, η_1, ζ_1, aussi simple que possible, de ces équations. A cet effet, choisissons-la dépourvue de toute *rotation moyenne*, dont les trois composantes ω_x, ω_y, ω_z seraient, comme on sait,

$$(11) \quad \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta}{dy} - \frac{d\eta}{dz}\right), \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dz} - \frac{d\zeta}{dx}\right), \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta}{dx} - \frac{d\xi}{dy}\right).$$

Nous ferons, par conséquent, différentielle totale exacte, l'expression

$$\xi_1\, dx + \eta_1\, dy + \zeta_1\, dz,$$

et soit Φ la fonction de x, y, z, t qui aura ξ_1, η_1, ζ_1 pour dérivées respectives en x, y, z. Posant ainsi

$$(12) \qquad (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \frac{d\Phi}{d(x, y, z)},$$

déterminons, s'il est possible, Φ, à une fonction arbitraire près de t, par la condition que les déplacements ξ_1, η_1, ζ_1 produisent justement la véritable dilatation cubique θ déjà trouvée, ou qu'ils aient la somme $\Delta_2\Phi$ de leurs trois dérivées respectives en x, y, z égale à $\theta(x, y, z, t)$. Effectivement, l'équation indéfinie ainsi obtenue,

$$(13) \qquad \Delta_2\Phi = \theta(x, y, z, t),$$

différentiée en x, y, z, montre que le paramètre différentiel Δ_2 de chacune des trois dérivées ξ_1, η_1, ζ_1 égalera la dérivée correspondante en x, y ou z de $\theta(x, y, z, t)$, et sera, par conséquent, lui-même connu partout, à chaque époque t. Or on sait qu'une fonction dont le paramètre différentiel Δ_2 est donné, se trouve déterminée entièrement si elle doit s'annuler aux distances infinies de l'origine, comme y sont astreints les déplacements effectifs et comme nous conviendrons d'y astreindre même les déplacements partiels ξ_1, η_1, ζ_1. Ainsi la fonction Φ, à dérivées en x, y, z déterminées, le sera elle-même, à une fonction arbitraire près de t seul, dont nous ferons abstraction n'ayant en vue que ces dérivées ξ_1, η_1, ζ_1.

Or, d'après le théorème de Poisson, sur l'égalité à $-4\pi\rho$ du paramètre Δ_2 du potentiel inverse relatif à une masse réelle ou fictive de densité ρ, l'équation (13) est satisfaite par un tel potentiel

$$(14) \qquad \Phi = -\frac{1}{4\pi}\int_{\varpi} \frac{\theta(x_1, y_1, z_1, t)\, d\varpi}{r},$$

intégrale bien définie, dans laquelle ϖ désigne, si l'on veut, tout l'espace, mais pouvant être réduit à la région sans cesse bornée où diffère de zéro, à l'époque t, la dilatation cubique θ, $d\varpi$ son élément à coordonnées x_1, y_1, z_1, enfin r la distance du point quelconque (x, y, z) à l'élément $d\varpi$. Et comme cette intégrale s'annule, avec l'inverse de r, aux points (x, y, z) infiniment distants de l'origine, elle y a bien ses dérivées ξ_1, η_1, ζ_1 en x, y, z évanouissantes.

13. Il reste à s'assurer que les déplacements partiels ξ_1, η_1, ζ_1, ainsi producteurs, vu (12) et (13), de la dilatation cubique effective $\theta(x, y, z, t)$, satisfont aux équations (1) et constituent, par conséquent, la solution particulière cherchée.

Les dérivations en x, y, z du potentiel Φ peuvent évidemment se faire, en différentiant, sous le signe $\int$, par rapport à x_1, y_1, z_1, la densité de la masse potentiante, qui est $\theta(x_1, y_1, z_1, t)$ à un facteur constant près : car, par exemple, le déplacement dx imprimé au point mobile (x, y, z) amène, par rapport à lui, le point $(x_1 + dx, y_1, z_1)$ de la masse potentiante à la distance r où était précédemment le point (x_1, y_1, z_1); en sorte que l'élément correspondant

$$\left(\theta + \frac{d\theta}{dx_1}\,dx\right)d\varpi$$

de masse prend, dans le potentiel, le rôle qu'avait précédemment l'élément $\theta\, d\varpi$.

On aura donc pour le paramètre $\Delta_2\Phi$ l'expression

$$\Delta_2\Phi = -\frac{1}{4\pi}\int_\varpi \frac{d\varpi}{r}\left(\frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dy_1^2} + \frac{d^2}{dz_1^2}\right)\theta(x_1, y_1, z_1, t), \tag{15}$$

ou, vu l'équation (2) identiquement vérifiée par la fonction θ (sauf x_1, y_1, z_1 mis pour x, y, z),

$$\begin{aligned}\Delta_2\Phi &= -\frac{1}{4\pi}\int_\varpi \frac{d^2\theta(x_1, y_1, z_1, t)}{A^2\,dt^2}\,\frac{d\varpi}{r}\\ &= \frac{1}{A^2}\,\frac{d^2}{dt^2}\left(-\frac{1}{4\pi}\int_\varpi \frac{\theta(x_1, y_1, z_1, t)\,d\varpi}{r}\right) = \frac{1}{A^2}\,\frac{d^2\Phi}{dt^2};\end{aligned}$$

et il viendra finalement, en Φ, l'équation aux dérivées partielles déjà obtenue pour θ, savoir :

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = A^2\Delta_2\Phi. \tag{16}$$

Rapprochée de (13), elle donne

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = A^2\,\theta(x, y, z, t), \tag{17}$$

et relie ainsi, très simplement, Φ à θ *sur place,* c'est-à-dire *en chaque point* (x, y, z) *considéré seul.*

Or, de (17), retranchons l'équation (13) multipliée par a^2, et il viendra

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} - a^2\Delta_2\Phi = (A^2 - a^2)\,\theta, \tag{18}$$

relation dont les dérivées en x, y, z seront

$$\frac{d^2(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)}{dt^2} - a^2\Delta_2(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = (A^2 - a^2)\frac{d\theta}{d(x, y, z)}, \tag{19}$$

c'est-à-dire, précisément, les équations (1), avec ξ_1, η_1, ζ_1 substitués à ξ, η, ζ. Ainsi ξ_1, η_1, ζ_1 constituent bien la solution particulière cherchée.

14. L'équation (17) montre que le potentiel Φ et, par suite, les déplacements ξ_1, η_1, ζ_1 deviennent, en chaque point (x, y, z) situé à une distance donnée R de l'origine, des fonctions linéaires du temps t, à partir de l'instant où At excède $R + \varepsilon$, c'est-à-dire où l'onde des dilatations cubiques θ achève *de franchir* ce point, y laissant subsister définitivement une valeur de θ nulle; et qu'ils le sont aussi, quand on a $R > \varepsilon$ ou qu'il s'agit d'un point (x, y, z) extérieur à la sphère d'ébranlement, depuis $t = 0$ jusqu'à l'instant où, At égalant $R - \varepsilon$, l'onde des dilatations cubiques θ *atteint* ce point (x, y, z) et y rend θ différent de zéro.

Occupons-nous d'abord des temps, ultérieurs au passage de l'onde, où l'on a

$$At > R + \varepsilon,$$

et cherchons vers quelle limite y tend, pour t infini, l'expression (14) de Φ. Le facteur $\theta(x_1, y_1, z_1, t)$, donné très sensiblement par (5), n'y diffère de zéro que pour les éléments $d\varpi$ de la couche sphérique, d'épaisseur 2ε et de rayon moyen At, ou de volume $(4\pi A^2t^2)(2\varepsilon)$ environ, décrite autour de l'origine, couche où θ est comparable à l'inverse de At. D'autre part, les distances r de ces éléments $d\varpi$ au point (x, y, z) ont évidemment comme plus petite valeur $At - \varepsilon - R$

et comme plus grande valeur $At + \varepsilon + R$; de sorte qu'on peut les écrire

$$At + k(\varepsilon + R), \qquad \text{ou} \qquad At\left(1 + k\frac{\varepsilon + R}{At}\right),$$

si k y varie de -1 à $+1$. Leur inverse est donc

$$\frac{1}{At}\left(1 + k\frac{\varepsilon + R}{At}\right)^{-1} = (\text{très sensiblement})\ \frac{1}{At} - \frac{R + \varepsilon}{A^2 t^2} k,$$

et l'expression (14) de Φ se dédouble en un premier terme

$$-\frac{1}{4\pi A t}\int_{\varpi} \theta \, d\varpi,$$

identiquement nul comme la valeur moyenne de θ à toute époque, plus un deuxième terme

$$\frac{\varepsilon + R}{4\pi A^2 t^2}\int_{\varpi} k\theta \, d\varpi,$$

évanouissant *même en y prenant tous les éléments en valeur absolue*, car $k\theta$ y est de l'ordre de $\frac{1}{At}$ et $\int d\varpi$ de l'ordre de $A^2 t^2$. Ainsi, Φ et, à plus forte raison, les dérivées de Φ en t s'annulent pour t infini.

Donc la fonction linéaire de t qui exprime Φ en (x, y, z) après le passage de l'onde des dilatations cubiques θ, a ses deux coefficients nuls; et Φ, ξ_1, η_1, ζ_1 se réduisent à zéro dès l'instant où θ s'y évanouit d'une manière définitive. C'est dire que, *dans l'onde constituée par les déplacements particuliers ξ_1, η_1, ζ_1 producteurs, sans rotation moyenne, de la dilatation cubique effective, le repos et l'état naturel du milieu se trouvent pleinement rétablis, à l'arrière de l'onde même des dilatations cubiques*.

15. Mais *il n'en est pas tout à fait de même à l'avant*, dans l'espace lieu des points (x, y, z) dont la distance R à l'origine est supérieure à $At + \varepsilon$ et où, par conséquent, on a

$$At < R - \varepsilon.$$

L'expression (14) de Φ, fonction linéaire de t, y ayant évidemment comme valeur initiale Φ_0 et comme dérivée en t initiale, que nous appellerons Π_0, les deux intégrales définies

$$(20)\qquad \Phi_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\varpi}\frac{f(x_1, y_1, z_1)\,d\varpi}{r}, \qquad \Pi_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\varpi}\frac{F(x_1, y_1, z_1)\,d\varpi}{r},$$

où l'on sait que f et F désignent les valeurs initiales de θ et de sa dérivée en t, il viendra

$$(21)\quad (\text{pour } At < R - \varepsilon)\quad \Phi = \Phi_0 + \Pi_0 t, \quad (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = \frac{d\Phi_0}{d(x, y, z)} + \frac{d\Pi_0}{d(x, y, z)}t.$$

On voit que, dans la solution particulière ξ_1, η_1, ζ_1, *les points matériels du milieu, à l'avant de l'onde des dilatations cubiques* θ, *sont animés en sens divers de mouvements rectilignes et uniformes*. Même dans le cas où les déplacements initiaux ξ_0, η_0, ζ_0 n'ont été accompagnés d'aucune impulsion, c'est-à-dire d'aucune vitesse initiale, cas où l'on a identiquement

$$F = 0, \qquad \Pi_0 = 0,$$

et où le repos existe, en chaque point, avant l'instant où des dilatations cubiques θ s'y produisent dans l'onde constituée par les déplacements ξ_1, η_1, ζ_1, ceux-ci n'y sont généralement pas nuls, ni l'état naturel établi, puisque ξ_1, η_1, ζ_1 ne se réduisent à zéro, dans (21), que si le potentiel Φ_0 devient indépendant de x, y, z [1].

16. Du reste, ces déplacements constants, exprimés par les dérivées de Φ_0 en x, y, z, et les vitesses constantes, exprimées de même par les dérivées analogues de Π_0, qui viennent y ajouter des parties de plus en plus grandes quand il y a impulsion initiale, sont des quantités très petites de l'ordre du cube $\frac{1}{R^3}$, aux distances R considérables.

---

[1] Un cas simple où il l'est, et où s'annule aussi Π_0, a lieu quand les données d'état initial font la dilatation cubique θ et sa dérivée en t uniquement fonctions de la distance à l'origine, de sorte que le potentiel Φ, *dû à des couches sphériques*, soit, *hors de ces couches*, le même que si toute la masse potentiante se trouvait concentrée à l'origine. Car alors cette masse figure dans Φ par sa valeur totale nulle $\int \theta\,d\varpi$.

Car, dans les formules (20), où l'espace ϖ est la sphère d'ébranlement, de rayon ε, le dénominateur r se trouve compris entre $R - \varepsilon$ et $R + \varepsilon$, ou peut s'écrire $R + \varepsilon k$, avec k variable de -1 à $+1$; et l'on a

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\varepsilon}{R} k\right)^{-1} = (\text{sensiblement})\ \frac{1}{R} - \frac{\varepsilon}{R^2} k;$$

d'où, en substituant dans (20) cette expression approchée de l'inverse de r et observant que les deux valeurs moyennes des fonctions f, F sont nulles,

$$(22)\qquad \Phi_0 = \frac{\varepsilon}{4\pi R^2}\int_\varpi k f(x_1, y_1, z_1)\,d\varpi, \qquad \Pi_0 = \frac{\varepsilon}{4\pi R^2}\int_\varpi k\,F(x_1, y_1, z_1)\,d\varpi,$$

valeurs comparables à l'inverse de R^2.

Il en résulte, pour les variations qu'éprouvent Φ_0 et Π_0 d'un point à l'autre, des quantités comparables aux variations simultanées de $\frac{1}{R^2}$, lesquelles sont, par unité du chemin parcouru, de l'ordre de $\frac{1}{R^3}$. Ainsi, les dérivées de Φ_0, Π_0 en x, y, z seront de cet ordre, et aussi les valeurs (21) de ξ_1, η_1, ζ_1, sauf dans le cas d'impulsions initiales où, At devenant comparable à R, c'est-à-dire très grand, ces déplacements passent, comme leur dernier terme, à l'ordre de petitesse de $\frac{1}{R^2}$ seulement. On voit que, *même alors*, ils ne cessent pas d'être analytiquement négligeables à côté des dilatations cubiques θ survenant pour $At > R - \varepsilon$ et qui sont comparables à l'inverse de R.

17. Évaluons maintenant ξ_1, η_1, ζ_1 de $At = R - \varepsilon$ à $At = R + \varepsilon$, c'est-à-dire durant le passage de l'onde de ces dilatations cubiques θ. Multiplions deux fois successivement par dt, et intégrons *sur place*, chaque fois, l'équation (17), en *reculant* à partir de l'époque où $At - R$ égale ε, et où s'annulent tant Φ que sa dérivée première, *essentiellement continues en t*, vu l'ordre corrélatif (le second) des équations du mouvement. Il viendra, en posant $At - R = \delta$, $A\,dt = d\delta$,

$$(23)\qquad \Phi = \int_\varepsilon^{At-R} d\delta \int_\varepsilon^{\delta} \theta\, d\delta.$$

Substituons-y l'expression (5) de θ, approchée sauf erreur de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$ aux grandes distances R. Nous aurons, à une erreur près du même ordre, et vu que $\psi(\pm\varepsilon) = 0$,

$$\Phi = \frac{1}{4\pi R}\left[\int_{\varepsilon}^{At-R} \psi(\partial)\,d\partial + \int_{\varepsilon}^{At-R} \frac{d\partial}{A}\int_{\varepsilon}^{\partial} \Psi(\partial)\,d\partial\right],$$

ou bien, en observant qu'une intégration par parties donne

$$\int d\partial \int_{\varepsilon}^{\partial} \Psi(\partial)\,d\partial = \partial\int_{\varepsilon}^{\partial} \Psi(\partial)\,d\partial - \int \Psi(\partial)\,\partial\,d\partial,$$

et réduisant,

$$(24)\quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\text{pour } \dfrac{R}{\varepsilon} \text{ très grand}\right) \\ \Phi = \dfrac{1}{4\pi R}\left[\displaystyle\int_{\varepsilon}^{At-R} \frac{A\,\psi(\partial) - \partial\,\Psi(\partial)}{A}\,d\partial + \frac{At-R}{A}\int_{\varepsilon}^{At-R} \Psi(\partial)\,d\partial\right]. \end{array}\right.$$

A la limite $At - R = -\varepsilon$, pour laquelle s'annulent les valeurs moyennes de $\psi(\partial)$ et $\Psi(\partial)$ sous les signes $\int$, la valeur de Φ se réduit à

$$\frac{1}{4\pi AR}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Psi(\partial)\,\partial\,d\partial;$$

et elle est bien d'accord avec celle qu'y donnait la première formule (21), savoir $\Pi_0\frac{R}{A}$, toujours à des erreurs près de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$. En effet, si, pour obtenir l'expression (22) de Π_0, l'on décompose la sphère ϖ d'ébranlement en tranches $\sigma\,d\partial$ normales au rayon vecteur R, la distance $R + k\varepsilon$ de chaque tranche au point (x, y, z) sera très sensiblement $R + \partial$; ce qui donnera

$$k = \frac{\partial}{\varepsilon},$$

et, par suite,

$$(25)\quad \Phi = \Pi_0\frac{R}{A} = \frac{1}{4\pi AR}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \partial\,d\partial \int_{\sigma} F(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma = \frac{1}{4\pi AR}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Psi(\partial)\,\partial\,d\partial.$$

18. La valeur de Φ, qui est (24) dans toute l'étendue de l'onde des dilatations cubiques θ, contient en facteur, comme l'on voit, le petit inverse de R, inverse dont les dérivées en x, y, z seraient de l'ordre de son carré que l'on néglige, et, en outre, une fonction finie de $At - R$, dépendant aussi, comme $\psi(\delta)$ et $\Psi(\delta)$, des cosinus directeurs du rayon R. Or les dérivées en x, y, z de ces cosinus directeurs sont comparables à l'inverse de R et, multipliées par cet inverse, ne donneraient encore que des produits négligeables. Donc, les dérivées ξ_1, η_1, ζ_1 de Φ par rapport à x, y, z s'obtiendront en ne faisant varier que la variable $At - R$ (où R est fonction de x, y, z) et donneront, pour ξ_1, η_1, ζ_1, les produits respectifs de $-\frac{1}{A}\frac{d\Phi}{dt}$ par les cosinus directeurs $\frac{(x, y, z)}{R}$ du rayon vecteur R.

C'est dire que, *dans toute l'épaisseur* 2ε *de l'onde des dilatations cubiques* θ, *le déplacement à composantes* ξ_1, η_1, ζ_1 *est longitudinal*, c'est-à-dire dirigé en chaque point (x, y, z) suivant le rayon émané du centre d'ébranlement, ou normal aux ondes sphériques. La formule (24) donne, pour sa valeur,

$$(26) \qquad -\frac{1}{A}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{4\pi R}\left[\psi(At - R) + \int_{\varepsilon}^{At-R} \Psi(\delta)\frac{d\delta}{A}\right].$$

Une seconde dérivation par rapport à $At - R$, qui reviendrait sensiblement à évaluer la dérivée en R du déplacement (26), changée de signe, donnerait la *contraction linéaire suivant le rayon* R, à laquelle se réduit, *loin du centre*, la contraction cubique $-\theta$. La vitesse effective, dérivée en t du déplacement, serait d'ailleurs, d'après (26),

$$-\frac{1}{A}\frac{d^2\Phi}{dt^2}, \qquad \text{ou} \qquad A\frac{d}{d(At - R)}\left(-\frac{1}{A}\frac{d\Phi}{dt}\right),$$

c'est-à-dire, vu (17), $A\theta$, produit de la dilatation tant linéaire suivant le rayon, que cubique, par la vitesse de propagation A.

La valeur moyenne de $\Psi(\delta)$, sous le signe $\int$ de (26), s'annulant pour $At - R = -\varepsilon$, le déplacement s'évanouit, à raison de $\psi(\pm\varepsilon) = 0$, non seulement pour $At - R = \varepsilon$ ou à la limite intérieure de l'onde des dilatations cubiques θ, mais aussi pour $At - R = -\varepsilon$, c'est-à-dire à la limite extérieure, résultat signifiant seulement qu'elle y devient, conformément aux dernières formules (21), de l'ordre de petitesse des quantités comparables à $\frac{1}{R^2}$ et négligées ici.

§ IV. — Solution complémentaire, qui exprime des déplacements s'effectuant sans changements de densité, mais offrant les rotations moyennes effectives.

19. Si l'on appelle ξ', η', ζ' ce qu'il faut ajouter à ξ_1, η_1, ζ_1 pour obtenir les déplacements effectifs ξ, η, ζ, ces déplacements complémentaires ξ', η', ζ' vérifieront, comme on a vu (n° 6), les trois équations (1) prises sans seconds membres; et l'on aura pour régir, par exemple, ξ' l'équation

$$\frac{d^2\xi'}{dt^2} = a^2 \Delta_2 \xi'. \tag{27}$$

C'est encore celle du son, mais dans un fluide où la vitesse de propagation serait a et non plus A. Les valeurs initiales de ξ' et de sa dérivée en t égaleront respectivement, si nous appelons $\xi_0(x, y, z)$ et $\Xi_0(x, y, z)$ celles de ξ et de $\frac{d\xi}{dt}$, les excédents de ξ_0 et de Ξ_0 sur $\frac{d\Phi_0}{dx}$ et $\frac{d\Pi_0}{dx}$, qui expriment les valeurs initiales de ξ_1 et de $\frac{d\xi_1}{dt}$. Par suite, le déplacement complémentaire ξ' se formera en retranchant, de son expression relative au cas où l'on aurait

$$(\text{pour } t = 0) \qquad \xi' = \xi_0(x, y, z), \qquad \frac{d\xi'}{dt} = \Xi_0(x, y, z), \tag{28}$$

son expression relative au cas où l'on aurait

$$(\text{pour } t = 0) \qquad \xi' = \frac{d\Phi_0}{dx}, \qquad \frac{d\xi'}{dt} = \frac{d\Pi_0}{dx}. \tag{29}$$

Or cette dernière expression vérifiera évidemment toutes les conditions (27), (29) la déterminant, si on lui donne la forme $\frac{d\Phi'}{dx}$, en assujettissant Φ' aux relations suivantes, desquelles (27) et (29) résultent par une dérivation en x :

$$(30) \quad \frac{d^2\Phi'}{dt^2} = a^2\Delta_2\Phi'; \qquad (\text{pour } t=0) \quad \Phi' = \Phi_0 \quad \text{et} \quad \frac{d\Phi'}{dt} = \Pi_0.$$

20. Cela posé, si l'on remplaçait, dans celles-ci (30), Φ' par Φ et a par A, l'on aurait, avec l'équation indéfinie (16) qui régit effectivement Φ, les conditions initiales justement impliquées dans (21), d'ailleurs évidentes pour tout l'espace et suffisantes pour compléter la détermination de Φ. Donc Φ n'est pas autre chose que ce que devient Φ' par la substitution de A à a; et Φ' se déduira de Φ en mettant, au contraire, a pour la valeur de A. Les formules (23), (3) donnent ainsi immédiatement, en appelant θ' ce que serait θ à toute époque dans l'hypothèse $A = a$,

$$(31) \quad \begin{cases} \Phi' = \displaystyle\int_\varepsilon^{at-R} d\delta \int_\varepsilon^\delta \theta'\, d\delta, \\ \text{avec} \\ \theta' = \dfrac{1}{4\pi a^2}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_\sigma \frac{f(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma}{t} + \frac{1}{4\pi a^2}\int_\sigma \frac{F(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma}{t}, \end{cases}$$

formule où il doit être entendu que les sphères σ sont ici décrites, toujours autour du centre (x, y, z), avec le rayon at (et non plus At), δ désignant en outre, dans θ', la différence $at - R$, ou $at - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Comme, d'ailleurs, l'expression de ξ' vérifiant (27) et correspondant aux données (28) d'état initial se forme de la même manière que la fonction θ' régie par une équation indéfinie pareille et par les données initiales $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$, il viendra finalement

$$(32) \quad \xi' = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{d}{dt}\int_\sigma \frac{\xi_0(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma}{t} + \frac{1}{4\pi a^2}\int_\sigma \frac{\Xi_0(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma}{t} - \frac{d\Phi'}{dx}.$$

Les deux premiers termes sont nuls, d'après ce que nous avons vu pour θ, en dehors des deux limites $at - R = \pm\varepsilon$; et ils expriment ainsi, conjointement avec les termes analogues de η' et de ζ', une onde sphérique d'épaisseur 2ε, dont le rayon moyen, égal à at, grandit de a par unité de temps. Mais le troisième terme, en Φ', nul encore pour $at - R > \varepsilon$, c'est-à-dire à l'arrière de cette onde, ne l'est pas à l'avant, pour $at - R < -\varepsilon$, où Φ' a évidemment la même valeur (21), c'est-à-dire $\Phi_0 + \Pi_0 t$, que Φ. Seulement, tandis que, aux grandes distances R de l'origine, ce troisième terme est, comme les deux premiers, de l'ordre de $\frac{1}{R}$ entre les deux limites $at - R = \pm\varepsilon$, il passe, comme on a vu pour les dérivées de Φ, à un ordre de petitesse supérieur, le second au moins, pour $at - R < -\varepsilon$, où sa valeur est

$$-\frac{d\Phi_0}{dx} - \frac{d\Pi_0}{dx} t,$$

c'est-à-dire égale et contraire à celle de ξ_1 pour $At - R < -\varepsilon$.

21. En résumé, *l'onde partielle que représentent les déplacements complémentaires* ξ', η', ζ', *d'épaisseur* 2ε *comme celle qu'exprimaient* ξ_1, η_1, ζ_1, *mais de rayon moyen* at *et non plus* At, *se trouve précédée, comme elle, d'une tête de longueur indéfinie, où les déplacements sont sans cesse égaux et contraires à ce qu'ils sont dans la sienne aux mêmes points de l'espace.*

De même que l'expression approchée (24) de Φ nous a donné, pour sa dérivée première en x, aux grandes distances R de l'origine, le quotient, par R, d'une fonction de $At - R$, nulle hors des limites $At - R = \pm\varepsilon$, de même aussi la dérivée en x de $-\Phi'$ donnera, au second membre de (32), le quotient, par R, d'une fonction de $at - R$ nulle hors des limites $at - R = \pm\varepsilon$; et, comme il en sera visiblement de même des deux termes précédents en ξ_0 et Ξ_0, l'expression approchée de ξ' pourra s'écrire, sauf erreur comparable à l'inverse de R^2,

$$(33) \qquad \left(\text{pour } \frac{R}{\varepsilon} \text{ très grand}\right) \qquad \xi' = \frac{\varphi(at - R)}{R},$$

φ désignant une fonction *rapidement* variable de $at - R$, nulle hors des limites $at - R = \pm\varepsilon$, et, en outre, lentement variable avec x, y, z quand changera la direction du rayon vecteur R.

Par conséquent, dans l'onde exprimée par les valeurs de ξ', η', ζ' entre les limites $at - R = \pm\varepsilon$ où les déplacements sont sensibles de l'ordre de $\frac{1}{R}$, chaque déplacement se transmet, le long des rayons R prolongés, avec la célérité a, en s'atténuant, peu à peu, comme l'inverse de la distance R au centre.

22. La vitesse des molécules suivant les x, $\frac{d\xi'}{dt}$, y a, toujours sauf erreur comparable à l'inverse de R^2, une relation très simple avec la dilatation linéaire correspondante $\frac{d\xi'}{dx}$. Car, celle-ci, qui s'obtient sensiblement en ne faisant changer que la variable principale $at - R$, est, à ce degré d'approximation,

$$(34) \qquad \frac{d\xi'}{dx} = \frac{-\varphi'(at-R)}{R}\frac{dR}{dx} = -\frac{\varphi'(at-R)}{R}\frac{x}{R} = -\frac{1}{a}\frac{d\xi'}{dt}\frac{x}{R}.$$

On aura des valeurs analogues pour $\frac{d\eta'}{dy}$, $\frac{d\zeta'}{dz}$; et la dilatation cubique *correspondante*, somme des trois dilatations linéaires suivant les axes, sera

$$(35) \qquad \frac{d\xi'}{dx} + \frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz} = -\frac{1}{a}\left(\frac{d\xi'}{dt}\frac{x}{R} + \frac{d\eta'}{dt}\frac{y}{R} + \frac{d\zeta'}{dt}\frac{z}{R}\right),$$

c'est-à-dire le quotient, par $-a$, *de la composante de la vitesse suivant le rayon vecteur* R *prolongé*, qui est la normale aux surfaces sphériques d'onde. Or, les premiers déplacements partiels ξ_1, η_1, ζ_1 donnant déjà la dilatation cubique *effective*, celle-là [(35)] est nulle. Par conséquent, dans l'onde qu'expriment ξ', η', ζ', la vitesse des molécules, aux grandes distances R du centre d'ébranlement, est sans cesse perpendiculaire aux rayons vecteurs. C'est bien dire que *les mouvements y sont transversaux*, ou se font partout dans les plans tangents aux surfaces d'onde.

23. Nous n'avons relié qu'indirectement aux données effectives d'état initial, les déplacements ξ', η', ζ' de la deuxième onde partielle, puisque nous avons fait dépendre en partie ξ', η', ζ' des valeurs initiales des déplacements et des vitesses dans la première onde partielle, ou à mouvements longitudinaux, que nous avions calculée préalable-

ment. Mais on pourrait aussi former ξ', η', ζ' indépendamment de ξ_1, η_1, ζ_1, en considérant les rotations moyennes (11).

Comme ξ_1, η_1, ζ_1, dérivées partielles de Φ en x, y, z, s'éliminent de celles-ci ω_x, ω_y, ω_z, l'on a

$$(36) \qquad \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta'}{dy} - \frac{d\eta'}{dz}\right), \qquad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi'}{dz} - \frac{d\zeta'}{dx}\right), \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{d\eta'}{dx} - \frac{d\xi'}{dy}\right);$$

et, les dérivées de ξ', η', ζ' satisfaisant à la même équation, (27) par exemple, que ξ', η', ζ', il en résulte

$$(37) \qquad \frac{d^2(\omega_x, \omega_y, \omega_z)}{dt^2} = a^2 \Delta_2(\omega_x, \omega_y, \omega_z).$$

Ainsi les composantes effectives ω_x, ω_y, ω_z de la rotation moyenne vérifient l'équation du son, avec a pour vitesse de propagation. Or les données initiales concernant ces composantes,

$$(38) \qquad \left\{\begin{aligned} &(\text{pour } t = 0) \qquad \omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{d\zeta_0}{dy} - \frac{d\eta_0}{dz}\right), \\ &\frac{d\omega_x}{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 - \frac{d}{dz}\left(\frac{d\eta}{dt}\right)_0\right], \qquad \ldots, \end{aligned}\right.$$

se déduisent immédiatement des déplacements initiaux donnés et des vitesses initiales également connues. Donc l'intégration de (37), sous les conditions (38), donnera ω_x, ω_y, ω_z à toute époque t. Finalement, ξ', η', ζ', que l'on sait être nuls pour t infinis, s'obtiendront *par deux intégrations en t, effectuées sur place,* d'équations comme celle-ci

$$(39) \qquad \frac{d^2\xi'}{dt^2} = 2a^2\left(\frac{d\omega_y}{dz} - \frac{d\omega_z}{dy}\right),$$

revenant identiquement à (27) quand on y substitue à ω_y et à ω_z leurs valeurs (36), avec remplacement final de $\frac{d\eta'}{dy} + \frac{d\zeta'}{dz}$ par $-\frac{d\xi'}{dx}$. L'on aurait donc, par exemple,

$$(40) \qquad \left\{\begin{aligned} \xi' &= 2\int_\infty^t a\,dt \int_\infty^t \left(\frac{d\omega_y}{dz} - \frac{d\omega_z}{dy}\right) a\,dt \\ &= 2\left(\frac{d}{dz}\int_\infty^t a\,dt \int_\infty^t \omega_y a\,dt - \frac{d}{dy}\int_\infty^t a\,dt \int_\infty^t \omega_z a\,dt\right). \end{aligned}\right.$$

Mais on voit que la méthode consistant à déterminer d'abord θ, puis ξ_1, η_1, ζ_1, pour en déduire finalement ξ', η', ζ', est plus simple, en même temps que plus naturelle.

§ V. — Caractères et équations de l'onde totale.

24. Superposant enfin les deux systèmes de déplacements, ξ_1, η_1, ζ_1 et ξ', η', ζ', dont les premiers, effectués sans rotation moyenne, produisent partout la dilatation cubique effective et dont les seconds, produits sans changement de densité, donnent également, partout, la véritable rotation moyenne, nous aurons l'*onde totale*, comprise à chaque instant entre deux sphères décrites, autour de l'origine, avec le plus grand et le plus petit des quatre rayons $R = At \pm \varepsilon$, $R = at \pm \varepsilon$. *En avant de cette onde totale*, les valeurs de ξ_1, η_1, ζ_1 et celles de ξ', η', ζ', égales et contraires, se détruisent; de sorte que l'*état naturel y existe non moins qu'à l'arrière*, où il se trouve produit dans chaque onde partielle dès qu'elle est détachée de l'origine des coordonnées, c'est-à-dire dès que At ou at excède ε.

Alors les deux couches, chacune d'épaisseur 2ε, contiguës aux deux faces de l'onde totale et ayant pour rayons moyens respectifs At et at, propagent, la première, les dilatations cubiques θ de la masse, la seconde, ses rotations moyennes, à composantes $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Le déplacement total, aux grandes distances R de l'origine, est *longitudinal* dans la première, où la formule (26) l'exprime à très peu près, *transversal* dans la seconde, où ses composantes ont des formules comme (33).

Dans l'intervalle des deux couches, les déplacements ξ, η, ζ, incomparablement plus faibles, et qui n'amènent ni changement de la densité ni rotation moyenne, sont ceux qui précéderaient ou, en quelque sorte, annonceraient la tête de l'onde la plus lente, si on la considérait seule : ils ont pour valeurs $\mp \frac{d\Phi_0}{d(x, y, z)} \mp \frac{d\Pi_0}{d(x, y, z)} t$, avec les signes supérieurs $-$ quand l'onde la plus lente est celle à mouvements transversaux, et les signes inférieurs $+$ quand c'est l'onde à mouvements longitudinaux. Évidemment nuls lorsque l'onde à mouvements transversaux se trouve seule produite (puisque alors θ, Φ, Φ_0, Π_0 s'évanouissent), ils sont nuls aussi quand les conditions d'état initial font, au contraire, disparaître cette onde, ou annihilent les rotations moyennes; car, alors, les six quantités $\xi, \eta, \zeta, \frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ étant les dérivées respectives en x, y, z de deux fonctions Φ et Π, leurs valeurs initiales $\frac{d\Phi_0}{d(x, y, z)}$, $\frac{d\Pi_0}{d(x, y, z)}$ sont nulles partout en avant de l'onde, comme expression de déplacements et de vitesses ne différant de zéro que dans la région d'ébranlement.

25. Ostrogradsky a donné pour l'onde totale des formules simples, dans le cas où aucune *impulsion* n'accompagne les déplacements *initiaux* ξ_0, η_0, ζ_0, c'est-à-dire quand il n'y a pas de vitesses initiales ou que, pour ξ, par exemple, nos fonctions $F(x, y, z)$ et $\Xi_0(x, y, z)$ sont nulles.

L'expression (3) de θ, en y posant $At = r$, est alors

$$\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\int_\sigma \frac{f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma}{r};$$

et, d'autre part, l'équation (17) devient de même

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} = \theta = \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\int_\sigma \frac{f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma}{r}.$$

Multiplions par r et intégrons de manière que la dérivée $\frac{d\Phi}{dr}$ s'annule, comme on sait, pour At ou r infinis. Il viendra

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{4\pi}\int_\sigma \frac{f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma}{r} = \frac{1}{4\pi r}\int_\sigma f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma;$$

et, après multiplication par dr, une nouvelle intégration en r, effectuée encore de manière que $\Phi = 0$ pour t infini, donnera finalement

$$\Phi = \frac{-1}{4\pi}\int_{At}^{\infty}\frac{dr}{r}\int_\sigma f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma. \tag{41}$$

La fonction Φ' s'en déduit par la simple substitution de a à A; et l'on a ensuite

$$(42) \qquad \Phi - \Phi' = \frac{1}{4\pi} \int_{at}^{\mathrm{A}t} \frac{dr}{r} \int_{\sigma} f(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma.$$

Comme, d'ailleurs, l'expression totale de ξ s'obtient en ajoutant $\frac{d\Phi}{dx}$ au second membre de (32), il viendra, vu $\Xi_0 = 0$, si l'on multiplie par 4π,

$$(43) \quad 4\pi\xi = \frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} \int_{\sigma'} \frac{\xi_0(x', y', z')\, d\sigma'}{t} + \frac{d}{dx} \int_{at}^{\mathrm{A}t} \frac{dr}{r} \int_{\sigma} f(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma;$$

x', y', z' y désignent les coordonnées des divers éléments $d\sigma'$ d'une sphère décrite, autour du centre (x, y, z), avec un rayon r' égal à at; et x_1, y_1, z_1 y sont, comme on sait, les coordonnées des divers points de la sphère σ, de rayon r, décrite de même autour de (x, y, z).

Telle est, sous sa forme la plus concise possible, la première formule d'Ostrogradsky [1], à laquelle sont analogues celles de η et ζ.

26. Dans le cas contraire où il y aurait eu initialement *impulsion*, c'est-à-dire production de *vitesses*, mais sans déplacements ξ_0, η_0, ζ_0, on se donnerait provisoirement comme fonctions inconnues les vitesses mêmes $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$, dont les dérivées premières en t (*accélérations*) seraient *initialement* nulles, en vertu des équations (1) du mouvement où $\Delta_2(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ s'annuleraient avec les dérivées en x, y, z de θ_0. Et comme ces vitesses $\frac{d(\xi, \eta, \zeta)}{dt}$ vérifient en outre les équations indéfinies, pareilles à (1), que déduit de (1) une dérivation en t, elles s'exprimeraient, exactement, à la manière des ξ, η, ζ du cas précédent, sauf les substitutions de Ξ_0 et de F à ξ_0 et f. La formule (43), par exemple, donnerait donc

$$(44) \quad 4\pi \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{a^2} \frac{d}{dt} \int_{\sigma'} \frac{\Xi_0(x', y', z')\, d\sigma'}{t} + \frac{d}{dx} \int_{at}^{\mathrm{A}t} \frac{dr}{r} \int_{\sigma} \mathrm{F}(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma);$$

[1] Reproduite par Poisson, dans son Mémoire inséré au Tome X du *Recueil de l'Académie des Sciences de Paris*, p. 594.

et, après multiplication par dt, une intégration *sur place*, effectuée à partir de l'époque $t = 0$ où ξ est nul, en déduirait $4\pi\xi$.

Enfin, l'intégrale générale s'obtiendrait évidemment en superposant cette solution partielle à la précédente (43); et c'est ce que fait Ostrogradsky [1].

§ VI. — Loi d'appel vers les vides, analogue à celle de l'attraction newtonienne.

27. Supposons illimitée la région d'ébranlement, mais donnons-nous des déplacements initiaux ξ_0, η_0, ζ_0 tels, que la dilatation cubique $f(x, y, z)$ en résultant soit nulle partout, sauf, encore, à l'intérieur de la sphère de rayon ε, que nous appellerons la *région centrale d'ébranlement*, où elle sera arbitraire; et, afin d'attribuer à ces déplacements ξ_0, η_0, ζ_0, dans tout l'espace, les valeurs les plus simples possibles pour la dilatation $\theta_0 = f(x, y, z)$ produite, prenons-les sans rotations moyennes, ou égaux aux dérivées partielles en x, y, z d'une même fonction Φ_0. Enfin, admettons qu'ils s'annulent à l'infini, et, de plus, qu'aucune impulsion, aucune vitesse initiale, ne les accompagne.

Dans ces conditions, l'on aura $F(x, y, z) = 0$; et l'expression (3) de θ, réduite à

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi A^2}\frac{d}{dt}\int_\sigma \frac{f(x_1, y_1, z_1)\,d\sigma}{t}, \tag{45}$$

deviendra, d'après (5), aux grandes distances R de l'origine,

$$\left(\text{pour } \frac{R}{\varepsilon} \text{ très grand}\right) \qquad \theta(x, y, z, t) = \frac{\psi'(\delta)}{4\pi R}, \qquad \text{où} \qquad \delta = At - R. \tag{46}$$

De plus, la relation (10) continuant à s'appliquer, avec la circonstance d'une dérivée initiale $F(x, y, z)$ de θ en t partout nulle, l'on

---

(1) Les cinq paragraphes précédents ont été résumés dans trois Notes des 26 février, 5 et 12 mars 1906 (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXLII, p. 480, 542 et 609).

aura

$$(47) \qquad \int_{\varpi} \theta \, d\varpi = \text{à toute époque une constante Q.}$$

Donc ce qu'on peut appeler la *raréfaction totale* ou le *vide total* opérés dans le milieu, somme des *vides partiels* $\theta \, d\varpi$, ou des *manques partiels* de matière, offerts, à l'époque t, par les divers éléments $d\varpi$ de volume du milieu comparativement à l'état naturel, sera une quantité finie Q indépendante de t, ou égale à la raréfaction initiale arbitraire $\int_{\varpi} \theta_0 \, d\varpi$, et différera généralement de zéro, contrairement à ce qui arrivait dans le cas où ξ_0, η_0, ζ_0 étaient nuls hors de notre région *centrale* d'ébranlement.

28. Malgré cette circonstance, les démonstrations des nos 12, 13 subsistent sans changement; et les formules (12), (14), (17) donnent, vu l'état initial,

$$(48) \qquad (\xi, \eta, \zeta) = \frac{d\Phi}{d(x, y, z)},$$

avec

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\varpi} \frac{\theta(x_1, y_1, z_1, t) \, d\varpi}{r} \qquad \text{et} \qquad \frac{d^2\Phi}{dt^2} = \mathrm{A}^2 \theta(x, y, z, t).$$

Enfin, le raisonnement du no 14, pour établir que Φ tend vers zéro pour t infini, continue à s'appliquer; car le terme $-\frac{1}{4\pi \mathrm{A} t} \int_{\varpi} \theta \, d\varpi$, sans être nul identiquement comme il l'était, s'évanouit à raison du dénominateur croissant t. Donc, Φ et ses dérivées en x, y, z s'annulant dès que $\mathrm{A}t$ excède $\mathrm{R} + \varepsilon$, c'est-à-dire dès que l'*onde des dilatations cubiques* θ a franchi le point (x, y, z), l'état naturel se trouve, dès lors, rétabli définitivement en ce point. Et le déplacement *total* que la matière y a éprouvé depuis $t = 0$ consiste dans le *retour* à l'état naturel, ou a pour composantes $-\xi_0$, $-\eta_0$, $-\zeta_0$, c'est-à-dire $-\frac{d\Phi_0}{d(x, y, z)}$ ou $\frac{d}{d(x, y, z)} \int_{\varpi} \frac{\theta_0 \, d\varpi}{4\pi r}$.

Or ces trois dérivées d'un *potentiel de pesanteur* représentent les trois composantes de l'attraction newtonienne qu'exercerait en (x, y, z), sur l'unité de masse, une matière occupant la *région centrale d'ébranlement* et y ayant une densité partout proportionnelle à la raréfaction effective θ_0 qui s'y trouvait produite à l'époque $t = 0$. Donc, quand les déplacements d'un milieu élastique, isotrope et homogène se font sans rotations moyennes, les vides partiels qu'on y produit quelque part semblent exercer, dans toutes les régions environnantes et jusqu'à l'infini, une sorte d'*appel* régi par les lois de l'attraction newtonienne, chaque vide élémentaire donnant lieu à des déplacements partiels dirigés vers son siège et inverses (une fois réalisés) du carré de la distance, qui se composent avec tous les déplacements partiels analogues par la règle du *polygone des forces*. D'ailleurs, ces appels se manifestent, non pas instantanément à toute distance, mais avec la vitesse de propagation A de l'onde des dilatations cubiques.

Chacun d'eux n'est ainsi inverse du carré de la distance que dans son effet *définitif* une fois atteint. Car, si l'on considère les déplacements *successifs* approchés (26) aux grandes distances R de l'origine, déplacements que l'on peut regarder (vu la petitesse de ξ_0, η_0, ζ_0 comparables seulement à l'inverse de R^2) comme comptés dans (26) à partir de la situation *primitive* $(x + \xi_0, y + \eta_0, z + \zeta_0)$, leur valeur devient

$$\frac{\psi(At - R)}{4\pi R}$$

dans le cas présent où $\Psi = 0$, en les prenant positifs quand ils se trouvent dirigés vers l'origine; et l'on voit qu'ils sont de l'ordre de $\frac{1}{R}$ ou, par conséquent, incomparablement plus forts que ce qui subsiste d'eux une fois l'onde passée.

29. Dans le cas d'un fluide, où μ et a s'annulent, l'état *naturel*, s'il s'agit d'un liquide, ou celui qui en tient lieu, s'il s'agit d'un gaz, sont réalisés, dès que l'on a partout $\theta = 0$ avec vitesses nulles. Rien n'empêchera donc de choisir comme coordonnées x, y, z d'état naturel les excédents des coordonnées initiales effectives sur les trois petites dérivées $\frac{d\Phi_0}{d(x, y, z)}$, Φ_0 étant l'intégrale $-\frac{1}{4\pi}\int \frac{f(x_1, y_1, z_1)\,d\varpi}{r}$

et x, y, z, x_1, y_1, z_1 y désignant provisoirement ces coordonnées initiales effectives, à remplacer finalement par celles d'état naturel (très peu différentes) sans qu'il en résulte aucun changement appréciable de Φ_0 ou de ses dérivées. Car, alors, comme l'on aura

$$(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = \frac{d\Phi_0}{d(x, y, z)},$$

expressions donnant, d'après le théorème de Poisson sur les potentiels newtoniens,

$$\theta_0 = \frac{d\xi_0}{dx} + \frac{d\eta_0}{dy} + \frac{d\zeta_0}{dz} = \Delta_2\Phi_0 = f(x, y, z),$$

ces déplacements ξ_0, η_0, ζ_0 feront bien croître θ de sa valeur donnée $f(x, y, z)$; ce qui implique l'annulation de θ quand on retranche ξ_0, η_0, ζ_0 des coordonnées initiales, ou dans les situations (x, y, z) choisies ici comme *primitives*, c'est-à-dire logiquement antérieures aux déplacements.

Dès lors, les données d'état initial sont précisément celles, n'entraînant aucune rotation moyenne, auxquelles s'appliquent les considérations des deux numéros précédents; et les déplacements définitifs, provoqués, en chaque point du fluide, par les *vides partiels* initiaux $\theta_0\, d\varpi$, s'obtiendront en composant géométriquement des déplacements dirigés vers le siège $d\varpi$ de chaque vide partiel, proportionnels à ces vides mêmes $\theta_0\, d\varpi$ et à l'inverse du carré de la distance r à leur siège $d\varpi$, enfin, s'effectuant successivement, aux diverses distances r, avec les retards $\frac{r}{A}$ que met le son à s'y transmettre dans le fluide.

30. Si la vitesse A de propagation est très grande, comme il arrive notamment chez les liquides, l'état naturel se trouvera presque instantanément rétabli dans la région centrale d'ébranlement et autour; ce qui permettra d'imaginer, sans complications nouvelles, que des raréfactions successives, pareilles à la première, y surviennent indéfiniment à petits intervalles égaux, grâce à l'enlèvement, chaque fois, d'une même fraction du fluide occupant cette

région centrale. Alors les déplacements sans cesse reproduits en chaque point de la masse fluide donneront, à la limite, un courant dont la rapidité leur sera partout proportionnelle, dirigé, par conséquent, vers les sièges de raréfaction, avec une vitesse, en (x, y, z), calculable comme l'attraction newtonienne qu'y exerceraient des masses fictives situées dans chaque élément $d\varpi$ de la région centrale et en raison directe du *débit* de $d\varpi$, c'est-à-dire du fluide qui s'y trouve *soustrait* ou comme détruit par unité de temps.

Mais comment opérer de pareilles soustractions, finalement continues, de fluide? A cet effet, supposons, par exemple, la région centrale, symétrique de part et d'autre d'un plan, avec raréfactions θ_0 pareilles des deux côtés. Par raison de symétrie, les vitesses aux divers points de ce plan n'auront pas de composante qui lui soit normale, du moins aux endroits où ne se produira aucune discontinuité; et le fluide y glissera exactement comme sur une paroi. Donc la réalisation effective de cette paroi, sur toute l'étendue du plan autre que la partie de la région centrale où θ_0 différera de zéro ([1]), ne changera rien au mouvement du fluide coulant, par exemple, au-dessus (si l'on se représente horizontal le plan, pour fixer les idées), mais permettra de supprimer le fluide contigu situé au-dessous et d'y laisser ainsi libre l'espace inférieur.

Enfin réduisons à une couche très mince, sensiblement confondue avec le plan de la paroi prolongé, la partie de la région centrale où θ_0 diffère de zéro, partie tout entière subsistante encore quant à son attraction fictive ou plutôt à son appel sur le fluide supérieur; de manière qu'on puisse, sans erreur sensible sur les attractions ou appels que subit ce fluide, attribuer chaque élément intercepté $d\sigma$ du plan, *comme siège,* au débit total, que j'appellerai q par unité d'aire, des éléments $d\varpi$ ayant $d\sigma$ pour projection commune. Alors, d'une part, le calcul des vitesses en tous les points du fluide supérieur sera celui des attractions newtoniennes qu'y exercerait, sur

([1]) L'orifice dont il sera question ci-après peut être multiple, ou comprendre plusieurs ouvertures *distinctes,* donnant lieu à tout autant de raréfactions $\int \theta_0\, d\varpi$ et d'appels du fluide ambiant : voilà pourquoi θ_0 ne différera parfois de zéro que *dans une partie* de la région centrale et non dans sa totalité.

l'unité de masse, une couche, de *densité superficielle* q, étalée sur toute l'aire de l'*ouverture* interrompant ainsi la paroi plane; et, d'autre part, la soustraction du fluide sans cesse *appelé* vers l'ouverture, puis *enlevé* à son arrivée sur celle-ci, se fera par l'espace inférieur, où ce fluide deviendra une *veine*.

31. On aura donc ainsi traité la question de l'écoulement d'un liquide hors d'un vase, par un *petit* orifice ouvert au milieu d'une paroi plane, *relativement* indéfinie, de ce vase, dans l'hypothèse que le débit q, par unité d'aire, de chaque élément $d\sigma$ de l'orifice soit connu en fonction des deux coordonnées de l'élément ([1]). C'est, en quelque sorte, la partie *accessible* du problème d'un pareil écoulement, jusqu'à présent inabordable dans sa généralité, c'est-à-dire quand on y comprend la détermination de la forme des filets constituant la *veine*.

Le *problème partiel*, résolu de la sorte comme application particulière limite de la loi d'appel des masses fluides ou même solides isotropes vers leurs régions raréfiées, peut être aussi traité directement et très simplement, comme je l'ai fait, le 3 janvier 1870, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (t. LXX, p. 33). A la condition d'emprunter à l'expérience une donnée, savoir, la pression exercée au centre de l'orifice (d'où le principe de D. Bernoulli fait déduire le rapport k de la vitesse au centre de l'orifice à la vitesse sur le contour), cette solution partielle permet, pour un orifice, soit circulaire, soit rectangulaire allongé, de déterminer avec assez de précision le débit et les principales circonstances de l'écoulement ([2]).

([1]) L'orifice peut être justement qualifié de *petit*, quand ses dimensions sont des fractions très faibles des dimensions de la paroi tout autour; et celle-ci est dite alors, elle-même, *relativement indéfinie*.

([2]) *Voir* encore les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXIV, p. 704, 807 et 868 (28 mars, 4 et 11 avril 1892), ou le numéro de juillet 1892 du *Journal de Physique théorique et appliquée*, qui a reproduit ces trois articles.

Une des formules employées pour obtenir les résultats rappelés ici, savoir, celle d'où se déduit en particulier le coefficient théorique $\frac{1}{2}$ de l'ajutage rentrant de Borda, suppose, il est vrai, la veine, soit dépourvue de pesanteur depuis l'orifice jusqu'à la section contractée et lancée dans un gaz stationnaire à pression constante, soit sollicitée de haut en

32. Le *problème complet* n'a été résolu analytiquement (par Helmholtz et Kirchhoff) que dans le cas d'un liquide sans pesanteur et de mouvements *plans* ou à deux coordonnées x et y seulement, pour lequel les propriétés générales des fonctions de la variable imaginaire $x + y\sqrt{-1}$ donnent des facilités exceptionnelles, grâce à ce que leurs deux parties réelle et imaginaire sont toujours deux fonctions *harmoniques* associées de x et y, représentant, l'une, le potentiel des vitesses d'une certaine veine liquide, l'autre, le

---

bas par son poids, mais, alors, lancée dans un milieu liquide stagnant, de même densité qu'elle, et où, par conséquent, la pression varierait avec l'altitude suivant la loi hydrostatique. Toutefois, lors des grandes hauteurs de charge considérées ici, *les seules pour lesquelles il existe une forme constante de la veine jusqu'à la section contractée et, par suite, un coefficient de contraction ou de débit indépendant de ces hauteurs,* les rapides chutes relatives de pression observées dans le liquide, au voisinage de l'orifice, suivant les divers chemins allant de l'intérieur du réservoir à la surface de la veine ou à la section contractée, ne peuvent varier qu'infiniment peu avec le poids propre du fluide traversé ou, encore, avec les inégalités, toujours très faibles comparativement, de la pression aux divers points de ces surfaces; d'où il suit que la forme *limite* vers laquelle tend la veine, jusqu'à la section contractée, pour des hauteurs de charge croissantes, est indépendante de la nature gazeuse ou liquide du milieu ambiant et que, par le fait même, le coefficient de contraction ou de débit n'en dépend pas davantage.

Mais, dans le cas d'un milieu ambiant gazeux, c'est-à-dire à pression sensiblement constante, le poids de la veine *loin de l'orifice,* ou considérée sur une longueur notable au delà de la section contractée, a, au contraire, une grande influence sur la forme de cette partie, où la pression est, à très peu près, uniforme et, par suite, identique à celle du gaz voisin. L'on conçoit que ce poids, en entraînant les particules fluides, fasse terminer presque brusquement, assez près de l'orifice, la rapide convergence des filets qui donne lieu à la section contractée et à l'égalisation des pressions dans cette section. Au contraire, une veine sans pesanteur continuerait *probablement* à se contracter plus loin de l'orifice, ou semblerait ne devoir arriver qu'asymptotiquement (à l'infini) au parallélisme des filets fluides, comme le suppose, dans le cas de mouvements plans, la solution analytique de Helmholtz rappelée au numéro suivant (nº 32). Celle-ci n'est, sans doute, pour cette raison, applicable tout au plus qu'*en première approximation* à une veine *pesante.* Bref, elle ne constitue qu'une intégrale particulière, probablement la plus simple qui existe, des équations indéfinies de l'écoulement et de la condition spéciale à la paroi plane du réservoir, avec constance de la vitesse à la surface libre de la veine.

Est-il même certain qu'une veine sans pesanteur, dans un milieu à pression constante, doive accomplir sa contraction seulement à l'infini, et que la détermination complète du problème de son écoulement ne dépende pas de circonstances extérieures non encore soupçonnées? En d'autres termes, une telle veine ne comporterait-elle pas *aussi* des écoulements où le parallélisme des filets serait atteint à distance finie, par suite d'influences exercées plus ou moins loin en aval? Il semble difficile de répondre actuellement à cette question.

paramètre caractéristique des lignes de courant correspondantes.

Toutefois, même dans ce cas, qui est celui d'un long orifice rectangulaire sans contraction latérale suivant sa grande dimension, la solution partielle n'est pas tout à fait inutile : elle permet peut-être de serrer d'un peu plus près, à certains égards, la réalité; car elle ne suppose pas la veine sans pesanteur, ni, par suite, la section dite *contractée* rejetée à l'infini ou, au sortir de l'orifice, une tendance *seulement asymptotique* des filets fluides au parallélisme, comme le fait la théorie de Helmholtz assurément plus complète, mais donnée uniquement dans cette hypothèse d'une convergence *indéfinie* des filets fluides. Or, une telle convergence conviendrait, *tout au plus* ([1]), au cas simple d'un liquide *sans pesanteur*, avec veine lancée *dans le vide*, ou au cas équivalent d'un liquide *pesant*, avec veine coulant au milieu d'un liquide *en repos de même densité* qu'elle.

La théorie de Helmholtz donne, d'une part, pour le coefficient de débit,

$$\frac{\pi}{2+\pi} = 0,6110,$$

au lieu de la valeur 0,6266 obtenue par M. Bazin dans des expériences très soignées sur un orifice vertical, sans contraction latérale, de $0^m,20$ de hauteur ([2]). Et, d'autre part, au lieu de 0,69 pour le rapport observé k de la vitesse au centre de l'orifice à la vitesse sur le bord, rapport qu'une extraction de racine carrée déduit d'ailleurs, en vertu du principe de D. Bernoulli, du décroissement relatif de pression $1 - 0,53 = 0,47$ également observé par M. Bazin en ce centre, la même théorie donne

$$k = 0,6479,$$

racine de l'équation transcendante

$$k \log \text{nép.} \frac{1+k}{1-k} = 1,$$

([1]) Comme il est dit à la fin de la note précédente.

([2]) *Expériences sur la contraction des veines liquides et sur la distribution des vitesses dans leur intérieur*, au tome XXXII, n° 4, du *Recueil des Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France*. Le Rapport approbatif est du 4 juin 1894 (*Comptes rendus*, t. CXVIII, p. 1239). Les résultats relatifs aux orifices verticaux m'en étaient connus depuis 1892.

résultant de calculs indiqués par M. Sautreaux, docteur ès sciences mathématiques, aux pages 64 et 65 de sa thèse *Sur une question d'Hydrodynamique* (Paris, Gauthier-Villars, 1893). On voit donc que ces deux résultats théoriques, 0,6110, 0,6479, paraissent bien ne se réaliser qu'avec des écarts de deux et demi et six et demi environ pour cent par excès [1]. Au contraire, la théorie partielle m'a donné le coefficient de débit $m = 0,62$ environ, notablement plus approché, comme on voit, de 0,6266, mais en y admettant, il est vrai, la valeur expérimentale $k = 0,69$. L'expression approchée correspondante du débit q par unité d'aire de l'orifice serait, à la distance relative x de l'axe horizontal (mesurée en fraction de la demi-hauteur),

$$q = (0,690 + 7,9272\,x^8)(1 - x^2)\,V_0,$$

V_0 désignant la vitesse $\sqrt{2gh}$ sur le contour, donnée par la formule de D. Bernoulli [2].

---

(1) Sans doute le poids de la veine, négligé par la théorie, active l'enlèvement du fluide extérieur et réduit quelque peu la pression de ce fluide à la sortie; d'où résulte un certain accroissement des vitesses dans le plan de l'orifice.

(2) Dans le cas d'un orifice circulaire (vertical comme l'orifice rectangulaire dont il est question ci-dessus, et aussi de $0^m,20$ de hauteur), l'admission de la valeur expérimentale $k = 0,632$, observée à très peu près par M. Bazin, au centre de l'orifice, et correspondant sensiblement à la dépression relative, également observée,

$$1 - 0,602 = 0,398,$$

m'a donné de même, pour le débit q par unité d'aire de l'orifice, à la distance ι du centre (mesurée en fraction du rayon),

$$q = (0,632 + 12,2329\,\iota^{10})(1 - \iota^2)\,V_0;$$

d'où se déduit le coefficient de débit $m = 0,607$, non moins voisin que dans le cas précédent de la valeur constatée par M. Bazin, $m = 0,598$.

Dans ces diverses expériences sur des orifices soit circulaires, soit rectangulaires allongés, la hauteur de charge sur le centre ou sur l'axe horizontal de l'ouverture atteignait 1^m, c'est-à-dire dix fois la demi-hauteur de celle-ci; et elle était bien suffisante pour pouvoir être considérée comme très grande.

Postérieurement à la rédaction de mes articles de 1892, M. Bazin a complété ses observations premières par quelques autres (consignées aussi dans son Mémoire) sur des orifices circulaires *horizontaux*, de $0^m,20$ et $0^m,10$ de diamètre; les valeurs ci-dessus de k et de m s'y trouvent accrues de quelques millièmes, sans doute par suite d'un enlèvement encore plus rapide de la veine, alors *descendante*.